LE DISCOURS TENU DANS UNE SECTION DE PARIS VI

Aline Robert

Conseils aux étudiants : quelles difficultés rencontrez vous souvent ? Que peut-on faire pour les affronter ?

Soulignons d'abord que les propositions que nous présentons ici n'ont pas pour objet de normaliser vos activités : il s'agit seulement de vous suggérer des exemples d'organisation du travail, de vous donner des idées de méthodes au cas où vous seriez en difficulté.

Les mathématiciens n'ont pas tous le même abord ni de l'apprentissage des mathématiques, ni même des méthodes pour résoudre les problèmes particuliers, et il ne saurait être question d'imposer quoi que soit dans ce domaine où l'initiative individuelle est porteuse de richesse.

Notre propos est de dégager au contraire un certain nombre de directions possibles, dont nous pensons que l'une ou l'autre peuvent inspirer cette initiative personnelle.

On pourrait faire un parallèle avec les économies d'énergie : elles ne dispensent pas de chauffer la maison, elles permettent d'éviter le gaspillage ...

I. Le travail personnel

Les enseignants se plaignent souvent d'un manque de travail personnel des étudiants. Mais quel travail vous est demandé ?

(a) Citons quelques caractéristiques de l'enseignement des mathématiques à votre niveau qui peuvent avoir des conséquences sur votre travail :

*Il y a beaucoup d'exercices possibles, plus de types d'exercices que ce qu'on peut rencontrer en T.D.

*Il y a beaucoup de nouvelles notions ou du moins de notions abordées autrement qu'en terminale, et un travail quantitatif de renforcement est nécessaire pour asseoir les connaissances comprises et pour pouvoir aller assez vite par rapport aux exigences.

*Il y a souvent plusieurs registres (ou cadres, ou domaines) dans lesquels une même notion peut être utilisée (graphique, numérique, algébrique, ou vectoriel, géométrique, analytique), et il devient nécessaire de savoir passer de l'une à l'autre sans qu'on l'indique nécessairement.

(b) Ceci entraîne qu'il est indispensable que vous travailliez en dehors des séances de T.D. déjà prévues pour vous faire faire des exercices, mais peut-être pas n'importe comment, pour ne pas gaspiller votre temps.

* Vous pouvez refaire les exercices déjà vus, ou en faire d'autres, mais *avec l'idée d'en tirer des leçons* (quel type d'exercices, quelle méthode a marché par exemple) pour baliser un peu le champ de tous les exercices possibles. Vous pouvez vous intéresser aux théorèmes utilisés ou aux techniques mises en fonctionnement, en les recopiant au besoin sur des fiches et en indiquant justement ce que ça permet de résoudre (et éventuellement dans quel registre c'est utilisable).
Par exemple le théorème des valeurs intermédiaires peut servir à démontrer l'existence de racines d'équations du type $f(x) = 0$ si on sait que f est une fonction continue passant de valeurs positives à des valeurs négatives, tout ceci concerne des exercices posés dans le cadre numérique ou algébrique.
Ce type de fiches pourra être admis lors de certains problèmes sur table ou interrogations écrites, et peut-être au partiel.

* Vous pouvez aussi en profiter pour *mettre en correspondance cours et exercices, en relisant le cours non pas linéairement, comme un discours plat et uniforme, mais en distinguant* ce qui est apport d'informations de structures, apport de théorèmes d'existence, souvent peu utilisés ensuite, apport de théorèmes plus techniques, voire d'algorithmes.
Un bon truc pour ce faire est de *se demander à quelles questions peut répondre* tel paragraphe ou tel théorème et de l'étiqueter (et retenir le titre) par rapport à cette utilité, de voir s'il existe d'autres énoncés équivalents, ou encore de *comparer divers cours sur la même chose, ou bien aussi de comparer les informations sur un même sujet obtenues à divers endroits du cours.*
Des fiches transversales peuvent être établies sur certains sujets : étude de courbes, approximations des racines d'une équation, suites (définies par des intégrales, avec des fonctions)...
Par exemple dans le cas d'un cours sur les polynômes (DEUG 1) on distinguera ce qui se rapporte aux (différentes) structures, on pourra repérer les grands types de problèmes (divisibilité, racines des

polynômes...), et les grands types d'outils (division euclidienne, congruence et décomposition en facteurs irréductibles).

A chaque fois on peut *chercher s'il y a des relations entre ces catégories et lesquelles* ; on peut étudier (voire comparer) la traduction d'un même problème (PGCD, PPCM ou résolution d'une équation quadratique par exemple, dans les questions sur les entiers) en utilisant ces différents outils (division euclidienne ou congruences ou décomposition en facteurs premiers).

* Il nous semble que souvent *le travail à plusieurs permet de mieux éclaircir certaines difficultés*, cependant le renforcement quantitatif doit être individuel.

* Attention, vous n'aurez pas de colles et vous aurez relativement peu de contrôles, ils ne seront pas nécessairement notés, *aucun enseignant ne vous dira régulièrement que vous ne travaillez pas assez, vous ne devez plus compter que sur vous-même, vous devez donc vous organiser tout seul, prévoir les plages horaires consacrées à telle ou telle activité personnelle et rester vigilants...*

On ne peut vous indiquer à coup sûr la meilleure forme de travail pour vous, à vous de la rechercher et de la mettre au point.

II. Quelques généralités sur les activités mathématiques à votre niveau

(a) Au niveau du savoir mathématique que vous aurez à utiliser, il faut prendre l'habitude de *mettre en relation (presque systématiquement) divers éléments du cours, éventuellement dispersés.*

Beaucoup d'activités reposent sur une certaine pratique du passage de la présentation formelle et générale des notions (cours) à leur mise en fonctionnement dans des exercices. Par exemple, souvent il s'agit de reconnaître les notions à utiliser dans un exercice particulier parmi toutes les propriétés données dans le cours, et ce même si la propriété en question n'est pas explicitement citée dans l'énoncé. Le travail sur le cours suggéré ci-dessus peut y contribuer.

(b) *Au niveau des acquis antérieurs, il est nécessaire de pouvoir disposer de suffisamment de registres (cadres, domaines) pour traduire des propriétés de l'un à l'autre*; par exemple: on donne un problème algébrique, on le traduit en vectoriel ou en analytique...

Il se trouve que les étudiants issus de terminale D ont surtout des connaissances dans le cadre numérique et moins dans le cadre graphique.

Nous vous faisons passer un test au début de l'année pour repérer ce genre de choses et nous essayons de le vous signaler.

(c) Au niveau de la recherche des exercices ou des problèmes, il y a trois sortes de difficultés possibles (au moins) :

- conjecturer si on ne sait pas exactement ce qu'il y a à démontrer (cela correspond à des questions ouvertes du type "que peut-on dire ...", ou "trouver l'ensemble tel que ...")
- trouver les bons "outils" s'ils ne sont pas indiqués (les théorèmes adéquats, les bonnes propriétés ...)
- mettre en fonctionnement correctement ce qu'on a choisi d'utiliser.

En particulier, il est important, au cas où on ne trouve pas immédiatement, de *mettre en fonctionnement une démarche un peu systématique, un peu "volontariste", de résolution de problème et de garder un certain contrôle conscient de cette démarche, en particulier au niveau du démarrage.*

Il ne s'agit ni d'abandonner si on n'a pas trouvé au bout de quelques minutes, ni d'attendre que "ça vienne" tout seul : il est normal à votre niveau de ne pas trouver tout de suite, je dirais même que la recherche de problèmes non immédiats fait partie de ce que vous devez apprendre à faire (vous vous rapprochez de l'échéance professionnelle), mais il est tout aussi normal de se donner les moyens de gérer cette recherche.

Enfin, il peut être extrêmement fructueux de prendre l'habitude de contrôler ses résultats, de toutes les façons possibles (contrôle interne, par vérification numérique ou autre, mais aussi externe en référence à d'autres domaines...).

Nous vous indiquerons pour un certain nombre de domaines des méthodes un peu systématiques qui pourront vous aider.

Par exemple en DEUG 1 dans un exercice sur les suites on peut commencer par identifier le type de la suite (numérique, récurrente ...) puis on se rappelle ce qu'on a sa disposition dans le cas concerné. Le cas échéant on introduit un graphique, ou on prend des valeurs particulières de n, etc...

Il existe aussi des méthodes générales, si on ne démarre pas ou si un premier démarrage s'est avéré infructueux.

Ainsi on peut d'abord se poser des questions sur l'identification du problème, dans quel(s) registre(s) mathématique(s) on est, quels sont les paramètres. Puis on peut essayer de se donner des idées par une étude de cas particuliers éventuels, un graphique.

On peut aussi se demander "qu'est que j'ai à ma disposition a priori pour résoudre un tel problème, qu'est ce qui dans l'énoncé engage plus dans telle ou telle direction, a-t-on intérêt à changer de point de vue ?".

Il est important dans tout cela de garder un certain contrôle de son activité.

Donnons quelques exemples :

* Considérons l'exercice suivant : "on se donne une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle [ab] ($a < b$) et s'annulant en a, b et d tels que $a < d < b$. Montrer qu'il existe un élément c de [ab] tel que $f''(c) = 0$".

On peut se demander quel théorème du cours a pour conclusion quelque chose du type $f''(c) = 0$, faire alors le lien avec le théorème de Rolle (qui conclut à $f'(c)=0$) et se demander si on n'a pas deux nombres z et t tels que $f'(z) = f'(t) = 0$. On peut alors retourner à l'énoncé, le traduire en graphique, et trouver les deux points z et t grâce au théorème de Rolle...

* Dans un exercice sur les racines d'un polynôme (montrer que le polynôme $x^{2n+1} + ax^n + ... + 1$ a toujours une racine réelle), on peut penser au changement de cadre algèbre/analyse et traduire par "ce polynôme s'annule au moins une fois" et donc penser au théorème des valeurs intermédiaires (entre $+\infty$ et $-\infty$).

(d) Nature des mathématiques

Il nous apparaît qu'à votre niveau *une réflexion sur la nature des mathématiques et de l'activité mathématique peut être éclairante.* Car vous vous rapprochez du stade professionnel, même si les formes d'enseignement ne le font pas apparaître, même si votre futur travail n'est pas directement lié aux mathématiques. Nous pensons que vous pourrez d'autant mieux réussir en math que vous adopterez petit à petit des attitudes, des conceptions, se rapprochant de celles des professionnels en mathématiques.

Voici donc quelques concepts clefs permettant de s'y repérer en mathématiques (la citation que nous vous livrons est tirée d'un article de R.Douady dans la revue "Recherches en didactique des mathématiques").

"... Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne ne sait résoudre. Une part importante de leur activité consiste à *poser des questions et résoudre des problèmes. Pour ce faire ils sont amenés à créer des outils conceptuels, auxquels s'adjoignent maintenant des outils techniques* (les ordinateurs permettant de renouer avantageusement avec la tradition des calculs gigantesques des siècles précédents). Pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, *les concepts ainsi crées sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Ils s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées, pour les étendre ou se substituer à certaines d'entre elles. Ils acquièrent le statut* *d'objet.* Il arrive que des chercheurs créent directement des objets pour mettre de l'ordre dans les pensées ou pour les besoins de l'exposition.

Ainsi, nous disons qu'*un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème.* Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.

Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite.

... Si on s'intéresse à l'évolution des mathématiques dans l'histoire passée, récente ou dans l'actualité, on constate qu'une part importante du travail du mathématicien est consacrée à *interpréter les problèmes qu'il se propose de résoudre, à changer de point de vue (...), à les formuler autrement, à les transposer d'un cadre dans un autre, au moins partiellement, à confronter des problèmes posés dans des cadres différents mais dont la traduction dans un même cadre conduit à poser de nouvelles questions et suggère le recours à des outils autres que ceux initialement sollicités.* Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique ... mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils des objets du cadre...

... *Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.* L'objectif est, pour le chercheur, de *se forger des convictions débouchant sur des conjectures et de poser des jalons permettant d'en organiser des plans de démonstration.* Un plan n'est pas toujours bon du premier coup. Il arrive souvent que des contre-exemples, mettant en évidence des obstructions, amènent à déplacer les jalons, voire à rejeter la conjecturer de départ. Quoiqu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux..."

En reprenant ces termes, notre objectif est de vous faire acquérir des outils (concepts) pour résoudre des problèmes et poser des questions, ce qui pour nous passe par l'acquisition du concept objet.

Ce point de vue n'est pas universellement adopté par la communauté, pour certains les mathématiques sont d'abord une théorie et ce qu'il y a à transmettre est d'abord un corps de théorèmes, ou encore ce sont d'abord des outils de calcul et on privilégie les algorithmes, ou bien encore un langage et on insiste en priorité sur les formulations...

Ceci dit *tous les concepts ne sont pas de la même nature* : ainsi les concepts d'algèbre linéaire ont un statut de formalisation, d'unification et de généralisation, ils ont été introduits alors même que de nombreux problèmes particuliers étaient résolus sans eux, et ne sont indispensables comme outils que pour des problèmes plus difficiles que ceux proposables aux étudiants. Ce n'est pas le cas avec l'intégrale par exemple, pour laquelle on peut présenter en DEUG 1 des problèmes (de physique en particulier) où l'intégration s'avère l'outil de résolution adéquat.

III. Comment on peut apprendre ?

Pour nous, on apprend en grande partie en cherchant des exercices et des problèmes, voire en séchant, ou en faisant des erreurs (qu'on corrige ensuite, soi-même ou avec l'aide des autres étudiants ou avec l'aide de l'enseignant).

On retient ainsi l'efficacité de "l'action", c'est à dire des résolutions de problèmes. Nous pensons que pour beaucoup d'entre vous (car là aussi il y a une certaine diversité) il s'agit de s'approprier les notions en les faisant fonctionner, en leur donnant leur sens (comme outil justement). Une lecture "plate" du cours peut alors ne servir à rien, pas plus qu'un travail de recopiage où on ne s'engage pas réellement.

On retient aussi le fait que *la construction collective des connaissances peut accélérer les acquisitions individuelle* en particulier pour des connaissances qu'on n'a pas encore mais qui sont proches de celles qu'on a déjà. Dans cet ordre d'idées, le travail en groupes, les conflits éventuels peuvent être source de progrès s'ils ont lieu à un moment propice.

IV. La rédaction : c'est un vrai travail spécifique!

C'est une phase distinte de la recherche. *Rédiger est un travail spécifique, qui ne se réduit pas à recopier ce qu'on a trouvé : il s'agit de transmettre son travail à quelqu'un*, en général pour une évaluation (dans le cadre scolaire), pour convaincre le professeur qu'on a su résoudre et pour qu'il évalue les compétences correspondantes, et l'organisation de ce qui est présenté. Le professeur va regarder et la forme et le fond du devoir.

Or il se trouve que l'effort qu'il y a à faire pour préciser par écrit la solution qu'on a trouvée, dans l'objectif que quelqu'un d'autre en prenne connaissance, amène souvent à des progrès dans la solution elle-même : on devance les objections du destinataire, on met au point les détails, on peut changer l'ordre de la présentation, on songe aux cas particuliers, le cas échéant on simplifie ...

Autrement dit, la rédaction, étape spécifique qui correspond à un objectif de communication (écrite) du travail, peut amener à un retour positif sur le travail lui-même, d'où son importance y compris pour l'apprentissage ...

Soulignons cependant que les règles strictes de la rédaction d'un problème sont très relatives : elles ont varié selon les époques, elles varient selon les niveaux (et selon ce qui est dans le cours au moment où le problème est proposé) et elles peuvent même varier selon les enseignants.

Ainsi, en quatrième pour rédiger une démonstration de géométrie élémentaire, il faut donner des justifications qu'il n'est plus question d'indiquer en terminale par exemple, dans la mesure où on considère alors qu'elles sont évidentes.

Certains enseignants demandent d'indiquer dans la copie "hypothèses" et "conclusions", d'autres n'y tiennent pas ...

On peut quand même énoncer *certaines généralités admises par tous.*

1) Ce n'est pas parce qu'on sait résoudre une question qu'il faut en mettre des pages et des pages.

2) Ce n'est pas parce qu'on ne sait pas résoudre une question qu'il faut mettre tout ce qui s'y rapporte en espérant que l'enseignant triera.

3) Il faut que chaque phrase serve, c'est à dire ne puisse être supprimée (sans entraîner une perte de sens).

Il ne faut pas qu'on ait à rajouter des phrases pour rétablir le sens.

4) Les inférences (donc, car, par suite, il s'en suit ...) doivent être signalées, surtout si on utilise un argument tiré du cours actuel, un théorème nouveau par exemple.

5) Les formules doivent figurer sur des lignes séparées et ne pas être mélangées aux phrases en langage courant.

Ce texte en langage courant doit constituer "l'armature" de la rédaction, pour la bonne raison qu'il en assure la lisibilité.

On pourrait dire pour résumer que non seulement le texte doit être lisible mais même qu'il doit aider le lecteur au maximum à en prendre connaissance dans les meilleures conditions.