ATELIER A

TITRE : DES ÉCRITS DIDACTIQUES AUX MANUELS SCOLAIRES : UNE ÉTUDE SUR LA SOUSTRACTION AVEC LES PE2

AUTEURS : Joël BRIAND et Marie-Lise PELTIER

Date : mars 2001

Résumé : La question de l'enseignement des « opérations arithmétiques » est une question incontournable tant en formation initiale en PE2 qu'en formation continue.

Les demandes portent généralement soit sur le lien entre construction du sens et mise en place de la technique, soit sur les moyens de faire construire le sens, soit sur les moyens de donner du sens à une technique.

Il semble intéressant et nécessaire de "revisiter" ces questions en étudiant la manière dont certains écrits didactiques que nous considérons comme fondamentaux se sont vulgarisés dans des écrits que l'on pourrait appeler des écrits intermédiaires[1], puis ont éventuellement diffusé dans les manuels scolaires, en essayant de pointer ce qui a été conservé, ce qui a été omis, ce qui a été modifié.

Compte rendu rédigé conjointement par J-C. AUBERTIN, J. BRIAND, J-C. PEDROLETTI, M-L. PELTIER

L'objectif de l'atelier sera de mettre en évidence différents choix que peuvent faire les formateurs pour construire un certain nombre de séances de formation en PE2 (2 ou 3 par exemple).

Trois moments :
- Comment travailler avec les PE2 ? Exposé des cadres théoriques (¾ h).
- Travaux de groupes, la tâche : élaborer un projet de deux ou trois séances de formation sur la soustraction en PE2 (¾ h).
- Échange, restitution des groupes (¾ h).

1) DEUX APPROCHES COMPLÉMENTAIRES ISSUES DE DEUX CADRES THÉORIQUES

1. Le cadre de la théorie des champs conceptuels (Gérard VERGNAUD).

Dans la théorie des champs conceptuels, G. VERGNAUD propose une typologie des problèmes relevant des structures additives en s'appuyant, non sur l'opération

[1] Nous mettons sous cette dénomination des documents pédagogiques pour les maîtres tels que les documents ERMEL, les articles de grand N, le moniteur Nathan, ainsi que les livres de préparation au concours PE.

experte (addition ou soustraction) qui permet de donner la solution du problème, mais sur *"l'ensemble des concepts et des théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques"*[2]. On trouvera en annexes 1 et 2, une présentation rapide de cette typologie.

La théorie des champs conceptuels n'est pas une théorie didactique, c'est une théorie du développement cognitif qui résulte à la fois de considérations psychologiques et mathématiques.

Des questions se posent alors dans deux directions.

La première consiste à se demander de quelle manière le professeur dans sa classe va présenter ces différents types de problèmes et de quelle manière il pourra permettre aux élèves de construire des ponts entre ces différentes structures de manière à reconnaître l'opération à effectuer. Les travaux d'A. DESCAVES[3] sur cette question constituent une contribution intéressante à ce sujet (annexe 4).

La seconde est celle des procédures de calcul qui seront alors mises en place, et des liens qu'elles entretiennent avec les structures des problèmes.

Ce premier cadre est plutôt du côté de l'apprentissage ; c'est un point de vue théorique sur la manière d'envisager les différents moments d'apprentissage. Mais le passage à la (ou une) technique opératoire n'est jamais envisagé.

2. Le cadre de la théorie des situations (Guy BROUSSEAU).

Situation fondamentale de la soustraction, dévolution d'une situation didactique.

Ce deuxième cadre est plutôt du côté de l'enseignement : passer du concept à la technique.

Dans le cadre de la théorie des situations, G. BROUSSEAU présente ce qu'il désigne par « situation fondamentale de la soustraction ». Il s'agit du « jeu de la boite » que G. BROUSSEAU choisit pour exemplifier la notion de situation adidactique. Il écrit dans ce texte[4] qu'il s'agit de dévoluer aux élèves non seulement la recherche de la solution du problème mais d'abord la recherche de la question. Cette question étant ici la recherche du terme inconnu d'une somme.

- Sens et technique opératoire sont construits simultanément et dialectiquement.
- Les calculs produits par les élèves ont pour but de prévoir un résultat réalisé dans un milieu matériel. Ce qui fait que la vérification est un moment naturel de l'action
- Le maintient du recours à un même milieu matériel est nécessaire pour aider les élèves à se repérer et à construire un modèle cohérent, y compris dans des problèmes de soustraction et d'addition ne renvoyant pas directement à ce milieu.
- La méthode de calcul institutionnalisée est le résultat d'une amélioration de procédés antérieurs, et d'un choix pédagogique. Son domaine de pertinence est limité.

Situation de base : (voir étude détaillée en annexe 5).

Tout l'apprentissage s'organise donc autour d'une même situation de base qui se répète en évoluant : « Le jeu de la boîte ». L'enseignant a sur son bureau une boite qui contient des cubes. Il va retirer des cubes, en remettre. Il s'agira toujours de pouvoir dire combien cette boîte contient de cubes. Le signe d'une certaine connaissance de la soustraction *« sera de savoir finalement quand et comment on peut déterminer les nombres et repérer des situations que le jeu de la boîte peut modéliser »*.

Dans cette perspective, des questions se posent aussi. L'une d'elles consiste à se demander comment gérer le transfert du cas particulier d'un problème dont la structure sous jacente, au sens de G. VERGNAUD est une structure « E.T.E. » à des problèmes mettant en jeu d'autres structures.

---

[2] G. VERGNAUD. "La théorie des champs conceptuels" in RDM. 10/2.3 (1990)

[3] A. DESCAVES. "Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège" in Actes du 26ième Colloque de la CORIRELEM, LIMOGES, 1999, IREM du LIMOUSIN

[4] G. BROUSSEAU. (1989) "Le contrat didactique, le milieu" in RDM 9.3.

Bibliographie Petit x n° 22 ; RDM n° 9 ; Actes de Limoges 1999 (article de A. Descaves) ; ERMEL CE1 (cf. par exemple p 121)

3. Présentation de techniques algorithmiques :

« Course à 0 » ; « Enlever un nombre entier de centaines » ; « Saut en avant » ; Technique du XVIII^{ème} en passant par les 9 ; Technique du XVI^{ème} en barrant successivement les chiffres ; Technique par échange ; Addition à trous ; Technique usuelle et ses 6 variantes (chansons et retenues) (annexe 6)

L'algorithme de calcul est conjoncturel et conventionnel ; Ce n'est pas le plus important dans le travail sur la soustraction, cependant maîtriser un algorithme reste fondamental et incontournable.

2) ÉLABORATION D'UN PROJET DE DEUX À TROIS SÉANCES DE FORMATION SUR LA SOUSTRACTION À DES PE2

Les consignes de travail sont ainsi précisées :

- De quelle manière le professeur va-t-il faire travailler ses élèves sur les différents types de problèmes et va-t-il gérer le transfert de l'étude de quelques cas particuliers à des problèmes mettant en jeu d'autres structures ?
- Quelle place donner aux procédures de calcul empiriques ?
- Quand et comment mettre en place la technique classique algorithmique en colonnes de la soustraction ?

Chaque groupe, constitué en mêlant anciens et nouveaux formateurs, doit rédiger des transparents pour la restitution de la troisième partie de l'atelier.

Les documents à disposition sont les suivants :

- des textes de base de G. VERGNAUD (1990, RDM 10.3) et de G.BROUSSEAU (1989, RDM 9.2)
- l'extrait d'un écrit pour les maîtres présentant les problèmes additifs et soustractifs proposé dans le moniteur NATHAN, sous la direction de G. VERGNAUD (1995) (annexe 1)
- un plan de travail pour la soustraction écrit par M-H SALIN et J. BRIAND en direction des stagiaires (annexe 7)
- des manuels scolaires et livres du maître associés de CE1 et CE2 de deux collections : « J'apprends les mathématiques » (BRISSIAUD et all, 1994 , NATHAN) et « Le nouvel objectif calcul » (PELTIER et all, 1998, 1995, HATIER)
- la liste des problèmes additifs (annexe 2).

Dans chaque groupe les échanges et éventuels débats devront conduire à l'élaboration d'un projet de deux à trois séances de formation sur la soustraction en PE2 qui sera présenter sur un ou plusieurs transparents

3) COMPTES RENDUS DES DIFFÉRENTS GROUPES :

Remarques : Cet atelier a eu deux déroulements et donc deux fois des comptes rendus de groupes.

Il a bien sûr manqué de temps, parfois beaucoup, pour pouvoir vraiment répondre à la tâche demandée ! Il a fallu par exemple que des formateurs nouveaux s'approprient un minimum la typologie de G. VERGNAUD avant que le groupe ne puisse commencer à réfléchir à la tâche proposée.

La conclusion découle en grande partie de ce manque de temps, et aussi de la complexité des problèmes posés : il a manqué une synthèse avec des propositions affirmées, même si elles restaient en débat.

On trouvera en annexe 7 un exemple de séquence de formation sur les problèmes additifs en PE2, présentée par M-L. PELTIER.

Groupe 1 (3 séances)

S1: travail sur la catégorisation des problèmes additifs de G. VERGNAUD

- plusieurs possibilités de mise en scène :

ex: point de départ par un classement de problèmes additifs par les étudiants en fonction de leurs conceptions et de leurs connaissances, puis travail sur les catégories de G. VERGNAUD.

- prise en compte de la question du schéma : quels schémas, à quel niveau, faut-il, peut-on les enseigner ?

- travail sur les manuels "ordinaires" : quelle catégorisation des problèmes additifs apparaît ?

S2 : travail sur les progressions des manuels sur la soustraction

S3 : techniques opératoires : quelle(s) technique(s) enseigner ?

Groupe 2 (2 séances)

S1 A : sens de la soustraction

- recherche : par groupes, trouver trois énoncés de problèmes additifs (additifs et/ou soustractifs) , collecte des énoncés puis analyse et comparaison avec essai de classement.

- institutionnalisation : typologie des problèmes additifs selon GV

- application : classer un corpus de problèmes

B : calculs

- rencontre avec différentes techniques de la soustraction, mise en évidence des propriétés (des nombres, numération .....) utilisées en relation avec le calcul réfléchi et le calcul mental.

S2 : analyse de manuels avec un questionnement (les problèmes, le signe moins, la technique)

- à quel moment ?
- comment la technique est-elle introduite ?

mise en commun

élaboration d'un schéma directeur pour une analyse et un choix

Groupe 3 (4séances)

S1 : situation sur le sens de l'opération :

- vers des cadres théoriques
- analyse de problèmes

S2 : situation présentant différentes techniques et propriétés utilisées liées à la soustraction (addition à trous, conservation des écarts etc.) et en particulier travail sur un tableau de techniques

S3 : analyse d'extraits de manuels pour en saisir les enjeux

S4 : construction d'une progression présentant des situations-clés

Groupe 4 (3séances)

S1 : faire apparaître les fonctions des écritures symboliques a+b et a-b

- fonction descriptive : codage de situations, lesquelles ?
- fonction opératoire : grâce à des procédures de calcul

comment, quand introduire les écritures a+b et a-b ?

- quelles situations de départ, quel sens, comment étendre le sens, quelles procédures ?

S2 : inventaire des procédures de calcul réfléchi des différences, les situer par rapport aux différents niveaux d'enseignement et aller vers un technique opératoire générale

S3 : mise en pratique dans les problèmes
préparation de séquences

Groupe 1' (3 séances)

S1 : Écrire 2 à 3 problèmes soustractifs.
Rappel rapide de la typologie de G. VERGNAUD.
Appropriation sur une liste de problèmes à classer.
Étude des manuels : cohérence et exhaustivité.

S2 : Séance filmée pour exhiber les procédures des élèves.

S3 : Étude et débat sur les algorithmes.

Groupe 2' (3 séances)

S1 : Installer la typologie de G. VERGNAUD et montrer son intérêt.
Classer des problèmes.
La soustraction est inscrite dans le champ des structures additives.

S2 : Élaborer des séquences correspondant à la catégorie 2 de la typologie. Prévoir des procédures personnelles d'élèves.

S3 : Des procédures personnelles à la (aux) procédure(s) algorithmique(s).

Groupe 3'

Travail autour du sens des problèmes additifs : en utilisant la typologie de G. VERGNAUD.

- La classification calcul additif / calcul soustractif n'est pas pertinente pour la résolution.
- Le modèle soustractif permet de résoudre différents types de problèmes.

Groupe 4'

- Présentation de la typologie :
- - faire fonctionner
- - confronter aux évaluations / apprentissage.
- Techniques algorithmiques à la fin
- Articulation addition à trous / soustraction.

4) ÉCHANGES

La liste distribuée des problèmes additifs permet de préciser que G. VERGNAUD propose une typologie et non une classification : il est en effet possible de mettre certains problèmes dans 2 catégories selon la manière de se le représenter.

Les échanges sur apprentissage des sens de la soustraction et d'une technique usuelle sont nombreux. Une information est donnée : étude réalisée sur deux classes de CE1, la première possédant une technique de soustraction institutionnalisée, l'autre non ; sur la résolution d'une même liste de problèmes additifs la première classe a de moins bons résultats.

Des questions sont posées aussi sur l'influence du changement de contexte et du changement de structure dans la reconnaissance par les élèves des problèmes soustractifs ; la question du transfert éventuel d'une catégorie de problème à une autre est aussi posée.

A. KUZNIAK. remarque d'abord la priorité donnée au travail sur les catégories de G. VERGNAUD dans la plupart des projets et s'inquiète de la place de la technique opératoire : quand vient-elle ?

M-H. SALIN. revient sur la question des schémas et des techniques : faut-il enseigner les schémas, faut-il enseigner différentes techniques ?

Quelle attitude adopter avec les PE2, leur faire part de nos questions, c'est leur dire qu'on ne sait pas répondre mais aussi que le problèmes est complexe.

Un collègue dit que la technique n'est qu'une demande sociologique, qu'on n'en a pas besoin (calcul réfléchi, machines). Apparemment, il n'est pas suivi sur ce terrain.

A. KUZNIAK insiste sur l'importance de la maîtrise d'une technique opératoire de la soustraction. On ne peut s'en passer : pratique sociale malgré les outils. Certains pensent qu'une technique est nécessaire aussi sur le plan méthodologique (par exemple pour les opérations sur les polynômes !).

J-L. M. dit que souvent on renvoie aux manuels. Il pose alors la question : mais quelle technique, pour quels élèves, quelle relation de la technique au sens, y a-t-il une réponse universelle ? En tous les cas il importe de tenir compte des élèves.

M-L.PELTIER. pense qu'on doit attendre longtemps avant d'introduire une technique, qu'il veut mieux en privilégier une plutôt que d'en faire fonctionner deux en même temps. En tous les cas, attendre que le sens se ramène dans les problèmes au calcul de la différence de deux nombres. De toute façon, on a besoin d'une technique, c'est incontournable.

J. BRIAND. dit que pour lui, on veut une opération socialement présentable mais pas trop coûteuse. Il propose un travail sur les mots de l'addition pour ne pas surcharger et éloigner les deux opérations. A propos des mots, il s'agit des mots utilisés lors de la réalisation d'une opération ("la chanson" dit M-L.PELTIER.) qui traduisent plus ou moins la référence à un sens.

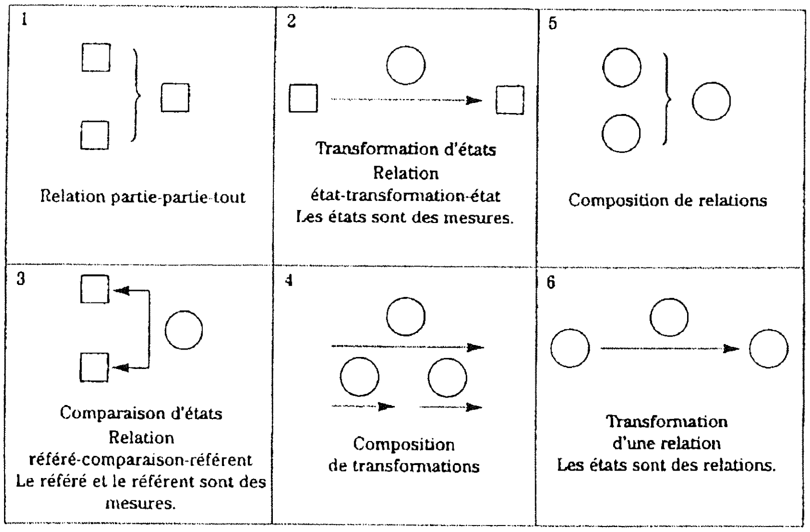
M-H.SALIN. pose la question de l'évolution d'une technique : quand une technique est trop familière, on a du mal à la faire évoluer. Donc on ne peut s'enfermer trop longtemps dans une technique rudimentaire même si elle est efficace.

ANNEXE 1

Typologie des structures additives

Tableau récapitulatif des différentes structures (le moniteur de mathématiques Résolution de problèmes fichier pédagogique p. 16. Nathan 1997) et extrait p.17 du même ouvrage.

RELATIONS ADDITIVES



N. B. : Seules les structures 1 à 4 seront étudiées systématiquement dans notre proposition de résolution de problèmes arithmétiques pour l'école élémentaire.

7 L'enjeu didactique des structures additives

Parvenus à ce stade de la réflexion, il convient de ne pas se tromper sur l'enjeu didactique des structures additives. Il ne s'agit pas d'une simple classification d'énoncés, mais plutôt d'une classification des raisonnements face à des problèmes additifs. Et ce sont d'abord ces raisonnements que nous cherchons à développer et évaluer chez les élèves.

La plupart du temps, les énoncés renvoient assez clairement à l'une des structures et c'est ce qui nous a permis aussi bien de développer une classification que de proposer des cahiers structurés pour les élèves.

Pour autant, face à un énoncé que nous classons naturellement dans une structure, d'autres que nous peuvent avoir des points de vue différents. Prenons un exemple :

Un livre a 182 pages. J'en ai lu 47. Combien m'en reste-t-il à lire ?

- On peut se le représenter comme un problème de relation partie-partie-tout (une partie de 47 pages est l'élément d'un tout de 182 pages).
- On peut se le représenter comme un problème de comparaison entre les pages déjà lues et les pages à lire (les 182 pages à lire sont combien de plus que les 47 pages lues ?).
- On peut se le représenter comme un problème de transformation (l'état initial est constitué des 182 pages à lire, la transformation − 47 est donnée par l'indication *J'ai lu* et l'état final est le nombre de pages qui restent à lire).

D'autres interprétations sont possibles. Mais comme on le verra dans de nombreux exemples des cahiers, la possibilité de choix de plusieurs points de vue n'est pas toujours aussi grande. De toutes façons, la question de savoir à quelle structure se rapporte un énoncé, indépendamment d'une personne qui le résout, n'a qu'un intérêt limité. Ce qui compte, pour celui qui doit résoudre un problème additif, c'est de savoir :

- s'il a facilement à sa disposition une structure qui lui permette de donner du sens à ce problème et de le résoudre ;
- s'il est capable de changer de point de vue et de comprendre ce problème dans une autre structure lorsque le cas s'y prête ;
- s'il dispose d'un ensemble de structures suffisamment variées pour lui permettre de résoudre les diverses catégories de problèmes.

ANNEXE 2

Typologie des structures additives
Commentaires sur le tableau précédent.
M-L. PELTIER

G. VERGNAUD distingue dans les problèmes, les nombres qui désignent des états, qui sont des nombres réels (positifs s'ils désignent des états mesures, positifs ou négatifs s'ils désignent des états repères) et des nombres qui traduisent une transformation ou une comparaison qui, eux, sont des réels positifs ou négatifs.

Ainsi, dans l'énoncé " Chloé a 57 images, elle en donne 15 à Jeanne. Combien d'images Chloé a-t-elle maintenant ?", le nombre "57" désigne un état (l'avoir initial de Chloé), lorsque Chloé donne 15 images à Jeanne, il s'agit d'une transformation qui ici est négative et peut donc se représenter par le nombre "-15", La question porte sur la détermination de l'état final, c'est à dire le nombre d'images de Chloé après la transformation de son avoir.

Prenons un autre exemple : "Pierre a 27 billes, Victor a 15 billes de plus que Pierre, combien de billes a Victor ?", le nombre 27 désigne un état, c'est le référent de la comparaison, la comparaison est positive "+15", on cherche l'état référé, c'est à dire l'avoir de Victor.

Pour les structures additives, G. VERGNAUD identifie six relations de bases à partir desquelles il est possible d'engendrer la quasi totalité des problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique ordinaire (cf. annexe 1).

A l'école élémentaire les problèmes additifs relèvent essentiellement des trois premières structures :

- La composition de deux mesures.

Dans cette famille on trouve essentiellement des problèmes de réunions ou de fractionnement de collections ou de grandeurs mesurables. Suivant que l'on cherche le tout ou l'une des parties, l'opération experte associée est une addition ou une soustraction.

- La relation de transformation d'états.

Il s'agit d'énoncés qui décrivent des situations se déroulant souvent dans le temps dans lesquelles on peut identifier un état initial, une transformation (positive ou négative) opérant sur cet état pour conduire à un état final. Cette structure permet de définir six catégories de problèmes suivant que la transformation est positive ou négative et que la recherche porte sur l'état final, la transformation ou l'état initial.

- La relation de comparaison additive.

Deux états relatifs à des grandeurs mesurables ou repérables sont comparés de manière additive, l'un joue le rôle de référent pour l'autre. La relation s'exprime par les locutions "de plus", "de moins". Dans cette famille on trouve également six sous catégories suivant que la relation est positive ou négative et que la question porte sur la recherche du référé, de la comparaison ou du référent.

Parmi les autres structures on trouve :

- Les compositions de transformations

Deux transformations ou plus sont appliquées successivement à des états qui ne sont pas connus (sinon on revient à la famille "relation de transformation"). La transformation unique composée de ces transformations, permet de transformer l'état initial à l'état final obtenu après l'application de toutes les transformations concernées.

Dans cette famille, le nombre de sous catégories dépend bien sûr du nombre de transformations composées, dans le cas de deux, on peut définir douze sous catégories suivant que les transformations composées sont de même signe (2 cas), de signe opposés (2 cas suivant que la composée est positive ou négative) et que la question porte sur la détermination de la composée ou de l'une des deux transformations (3 cas).

- Les compositions de relations
- les comparaisons de transformations

Ces deux derniers cas peuvent être décrits de manière analogue aux précédents, ils ne concernent pratiquement aucun problème posé à l'école élémentaire.

Comme on le voit, cette classification très fine s'appuie à la fois sur une analyse mathématique des objets en jeu et des relations entre ces objets et sur une analyse psychologique de la tâche à effectuer pour résoudre le problème.

La classification qui consiste à catégoriser les problèmes selon qu'ils se résolvent de manière experte par une addition ou par une soustraction faisait fi de ces deux analyses pour se centrer seulement sur les écritures mathématiques traduisant non le problème mais sa solution et l'on en déduisait hâtivement que les problèmes conduisant à effectuer une soustraction étaient plus difficiles que ceux nécessitant une addition. Le contre exemple suivant permet d'infirmer cette conception et de montrer que la difficulté d'un problème est liée à sa structure et à l'élément de cette structure sur lequel porte la question.

Ainsi le problème : "Paul avait 105F dans son porte monnaie. Il a dépensé 99F. Quelle somme d'argent a-t-il maintenant dans son porte monnaie ?" ne pose pas de grande difficultés aux élèves bien qu'il s'agisse d'une soustraction, tandis que le problème : "Marie fait des courses, elle dépense 150F. Il lui reste alors 200F dans son porte monnaie. Combien d'argent avait-elle dans son porte monnaie avant d'effectuer ses courses ?" qui nécessite une addition est un problème difficile bien que la situation soit familière, que les nombres en jeu soient simples, et que l'opération à effectuer soit élémentaire.

On trouvera en annexe 3 quelques exemples de problèmes pour lesquels il s'agira de déterminer la structure dont ils relèvent.

L'approche de G. VERGNAUD permet de mettre en évidence la nécessaire simultanéité de l'apprentissage de l'addition et de la soustraction, elle permet de conduire une analyse a priori des situations en précisant les relations mathématiques abordées et la tâche des élèves de manière à faire des choix, établir des progressions, proposer des exercices d'évaluation en accord avec ce qui a été abordé, à proposer aux élèves des exercices variés relevant des diverses catégories afin de leur permettre de mieux cerner les concepts d'addition et de soustraction et leur relation.

ANNEXE 3

Quelques problèmes additifs (cycle 3)
M-L. PELTIER

Amélie avait 250 F, elle dépense 147.50 F. Combien a-t-elle maintenant ?	
Une émission a été rallongée de 20 min. Elle dure maintenant 1 h 45. Quelle était sa durée auparavant ?	
Quelle durée doit être disponible sur une cassette pour enregistrer une émission de 1 h 35 et une autre de 2 h 45 ?	
Un pilote passe de l'altitude 5300 m à l'altitude 5800 m. De combien son avion s'est-il élevé ?	
J'ai dépensé 149.50 F en achetant une cassette à 68 F et un livre. Quel est le prix du livre ?	
M. Durand gagne 8700 F par mois, soit 900 F de plus que M. Martin ? combien gagne M. Martin ?	
Frédéric a tenté sa chance au jeu deux fois de suite. La première fois, il a perdu 350 F. En tout il a gagné 500 F. Que s'est-il passé la deuxième fois ?	
Caroline a acheté un gâteau à 8.50 F. Il lui reste 47 F. Combien d'argent avait-elle ?	
Aujourd'hui, il fait 15° soit 12° de moins qu'à Nice. Quelle est la température à Nice ?	
Une émission dure 1 h 45 et se termine à 22 h10. A quelle heure commence-t-elle ?	
Un père a 32 ans à la naissance des son fils. Quel sera l'âge du fils quand le père aura 60 ans ?	
Quand il est 4h en France à l'heure d'été, il est 9h au Cambodge. Quelle heure est-il au Cambodge quand il est 0 h en France ?	

ANNEXE 4

De la représentation de la solution à la mise en oeuvre de procédures de résolution : le point de vue d'Alain DESCAVES.

M-L. PELTIER

A. DESCAVES[5] insiste sur le fait que construire la représentation du problème et calculer sa solution sont deux phases de la résolution qui sont en interaction, mais qui ne mettent pas en oeuvre les mêmes processus mentaux, processus de catégorisation pour la construction de la représentation, processus calculatoires dans le second cas. Il fait l'hypothèse que certains registres sémiotiques (schémas, écritures algébriques) fonctionnent comme des interfaces et peuvent être interprétés comme modélisation de la situation puis comme support permettant des transformations symboliques des problèmes.

Donnons deux exemples pour illustrer ce propos suivant que la représentation iconique de la situation est ou n'est pas en concordance avec l'écriture arithmétique traduisant la solution.

Considérons les deux problèmes suivants : "Paul a 105F dans son porte-monnaie, il dépense 99, combien d'argent a-t-il maintenant ?" "Marie fait des courses, elle dépense 150F. Il lui reste alors 200F dans son porte-monnaie. Combien d'argent avait-elle dans son porte-monnaie avant d'aller faire ses courses

Le problème de Paul est un cas de concordance, en effet, l'écriture arithmétique représentant le problème est identique à celle donnant la solution : 105-99 = ?

Le calcul effectif de la solution dépend bien sûr des connaissances mobilisables par les élèves, et les procédures peuvent être très nombreuses et variées, elles peuvent être fondées sur

- le rapport de concordance avec la représentation mentale iconique (figurative ou analogique)
- la transformation préalable de la représentation iconique (réciprocité des transformations : ce que Paul a maintenant, ajouté à ce qu'il a dépensé c'est 105F donc 99 + ? = 105)
- un basculement de signification dans le système arithmétique de traitement (chercher a-b ⇔ trouver ce qu'il faut ajouter à b pour obtenir a)
- un système de basculement dans le système de représentation arithmétique (retrait ⇔ différence, donc pour calculer la différence 105-99 on peut calculer la différence 106-100)
- l'effectuation d'une technique opératoire.
- des transformation opérant sur la représentation arithmétique du problème et sur des connaissances en numération (-99 ⇔ -100 + 1)

Le problème de Marie est un cas de discordance puisque la représentation iconique est celle d'une diminution et de ce fait une écriture arithmétique traduisant l'énoncé est du type

? -150 = 200 tandis que l'écriture arithmétique experte représentant la solution est 200 + 150 = ?.

Ici la discordance implique donc nécessairement des basculements et les procédures peuvent être fondées sur divers types de basculements :

- une transformation préalable opérant sur la représentation iconique de la situation (qu'aurait conservé Marie si elle n'était pas allée faire ses courses ?)

[5]A. DESCAVES. déjà cité.

- le traitement opérant sur une représentation schématique du problème par exemple :

utilisation de la réversibilité des transformations -150, +105 dans le cas d'un schéma fléché du type

$$? \xrightarrow{-150} 200$$

utilisation de la droite numérique

utilisation de segments mis bout à bout représentant respectivement la dépense et ce qui reste, etc.

- la reconnaissance d'une situation additive et tâtonnement contrôlé, etc.

A partir de ses travaux A. DESCAVES propose une aide au passage de la représentation à l'élaboration d'une procédure de calcul par une démarche algébrisante A. DESCAVES.

Dès lors que la construction de la procédure de calcul nécessite un basculement de signification dans le système de représentation ou dans celui de traitement arithmétique, A. DESCAVES fait l'hypothèse que le fait de pouvoir nommer l'inconnue est une aide à la fois à la compréhension du problème et à son traitement. De plus l'introduction et l'utilisation d'écritures mathématiques peut avoir, d'après lui, un rôle déterminant comme aide à la catégorisation des problèmes. Ainsi dès le CE2, il introduit une représentation en tableau

10	
6	4

comme support à automatisation de certaines relations numériques qui permet de penser une cohérence quasi formelle entre les trois écritures :

6+4 = 10, 10-4 = 6 et 10-6 = 4

Plusieurs problèmes sont alors donnés ainsi que plusieurs écritures mathématiques, les élèves doivent relier chaque problème aux écritures qui les traduisent, (un problème, plusieurs écritures possibles) puis ils doivent associer chaque problème à l'un des deux tableaux qui lui correspond ce qui conduit à catégoriser les problèmes.

ANNEXE 5

Document donné en formation relatif à l'explicitation des différentes phases de la situation fondamentale de la soustraction au CE1. J. BRIAND, M-H. SALIN

Un plan de travail pour la soustraction au CE1-CE2[6]

Principes :

L'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur l'enseignement d'une procédure de calcul associée à un petit univers des problèmes qui est supposé en présenter le sens. La recherche relatée brièvement ici a pour but de présenter les savoirs non seulement comme des réponses à des questions, mais comme producteurs de questions.

Dans le cas présent, il s'agit de comprendre que la question est la recherche du terme inconnu d'une somme, puis de se donner les moyens mathématiques de résoudre ce problème, puis, en l'ayant reconnu comme une démarche apparaissant fréquemment, de mettre au point une procédure automatique.

Comme lors de l'élaboration des algorithmes précédents :

- Sens et technique opératoire sont construits simultanément et dialectiquement.
- Les calculs produits par les élèves ont pour but de prévoir un résultat réalisé dans un milieu matériel. Ce qui fait que la vérification est un moment naturel de l'action
- Le maintient du recours à un même milieu matériel est nécessaire pour aider les élèves à se repérer et à construire un modèle cohérent, y compris dans des problèmes de soustraction et d'addition ne renvoyant pas directement à ce milieu.
- La méthode de calcul institutionnalisée est le résultat d'une amélioration de procédés antérieurs, et d'un choix pédagogique. Son domaine de pertinence est limité.

Situation de base :

Tout l'apprentissage s'organise autour d'une même situation de base qui se répète en évoluant : « Le jeu de la boîte ». L'enseignant a sur son bureau une boite qui contient des cubes. Il va retirer des cubes, en remettre. Il s'agira toujours de pouvoir dire combien cette boîte contient de cubes. Le signe d'une certaine connaissance de la soustraction *« sera de savoir finalement quand et comment on peut déterminer les nombres et repérer des situations que le jeu de la boîte peut modéliser »*.

Les différentes étapes :

Etape 1 : Dévolution du contrat d'apprentissage : (4 séances dont une sous forme d'ateliers à 2).

a) - **Dévolution de la devinette** : L'enseignant présente la boîte et demande : « combien pensez-vous qu'il y a de pièces dans cette boîte ? ». « J'en enlève une poignée, combien y-en a-t-il dans la boîte ? »

A chaque question, les élèves produisent une réponse. Après chaque pari effectué, un élève vient vérifier.

Tant que l'élève n'envisage pas une possibilité de prévoir la solution, et donc n'imagine pas un moyen pour prévoir, le professeur ne peut pas lui faire comprendre qu'il lui pose un problème. La stratégie de base est le hasard. Vite les enfants apprennent ce qu'ils ont à faire : ils doivent trouver tous pareil ! Pour passer à un vrai problème, il ne faut pas à ce moment enseigner une méthode, même si ce contrat de la devinette est insupportable pour le professeur.

b) **anticipation de la solution** : « il y a 52 cubes dans la boîte. On en a retiré 50 » Combien y-a-t-il maintenant de cubes dans la boîte ? Les élèves pensent que la réponse

[6] Le travail présenté est issu de recherches menées (G.Brousseau, F.Martin) au COREM (Ecole Jules Michelet) depuis 1988. Il n'y a pas de compte-rendu précis de ce travail. On pourra consulter un texte de G.Brousseau dans « Ecole d'été de didactique des mathématiques » nov. 1989 dont j'ai pris plusieurs extraits. Je me suis servi d'un plan de cours de MH Salin 1997 à destination des PE2 ainsi que de travaux de B.Tressol et de M.Lamant.

est 2. Ils entrent dons dans une nouvelle position par rapport au problème (celle d'un sujet cognitif). Cela ne signifie pas que les élèves sauraient résoudre le même problème avec 52 et 34. (Une variable didactique s'impose : explicitez la).

L'enseignant s'enquiert de plus en plus souvent avant d'accepter le comptage « tu penses que tu vas gagner », « pourquoi » des raisons pour lesquelles l'élève fait telle ou telle déclaration.

Le point de départ des séances est un problème classique modélisé avec la boîte avec le concours de l'enseignant. Il faut se préparer une batterie de problèmes à partir des repères suivants :

- On fait varier les types de problèmes (transformations et états). (voir article G.Vergnaud « petit x » 1989 n° 22 PP 51 à 69.)
- on fait varier les nombres dans la fourchette (0,50) en tenant compte des rapports « texte-nombre » (ex : « je veux mettre 25 cubes dans la boîte, j'en ai déjà mis 23, combien dois-je en ajouter ? » et « j'ai mis 25 cubes, j'en enlève 23, combien en reste-t-il ? ». Les calculs produits par les élèves ont pour but de prévoir un résultat réalisé dans le milieu matériel. La vérification par comptage est nécessaire.

l'enseignant peut alors déclarer qu'il s'agit :

- Pour chacun d'apprendre à répondre en étant sûr de sa réponse, ou de savoir que l'on peut ne pas être sûr.
- Pour la classe de trouver, sans que ce soit le professeur qui l'enseigne, de dire quelles méthodes.
- Pour chacun, d'apprendre, y compris en regardant les travaux d'autrui.

Etape 2 : De la preuve par comptage à la preuve par addition. (3 séances).

Les séances commencent souvent par la résolution d'un problème classique modélisé par la boîte. *(Pour cela, se construire une liste de problèmes).*

Voir la leçon « *anticipation de la preuve et le pari* »[7] qui introduit la possibilité de revenir sur sa réponse et de la modifier si l'on se rend compte (par sur-comptage ou addition) qu'elle ne convient pas. A la troisième séance, l'addition est institutionnalisée comme moyen de prouver qu'une réponse est juste. Le comptage dans la boîte ne sera qu'exceptionnel, dernier recours accepté en désespoir de cause...

Etape 3 : de l'addition moyen de preuve à l'addition moyen de recherche (10 séances).

Les séances commencent souvent par la résolution d'un problème classique modélisé par la boîte.

- les élèves sont engagés à développer des méthodes par essais, mettant en œuvre de manière implicite des propriétés de l'addition et de la soustraction (4 séances) : les nombres sont compris entre 20 et 200.
- Certaines de ces méthodes sont étudiées et comparées. Elles peuvent venir de la classe ou être importées. (Même problématique que la division). L'addition à trou (nommée ainsi (attention : cf leçon vue plus haut)) est institutionnalisée. (6 séances).

Déclarations institutionnelles : « Votre calcul se sert de l'addition ». « L'opération est une soustraction ». « On écrit 84-28 ». « C'est aussi alors 56 ». « Donc 84-28 = 56 »

Etape 4 : Travail sur les problèmes : nombre de séances non déterminé a priori : cela dépend du contexte.

Il s'agit de continuer à travailler le sens et la résolution des problèmes de soustraction. Donc :

- travailler sur les types de problèmes soustractifs,
- mettre en œuvre la méthode usuelle de calcul (petit nombre sous grand nombre) (n'est pas exigée Imlen CE1.)

[7] Ici, une leçon détaillée est donnée.

- Travailler la question « qu'est-ce qu'un problème ? », en inventer, trier ceux que l'on peut résoudre ou pas, dire pourquoi, s'approprier le vocabulaire des problèmes (nombre connu, inconnu, question, solution, calculs, opération).

ANNEXE 6

Exemples de techniques de soustraction

démolition :

						16	
1	7	7		1		7	17
-	5	9		-		5	9
				1		1	8

Compensation :

1	7	7		1	17	17
-	5	9		1	51	9
				1	1	8

1	7	7		1	17	17
-	5	9		1	5 + 1	9
				1	1	8

Sans retenue :

1	7	7	5		1	7	7	5
-	8	9	2			9	9	9
						8	9	2
					c'est comme			
						7	7	6
					+	1	0	7
				donc		8	8	3

Remise à zéro :

1235	759
535	59
530	54
500	24
480	4
476	0

1235-759 = 476

Russe :

1235	759
1236	760
1276	800

1235-759 = 476

saut en avançant :

	1
759	
760	40
800	400
1200	35
1235	

1235-759 = 1+40+400+35=476 1235-759 = 476

La soustraction au 16° siècle : s'effectuait d'après Ramus (1586) **de la gauche vers la droite, avec résultat au-dessus** :

Soit à effectuer 675-357. On procédait ainsi :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & \cancel{2} & 8 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{7} \end{array}$$

Addition à trou :

	1	*1*			1	2	3	5
	7	5	9	ou	-	7	5	9
	4	7	6			*1*	*1*	
1	2	3	5			4	7	6

1235-759=476

comptabilité :

1	2	3	5
-	7	5	9
	5	2	4

500-24 = 476

L'addition à trou est "comptée" comme une addition. Elle présente un défaut qui est la place où l'enfant doit repérer le résultat de la soustraction qui n'est justement pas sous le trait horizontal.

Les sauts sur la droite.

Cette méthode présente de nombreux avantages, en particulier celui de laisser l'enfant maître du choix des valeurs des sauts. Cette technique est largement utilisée en calcul mental, et c'est sans aucun doute la meilleure méthode pour le calcul de la différence de deux durées.

La démolition présente l'avantage de pouvoir être décrite par une manipulation puisque "casser une dizaine" revient à échanger 1 dizaine contre 10 unités. En ce sens on peut la trouver séduisante. Elle présente cependant un inconvénient majeur lorsque le premier nombre contient de nombreux zéros, comme on peut le constater sur l'exemple "2000-394". Certains stagiaires proposent alors de remplacer cette opération par l'opération 1999-394" et d'ajouter 1 au résultat obtenu. Bien évidemment cela est tout à fait légitime et correct, mais une technique qui ne s'applique pas à tous les nombres de la même manière est une technique qui présente des sources d'erreurs nombreuses pour les élèves.

La course à zéro, est une technique qu'il est intéressante de proposer pour travailler la propriété relative à l'invariance de la différence de deux nombres lorsque l'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux termes. Cette technique peut être utilisée en "jouant" à deux : à tour de rôle chacun des partenaires demande à l'autre s'il est d'accord pour ajouter ou enlever un nombre choisi par lui. Après discussion et entente, les deux partenaires ajoutent ou enlèvent le nombre choisi. l'équipe a gagné quand elle atteint 0 dans la deuxième colonne. Il est possible ensuite de demander aux enfants de comparer le nombre de "pas" qu'ils ont effectués pour atteindre zéro, et de chercher à faire le minimum de pas.

La méthode usuelle (par translation)

Cette méthode s'appuie sur la propriété déjà citée de l'invariance de la différence de deux nombres quand on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux termes de la différence (propriété d'invariance de la différence par translation). En effet s'il n'y a pas assez d'unités, on ne casse pas une dizaine, mais on ajoute simultanément 10 unités au nombre du haut et 1 dizaine au nombre du bas, et ainsi de suite.

Remarquons qu'il il existe de nombreuses manières de "raconter" ce que l'on fait, donnons quelques exemples des premières phrases énoncées pour la soustraction 1235 - 759

- "5 moins 9, cela ne se peut pas, donc 15 moins 9, je pose 7 et je retiens 1 ..."
- "15 moins 9 (directement sans que l'on sache exactement d'où vient le 1 de 15), j'écris 7 et je retiens 1 ..."
- "9 pour aller à 5, cela ne se peut pas, donc 9 pour aller à 15, je pose 7 et je garde 1 en retenue ..."
- "9 ôtés de 5 cela ne se peut pas, 9 ôtés de 15, je pose 7 et je retiens 1 ..."
- "9 plus combien pour faire 15, 7 et je retiens 1.....
- etc.

Remarquons que certains commencent par lire les unités du nombre du haut tandis que d'autres lisent celles du nombre du bas.

De plus, la position et même le nombre de retenues varient beaucoup suivant la personne qui effectue le calcul, certains ne posent que celles du nombre du bas, soit devant le chiffre concerné (écrites en petit), soit en dessous, d'autres en placent une en haut (sur l'exemple devant le 5, pour que le 15 soit visible.

Inutile de dire les difficultés que les enfants rencontrent lorsqu'ils changent de maître puisque certains utilisent la technique par démolition, d'autres la technique par translation, avec une certaine "chanson", d'autres cette même technique mais avec une autre "chanson" etc.

Il paraît difficile de penser qu'il sera possible d'harmoniser tout cela, il me paraît plus raisonnable de faire prendre conscience aux maîtres de ces différences, des problèmes de compréhension qu'elles peuvent engendrer, et de les encourager à inciter les élèves à se construire leur propres méthodes de calcul en fonction des nombres concernés, ainsi

67 - 20 est un calcul qui se fait mentalement

300 - 195 est un calcul qui se fait facilement par sauts

554 - 287 est un calcul que l'on effectue plutôt en posant l'opération.

Remarquons qu'au 16° siècle en France, l 'algorithme de la soustraction s'effectuait à partir de la gauche, ce qui permettait d'évaluer dès le début du calcul l'ordre de grandeur du résultat.

La méthode que nous avons baptisée « comptabilité » se « base » sur un erreur classique des élèves. A partir de cela, comment interpréter les chiffres obtenus afin d'obtenir le résultat juste.

ANNEXE 7

Un exemple d'une séquence de formation, composée de trois séances de 3h, sur les problèmes additifs en PE2. *M-L. PELTIER*

Première séance

Je demande aux stagiaires de produire des énoncés de problèmes arithmétiques relevant d'après eux de l'addition ou de la soustraction (ou d'étudier une famille de problèmes additifs et soustractifs) soit en partant de la typologie de G. VERGNAUD soit en y aboutissant.

Pour chaque type de structure je présente des procédures de calcul qui pourraient être proposées par des élèves de manière empirique et la manière de les faire évoluer en jouant sur les variables à disposition.

Deuxième séance

Il s'agit dans cette séance

- de sensibiliser les stagiaires aux questions relatives à la construction du sens. Pour cela je m'appuie sur les différentes étapes dans la construction du sens présentées dans le "moniteur résolution de problèmes" (NATHAN), sur les travaux de J.JULO et j'introduis des éléments de l'article de D. BUTLEN et A DESCAVES paru dans les actes du colloque COPIRELEM de Limoges.
- de réfléchir aux différentes techniques pour calculer la différence de deux nombres et d'étudier les différentes manières de « dire la chanson » accompagnant la technique usuelle en partant des manières de faire des stagiaires eux-mêmes (la variété est grande).
- de proposer une progression sur la construction de la technique à l'école en insistant sur le fait qu'il me semble nécessaire d'attendre que les enfants ait pu construire le lien entre les énoncés de divers problèmes relevant de structures différentes mais nécessitant le calcul d'une soustraction et la recherche de la différence de deux nombres pour introduire la technique algorithmique en colonne. En effet celle-ci ne peut à mon avis prendre du sens que si les élèves conçoivent la recherche du résultat d'une soustraction en terme de différence de deux nombres puisque la technique s'appuie entièrement sur la propriété « d'invariance de la différence par translation ».

Troisième séance

Elaboration a priori d'un projet de progression sur l'étude des problèmes additifs et soustractifs et des techniques opératoires associées sur les cycles 2 et 3. Puis confrontation de ces projets avec les progressions proposées dans quelques manuels.