

## AIDER A RESOUDRE DES PROBLEMES POURQUOI ? COMMENT ? QUAND ?

CONFERENCE

Jean JULO

IREM / IMR - Université de Rennes 1

*L'exposé de Chamonix se proposait de présenter un cadre global pour caractériser les démarches d'aide à la résolution de problèmes qui, actuellement, se développent assez largement dans l'enseignement des mathématiques. Mais je souhaitais que ce cadre reste en prise directe avec le travail empirique que je mène sur ce sujet depuis plusieurs années et pour cela j'avais choisi de parler concrètement de la manière d'aider les élèves à résoudre les problèmes dits de « partage inégal » (ou « inéquitable ») au niveau des classes de 6ème et de 5ème. Une mauvaise gestion du temps de parole m'ayant conduit à très peu aborder ce point, je tente de me racheter ici en insistant plus sur les aspects empiriques de cette question de l'aide à la résolution de problèmes. Ainsi, on trouvera en annexe une synthèse des principales expérimentations menées sur ces problèmes de partage avec la présentation de quelques aides auxquelles je me réfère d'ailleurs dans le texte.*

### Pourquoi aider à résoudre des problèmes ?

Nous aborderons cette question, plus épineuse qu'il n'y paraît à première vue, à trois niveaux : celui de la finalité (pourquoi aider au bout du compte ?), celui des faits à prendre en compte (que savons-nous ?) et celui des objectifs particuliers que nous retenons dans notre recherche d'aides performantes.

#### Une finalité

Repartons du postulat qui fonde aujourd'hui la plupart des travaux sur l'apprentissage/enseignement des mathématiques : c'est dans l'activité de résolution de problèmes que se trouve la *source* de la connaissance. Il existe un large consensus sur cette idée de « source » entendue comme condition nécessaire mais non suffisante de l'appropriation des connaissances (« tout concept découle de la résolution d'un problème » disait joliment Vygostky).

Posons-nous ensuite la question des progrès réalisés en matière d'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes. Deux constats nous paraissent s'imposer :

⇒ d'abord celui d'un enseignement qui a profondément évolué en 25 ans à la suite d'un investissement important à la fois des enseignants (dans le cadre des IREM en particulier), des équipes de recherche en didactique et même de l'institution en accordant une place croissante à la résolution de problèmes dans les programmes de l'école élémentaire et du collège ; des notions comme celles d'*activité mathématique*, de *situation-problème* ou encore

de *situation didactique* ont largement imprégné les pratiques et contribué à l'émergence d'un enseignement des mathématiques plus vivant, moins formel et moins élitiste qu'il ne l'était encore au début des années 70 ;

⇒ mais aussi un autre constat, amer celui là : tout laisse penser que nous n'avons d'aucune manière réduit les inégalités dans l'accès aux connaissances mathématiques (même de base) ; il est probable que l'« activisme » effréné des 25 années passées a globalement profité aux élèves, que chacun a un peu plus de chances aujourd'hui de comprendre quelque chose aux mathématiques (le niveau « monte ») ; pourtant personne n'ose soutenir que les écarts de compréhension auraient au moins commencé à se réduire ; les plus pessimistes allant même jusqu'à penser qu'ils se sont creusés, c'est-à-dire que ce sont les plus « mal à l'aise » dans le système qui auraient le moins profité de cette évolution pourtant notable de l'enseignement.

Comment expliquer ce fait ? Deux hypothèses principales méritent d'être examinées :

⇒ ce ne serait pas directement les activités ou les situations-problèmes qui seraient en cause mais plutôt la « suite », c'est-à-dire le processus par lequel on permet à des connaissances de se mettre en place à partir d'une activité de résolution de problèmes ; il faut bien reconnaître qu'on ne dispose toujours d'aucune théorie de l'apprentissage par la résolution de problèmes et qu'on n'en voit même aucune pointer à l'horizon ; on a bien quelques modèles cognitifs et didactiques qui nous éclairent localement et partiellement sur tel ou tel aspect des processus en jeu mais aucune théorie n'est en mesure d'expliquer comment de la compréhension et des connaissances peuvent émerger de l'activité de résolution de problèmes ; il est possible alors que ce soit cette ignorance qui permette à des difficultés d'apprentissage ponctuelles de se transformer en situations d'échec durables ;

⇒ l'autre hypothèse part de l'idée que c'est la « source » elle-même qui serait en cause ; nous faisons comme si la question de la résolution de problèmes était réglée, comme si nous avions acquis la maîtrise des situations permettant d'induire une telle activité chez la plupart des élèves ; or cela est sans doute loin d'être le cas et il se pourrait que ce soit « tout simplement » une carence en matière de *véritable occasion de résoudre des problèmes* qui soit à l'origine de certaines difficultés persistantes.

C'est cette seconde hypothèse que nous sommes enclins à privilégier. D'abord parce qu'elle est un peu moins décourageante que la première, mais surtout parce qu'elle correspond à notre intuition profonde après de nombreuses années consacrées à l'ingénierie de situations-problèmes de toutes sortes.

Pour préciser un peu cette finalité en terme de fonctionnement optimal des situations de résolution de problèmes en mathématiques, nous avons été conduit ces dernières années à redéfinir les critères d'un tel fonctionnement. C'est-à-dire à reposer la question : qu'est-ce donc au juste une situation de résolution de problème « qui marche » ?

Après avoir tenté, à la suite des travaux de Régine Douady, de rechercher des critères concernant la forme des situations (Julo & Houdebine, 1992), nous nous référons plutôt aujourd'hui à l'activité de celui à qui on propose un problème à résoudre. Et nous nous contentons de trois critères, simples à énoncer mais beaucoup plus exigeants que ceux utilisés auparavant. :

- 1- la situation induit chez l'élève une activité de type « résolution de problème »,
- 2- l'objet de cette activité a « un intérêt » du point de vue mathématique,
- 3- l'élève réussit à élaborer une procédure de résolution (« résout le problème »)

Ce n'est pas l'objet du présent exposé d'argumenter la pertinence de chacun de ces critères. Nous ferons seulement trois remarques directement en rapport avec la question de l'aide qui nous occupe :

- c'est ce qui passe au niveau de *chaque élève* et de la nature de son activité qui est important (et non la dynamique du groupe classe qui est vraisemblablement loin d'être suffisante à ce niveau de la « source » auquel nous nous situons ici) ;
- caractériser précisément l'*activité de résolution de problème* n'est pas une tâche insurmontable aujourd'hui (d'autant que cette caractérisation peut souvent être remplacée par un simple constat empirique si la technique d'observation est suffisamment rigoureuse) ;
- le troisième critère est, bien évidemment, le plus exigeant mais aussi le plus important ; il est de plus en plus vraisemblable, en effet, que le simple fait de « chercher » à résoudre un problème n'est pas suffisant (comme on feint de le croire dans l'enseignement par activités) ; ce qui est fondamental est de *réussir* à résoudre le problème c'est-à-dire d'aller au bout de ce processus d'*élaboration d'une procédure nouvelle (non connue)* qui est à la source de la compréhension et de l'apprentissage mais aussi, nous le savons tous, du véritable plaisir de la recherche.

Ces trois critères, et tout particulièrement le troisième, permettent d'esquisser une première réponse, la plus générale, à la question du pourquoi : aider pour permettre *la résolution du problème dans le cadre d'une authentique activité d'élaboration de procédure* (ayant de plus un intérêt mathématique, cela va de soi, même si ce critère est loin d'être le plus évident à caractériser...).

## Deux faits

Il nous paraît important de rappeler deux faits désormais bien établis à propos de l'activité de résolution de problème et qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on cherche à préciser les raisons d'une démarche d'aide.

### ➔ La sensibilité très grande aux effets de contexte

Depuis les premiers travaux expérimentaux sur la résolution de problèmes, on sait qu'une modification même minime de la situation peut avoir une incidence sur l'activité de résolution. La première démarche d'aide à la résolution de problème que nous connaissions (Maier, 1931) se situe d'ailleurs dans une telle étude systématique de toutes les variables de situation qui pourraient avoir un effet sur la découverte de la solution. On peut citer aussi les travaux sur la verbalisation (Gagné & Smith, 1962) qui montraient que le simple fait de demander aux sujets d'exprimer oralement leurs raisonnements augmente la probabilité de réussir le problème de la Tour de Hanoï. Mais c'est avec les travaux sur les énoncés de problèmes, à partir des années 70, que l'on va découvrir le rôle d'une multitude de facteurs dont on était loin de soupçonner qu'ils puissent modifier significativement la « compréhension » du problème (par exemple la place de la question ou encore l'implication personnelle dans l'énoncé : « Tu as 5 billes,... »).

Il est intéressant de noter, toutefois, que parmi tous ces travaux expérimentaux (que l'on peut chiffrer à plusieurs centaines), très peu débouchent sur des ingénieries d'aide. C'est d'abord qu'il s'agit souvent de recherches menées en psychologie mais c'est aussi qu'il s'avère difficile de maîtriser ces effets de contexte (on peut les retrouver nettement dans des conditions expérimentales avec un traitement statistique des performances mais beaucoup plus faiblement au niveau individuel et en situation d'aide - il peut même arriver que l'effet soit inversé dans ce cas...).

A partir des travaux de Newell & Simon (1972) et grâce à la notion de *représentation du problème* qui s'impose peu à peu, on comprendra mieux la nature de ces effets de contexte. Même l'expert le plus averti n'est pas un esprit parfaitement rationnel qui accéderait directement à la structure du problème et se contenterait d'enchaîner « logiquement » les différentes étapes de la résolution pour parvenir à la solution. Tous les raisonnements humains portent sur des éléments issus de processus qui sélectionnent, interprètent, structurent les informations disponibles dans la situation. C'est le résultat de cette activité mentale particulière que l'on convient d'appeler la *représentation du problème* et c'est à ce niveau, bien sûr, que la plupart des effets de contexte trouvent leur origine.

### → La sensibilité très faible aux apprentissages méthodologiques

On peut considérer que c'est en mathématiques et avec les travaux de Polya (1945) que débutent véritablement les tentatives d'entraînement systématique à la résolution de problèmes. L'idée est de mettre en place une compétence générale à partir d'un apprentissage de méthodes supposées pertinentes pour la résolution d'un ensemble très large de problèmes. L'idée est séduisante car conforme à l'idéal pédagogique de la formation d'une « tête bien faite » évidemment préférable à une « tête bien pleine ».

De nombreux programmes vont être expérimentés, en particulier dans les universités américaines, mais les résultats sont décevants. On constate un certain nombre d'effets dont certains sont appréciables (changement d'attitude à l'égard des mathématiques par exemple) mais pas de répercussion visible et durable au niveau des performances en matière de résolution de problèmes. A partir des années 80, une nouvelle orientation est prise avec l'idée de viser des compétences et des méthodes plus spécifiques ; on s'intéresse désormais soit à des classes de problèmes bien définies (par exemple : Willis & Fuson, 1988) soit à des aspects particuliers des démarches de résolution (par exemple : Pluvinage, 1992). Mais on se retrouve alors face à un paradoxe qu'ont souligné plusieurs auteurs : les effets de ces apprentissages qui se veulent toujours de nature méthodologique sont d'autant plus visibles qu'ils sont plus ciblés et qu'ils se rapprochent des apprentissages stéréotypés de règles d'action (« skills »), ce que l'on voulait justement éviter au départ...

Sans développer plus l'analyse de cette orientation, nous retiendrons le fait que l'activité de résolution de problèmes n'est pas directement sous le contrôle de « méthodes » que l'on pourrait inculquer au moyen d'entraînements adéquats. Une hypothèse qui semble aujourd'hui compatible avec ce constat est que l'expérience acquise en matière de résolution de problèmes est essentiellement stockée sous la forme de connaissances particulières directement liées aux apprentissages conceptuels réalisés et aux situations rencontrées. La notion de *schéma de problèmes*, en particulier, permet assez bien de rendre compte de la

manière dont les problèmes rencontrés antérieurement interviennent dans la mise en place de la représentation d'un nouveau problème.

### Cinq objectifs

A l'intérieur du cadre que nous venons d'esquisser et en nous appuyant sur les concepts de *représentation du problème* et de *schéma de problèmes*, cinq objectifs distincts peuvent être retenus pour piloter la conception et la mise en œuvre d'aides à la résolution de problèmes en mathématiques. Le premier est le plus important et génère assez directement les trois suivants. Le cinquième objectif est le plus problématique à nos yeux et est au centre des travaux que nous menons actuellement.

1 ↪ Permettre la construction d'une représentation fonctionnelle du problème

Intervenir spécifiquement au niveau de la représentation du problème est le moyen le plus sûr d'apporter une aide véritable en minimisant le risque de « tuer » le problème (c'est-à-dire en préservant le processus essentiel d'élaboration de procédure). L'objectif premier est donc d'aider l'élève à mieux se représenter la situation et la tâche particulières qui caractérisent le problème sans lui apporter la moindre indication sur la manière de le résoudre. Nous parlons ici de représentation *fonctionnelle* pour préciser que cette représentation devra permettre non seulement d'élaborer une procédure mais une procédure *de résolution* du problème (pas nécessairement la procédure optimale ou la procédure mathématique espérée mais une *procédure de réussite*).

2 ↪ Permettre la mobilisation et l'instanciation de connaissances « inertes »

Dès nos premiers travaux concernant les élèves en difficulté en mathématiques (Houdebine & Julo, 1988), nous avons été convaincus que ces élèves disposent de nombreuses connaissances mais qu'ils ne parviennent pas à les mobiliser *en situation*. Cette même hypothèse est faite par la plupart des chercheurs qui sont à l'origine des outils d'éducabilité cognitive (comme les ARL) mais c'est sur l'origine de cette sorte de « sous-fonctionnement » (connaissances acquises mais non fonctionnelles à un moment donné), que les hypothèses diffèrent. Dans la perspective adoptée ici, aider un élève à se représenter le problème en jeu, c'est aussi l'aider, indirectement, à mobiliser et à instancier de telles connaissances d'abord « inertes ».

3 ↪ Renforcer et développer la composante opératoire des connaissances en jeu

Cet objectif et le suivant font référence à un modèle de la connaissance que nous ne pouvons pas développer ici mais dont l'idée de base est de considérer que le concept est la forme mentale la plus élaborée sous laquelle peut exister une connaissance et qu'un concept est formé de plusieurs composantes. L'une de celles-ci est la composante issue des actions du sujet qui impliquent d'une manière ou d'une autre la connaissance. On sait que la théorie

de Piaget accordait un rôle prépondérant (quasi exclusif) à cet aspect opératoire de l'acquisition des connaissances. Permettre la mobilisation de ces connaissances inertes que nous venons d'évoquer, c'est en premier lieu permettre à l'élève d'agir, donc à cette composante opératoire de « fonctionner » et de se renforcer.

#### 4 → Renforcer et développer la composante situationnelle des connaissances en jeu

Cette seconde composante correspond à l'expérience acquise en matière de situations. Le rôle de ces situations dans la construction même du concept et dans la manière dont il sera mis en œuvre apparaît de plus en plus important. La notion de *schéma de problèmes* a permis une première description de cette composante et continue d'être utile pour parler de l'un des objectifs particuliers que permet d'atteindre l'aide à la représentation du problème. Il est important, en effet, de résister à la tentation de concevoir les processus de représentation comme une aptitude que l'on pourrait développer en soi (erreur faite dans le passé avec le « raisonnement logique » par exemple). Les schémas de problèmes sont des connaissances (ou plus précisément des éléments de connaissances) qui se forment en situation et qui sont liées directement à la nature des situations et au type de rapport que l'élève établit avec elles. C'est au niveau de la constitution de cette « mémoire des problèmes » que les échecs et les réussites dans la résolution ont, vraisemblablement, des impacts très différents. On peut faire l'hypothèse que la construction d'une représentation fonctionnelle du problème est la condition même du renforcement et de l'extension des schémas de problèmes déjà en place. D'où une raison supplémentaire et importante pour les démarches d'aide à la représentation.

#### 5 → Induire la mise en œuvre d'outils de modélisation

Le troisième concept sur lequel s'appuie la démarche d'aide proposée ici est celui d'*outil de modélisation*. Nous avons évité de l'introduire plus tôt car il a le double inconvénient de renvoyer à une intuition très forte chez tous ceux qui enseignent et d'être le moins assuré du point de vue théorique. D'où une argumentation difficile à mener. L'intuition est celle qui consiste à penser que le meilleur moyen d'aider à se représenter quelque chose est de fournir une « représentation claire » de cette chose ; et on attribue généralement au registre graphique des vertus particulières pour cela : les dessins, schémas, graphes, tableaux,... sont supposés éclairer celui qui ne semble pas « comprendre » un problème. En fait, les processus cognitifs qui permettent d'intégrer à notre représentation des « outils » présents dans notre milieu culturel ne sont pas simples du tout à imaginer et à conceptualiser. Nous avons avancé l'hypothèse que ces processus ne sont pas ceux qui permettent à la représentation du problème de se mettre en place mais plutôt ceux qui vont permettre l'*opérationnalisation* de cette représentation, c'est-à-dire le passage à l'action (Julo, 1995). Ces outils dont on peut montrer qu'ils ont une fonction de *modélisation* dans la démarche de résolution interviendraient donc pour faciliter et amplifier l'opérationnalisation de la représentation. Ce rôle, souvent déterminant pour la résolution du problème, n'est pourtant pas celui d'une aide à la représentation au sens où nous l'entendons ici. Le fait que ces outils de modélisation renvoient la plupart du temps à une procédure donnée (ou une classe particulière de procédures) montre bien le « risque » que l'on prend en leur attribuant une fonction d'aide. La question qui se pose alors, et qui nous occupe beaucoup actuellement, est de savoir s'il est possible, dans certaines conditions, d'utiliser une démarche d'aide à la

représentation du problème pour induire la mise en œuvre de certains outils que l'on juge important pour l'apprentissage mathématique en jeu (Julo, 2000).

## Comment aider ?

C'est bien sûr pour répondre à la nécessité d'une communication à peu près cohérente que nous avons débuté par cette longue argumentation sur le « pourquoi ». Dans les faits, nous avons commencé par rechercher des aides avec comme seule intuition l'idée de ne pas orienter l'élève vers UNE procédure et d'essayer plutôt d'améliorer sa représentation du problème (IREM de Rennes, 1985). C'est sur la base de ce travail empirique et de quelques expériences un peu plus systématiques (voir annexe) que les options théoriques se sont précisées.

Il apparaît clairement aujourd'hui que la conception et la mise au point de situations de résolution de problèmes intégrant des aides nécessitent un très gros travail d'ingénierie. Même pour la seule classe des problèmes de partage inégal sur laquelle nous travaillons depuis plusieurs années, nous n'avons pu réunir à ce jour les conditions institutionnelles permettant de mener à bien une telle démarche de recherche-développement. Ce que nous présentons ici n'est donc pas une méthodologie complète et validée pour la production d'aides mais seulement un outil de classification et de caractérisation. Cet outil a été élaboré en vue d'un travail d'ingénierie en équipe de recherche. Peut-il servir au niveau d'une pratique individuelle d'aide ? Cela reste à voir car tant que nous ne disposons pas d'une large panoplie d'aides sérieusement expérimentées (aides spécifiques de chaque problème bien évidemment), il n'est pas certain qu'un outil méthodologique puisse être vraiment utile pour fonder sa pratique.

### Caractéristiques générales d'une aide à la représentation

Avant de présenter les différents types d'aides qu'il nous semble utile de différencier, résumons les trois caractéristiques générales qui découlent des réponses apportées à la question « pourquoi ».

Une aide à la représentation du problème est une aide :

- qui contient le moins possible D'INDICES SUR LA SOLUTION
- qui oriente le moins possible VERS UNE PROCEDURE DE RESOLUTION
- qui suggère le moins possible UNE MODELISATION DU PROBLEME

Ces caractéristiques ne font qu'opérationnaliser le fameux principe de Polya : « *aider ni trop ni trop peu* » (que l'on peut aussi énoncer sous la forme plus brutale : *ne pas tuer le problème*) en prenant en compte les données actuelles sur l'élaboration des procédures, la représentation du problème et la modélisation des situations.

## Catégorisation des aides à la représentation

Nous retenons cinq catégories qui correspondent en fait à cinq niveaux de « risque » par rapport aux principes généraux énoncés ci-dessus.

### 1 Les explicitations

Il s'agit d'informations qui ont pour fonction de rendre le but et les conditions de réalisation du but plus explicites (et seulement ces deux caractéristiques du problème).

Elles concernent en particulier les difficultés éventuelles liées à l'énoncé et à sa formulation mais pas uniquement ; des difficultés plus générales de représentation du problème peuvent être levées par des modalités d'explicitation quelquefois très « légères ». Par exemple, pour les problèmes de partage inégal que nous avons étudiés, il apparaît que le contexte des ficelles (voir annexe) est le plus « parlant » pour les élèves. En revanche, l'explicitation du fait que les ficelles ont des longueurs différentes en les nommant la « grande », la « moyenne » et la « petite » dans l'énoncé (voir annexe) n'est pas apparue comme une aide significative. Remarquons ici que la tendance est toujours forte d'inclure les explicitations dans l'énoncé (aide concomitante à la présentation du problème), comme ce fut le cas pour cette indication, alors que la même information peut avoir plus d'effet lorsqu'elle intervient après une phase de recherche comme « aide » au sens habituel du terme.

Entrent dans cette catégorie : la définition de certains mots, la reformulation de certaines phrases, l'illustration de la situation (sans modélisation de celle-ci), l'expansion de l'énoncé (informations supplémentaires sur le contexte) ou au contraire sa contraction. Sur toutes ces modalités, il existe dans la littérature des données qui montrent qu'elles peuvent avoir un effet sur la représentation qu'un élève se fait du problème à résoudre.

### 2 Les problèmes analogues

Cette forme d'aide consiste à présenter plusieurs versions d'un problème caractérisé par sa structure. Il s'agit d'une forme particulière d'explicitation qui va plus loin que celles évoquées ci-dessus car elle touche à l'objet même du problème, à sa structure.

Notons que la caractérisation de cette structure n'est pas une donnée première et dépend de l'analyse que l'on fait de la classe de problèmes en jeu. De même le degré d'analogie retenu peut être variable, le cas d'énoncés strictement isomorphes que nous avons beaucoup étudié (voir annexe) constituant une sorte de limite. Enfin, les modalités de présentation de ces problèmes analogues peuvent être très différentes : en simultané dès le départ (aide concomitante à la présentation du problème) ou successivement, certains énoncés étant proposés comme aides possibles au cours de la démarche de résolution.

### 3 Les tâches surajoutées

Cette forme d'aide repose sur la réalisation d'une tâche secondaire liée étroitement à la tâche principale que constitue la résolution du problème. Le principe est de rendre l'élève

actif en lui proposant un sous-but, éventuellement très éloigné du but principal, qui l'engage dans un processus de recherche.

D'une certaine manière, le découpage traditionnel des problèmes en sous-questions est basé sur ce principe, la différence étant que ce découpage est généralement conçu comme une aide à la résolution (indications fortes sur la procédure ou l'outil à mettre en œuvre) et non comme une aide à la représentation du problème.

L'aide A utilisée dans une expérience sur les problèmes de partage inégal et présentée en annexe est typique de cette catégorie (mais pas les aides E et G qui introduisent des outils de modélisation et relèvent de la catégorie suivante). Il existe de très nombreuses modalités possibles pour de telles tâches surajoutées mais il faut insister sur le fait qu'elles sont toutes relativement complexes à mettre en œuvre (Julo, 1993, 1995).

#### 4 Les outils de modélisation

Cette forme d'aide consiste à apporter, d'une manière ou d'une autre, un outil permettant de modéliser la situation et donc de modifier la représentation du problème construite initialement par l'élève.

Cette forme est la plus familière et la plus spontanée lorsque l'on veut aider sans trop orienter vers la solution. Elle s'appuie souvent, lorsque cela est possible, sur des outils de nature graphique : proposer un schéma, par exemple, pour les problèmes de partage inégal. Mais l'apport d'un outil de modélisation est aussi, presque toujours, une orientation vers une procédure particulière de résolution (la procédure par fractionnement pour le schématisation traditionnelle des problèmes de partage inégal).

Il existe toutefois des modalités qui permettent d'atténuer cet inconvénient. L'outil de modélisation peut être introduit, par exemple, à l'occasion d'une tâche surajoutée comme dans les aides E et G présentées en annexe. Il peut, de la même manière, être introduit en liaison avec la présentation de problèmes analogues ainsi que nous l'avons fait pour le tableau de proportionnalité à l'occasion d'une expérience concernant d'autres problèmes que ceux évoqués ici (Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996). La présentation simultanée de plusieurs outils de modélisation est aussi une manière de diminuer le risque qu'ils soient reçus comme des « modèles de résolution ».

#### 5 Les explications

Cette dernière catégorie se caractérise essentiellement par le fait qu'un discours explicatif est associé aux informations apportées comme aides. La conséquence la plus immédiate est l'existence d'une dimension socio-cognitive forte dans ce que l'on apporte à l'élève (alors que les autres formes peuvent être vues comme faisant simplement partie de « l'environnement » du problème et constituant une sorte d'élargissement de son énoncé).

La modalité la plus familière est bien sûr celle de l'enseignant ou d'un autre élève qui "explique" le problème. Mais quantité d'autres modalités existent, en particulier pour les cas où les élèves travaillent en autonomie. Une expérience portant sur l'impact éventuel de corrigés comme aides est présentée en annexe. Les résultats sont peu concluants,

l'orientation vers une procédure que peu d'élèves sont prêts à s'approprier étant trop prononcée. Dans une autre expérience, ce sont plusieurs corrigés correspondant à des procédures différentes qui sont proposés. On peut aussi introduire des explications au sein de dialogues (réels ou fictifs) entre des élèves qui travaillent ensemble à la résolution du problème, ainsi que nous l'avons fait avec un autre problème.

Il faut remarquer ici que l'explication donnée peut être très peu inductrice, ne portant par exemple que sur un mot de l'énoncé que l'élève ne comprend pas. Elle sera peu différente alors d'une explicitation. Mais dans la plupart des cas, l'explication comporte une orientation forte sur la manière de résoudre de problème, c'est-à-dire des indications de procédure et d'outil (on ne sait pas naturellement « expliquer un problème » - on sait mieux expliquer comment procéder pour le résoudre). Ce guidage est renforcé encore par la dimension interindividuelle de l'intervention (même lorsque celle-ci n'a pas de caractère prescriptif). C'est en ce sens que nous plaçons cette forme d'aide au dernier niveau de notre classification : c'est avec elle que le risque de *tuer* le problème est le plus grand.

## Quand aider ?

*Ni trop tôt ni trop tard* pourrait-on dire sous forme de boutade et pour compléter le *ni trop ni trop peu*.

En fait, c'est la question la plus difficile. Si on décide de la poser... Il existe en effet un premier grand choix à faire entre deux modes d'intervention (auxquels il faudrait ajouter les aides concomitantes à la présentation du problème) :

### → Les aides « à la demande »

C'est, bien évidemment, le cas le plus simple : l'élève dispose d'aides auxquelles il peut recourir lorsqu'il en ressent le besoin. Des choix restent à faire cependant ; citons par exemple :

- les aides sont-elles disponibles en permanence ? (sinon : quand le sont-elles ?) ;
- une seule aide est-elle fournie à chaque demande ou plusieurs au choix ? (mais dans ce cas : comment les désigner pour que l'élève puisse réellement choisir ?).

### → Les aides à l'initiative d'un tuteur

C'est ici que les choses se compliquent. Le « tuteur » est celui qui décide *quand* intervenir et généralement aussi *comment*. La question centrale qui se pose alors est de savoir sur quoi il se base pour prendre ses décisions. Deux grandes options sont envisageables :

- le tuteur est un enseignant qui décide « en temps réel » comment agir

C'est-à-dire que l'enseignant suit le travail de l'élève et décide quant et comment intervenir pour l'aider. En dehors de la question du coût (un tuteur par élève), cette option pose un problème de compétence : il n'est pas du tout évident qu'un enseignant, même très expérimenté, soit apte à prendre les bonnes décisions en matière d'aide individuelle pour la résolution d'un problème donné (Julo, 1998). La connaissance approfondie du problème en

jeu et la mise au point préalable d'aides adaptées aux exigences énoncées plus haut sont vraisemblablement les conditions d'une telle compétence.

➤ le tuteur s'appuie sur des règles de décision explicites

Ces règles tutorielles peuvent être très simples (basées seulement sur la durée par exemple : si l'élève n'a pas fourni de réponse au bout de 10 minutes une aide lui est apportée) mais sont alors peu intéressantes. Elles peuvent être plus complexes, prenant en compte des données propres à l'élève et cherchant à apporter au moment optimal l'aide optimale pour cet élève. Ce fut là l'ambition de ces logiciels que l'on a appelés justement des « tutoriels intelligents ». Mais la conception de tels systèmes a buté sur un obstacle majeur : celui du « modèle de l'élève » c'est-à-dire de la prise en compte effective de l'état des processus cognitifs pour un élève donné, à un moment donné. C'est là toute la difficulté : décrire convenablement où en est l'élève et pour cela être en mesure d'interpréter ses actions.

Par exemple pour les problèmes de partage inégal, nous disposons désormais d'une ébauche de modèle concernant la microgenèse de la représentation pour ces problèmes particuliers (Cauzinille-Marmèche & Julo, 1998) mais la question de la caractérisation et de l'interprétation de la démarche d'un élève donné dans un problème donné est loin d'être résolue.

Nous concluons sur cette note un peu pessimiste qui laisse entrevoir l'étendue des travaux à mener. Il ne faut pas cacher que nous visons principalement, à travers les recherches présentées, des systèmes permettant la résolution de problèmes avec aides dans un contexte pédagogique de *grande autonomie*. Il nous semble que seuls de tels systèmes sont compatibles avec les objectifs que nous avons énoncés au début de cet exposé. Mais nous sommes aussi profondément convaincu que la conception de tels systèmes et, au-delà, leur intégration effective dans des séquences d'enseignement, nécessitent dès le départ des démarches de type recherche-action associant des enseignants, des chercheurs et toutes les compétences pouvant exister en matière d'ingénierie des situations de résolution de problèmes. Malheureusement, l'évolution actuelle des conditions institutionnelles de la formation des enseignants et de la recherche sur l'enseignement rend de plus en plus difficile la mise en place de recherches de ce type. Nous ne terminerons pas sans dire notre colère de voir les enseignants de nouveau enfermés dans un simple rôle de consommateurs de formations et de « résultats à connaître » alors qu'ils acceptaient de plus en plus volontiers de se placer dans un rôle de producteurs au sein de véritables équipes de recherche. Or cette implication des principaux acteurs dans la recherche était à l'évidence le moyen le plus sûr de faire évoluer véritablement et solidement l'enseignement.

## Bibliographie

Cauzinille-Marmèche, E. & Julo, J. (1998). Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems. *Learning and Instruction*, 8, 3, 253-269.

Cauzinille-Marmèche, E. & Pélissier, A. (1999). Cognitive progress triggered by worked-examples analysis or unassisted problem solving. Soumis : *Learning and Instruction*.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche*. Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 16.

Gagné, R.M. & Smith, E.C. (1962). A study of the effects of verbalization on problem solving. *J. exp. Psychol.*, 63, 12-18.

Houdebine, J. & Julo, J. (1988). Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire : pour une intervention didactique différenciée. *Revue Française de Pédagogie*, 84.

IREM de Rennes (1985). *Informatique et ingénierie didactique. Rapport 1984-85 du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Université de Rennes 1.

Julo, J. (1990). Surface features, representations and tutorial interventions in mathematical problem solving. *European Journal of Psychology of Education*, 5, 255-272.

Julo, J. (1993). Le pétrolier fait-il fausse route ? *Les Cahiers Pédagogiques*, 316, 32-36.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (1998). Tutelle spontanée et tutelle experte. In: Dumas- Carré, A. & Weil-Barais, A. (eds). *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique*. Bern : Peter Lang.

Julo, J. (2000). Aide à représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Actes du Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques*, Université de Rennes 1. A paraître.

Julo, J. & Cauzinille-Marmèche, E. (1996). L'effet de multiprésentation : mise en évidence dans la résolution d'un problème de proportionnalité. *Revue de Psychologie de l'Education*, 1, 49-77.

Julo, J. & Houdebine, J. (1992). Concevoir de « bonnes » fiches d'activité en mathématiques. *Repères IREM*, 8, 67-88.

Newell, A & Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewoods-Cliffs NJ : Prentice-Hall.

Polya, G. (1985). *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Dunod.

Pluinage, F. (1993). Didactique de la résolution de problèmes. « *Petit X* », 32, 5-24.

Schmidt, S. & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 127-155.

Willis, G.B. & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, 80, 192-201.

## ANNEXE

### Quelques données concernant les recherches en cours sur les problèmes de partage inégal

Les problèmes de partage inégal font partie de la tradition des problèmes arithmétiques et ont longtemps joué un rôle central dans la transition arithmétique/algèbre (Chevallard, 1989). L'extrait de manuel ci-dessous montre comment la notion de *solution algébrique* était introduite à partir d'une schématisation de l'énoncé sous forme de segments de droite.

PROBLEMES	
Partage en deux parties dont l'une est multiple de l'autre	
TYPE : « Deux personnes ont ensemble 36 francs. L'une possède 5 fois plus que l'autre. Combien chacune a-t-elle ? »	
1ère	----- ----- ----- ----- -----
2e	-----
<p>SOLUTION - La première personne possède 5 fois ce que possède la deuxième. Ensemble elles possèdent 5+1 fois, ou 6 fois ce que possède la deuxième. Donc la deuxième a 36fr : 6 ou 6 francs et la première 6fr × 5 ou 30 francs.</p>	
<p>AUTRE SOLUTION - Au lieu de représenter la part inconnue de chacune des deux personnes par une <i>portion de droite</i>, il est possible et plus aisé de représenter cette part par une <i>lettre</i> quelconque de l'alphabet, par <i>x</i>, par exemple.</p>	
<p>En appelant <i>x</i> la plus petite des deux parts, la plus grande est 5<i>x</i>, on peut dire : <i>x</i> plus 5 fois <i>x</i> font 36 francs ; et on peut écrire :</p>	
$x + 5x = 36 ; \text{ et } 6x = 36$	
$\text{D'où : } x = 36 : 6 = 6$	
<p>Réponse : La deuxième personne a 6 francs ; la première a 6fr × 5 ou 30 francs.</p>	
<p>REMARQUE - Cette solution qui comporte un raisonnement dans lequel on désigne, par une lettre le nombre à chercher, le <i>nombre inconnu</i>, s'appelle une <i>solution algébrique</i> ; c'est, pour certains problèmes, le mode de solution le plus simple et le plus rapide.</p>	
<p>A. LEMOINE - Cours d'Arithmétique Librairie Hachette - 1923</p>	

Cette manière de faire peut être critiquée de deux points de vue différents.

La première critique concerne l'absence complète de perspective de type « activité de résolution de problème ». On se contente de montrer une méthode de résolution qu'il faut apprendre à utiliser. Or, une particularité de cette classe de problèmes que l'on appelle de partage inégal est son intérêt en termes de processus cognitifs. D'abord, ces problèmes soulèvent des difficultés tout à fait nouvelles et importantes au niveau de la représentation (mentale) qui permettra de les « comprendre » puis de les résoudre (en particulier le statut des nombres-solutions change par rapport aux problèmes arithmétiques plus simples où ils sont des « résultats » d'opérations). Ensuite, la variété des procédures pouvant être mises

en œuvre est suffisamment grande pour permettre des approches très variées de ces problèmes et susciter de vraies démarches de découverte dans la manière de les résoudre.

L'analyse des procédures chez des élèves de 6ème/5ème permet ainsi de distinguer deux grandes classes :

→ la classe des procédures que nous appellerons *par fractionnement* car elles consistent toujours, d'une manière ou d'une autre, à diviser la somme pour obtenir l'une des valeurs demandées ; les deux procédures décrites dans l'extrait de manuel joint en font partie et constituent deux sous-classes importantes mais il en existe d'autres ;

→ la classe des procédures que nous appellerons *par ajustement* car elles consistent à déterminer les valeurs demandées en essayant des nombres ; il existe ici aussi plusieurs sous-classes différenciées par le recours éventuel à un mode d'organisation des essais (dans un tableau par exemple) ou à une méthode d'encadrement (rapports de proportionnalité par exemple).

La seconde critique concerne l'idée même que cette transition entre arithmétique et algèbre puisse se faire, comme on le supposait, de manière naturelle, « sans violence », simplement en constatant qu'une méthode est plus efficace qu'une autre. Chevallard (1989) montre que c'est une telle illusion épistémologique qui sous-tend la stratégie classique d'introduction de l'algèbre et qui conduit à négliger tout le travail de modélisation propre au traitement algébrique des situations. Du point de vue cognitif, une autre illusion conduit à concevoir la mise en équation comme une simple « traduction » de l'énoncé du problème (Julo, 1995) et contribue ainsi, également, à l'occultation de l'activité de modélisation en mathématiques. Notons que des recherches récentes tendent à montrer qu'une telle conception réductrice du raisonnement algébrique est toujours présente chez de jeunes adultes se destinant à l'enseignement (Schmidt & Bednarz, 1997).

Prenant en compte ces deux sortes de considérations et les réflexions menées dans un groupe de recherche de l'IREM de Rennes (1985), nous avons choisi de nous intéresser aux problèmes de partage inégal en tant que tels et à la place qu'ils pourraient avoir dans l'enseignement des mathématiques en classes de 6ème et de 5ème. L'hypothèse didactique est que ces problèmes pourront avoir un rôle de préparation à l'algèbre si l'on parvient à réaliser deux conditions :

→ induire à leur propos une véritable activité de résolution de problème,

→ induire une activité de modélisation intrinsèquement liée à cette démarche d'élaboration de procédure et de découverte de solution.

La réalisation de ces deux conditions devrait contribuer, sur le plan cognitif, à faire vivre aux élèves la nécessaire rupture épistémologique que constitue le passage à l'algèbre.

### **Les problèmes pris en compte dans les expériences réalisées**

A l'intérieur de la classe des problèmes de partage inégal, nous nous sommes intéressés exclusivement à un type particulier : les problèmes caractérisés par trois inconnues et trois relations dont l'une est une somme et les deux autres des rapports.

Quelques exemples d'énoncés :

#### EXEMPLE 1

On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite.  
Mises bout-à-bout elles mesurent 240 cm.  
La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite.  
La moyenne est 3 fois plus longue que la petite.  
Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

#### EXEMPLE 2

La somme de trois nombres A, B et C est 294.  
Le nombre A est 8 fois plus grand que le nombre B.  
Le nombre B est 3 fois plus grand que le nombre C.  
Quels sont les nombres A, B et C ?

#### EXEMPLE 3

Pour fabriquer un cocktail avec du jus d'orange, du jus d'ananas et du jus de fruits de la passion, on doit respecter les proportions suivantes :

- mettre 2 fois plus de jus d'orange que de jus d'ananas,
- mettre 6 fois plus de jus d'orange que de jus de fruits de la passion.

Quelle quantité de chacun des jus faut-il pour préparer 5 litres de cocktail ?

A l'intérieur de cette sous-classe, trois catégories principales de problèmes doivent être distinguées en fonction de la nature des deux relations multiplicatives fournies :

si les trois inconnues sont telles que :  $A > B > C$ , on a trois possibilités :

- exprimer A et B en fonction de C (1er exemple),
- exprimer A en fonction de B et B en fonction de C (2ème exemple),
- exprimer A en fonction de B et en fonction de C (3ème exemple).

Il existe de nombreuses variantes liées aux valeurs numériques en jeu (celles qui servent à exprimer les rapports précédents, celle de la somme et celles des inconnues). Il existe aussi de nombreuses variantes liées aux grandeurs et, plus généralement, au contexte sémantique qui caractérise l'énoncé. Ainsi le premier exemple apparaît comme l'un des plus faciles parmi ceux que nous avons expérimentés avec des élèves de 6ème et le troisième comme l'un des plus difficiles.

### **Les principaux faits mis en évidence**

#### L'effet de multiprésentation

Cet effet mis en évidence dans le cas de ces problèmes de partage inégal (Julo, 1990) a été retrouvé à plusieurs reprises avec des modalités un peu différentes (Cauzille-Marmèche & Julo, 1998) et avec un autre problème (Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996).

Dans l'expérience princeps, il résulte de la comparaison des deux conditions suivantes :

- soit les élèves reçoivent une feuille comportant un énoncé de problème et on leur demande de le résoudre,
- soit ils reçoivent une feuille comportant trois énoncés strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques) et on leur demande de choisir l'un des énoncés et de résoudre le problème qu'ils ont choisi ; les élèves ne sont pas informés qu'il s'agit de problèmes isomorphes.

La feuille correspondant à cette seconde condition expérimentale se présente de la manière suivante (dans la première condition les élèves reçoivent l'un de ces trois énoncés) :

### Condition de multiprésentation

LIS CES TROIS PROBLEMES ET CHOISIS CELUI QUE TU VEUX RESOUDRE

#### PROBLEME 1

Judith, Catherine et Anne ont 126 ans à elles trois.  
Judith est la plus âgée et Anne la plus jeune.  
Judith est 4 fois plus âgée que Anne.  
Catherine est 2 fois plus âgée que Anne.  
Quel est l'âge de chacune ?

#### PROBLEME 2

On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite.  
Mises bout-à-bout elles mesurent 126 cm.  
La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite.  
La moyenne est 2 fois plus longue que la petite.  
Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

#### PROBLEME 3

La somme de trois nombres A, B et C est 126.  
Le nombre A est le plus grand et le nombre C le plus petit.  
Le nombre A est 4 fois plus grand que le nombre C.  
Le nombre B est 2 fois plus grand que le nombre C.  
Quels sont les nombres A, B et C ?

L'expérience est réalisée en classe de 6ème et le temps imparti est le même pour les deux conditions (20 min).

Les résultats font apparaître une différence nette au niveau de la performance : les élèves réussissent plus souvent à résoudre le problème lorsqu'ils ont eu le choix entre trois énoncés.

D'autres modalités expérimentées consistent à demander aux élèves de résoudre *les trois problèmes* proposés (sans leur indiquer qu'il s'agit de problèmes isomorphes) ou encore à présenter *successivement* les trois énoncés. L'effet de multiprésentation est retrouvé dans tous ces cas.

### L'effet de cumul

Cet effet a été mis en évidence dans une expérience réalisée au sein d'un groupe IREM alors que nous étudions l'impact de trois aides très différentes sur la résolution du problème suivant par des élèves de 6ème (expérience présentée dans : Julo, 1995) :

On a trois ficelles A, B et C de longueurs différentes.  
 A est 3 fois plus longue que B.  
 C est 4 fois plus longue que B.  
 Les trois ficelles mises bout-à-bout mesurent 240 cm.  
 Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

Ces trois aides sont les suivantes :

#### **Aide A (Affirmations)**

Indique pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse d'après le texte du problème

Si la ficelle B mesurait 50 cm alors la ficelle A devrait mesurer 150 cm d'après le texte du problème :	VRAI <input type="checkbox"/>	FAUX <input type="checkbox"/>
Si la ficelle C mesurait 210 cm alors la ficelle B devrait mesurer 70 cm d'après le texte du problème :	VRAI <input type="checkbox"/>	FAUX <input type="checkbox"/>
Si la ficelle A mesurait 60 cm alors la ficelle B devrait mesurer 180 cm d'après le texte du problème :	VRAI <input type="checkbox"/>	FAUX <input type="checkbox"/>
Si les ficelles A et B mesuraient ensemble 140 cm alors la ficelle C devrait mesurer 100 cm d'après le texte du problème :	VRAI <input type="checkbox"/>	FAUX <input type="checkbox"/>

#### **Aide E (Egalités)**

Regarde bien ces 3 problèmes. L'un d'eux ressemble beaucoup au problème proposé. Lequel ?

1

$$A = 3 \times B \quad C = 4 \times B \quad A + B + C = 240$$

Trouver la valeur de A, B et C

2

$$A = B \quad A + C = B \quad A + B + C = 240$$

Trouver la valeur de A, B et C

3

$$A = 3 \times C \quad C = 4 \times B \quad A + C = 240$$

Trouver la valeur de A, B et C

## Aide G (Graphiques)

Indique le numéro du bon schéma

1	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C					4	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C				
A																																	
B																																	
C																																	
A																																	
B																																	
C																																	
2	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C					5	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C				
A																																	
B																																	
C																																	
A																																	
B																																	
C																																	
3	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C					6	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td style="width: 20px;">A</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>B</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> <tr><td>C</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 10px;"></td></tr> </table>	A					B					C				
A																																	
B																																	
C																																	
A																																	
B																																	
C																																	

L'expérience se déroule de la manière suivante :

- chaque élève reçoit une fiche l'invitant à résoudre le problème ;
- si l'élève n'a pas fourni les réponses attendues au bout de 15 mn, une aide lui est fournie sous la forme d'une fiche, sans aucune explication supplémentaire ;
- 10 minutes après, l'élève reçoit une seconde aide s'il n'a toujours pas résolu le problème, puis une troisième 10 minutes plus tard ; l'ordre dans lequel les trois aides seront présentées (parmi les six possibles) est déterminé au départ et de manière aléatoire ;
- le travail est arrêté 15 mn après la troisième aide.

(lorsque l'élève a résolu le problème, un second problème du même type mais un peu plus difficile lui est proposé, puis un troisième encore plus difficile)

Le taux de réussite est de 12 % après la première phase de travail (sans aide) et passe à 52 % après la troisième aide. Mais les résultats mettent surtout en évidence deux faits importants :

- 1- les trois aides ne sont pas équivalentes du point de vue de leur effet sur la réussite ; on observe nettement l'ordre suivant  $G > E > A$  ; en effet, la présence d'un outil de modélisation dans l'aide (schéma ou écriture de type algébrique) oriente les élèves vers une procédure de fractionnement ainsi que le montre une analyse de leurs démarches ;
- 2- toutefois, on observe aussi qu'aucune des trois aides n'a un effet déterminant et que chacune peut avoir un impact qu'elle soit donnée en première, deuxième ou troisième position.

Cette expérience montre principalement que le *cumul* d'aides, même très différentes dans leur « logique » (surtout dans ce cas ?), a un effet très positif sur l'activité de résolution de problème.

L'effet « corrigés »

La dernière expérience que nous évoquerons, la plus récente, a été réalisée dans une perspective de psychologie cognitive (Cauzille-Marmèche & Pélissier, 1999). Elle concerne le rôle que peut avoir la présentation de corrigés dans la résolution des problèmes de partage inégal.

Nous ne décrivons pas ici les modalités précises de l'expérience qui sont assez complexes. Nous dirons simplement qu'elle se déroule en trois phases :

- dans la première, les élèves ont à résoudre successivement plusieurs problèmes du même type que ceux des expériences précédentes ;
- dans une deuxième phase, les élèves qui n'ont réussi à résoudre aucun des problèmes proposés sont répartis dans quatre conditions expérimentales ; dans les deux premières, les élèves reçoivent les corrigés de trois des problèmes qu'ils ont eu à résoudre auparavant, ces trois corrigés étant présentés soit successivement (10 min pour chacun) soit "en bloc" (30 min pour étudier les trois) ; les deux autres conditions servent à évaluer l'effet de ces corrigés (dans l'une on repropose seulement les problèmes de la première phase, la dernière étant une condition contrôle) ;
- dans la troisième phase, les élèves ont à résoudre des problèmes analogues à ceux de la première phase.

Il est important de préciser la nature des corrigés. Ceux-ci présentent toujours la procédure de fractionnement basée sur une représentation graphique des relations entre les trois valeurs à trouver (cette représentation elle-même variant légèrement d'un corrigé à l'autre) :

### Exemple de corrigé

Pour le problème suivant :

Théo, Daniel et Sandra ont 81 cassettes à eux 3.  
Daniel a 3 fois plus de cassettes que Théo.  
Sandra a 5 fois de plus de cassettes que Théo.  
Combien de cassettes à Théo ?  
Combien de cassettes à Daniel ?  
Combien de cassettes à Sandra ?

le corrigé suivant est proposé :

Un de tes camarades a rédigé ainsi sa solution :

		---
		---
	---	---
---	---	---
T	D	S

Donc Théo a  $81 : 9$ , soit 9 cassettes.

Donc Daniel a 27 cassettes.

Donc Sandra a 45 cassettes.

**Il a juste. Comment a-t-il fait pour avoir toutes ses réponses justes ?**

Nous retiendrons des résultats de cette expérience les deux faits suivants :

→ l'effet des corrigés est très net pour les problèmes qui ont exactement la même structure relationnelle que ceux faisant l'objet d'un corrigé (c.a.d. la structure la plus simple : celle où

les deux plus grandes valeurs sont exprimées en fonction de la plus petite) mais il l'est beaucoup moins pour des problèmes caractérisés par des structures différentes ; l'acquis de la phase d'étude des corrigés semble donc peu généralisable ;

→ la présentation simultanée des corrigés a un effet plus important que leur présentation successive, en particulier dans le cas d'une structure relationnelle différente.

Cette expérience confirme donc les limites bien connues en didactique de la démarche consistant à « montrer » une procédure de résolution. Elle conduit toutefois à s'interroger sur le rôle que pourrait avoir une aide se présentant sous la forme d'une *explication* qui s'appuierait sur *plusieurs outils de modélisation* et *plusieurs procédures* (pour éviter le statut de « modèle de résolution » que l'élève donne spontanément au corrigé).