# GEOMETRIE A PLUSIEURS VOIX
## J.C. Aubertin, P. Masselot, M.L. Peltier, M.H. Salin
## (notes de H. Delègue et P. Eysseric)

Résumé : il s'agit de présenter plusieurs points de vue sur l'organisation de l'enseignement de la géométrie en PE1 à partir de plusieurs questions :

- Qu'est-ce qu'on appelle géométrie à l'école ? (le rôle des formes et des instruments)
- Quel est le style de validation qu'on peut mettre en œuvre ?
- Peut-on étudier la validation par argumentation avec les élèves ? avec les P.E. ?

## PRESENTATION DES CONTRIBUTIONS ET RESUME DES ECHANGES

Les quatre cours de géométrie qui nous ont été présentés dans cet atelier font apparaître des choix variés pour aborder ce domaine:

- Certains entrent par la géométrie dans l'espace (J.C. Aubertin); d'autres choisissent de ne pas faire très peu de géométrie dans l'espace avec les PE1 (M.H. Salin).
- Certains travaillent avec les PE1 les activités géométriques du premier volet et l'usage des démonstrations, d'autres (P. Masselot et M.L. Peltier) font le choix inverse en travaillant davantage sur le volet 2.

**Présentation par J.C. Aubertin :** *(contribution pages suivantes)*

Dès le début de l'année les PE sont confrontés à des problèmes de géométrie dans l'espace (pliages, cubes en bois peints et découpés). On constate que la plupart font des représentations en perspective pour mener leurs raisonnements. Ils sont confrontés à la question suivante : « quels sont les propriétés lisibles sur une perspective ? » ce qui conduit aux différents types de perspectives : on passe d'une lecture naïve de ces perspectives à leur lecture raisonnée (comment elles aident à analyser des propriétés, à conduire un raisonnement). Vient ensuite un cours magistral.

Echanges :

Dans le premier groupe les échanges ont d'abord porté sur le cours magistral : une synthèse de deux heures pour donner les définitions et les propriétés bien accueillie par les PE car elle arrive à un moment où ils ont besoin de cet apport d'informations. Puis quelques éclaircissements ont été demandés quant à l'absence d'informations théoriques au cours des TD : J.C. Aubertin insiste sur l'importance du débat à l'intérieur des groupes (réactions des uns face aux erreurs des autres, mutualisation des connaissances,...). Enfin le travail sur les perspectives comme aides au raisonnement est évoqué et quelques exemples facilement accessibles aux PE sont cités : tracer la perspective d'un cube, placer un point M sur une des représentations des faces et poser la question : où se trouve le point M ?

Les échanges dans le second groupe ont insisté sur l'intérêt de la géométrie dans l'espace pour favoriser la distinction entre l'objet géométrique et sa représentation. On est revenu aussi sur le cours "Positions relatives dans l'espace": l'objectif est l'utilisation de propriétés dans des démonstrations, mais il apparaît que l'acquisition d'une certaine habileté dans ce domaine est assez coûteuse en temps.

**Présentation de M.H. Salin :** *(contribution pages suivantes*

Je ne fais pas de géométrie dans l'espace avec les PE : ils ont besoin de travailler l'espace mais pas au sens du secondaire. Des situations sont rencontrées mais non travaillées pour elles-mêmes.
Se pose la question de la géométrie à l'école primaire : la géométrie peut elle être pilotée par ce qui se fait au collège ? Par exemple comment dénommer les points par des lettres alors que les élèves ont une conception globale des figures ?
Le mot de géométrie recouvre des domaines très différents :
- la résolution de problèmes spatiaux ;
- la résolution de problèmes mathématiques (déduction).

Présentation du module proposé à Bordeaux : cf. annexe
Ce module est constitué de quatre séances au cours desquelles les étudiants sont confrontés à des activités semblables à celle de l'école puis à s'interroger sur la démonstration. Elles sont suivies d'un cours magistral nécessaire pour leur donner une vue synthétique de ce qu'ils vont enseigner ; le module se termine par un TD d'analyse d'une séance de géométrie. En particulier les étudiants sont amenés à comprendre qu'il ne suffit pas de regarder l'espace sensible pour passer à l'espace géométrique, mais d'y résoudre des problèmes spatiaux en fonction de la taille de l'espace, de la nature des instruments et des supports.

Echanges :
Brève discussion sur le risque à développer les compétences spatiales hors de la géométrie et à introduire trop tôt la géométrie du collège.
A ce sujet l'utilisation de Cabri-géomètre est évoquée, ainsi que le statut du dessin de l'école au collège : en primaire la figure est un tracé, objet spatial sur lequel on travaille.

**Présentation par Pascale Masselot :** *(contribution pages suivantes*

Objectif : montrer que les savoirs didactiques sont utiles : chaque activité est soumise à un double regard . Exemple : pour « la fleur », faire varier les présentations du modèle.
Utilisation du travail proposé par Hervé Péault sur les quadrilatères (cela paraît plus facile à gérer pour un formateur débutant).
La suite du module est constituée d'analyse de travaux d'élèves. Aucun exercice du volet 1 n'est traité.

**Marie Lise Peltier :** *(contribution pages suivantes*

Les PE1 ont déjà fait des maths pendant des années, j'essaie plutôt de réactiver des connaissances. Les synthèses sont des petits points de cours marqués sur des fiches complétées au fur et à mesure.

Echanges :
Les échanges portent sur la place à donner aux démonstrations dans la formation des PE ; il semble y avoir un consensus sur le fait que les PE ne seront pas amenés à utiliser de démonstration et la nécessité de faire évoluer les sujets de concours afin d'éviter les démonstrations trop sophistiquées.

## SECONDE PARTIE DE L'ATELIER :ANALYSE D'UN SUJET DE DIDACTIQUE

Il s'agissait d'examiner les questions, leur pertinence, et de les situer plus particulièrement comme questions de mathématiques ou questions de didactique.
On trouvera ci-après le texte de ce sujet fictif, reconstruit à partir d'un sujet de concours interne Bordeaux, par J. BRIAND.

### I FICHE DE PREPARATION D'UNE SEANCE :

**Matériel :**

1°) 10 losanges découpés dans du canson fort. Ces 10 losanges (désignés a,b,c,d,e,f,g,h,i,j) sont répartis ainsi :

| | le premier nombre désigne la mesure en cm du côté, le deuxième, la mesure, en degré, d'un angle. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| famille 1 | a : 10- 70 | b : 12 - 60 | c : 15 70 | d : 13 - 60 | e : 12 - 70 |
| famille 2 | f : 10 - 85 | g : 12 - 85 | h : 15 - 85 | i : 13 - 85 | j : 12 - 90 |

2°) Les enfants ont à leur disposition par groupe, un double décimètre, du papier canson, des compas et des équerres.

**Description de l'activité :**

**1. Organisation de la classe :** Les enfants sont divisés en 5 équipes : A, B, C, D, E, F, G. Chaque équipe comprend 2 groupes : (appelés dans la suite groupe 1 et groupe 2).

**2. Consigne (5 minutes)**
*"J'ai découpé des figures géométriques dans du carton. Je vais donner une de ces figures à chacun des deux groupes de chaque équipe (une figure pour le groupe A1, une autre pour le groupe A2, etc). Les groupes 1 et 2 de chaque équipe ne se verront pas, mais pourtant ils travailleront ensemble.*
*Les groupes "1" enverront un message au groupe "2" de leur équipe contenant **tous les renseignements qu'ils jugent nécessaires** pour que ceux-ci puissent réaliser la figure sans la voir.*
*Les groupes "2" feront la même activité (en travaillant sur une autre forme) : ils enverront un message à leur groupe "1". Attention : il ne devra pas y avoir de croquis sur les messages. Les équipes qui auront gagné seront celles qui auront réalisé une forme superposable à la forme initiale."*

**3. Déroulement (15 à 20 minutes)**

Chaque groupe a donc une figure. Les enfants rédigent les messages. Dès que les messages sont terminés, la maîtresse les apporte aux groupes récepteurs correspondants. Les récepteurs réalisent la forme.
Dès que la forme est réalisée, ils vérifient avec la maîtresse par superposition (recherche, par groupe, de l'erreur).

Remarque : des travaux antérieurs ont permis, dans cette classe, de se mettre d'accord sur ce que sont deux formes superposables : deux formes sont déclarées superposables lorsque l'erreur de superposition ne dépasse pas 2 mm.

**4. Synthèse collective :**
Recensement des réussites et des échecs. La maîtresse demande aux enfants : "Parmi ceux d'entre vous qui n'ont pas réussi à faire construire une forme superposable, quelles ont été vos difficultés ?"

## II VOICI QUELQUES EXEMPLES DE MESSAGES RECUEILLIS A L'ISSUE DE LA SCEANCE :

M1 : A propos de g : *"C'est un carré, chaque côté fait 12 cm"*
M2 : A propose de i : *"C'est presque un carré. Les côtés font 13 13 13 et 13 cm. "*
M3 : A propos de b : *"Dessinez un triangle Les côtés font 12cm, 12cm, 12cm. Dessinez un autre triangle pareil qui touche le premier.*
M4 : A propos de d : *"C'est comme un carré. Il a 4 côtés. Les côtés font tous 13 cm. la longueur entre les pointes est de 22,5 cm "*
M5 : A propos de e : *"C'est un carré penché. Chaque côté fait 12 cm."*

## III DEUXIEME SEANCE

Reprise de l'activité, la maîtresse donne des losanges variés. Le taux de réussite est bon (utilisation de messages de type M3 ou M4)

## *IV QUESTIONS :*

1) Le mot "carré " est utilisé à plusieurs reprises. Faites une hypothèse sur les différentes conceptions des élèves sur le carré que laissent apparaître ces messages.

2) **Démontrez** que les messages M3 et M4 permettent bien de recréer respectivement le losange b et le losange d.

3) Soit un polygone convexe de 5 côtés. Imaginez un type de message possible s'appuyant sur la procédure utilisée dans le message M3.

4) Quelle était l'intention du concepteur de la séquence en proposant des losanges proches d'un carré ?

5) Qu'est ce qui , d'après vous peut être institutionnalisé à l'issue de ces deux séances ?

6) Les réponses proposées par les élèves permettent-elles de prendre une décision sur l'ordre selon lequel pourraient être abordés le carré, le rectangle, le triangle, le losange, le parallèlogramme et le trapèze ?

## Contribution de J-Claude Aubertin

# GEOMETRIE DANS L'ESPACE EN PE1

### 1.1.1. Mes intentions sont multiples :

- faire comprendre ce qu'on entend par "démontrer", "montrer" ou "justifier" dans les énoncés du 1er volet du CRPE.

C'est la raison pour laquelle je commence très vite la préparation des PE1 par un exercice de ce type, qui "casse" en partie la tendance de certains étudiants à répondre aux questions des énoncés de géométrie par « on voit (sur la figure) que ... ».

- accoutumer à certains types de sujets du 1er ou du 2ème volet ;

- rappeler ou donner quelques éléments de géométrie "basique" à 3 dimensions ;

- faire connaître les IO et quelques activités de l'école élémentaire concernant ce domaine.

### 1.1.2. Mes ouvrages de référence sont :

- Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE - choix de sujets 92 - 93 - 94 COPIRELEM IREM d'Aquitaine (1995)

- Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de PE - tome 2 R. Charnay et M. Mante - Hatier Pédagogie (1996).

- Mathématiques 1 : Mesure Géométrie Transformations géométriques coll. enseigner à l'école élémentaire - D. Le Boursicot et J-L. Ripoche Delagrave (1988).

En tout début d'année je fais vivre aux PE1, partagés en petits groupes, quelques problèmes, présentés comme « de petits problèmes pour trouver du plaisir à faire des maths ». Selon les années, et donc mon humeur du moment, il y a des problèmes comme « le cube en bois trempé dans la peinture », ou « la boîte du pâtissier », et il s'agit donc d'un premier contact, plus ou moins explicite et explicité, avec des mathématiques en 3 dimensions.

Cette année, dans les 5 heures sur 70 que j'ai consacrées à la partie Géométrie dans l'espace proprement dite, j'ai suivi ce parcours :

1. Intoduction avec le 1er volet de Grenoble 94 et Lille 95

2. Lille 94 (1er volet)

3. Cours magistral :
    - Introduction avec le besoin d'un support visuel pour travailler un problème géométrique, mais « dessiner, c'est tricher ! ».
    - Polyèdres
    - Perspectives : cavalière, axonométriques, artistique (ou conique).
    - Patrons de solides.
    - Positions relatives dans l'espace, parallélisme et orthogonalité

4. Des exercices à faire chez eux.

5. Rennes 98 (2ème volet)

6. Caen 94 (2ème volet)

D'autres sujets peuvent être utilisés pour la partie 1er volet :

Caen 95, Toulouse 94, Toulouse 97, Rennes 97 (sphère), Antilles 97, ...

## Contribution de Marie-Hélène Salin

# UN EXEMPLE DE PROGRESSION POUR TRAVAILLER "LA QUESTION DE LA GEOMETRIE"

### *A La question de la géométrie*

Dans un colloque précédant celui-ci, C.Houdement et A. Kuzniak ( Montpellier 1996) s'interrogeaient : "faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres premier degré ?" Si la question se pose, c'est que le vocable "géométrie" recouvre un domaine de connaissances à la fois vaste et flou, ce qui explique les variations très grandes qu'a subi et continue de subir son enseignement en primaire et au collège. Aussi il nous apparaît prioritaire de fournir des repères aux étudiants en nous appuyant sur les distinctions présentées par ce texte[1] :

**"Les deux champs de connaissances recouverts par le terme "géométrie" à l'école primaire.**

Ce que la tradition appelle "enseignement de la géométrie", renvoie, à l'école primaire, à deux champs de connaissances : d'une part à celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels avec l'espace, champ désigné dans les programmes antérieurs par "structuration de l'espace", d'autre part au champ de la géométrie proprement dite.

Savoir prendre, mémoriser, exploiter (en particulier communiquer) des informations spatiales pour se déplacer, pour reconnaître ou construire des objets nécessite des apprentissages qui ne s'effectuent pas spontanément. C'est le cas par exemple de l'utilisation de plans, en situation réelle.

Ces connaissances ne sont pas toutes facilement explicitables dans les termes de la géométrie ; elles relèvent aussi d'autres disciplines comme l'EPS ou la géographie, mais elles constituent les bases nécessaires à toute maîtrise, plus fine, de certaines activités humaines qui se développent en relation avec l'espace. Ainsi, la représentation des objets en perspective pose des problèmes importants à des élèves de 15 ans qui n'ont jamais eu l'occasion de se poser la question de la différence entre ce qu'ils **voient** d'un objet et ce qu'ils en **savent**.

Le champ de la géométrie proprement dite, lui, constitue un savoir mathématique, élaboré au cours de l'histoire, dont l'intérêt pour les jeunes de la scolarité obligatoire est double :

* La géométrie constitue un outil pour répondre à des problèmes de l'espace physique posés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales et culturelles;

* Elle est un lieu privilégié de l'initiation au raisonnement mathématique. A l'école primaire, ce deuxième aspect est limité : les enfants de cet âge ne peuvent accéder à la démonstration mais, en fin de cycle 3, la plupart d'entre eux, confrontés au problème suivant qui leur est communiqué par écrit et sans figure, peuvent fournir la bonne réponse et la justifier convenablement, : *on a donné à un enfant une figure qui ressemble beaucoup à un carré, en lui disant de vérifier si c'est bien un carré. Il a mesuré les quatre côtés et trouvé qu'ils étaient de même longueur. Il a vérifié ensuite un angle avec son équerre. Il a trouvé qu'il n'était pas droit. Il a alors dit : Ce n'est pas la peine que je vérifie les autres angles, je suis sûr que cette figure n'est pas un carré." Es-tu d'accord avec lui? Justifie ta réponse."*

[1]Extrait d'un texte rédigé par la commission chargée (en 93) de la rénovation des programmes de mathématiques à l'école primaire. Ce texte n'a jamais été publié.

## B Les objectifs du travail en PE1

1. Comprendre ce qui différencie la nature et les objectifs des « activités géométriques » à l'école primaire et au collège.

2. Prendre connaissance et analyser les différents types d'activités utilisées dans cet enseignement à l'école primaire.

3. Reprendre un certain nombre de connaissances géométriques enseignées à l'école primaire et au collège, les faire fonctionner dans une problématique "spatiale", dans une problématique "géométrique".

4. Commencer à prendre connaissance et à analyser les comportements des élèves du primaire confrontés aux activités géométriques

## C Les différentes étapes et leur articulation

**Séquence 1** : Reproduire un dessin, un objet spatial.

**Séquence 2** (Annexe 2) : Faire reproduire à quelqu'un un dessin, un objet spatial.
L'émetteur décrit ou représente, le récepteur construit.

*Au cours de ces deux premières séquences, les étudiants sont confrontés à des activités semblables à celles préconisées par les programmes pour l'école primaire mais plus difficiles. Leur réalisation permet :*

*- d'introduire en situation le vocabulaire « reproduire, décrire, représenter, construire », de faire sentir la nécessité d'un travail sur les notations, la schématisation.*

*- de montrer la richesse et l'intérêt des situations de communication, mais aussi leur complexité particulière dans le cadre géométrique, liée aux erreurs de mesures et de tracés.*

*- d'illustrer de manière efficace le concept de variable didactique, en faisant varier les supports, les instruments, la possibilité ou non de confronter à tout moment le modèle et sa reproduction en cours de fabrication, etc.*

*- de reprendre un certain nombre de concepts de base en géométrie.*

**Séquence 3** : Conjecturer et démontrer (1). (Annexe 3)

**Séquence 4 :** Conjecturer et démontrer (2).

** La première partie de la séquence 3 a pour but de faire s'interroger les étudiants sur des phénomènes qui ne peuvent s'expliquer que parce que l'espace de la feuille de papier n'a pas exactement les mêmes propriétés que l'espace géométrique et donc de différencier deux problématiques : la problématique spatiale dans laquelle je dirai par exemple qu'un angle est droit si je peux le vérifier avec mon équerre, et la problématique géométrique dans laquelle je dirai qu'un angle est droit si je peux déduire cette propriété d'autres informations sur la figure tenues pour vraies.*

** La suite de cette séquence et la séquence suivante ont pour but la reprise de quelques théorèmes importants et la pratique de quelques démonstrations.*

** La liaison entre les deux points de vue, spatial et géométrique, est retravaillée dans le devoir (annexe 5)*

*Des exercices complémentaires sont à rechercher entre chaque séance pour aborder des thèmes non centraux en PE1 (ex : les transformations) ou prolonger l'étude de certains sujets.*

**Séquence 5** : Cours : "L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire" (plan en annexe 4).

**Séquence 6** : Analyse didactique d'une séquence de géométrie
*Le cours constitue une synthèse du travail d'analyse réalisé auparavant. Il a pour but d'attirer l'attention des étudiants sur des difficultés particulières à l'enseignement de la géométrie en primaire et non de leur proposer des modèles de situations didactiques. La progression exposée et ce cours s'appuient sur les résultats de notre thèse (Berthelot R. & Salin MH : l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire ), présentés de manière succincte dans le N° 53 de Grand N.*
*Il est suivi d'un TD de didactique préparé individuellement par les PE1 avant le cours, qui, (une fois n'est pas coutume) est constitué des parties « travaux d'élèves » et volet 2 d'un sujet de concours blanc, réalisé par des collègues de l'IUFM, ces deux parties étant bien sûr complètement articulées. Ce sujet, modifié dans un atelier du colloque COPIRELEM de Douai (1995), a été publié dans les Actes p. 195 à 197 ; c'est celui sur lequel portera la deuxième partie de l'atelier.*

****************************************************************************

Annexe 1
**IUFM d'Aquitaine**

**Précisions données par les formateurs sur les connaissances de géométrie pour le concours (plan 95-999)**

- celles exigibles des élèves jusqu'à la 5ème incluse
- une partie de celles nécessaires aux démonstrations relevant de l'enseignement au collège et plus précisément :
    * Connaissances des propriétés métriques et angulaires des triangles et des quadrilatères.
    * Médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle et leurs propriétés dans le triangle.
    * Théorème de Pythagore et sa réciproque.
    * Théorèmes des milieux et de Thalès dans le triangle et leurs réciproques.

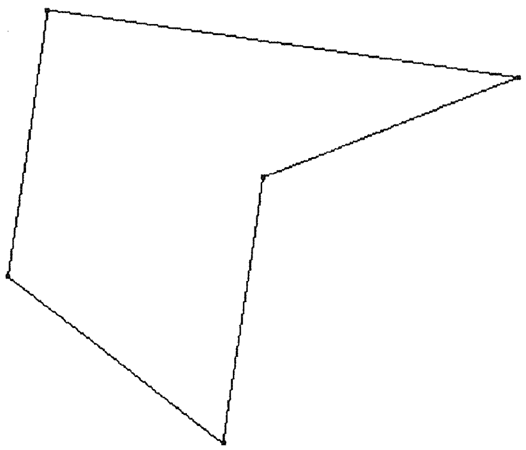
Annexe 2

**Module 3-2 Décrire un objet géométrique et / ou le construire à partir d'une description**

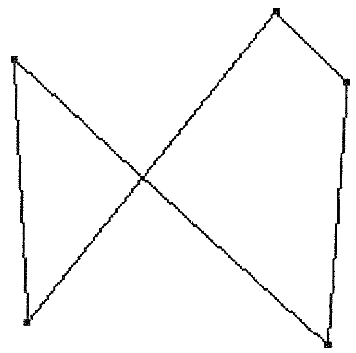
Décrire prend du sens dans une situation de communication où les tâches des émetteurs et des récepteurs sont différentes.
*Il s'agit pour l'émetteur de produire et communiquer des informations permettant à un récepteur de construire un objet géométrique identique au modèle.*

**Activité 1**
L'objet géométrique est un assemblage de cubes. Aucune contrainte n'est fixée aux émetteurs qui peuvent utiliser les moyens de description qu'ils veulent : texte, dessins, schémas, etc...

**Activité 2**
L'objet géométrique est une figure dessinée sur une feuille (voir ci-dessous). Il est demandé aux émetteurs d'utiliser une description qui ne comporte pas de dessin ni de schéma.
Les instruments utilisés sont différents suivant les tâches.



demi-classe 1



demi-classe 2

**Activité 3**
Le meneur de jeu dispose d'un triangle dessiné T. les participants doivent par équipe, lui demander par écrit les renseignements leur permettant de construire un triangle superposable à T. Gagnent les équipes qui ont réussi à construire le triangle superposable en demandant le moins de renseignements possible.
La phase d'action est suivie d'un examen collectif des listes de demandes de renseignements : celles qui permettent de réussir et les autres. Des conclusions plus générales sont tirées.

************************************************************************

Annexe 3

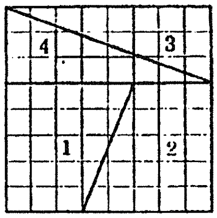
**Séquence 3 Conjecturer et démontrer (1)**
Objectifs : différencier approche spatiale et approche géométrique et expliciter la signification de la phrase "Faire de la géométrie, c'est raisonner juste sur des figures fausses".

**Activité 1**
Construire un segment [AC] de 6 cm de longueur. Construire un triangle ARC tel que AR mesure 4,8 cm et RC 3,6 cm. Construire un triangle TAC tel que TA et TC mesurent 4,2 cm.
A l'aide de vos instruments de géométrie, répondez aux questions suivantes :

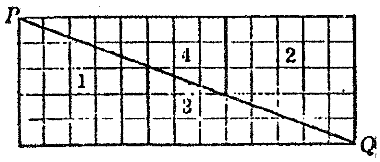
1) ARC est-il un triangle rectangle? et TAC ?
2) O désigne le milieu de [AC]. Le triangle TOR est-il isocèle ?
3) Tracer le cercle de diamètre [AC]. T et R sont-ils des points du cercle?
Refaites la figure en multipliant les mesures par 2. Faites-vous les mêmes réponses ?

**Activité 2** (Réflexion sur une activité proposée en 5ème)
Consigne donnée par le professeur aux élèves (qui n'ont jamais réalisé cette figure) : "Tracez un triangle ABC dont un angle est obtus et les côtés de longueur supérieure à 10 cm. Tracez les 3 médiatrices de ce triangle à l'aide d'une équerre. Vous obtenez un petit triangle A'B'C'. Essayez de construire des triangles pour lesquels le triangle formé par les intersections des médiatrices soit beaucoup plus grand."
Effectuez les constructions demandées, précisez ce qui se passe et essayez d'expliquer pourquoi le professeur donne cette consigne aux élèves.

**Activité 3 : Le paradoxe de Lewis Carrol** (ou comment vérifier que 64 = 65)



(a)



(b)

**Prenons une feuille de papier carrée et divisons-la en 64 petits carrés, comme un échiquier. Découpons-la de manière à avoir deux triangles et deux trapèzes comme sur la figure 19 (a), et disposons ces morceaux comme l'indique la figure 19 (b). Le rectangle ainsi obtenu a des côtés qui mesurent respectivement 5 et 13 unités de longueur, de sorte que la surface est $5 \cdot 13 = 65$ petits carrés, alors que la figure dont on était parti mesurait $8 \cdot 8 = 64$ petits carrés. D'où est venu le carré supplémentaire?**

Quelles questions pose l'existence des phénomènes relevés au cours de ces trois activités ?

Annexe 4

## Plan du cours sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire

### *PRÉSENTATION DES CONTRIBUTIONS ET RESUME DES ECHANGES*

1.1.1. Mes intentions sont multiples :
1.1.2. Mes ouvrages de référence sont :

**A La question de la géométrie**

**B Les objectifs du travail en PE1**

**C Les différentes étapes et leur articulation**

### *EXEMPLE DE COURS EN PE1*

Les notions d'analyse a priori et de variable didactique sont introduites de façon contextualisée par rapport à l'analyse des choix effectués concernant les figures ( type de figure et support ), le mode de travail (situation de communication), les contraintes matérielle. Les limites d'une situation de communication, au niveau de la validation des messages, sont également évoquées.

Référence : Quadrilatères particuliers, H. Péault, stage de Cahors 1991

Annexe 5

## Devoir (partie mathématique) donné en fin de module

I) Voici deux des messages envoyés par des émetteurs pour décrire le pentagone non croisé de la séquence 3-2

**Message 1**

- Tracer un segment [AB] de 5 cm,. Reporter une longueur de 10 cm en B et une longueur de 8,6 cm en A. Noter C le point d'intersection.
- Tracer les segments [BC] et [CA]
- Noter D le milieu de [CB]. Effacer le segment [OB].
- Reporter une longueur de 5 cm en B et de 5 cm en D. Noter E le point d'intersection
- Tracer les segments [DE] et [BE].

**Message 2**

La figure est composée d'un losange et d'un triangle.
Le triangle ABC est isocèle. AB = AC = 5 cm et BC = 8,6 cm.
AC sera un côté du losange ACDE
Le losange comporte 4 côtés égaux de 5 cm. AD et CE seront les diagonales.
AD = 5 cm, et CE = 8,6 cm.
Un angle droit est formé entre BC et CD. Ainsi, B,A,et D seront alignés. La figure obtenue sera un polygone ABCDE.

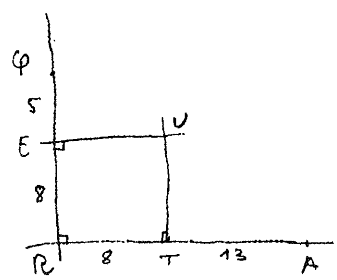
**Questions :**

1) Réécrire ces messages, sans en modifier les informations mais en utilisant les formulations et les notations correctes enseignées au collège.
2) Si l'on construit la figure à partir des instructions du message 1, montrez que l'on peut justifier, en s'appuyant sur une démonstration, l'énoncé de toutes les propriétés données par la description 2.
3) Le message 2 est redondant. Donnez-en une version allégée, correspondant à la même décomposition de la figure mais comprenant le nombre minimum d'informations nécessaires à sa réalisation.

II) D'après le sujet Bordeaux 94

A)

Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en centimètres.
1) Décrivez cette figure, pour que quelqu'un qui ne dispose que de votre description puisse la construire.
2) Démontrez que l'on peut construire la figure en ne construisant qu'un couple de droites perpendiculaires. Effectuez la construction à la règle et au compas.
3) Quelle conjecture pouvez vous faire à propos des points Q, U, et A?
En vous appuyant sur la comparaison de l'aire du triangle QRA, et de la somme des aires des triangles QEU, TUA, et du quadrilatère REUT, confirmez ou infirmez cette conjecture par une démonstration.
4) Trouvez une autre méthode pour démontrer ce résultat.



## Contribution de Pascale Masselot

# EXEMPLE DE COURS EN PE1

Introduction

Les nouveaux formateurs sont généralement d'abord amenés à enseigner les mathématiques à des groupes de PE1. Il semblerait, selon une certaine « logique », inévitable de commencer par le début de la formation des Professeurs d'école. Différents arguments peuvent être avancés. D'une part le contenu mathématique est plus proche de celui des cours de collège et plus « académique » en ce qui concerne la didactique des mathématiques. D'autre part, il serait plus « facile » de préparer à un concours dont les sujets sont répertoriés dans des annales. Enfin, le public est plus « facile » dans le sens où les premières attentes des étudiants sont en priorité la préparation aux épreuves du concours avec l'objectif plus « lointain » d'une formation au « métier » de professeur des écoles.

Cette supposée « logique » peut cependant être remise en cause. Les PIUFM ne suivent pas les PE1 lorsqu'ils sont dans des classes de l'école primaire (stage ...), il leur est difficile de « deviner » les manques, les préoccupations, les éventuelles difficultés d'un étudiant au cours de sa formation d'autant plus qu'ils n'ont pas été au contact de stagiaires (PE2). Mais les nouveaux formateurs n'ont en général qu'une connaissance très parcellaire du premier degré et ceci entraîne des difficultés à aider les stagiaires à formuler des questions et des difficultés pour apporter des réponses. Pourtant l'observation des pratiques effectives d'un stagiaire permettrait au formateur de mieux mesurer la distance entre la maîtrise des connaissances mathématiques, la capacité à analyser des productions, des projets de séquences et la mise en œuvre de ces compétences en situation de classe.

Documents disponibles pour un nouveau formateur

Avant de décrire les options choisies pour un scénario de cours sur des notions de géométrie plane en PE1, il semble utile de rappeler les différents types de documents disponibles actuellement pour un nouveau formateur.
Ils appartiennent à plusieurs catégories qui sont par exemple caractérisées par le critère « type de lecteur » ( voir bibliographie publiée dans document du stage COPIRELEM de Colmar):
- Ceux qui sont dans les classes, à l'usage des élèves et des enseignants :
Les manuels scolaires destinés aux élèves de l'école élémentaire et les livres du maître associés dans lesquels les auteurs précisent leurs intentions destinés aux enseignants ; le « matériel » disponible dans une classe.
Les publications de type JDI, La Classe ...
- Ceux destinés aux enseignants proposant et analysant des progressions ou des situations :
La collection ERMEL, les publications de l'INRP, la revue Grand N, certaines publications des IREM
- Ceux destinés aux étudiants en formation pour se préparer au concours : les annales, les livres de Charnay ... , Pauvert ..., Briand ... ou pour se préparer au métier : les livres de Dubois, Fénichel et Pauvert "Se former pour enseigner les mathématiques".
- Et enfin ceux destinés plus directement aux formateurs : actes des colloques, actes des stages COPIRELEM « documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des

mathématiques » (Cahors 1991, Pau 1992, Colmar 1993, Angers 1995, Rennes 1996, Besançon 1997)
- Ceux qui sont destinés à tout lecteur souhaitant approfondir certains points : rapports de recherches, thèses ou livres tels ceux de Fayol, Brissiaud, Julo, Descaves, Aberkane...

Nous pouvons donc apprécier la quantité, la variété et même la richesse des sources actuellement disponibles pour élaborer un cours destiné aux étudiants en première année à l'IUFM.

Cependant les documents les plus directement utiles (dans le sens où une certaine partie de la transposition est déjà effectuée) pour le nouveau formateur sont ceux qui décrivent des pratiques de formateur donc l'avant-dernière catégorie citée. Ils ne fournissent pas une progression, un planning complet ! Mais certaines des situations proposées et analysées sont « directement » reproductibles avec quelquefois des suggestions de « variantes ». A partir de là, le formateur peut ensuite compléter, illustrer, personnaliser en y insérant ses propres « connaissances » et son éventuelle expérience d'enseignant.

Les documents qui ont servi pour élaborer le scénario de cours, dont le résumé suit, sont ainsi extraits des actes des colloques ou des stages COPIRELEM. Certains exemples sont extraits de sujets de concours pris dans les annales.

Un détour par le programme défini pour la première année de formation à l'IUFM de Créteil permet de préciser les contenus par rapport à la **géométrie** :

> Sans se restreindre au seul programme de l'école élémentaire, les notions ci-dessous ne seront traitées que dans la mesure où elles éclairent leur enseignement à l'école élémentaire.
>
> **Caractériser certains objets mathématiques**
>
> Connaître les différentes propriétés caractéristiques des objets cités ci-après, permettant de les définir, les classer, les reconnaître dans une configuration donnée, les représenter et justifier leur construction.
> Connaître les notations et vocabulaire adéquats.
>
> Une droite, une demi-droite, un segment.
> Un polygone concave, convexe, régulier (en particulier triangle et quadrilatère).
> Un cercle.
>
> **A propos de configurations particulières**
>
> Connaître leurs propriétés.
> Savoir les construire à la règle et au compas.
> Savoir faire des démonstrations élémentaires permettant d'établir la nature d'une configuration.
>
> Droites parallèles et perpendiculaires.

Triangles :
- Angles dans un triangle,
- Droites remarquables dans un triangle (hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices), connaître leur propriété d'être concourantes,
- Cercles inscrit et circonscrit à un triangle,
- Milieux des côtés d'un triangle, propriétés, cas particuliers du théorème de Thalès,
- Triangles particuliers : rectangle, isocèle, équilatéral, caractérisation à partir des côtés, des angles, des axes de symétrie,
- Triangle rectangle : théorème de Pythagore et réciproque, cercle circonscrit.

Quadrilatères :
- Propriétés relatives aux côtés, aux angles, aux diagonales,
- Eléments de symétrie,
- Quadrilatères particuliers (trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré).

Hexagone et octogone réguliers.

Et à propos de l'ensemble des notions :

Chaque fois qu'une notion mathématique s'y prête particulièrement, on aborde les questions de **raisonnement** : d'argumentation, de preuve, de démonstration.

A propos des thèmes précédents, les différents aspects de la **résolution de problèmes** sont mis en évidence :
- sa place dans la construction des mathématiques (point de vue épistémologie),
- son rôle dans la construction des connaissances (point de vue cognitif),
- ses fonctions dans l'enseignement (point de vue didactique et professionnel).

A l'occasion de situations d'enseignement et à partir d'activités portant sur les thèmes définis ci-dessus, on utilise et explicite différents **outils de la didactique des mathématiques** afin d'aider les étudiants à :
- comprendre ce qui caractérise une situation de référence relative à une notion ou à une famille de notions,
- commencer une analyse a priori,
- reconnaître les variables d'une situation,
- différencier situations d'apprentissage et situations de contrôle,
- identifier différentes phases d'une situation d'apprentissage,
- analyser et classifier des procédures d'élèves et des types d'erreurs relativement à un savoir donné (la notion d'obstacle sera traitée à cette occasion).

Les objectifs du formateur sont donc d'intervenir à plusieurs « niveaux ». Les savoirs mathématiques ne sont qu'une entrée pour amorcer une réflexion sur d'autres savoirs « utiles » au futur enseignant. Les savoirs didactiques figurent parmi ceux-ci et sont maintenant « reconnus » ...

Il semble difficile de « cloisonner » et de faire d'une part des « exercices » de maths, d'autre part des analyses de productions d'élèves et enfin des analyses de documents pédagogiques, même si c'est ce découpage qui apparaît dans la forme du sujet du concours.

A travers les situations proposées, le formateur vise des objectifs concernant les connaissances mathématiques et didactiques. Il cherche d'une part à ne pas seulement « exposer » ces connaissances et d'autre part à les faire reconnaître comme utiles pour la pratique d'un enseignant et pas seulement pour réussir au concours.

Exemple de cours en PE1 sur le thème « géométrie plane : analyse et construction de figures »

Les différentes notions abordées dans cette progression concernent au niveau des mathématiques : le vocabulaire et les notations de géométrie plane ; l'analyse de figures complexes et la définition et les propriétés de certaines figures simples ; les constructions à la règle et au compas et au niveau didactique : l'analyse a priori d'une situation, la notion de variable didactique, la comparaison de différents types de situation, la notion de contrat.

Plan du cours (séances de 3h):

***Première séance* : situation de communication : reproduction et construction de figures**
***Activités proposées à l'étudiant : analyser une figure, la reproduire, rédiger un programme de construction, exécuter une construction.***
*Référence : Utilisation du document « la fleur » en FP1, M.-L. Peltier, Actes du XVII ème colloque des PEN Paris 1990*

Mise en scène :
Le groupe d'étudiants est partagé en deux sous groupes installés dans deux salles distinctes. Dans chaque salle une figure (la fleur et *une figure sans nom* ) est exposée au tableau. Dans un premier temps les étudiants doivent reproduire cette figure ( les contraintes sur le matériel sont à fixer par le formateur) puis ils doivent rédiger un message (de type programme de construction) destiné à un étudiant de l'autre sous groupe qui devra à son tour, ne disposant que du message, construire la figure qu'il n'aura pas vue (des contraintes sur le matériel, le niveau de formulation peuvent être données ou non). Les messages peuvent être retournés avec des questions si le récepteur a besoin de précisions. A la fin de l'activité chaque émetteur récupère son message et la construction du récepteur.

Cette séance est la première séance de géométrie proposée. Elle permet donc une reprise de contact avec les instruments puis avec le vocabulaire. Les figures sont choisies de façon à ce que l'analyse de chacune ne soit pas « immédiate », une réflexion s'impose pour réussir la construction (déterminer les centres et les rayons des arcs de cercles). Ensuite la phase de rédaction des messages fait émerger de nombreuses questions (auxquelles le formateur ne répond pas immédiatement) par rapport au vocabulaire. Le fait que la validation soit interne à la situation crée une plus forte motivation (en plus, l'anonymat des messages induit une certaine cohésion au niveau du groupe ...). ( Une troisième figure est prévue pour les « rapides », figure à reproduire seulement ou programmes de construction à exécuter).

La séance se termine généralement au moment de cette étape, quand chacun a récupéré son message et la figure qui en a découlé. Cependant s'il reste du temps, il est possible de faire le point sur l'analyse des figures présentées en montrant essentiellement qu'elles sont choisies de façon à ce que tout ne soit pas « visible » immédiatement et en signalant la régularité, pour la fleur, au niveau de la prégnance de la rosace ! Il se trouve en plus que pour la seconde figure l'utilisation de la construction de l'hexagone régulier est pertinente mais pas « visible » directement. Le fait qu'il existe plusieurs « méthodes » pour les constructions (et qu'ils ne doivent pas espérer avoir « la » solution) est évoqué ainsi que pour les messages associés, y compris plusieurs types de messages pour la même « méthode » de construction selon le niveau de formulation ...

Toutes les productions (reproduction et message de l'émetteur, construction du récepteur) sont récupérées et rendues lors de la séance suivante, avec des commentaires « personnalisés », individuels. Ceci permet de mieux se rendre compte des manques pas toujours faciles à formuler.

***Deuxième séance : à partir de la situation précédente***
***- rappels concernant le vocabulaire, les notations, l'utilisation des instruments***
***- retour sur la situation proposée en se plaçant du côté de l'enseignant***

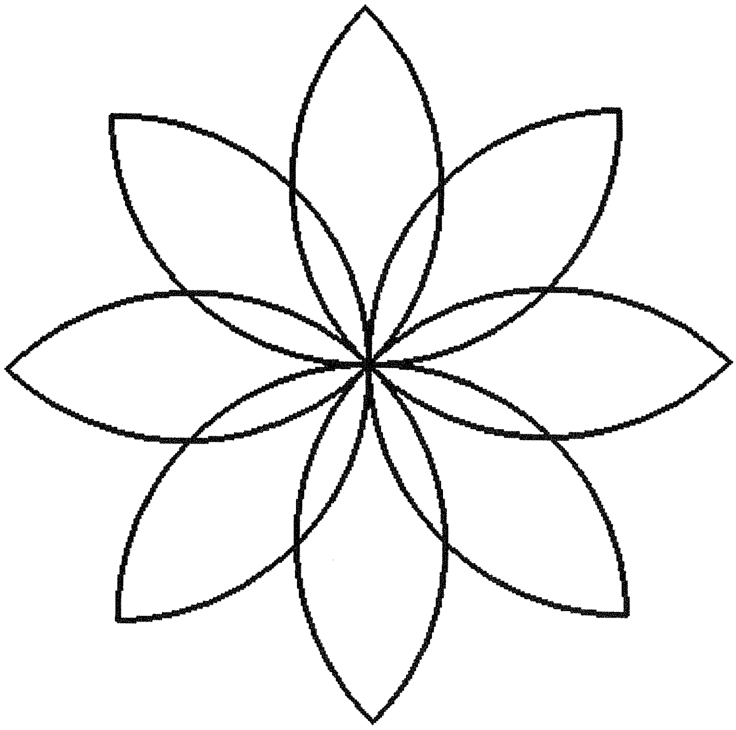
A partir de l'analyse des productions et des raisons pour lesquels certains échanges n'ont pas abouti lors de la situation précédente, certaines conventions et définitions des notions géométriques ainsi que les propriétés géométriques justifiant l'usage des différents instruments en liaison avec les constructions à effectuer sont clarifiées et précisées. Cela permet de justifier le fait d'imposer certaines contraintes au niveau du matériel (papier blanc, seulement la règle et le compas ...). Cela permet également de souligner les erreurs qui se situent au niveau du vocabulaire. La comparaison porte également sur les " styles " des messages et amène une conclusion par rapport à la rédaction d'un programme de construction. Les étudiants proposent souvent de rédiger à nouveau un message ... (échange individuel avec le formateur)

Ainsi sont rappelées les définitions et constructions à la règle et au compas de la médiatrice d'un segment, de la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, de la parallèle à une droite passant par un point donné, de la bissectrice d'un secteur angulaire, du report d'un angle, des droites remarquables dans un triangle, des triangles particuliers ...

Les notions d'analyse a priori et de variable didactique sont introduites de façon contextualisée par rapport à l'analyse des choix effectués concernant les figures ( type de figure et support ), le mode de travail (situation de communication), les contraintes matérielle. Les limites d'une situation de communication, au niveau de la validation des messages, sont également évoquées.

Les liens avec l'épreuve du concours et le transfert possible à l'école élémentaire font ensuite l'objet d'une explicitation. Ceci relève de contrat entre le formateur et les étudiants qui attendent d'abord d'être préparés au concours.

Le document de l'APMEP (Bulletin vert n° 371, décembre 89, pages 659 à 670, article de Y. Ducel et M.L. Peltier) relatif à "La fleur" est distribué aux étudiants.



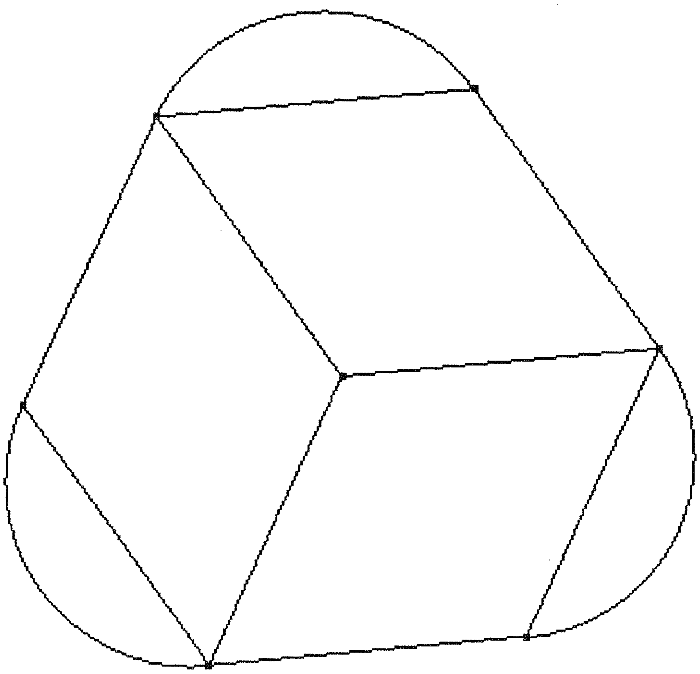


Figure constituée de 3 losanges et de 3 arcs de cercle.

***Troisième et quatrième séances : figures géométriques élémentaires (quadrilatères particuliers)***
***1ère activité : deviner un quadrilatère en posant des questions***
***Réorganiser les connaissances géométriques sur les quadrilatères***
***2ème activité : reproduire un quadrilatère caché à partir d'informations données ou à demander***
***Organiser des informations géométriques …***
***Réaliser des constructions élémentaires à l'aide des instruments usuels***
***3ème activité : élaborer des consignes pour la construction d'un quadrilatère avec des contraintes***

*Référence : Quadrilatères particuliers, H. Péault, stage de Cahors 1991*

De la même manière, les étudiants sont d'abord amenés à expérimenter « en tant qu'élève » ces situations puis le formateur à partir des « manques » qui sont apparus, précise un certain nombre de notions ou propriétés mathématiques. Ensuite l'analyse des activités permet de faire réfléchir les étudiants sur le travail de l'enseignant.
(analyse a priori, variables didactiques, contrat , statut de l'erreur …)

Quelques exemples d'exercices extraits des sujets de concours (première partie, premier volet) sur ces thèmes (reproduction de figures, rédaction de programmes de construction, utilisation des définitions et des propriétés des quadrilatères …) sont donnés à faire (facultatif !) pour s'exercer …

***Cinquième séance :***
***Analyse de productions d'élèves (extraits des sujets)***

Le choix est guidé par l'idée de compléter ou d'aller plus loin dans la réflexion initialisée dans les séances précédentes. La cohérence, les liens entre les différentes séances sont mis en évidence en faisant chaque fois que cela est possible référence aux activités présentées.
*Rennes 95 – Nancy-Metz 95 – Lyon 96*

***Sixième séance :***
***Analyse de documents (extraits des sujets)***

D'autres extraits sont distribués et corrigés individuellement (« à la carte »)
*Strasbourg 95 – Rouen 95*

Commentaires :

Les étudiants s'impliquent facilement dans les différentes activités, ils acceptent de " faire ", ils jouent le jeu, ils coopèrent même si l'attitude du formateur peut paraître à certains très déstabilisante (surtout ceux qui croyaient savoir …).

Même si certaines des premières activités peuvent être proposées à des élèves de l'école primaire, les objectifs en formation ne sont pas les mêmes. Les étudiants disposent déjà des connaissances mathématiques à mettre en œuvre lors de ces activités, il s'agit de les préciser, de les réorganiser, de les mettre en réseau, de prendre du recul, de finaliser ... et ceci est précisé aux étudiants.

D'autre part une réflexion sur le travail de l'enseignant, sur ses choix, sur la « mise en scène », est menée en parallèle lors de ces situations « vécues ».

Il n'est pas possible pour tous les thèmes mathématiques de « trouver » des situations de formation toujours adaptées.
Il est parfois nécessaire de revenir d'abord sur des connaissances strictement mathématiques (décimaux, proportionnalité ...).

Les échanges avec d'autres formateurs font apparaître qu'une différence au niveau de la formation serait liée à l'idée de perspective à court terme, le concours, ou à moyen terme, la formation à la pratique future du professeur d'école.

En lisant la liste des intitulés, on constate que le découpage du programme privilégie une entrée par les savoirs mathématiques. Il serait tout aussi possible de proposer un cours spécifique de didactique, donc sur des notions, des outils définis par les recherches en didactique en s'appuyant sur différents thèmes mathématiques. Cette éventualité a été « testée » au cours d'une recherche.

**Organisation matérielle :**
17 séances de 2h, dans un groupe de 25 à 28 étudiants. Le module de mathématiques est divisé en 2 parties de 17 séances chacune, qui sont prises en charge par deux professeurs différents. Un concours blanc est organisé par l'IUFM au début du second trimestre et est commun à tous les groupes.

**Choix didactiques**

J'organise le travail à partir d'un certain nombre de situations clés qui me permettent à la fois de faire le point sur les connaissances des étudiants, d'apporter, si nécessaire, des compléments d'informations mathématiques de mettre en évidence quelques notions didactiques.

Je fais donc le choix de ne pas présenter un cours construit de manière linéaire, mais de faire des points de cours sur plusieurs thèmes qui sont chaque année approximativement les mêmes : polygones, convexité, polygones réguliers, propriétés des quadrilatères, propriétés des triangles et droites remarquables, théorème de Pythagore, théorème de Thalès, notion de similitude, cercle, angle inscrit, angle au centre, polyèdres, relation d'Euler, polyèdres réguliers, représentations planes des polyèdres.
De même je fais le choix de ne pas faire de cours de didactique, mais de mettre en évidence certains concepts lorsque la situation s'y prête.
Parallèlement à ce travail, certaines séances sont consacrées plus précisément à l'entraînement au concours. Ces séances s'intercalent entre les précédentes et portent alternativement :
- sur des exercices du volet 1, qui peuvent avoir été préparés par les étudiants, en liaison avec les thèmes étudiés précédemment
- sur des analyses de travaux d'élèves issus des annales toujours en liaison avec les notions étudiées
- sur des analyses de documents pédagogiques des annales.

Enfin je donne quelques exercices à rédiger que je corrige individuellement et l'équivalent de deux devoirs de concours en plus du devoir de concours blanc.

Je choisis l'ordre suivant - géométrie plane puis géométrie des solides - pour plusieurs raisons :
- je souhaite commencer le travail de l'année par une situation de communication qui va permettre de rompre avec les souvenirs que les étudiants ont des cours de maths et qui peut leur permettre d'amorcer un réflexion sur la représentation des mathématiques et de leur enseignement qu'ils se sont construites au cours de leurs études antérieures.
- la géométrie des solides est peu connue des étudiants,
- les notions mathématiques à maîtriser pour comprendre le programme de géométrie de l'école élémentaire et pour pouvoir traiter les sujets de concours touchent davantage à la géométrie plane qu'à la géométrie des solides,
- les questions relatives à la géométrie des solides nécessitent pour la majorité des connaissances en géométrie plane.

## 1- Géométrie plane

| Activité | Notions mathématiques | Notions didactiques |
|---|---|---|
| Construction de figures par une situation de messages | théorème de Pythagore<br>propriétés des quadrilatères<br>cercles inscrits, circonscrits<br>notion de tangence<br>figures semblables<br>codage | situation didactique<br>dévolution,<br>validation<br>situation de communication<br>rôle des interactions entre pairs<br>variables didactiques |
| Analyse de travaux d'élèves sur une situation de messages<br>(Annales de Lyon 1995) | cercles, tangence | |
| Reproduction de figures<br>(cf. ML.Peltier, "La fleur", Acte du colloque de Paris) | notion d'échelle<br>figures géométriques<br>alignements,<br>orthogonalité<br>rapports de longueurs | distinction entre reproduction et construction<br>variables didactiques<br>validation,<br>différenciation (notion d'aides) |
| Analyse de documents pédagogiques<br>construction de carrés<br>(cf. volet 2 Lyon 94) | carré | |
| "Jeu du portrait"<br>(cf. H. Péault, document de la Copirelem, Cahors 1991) | propriétés caractéristiques des quadrilatères<br>inclusions diverses des familles de quadrilatères<br>convexité<br>déduction | rôle des interactions entre pairs<br>formulation |
| "Le quadrilatère caché"<br>(cf. H. Péault, idem) | conjecture<br>déduction<br>convexité<br>propriétés des quadrilatères | situation de recherche<br>formulation |
| Analyse d'extraits de manuels<br>(cf. Hervé Péault, idem) | les triangles ou les quadrilatères | savoir en jeu<br>situation d'apprentissage, problème<br>choix didactiques<br>tâche et activité de l'élève, lien avec la notion de variable didactique<br>validation |

**2- Géométrie dans l'espace**

| Activité | Notions mathématiques | Notions didactiques |
|---|---|---|
| "Le solide caché" (cf. ML.Peltier, C.Houdement, la boite du pâtissier, IREM de Rouen, 1992, et Document de la Copirelem, Pau) | polyèdres, patrons, plans perpendiculaires, droites orthogonales | situation didactique : phase de formulation, d'action, de validation<br>situation de communication (spécificité du langage mathématique)<br>rôle de l'anticipation<br>rôle de la manipulation |
| Patrons du cube | relations d'adjacence (d'incidence) | anticipation<br>validation<br>rôle de la manipulation |
| Constructions de polyèdres libres puis avec des contraintes (utilisation du matériel "Polydrons") | relation d'Euler<br>solides de Platon | conjecture et preuve<br>rôle des manipulations |
| Assemblages de cubes | espace-plan<br>représentations planes | situation de communication<br>validation<br>variables didactiques |
| Représentations planes | patrons<br>perspectives<br>projections<br>graphes planaires | |
| "La boite du pâtissier" (cf. ML.Peltier, C.Houdement, documents de la Copirelem Cahors 91 et Colmar 92). | modélisation d'une situation | situation didactique<br>dialectique outil objet<br>variable didactique<br>dévolution, validation<br>rôle de l'erreur |

**3- Exemple de cours en PE1**

**Présentation**

La première année à l'IUFM est bien sûr centrée sur la préparation du concours, mais notre objectif principal est de faire en sorte que ce soit également une première année de formation professionnelle. Pour cela, j'ai choisi d'alterner des séances au cours desquelles les étudiants sont mis en situation de faire des mathématiques et des séances d'entraînement. Dans le premier cas j'utilise des stratégies qui relèvent parfois de l'homologie pour "réconcilier les étudiants avec les mathématiques", et le plus souvent de la transposition de manière à ouvrir la réflexion sur des aspects professionnels. Dans le second cas, j'utilise les sujets des annales des années précédentes.

Pour illustrer ce propos, je vais présenter les deux premières séances de cours que je propose aux PE1, dans la partie géométrie. Il s'agit de deux séances de géométrie plane.

**Première séance : Situation de communication sur des figures géométriques**

Je choisis cette séance pour plusieurs raisons :

- les figures proposées vont permettre d'initialiser un travail sur un certain nombre de propriétés relatives à la géométrie des figures planes : propriétés des quadrilatères, théorème de Pythagore, cas d'égalité des triangles, etc.
- le type de tâches demandées aux étudiants est en rupture avec les exercices de géométrie qu'ils ont vraisemblablement rencontrés dans leur passé scolaire. Il s'agit donc de conduire les étudiants à s'interroger sur l'image des mathématiques et plus particulièrement de la géométrie qu'ils se sont construite.
- c'est une situation qui peut être transposée à l'école élémentaire au cycle 3, et qui peut faire l'objet d'une analyse didactique. Elle permet de ce fait aux étudiants d'envisager immédiatement l'année de préparation au concours comme une première année de formation professionnelle.
- La relative proximité des contenus mathématiques sous jacents avec les mathématiques du collège n'implique pas la nécessité de connaissances spécifiques notamment sur le développement intellectuel de l'enfant, comme ce serait le cas si la situation relevait des mathématiques du cycle 1 ou 2.

***Choix des figures** (cf. annexe)*

Je choisis deux figures et deux seulement. Les étudiants auront donc tous travaillés sur chacune des figures soit en tant qu'émetteur du message soit en tant que récepteur. Ainsi la mise en commun intéressera tous les participants.
Le choix des figures est lié aux notions mathématiques que je souhaite faire travailler, et prend en compte un certain nombre de contraintes :
- Les figures doivent être analysées pour être reproduites, et pour mener cette analyse, les étudiants ont à faire des hypothèses sur les positions relatives des différents éléments et à les vérifier en intervenant sur la figure par exemple en traçant des segments supplémentaires, en prolongeant des segments en joignant des points, etc.
- Il est possible de construire les figures de plusieurs manières, il n'y a pas une clef unique à trouver.
- Les figures sont assez régulières pour qu'une validation par perception visuelle soit envisageable.

***Plan de la séance et organisation matérielle associée.***

J'ai préparé des photocopies de chacune des figures choisies.
Je présente collectivement la situation :
" Vous allez être réparti par groupe, chaque groupe va recevoir une feuille sur laquelle est construite une figure géométrique. Vous allez devoir rédiger un message pour qu'un autre groupe reproduise la figure que vous avez reçue et qu'il ne connaît pas, c'est à dire qu'il doit construire à partir de votre message une figure semblable à la vôtre en plus grand pour qu'elle puisse être affichée. Votre message ne doit pas comporter de schéma ou de dessin, il ne doit pas non plus comporter d'indication de mesures de longueur ou d'angles. Vous le rédigerez sur

la grande affiche. Je rappelle que ce message est destiné à vos pairs, il ne s'agit pas de chercher à le rédiger en langage d'enfants.
Je vais donner une durée précise pour que vous rédigiez les messages. A la fin de ce délai, vous échangerez votre message avec un autre groupe et vous construirez la figure correspondant au message reçu. Après quoi vous comparerez la construction effectuée à la figure originale"
Si besoin est, j'explique la notion de figures semblables en faisant référence à la notion d'agrandissement obtenu par exemple à l'aide d'un retro projecteur.

Les étudiants sont ensuite répartis en un nombre pair de groupes (généralement 6). Les groupes sont associés deux à deux (groupes A et B) pour former une équipe.
Chaque groupe dispose du matériel de géométrie usuel (règle, compas, équerre), d'une grande affiche, d'un feutre marqueur.
Je distribue la première figure aux trois groupes A, la seconde aux trois groupes B.
Je donne le temps imparti (25 minutes) et rappelle qu'à l'issue de ce délai les messages seront échangés quel que soit leur état d'achèvement.
Après 25 minutes, les messages sont échangés par mes soins entre les groupes A et B d'une même équipe.
Chaque groupe réalise la figure correspondant au message qu'il a reçu. En cas de blocage, il peut demander par écrit au groupe émetteur quelques précisions qui lui paraissent indispensables, la réponse est également donnée par écrit, je fais le facteur.
Cette phase dure environ 10 minutes.
Les deux groupes d'une même équipe se retrouvent pour comparer les deux figures construites aux originaux et je laisse un temps d'échanges entre les étudiants des deux groupes. Puis les messages et les figures associées sont affichées au tableau.
Les étudiants prennent alors connaissances des réalisations des autres équipes.

***Mise en commun***

Les étudiants se questionnent mutuellement et font toutes les remarques qu'ils jugent utiles.
Je propose ensuite une observation dirigée :
- Conformité au modèle. Si ce n'est pas le cas, recherche des erreurs éventuelles, proviennent-elles de l'écriture du message ou de son interprétation ?
- Nature du vocabulaire utilisé, discussion sur la pertinence des termes utilisés, rectification si nécessaire
- Présence éventuelle d'un codage de certains éléments (points, cercle, droite) par des lettres
- Type de rédaction s'agit-il d'une description ou d'un programme de construction.

***Deuxième partie de la séance : analyse de la situation sur le plan didactique***

Présentation et justification de mes choix
- choix des dessins
- choix de l'organisation matérielle
- choix des contraintes horaires

**Travail inter cours : étude de la figure A**

A partir des hypothèses : le quadrilatère ABCD est un carré, les points A', B', C', D' sont tels que B soit le milieu de [AA'], C le milieu de [BB'], D le milieu de [CC'], A le milieu de [DD'], montrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré.

En appelant c le côté du carré ABCD et c' le côté du carré A'B'C'D', établir une relation entre c et c'.

**Deuxième séance : analyse mathématique des dessins et complément de cours.**

Retour sur le choix des dessins du point de vue des contenus mathématiques sous jacents.

Plusieurs étudiants présentent la démonstration qu'ils ont faite, ces démonstrations sont discutées collectivement et améliorées si nécessaire.
De même pour la recherche de la relation entre c et c'. De cette relation les étudiants sont conviés à chercher la relation liant les rayons des deux cercles et à comparer avec le rapport trouvé empiriquement par mesurage.

***Synthèse mathématique***

Je rappelle :
- les principaux résultats qui ont été utilisés dans les démonstrations et les calculs : théorème de Pythagore, égalité des triangles,
- la terminologie utilisée relative au carré, au triangle, au cercle, cercle inscrit, cercle circonscrit à un carré
- les propriétés des différents quadrilatères relatives aux diagonales en invoquant le dessin B.

Discussion sur :
- ce qui conduit à distinguer dessin et figure
- ce qu'est une démonstration en géométrie et sur le type de démonstration rencontrée ici, notion d'hypothèses, de déduction, de conclusion
- valeur exacte et valeur approchée
- la rupture entre la géométrie de l'école élémentaire, qui est une géométrie dans laquelle la vérification d'hypothèses se fait à partir de l'utilisation d'instruments (problématique de l'espace) et la géométrie du collège dans laquelle la vérification d'hypothèses se fait dans le cadre d'une théorie par des démonstrations (problématique géométrique).

Annexe :