

UN EXEMPLE DE PRATIQUE DES MEMOIRES EN DEUG A PREMIERE ANNEE

Marc Rogalski

Il y a quelques années, G.Rauzy racontait dans la Gazette des Mathématiciens une expérience de rédaction de mémoires par les étudiants faite à Marseille en Deug A première année. Il a fallu attendre la rénovation des DEUG en 1984-85 pour que d'autres universités reprennent ce type d'activité de façon plus systématique. Citons, par exemple, les projets multidisciplinaires donnés à Marseille I en début d'année, qui ne s'appuient que sur les connaissances de terminales. On peut aussi citer l'expérience des projets professionnels de Lyon I: on demande en début d'année aux étudiants de rassembler toute une documentation sur la profession qu'ils envisagent, avec interviews de professionnels du secteur, et de rassembler le tout dans un mémoire sur la profession étudiée. Dans d'autres universités, il y a un mémoire ou un projet en deuxième année de DEUG, parfois couplé avec un stage.

Dans ce qui suit, nous exposons une expérience réalisée au niveau de la première année de DEUG A à l'université de Lille I, depuis 1986. C'est donc un exemple parmi d'autres possibles, et ni le mode de fonctionnement choisi ni le début d'évaluation réalisé ne prétendent, évidemment, être le modèle à suivre. L'expérience de Lille a été réalisée par M.C.Ayats, E.Cousquer, M.J.Delval, S.Kim, M.Rogalski, N.Roussignol, C.Sacré, F.Zedek.

Les objectifs

Nous avons plusieurs buts en démarrant l'expérience, pour certains un peu vagues, et ils se sont précisés au vu des premiers mémoires, en constatant ce que ceux-ci pouvaient réellement apporter.

1/ Développer l'autonomie et l'initiative des étudiants, en rompant avec une certaine irresponsabilité scolaire et un état d'assistés qu'on regrette souvent...sans vraiment savoir comment les en tirer -sauf par des stratégies très coûteuses en temps, ou bien qui laissent sur le carreau un trop grand nombre d'étudiants. Le mémoire place les étudiants devant un problème largement ouvert, et ils vont devoir organiser eux-mêmes pratiquement toute leur activité.

2/ Encourager en l'institutionnalisant le travail en équipe: les mémoires sont collectifs par principe (...et aussi par nécessité, compte

tenu du travail de correction). Ce travail d'équipe présente plusieurs aspects: ressemblance avec une situation professionnelle, partage du travail, communication aux autres, accord à trouver...le tout dans une situation peu scolaire.

3/ Ouvrir des perspectives culturelles sur les mathématiques et sur les applications des mathématiques. en particulier en favorisant des activités de modélisation. Nous espérons pouvoir ainsi agir dans un sens positif sur les représentations des étudiants sur les mathématiques.

4/ Evaluer les étudiants à l'aide d'autres critères que la seule capacité à résoudre seul en temps limité des problèmes pointus semés d'indications.

Nos objectifs étaient donc d'ordre à la fois didactique et épistémologique, et ce de façon très liée dans la mesure où un changement des représentations sur les mathématiques peut favoriser un changement de la manière de les apprendre.

Organisation

1/ Présentation et choix

Chaque thème proposé aux étudiants est décrit en une page. L'ensemble des thèmes est rassemblé dans un brochure distribuée début février. Au bout d'une semaine, les étudiants doivent s'être regroupés par 4, exceptionnellement 3, et chaque groupe doit avoir choisi son thème de mémoire; un groupe peut proposer un thème qu'il a choisi lui-même, mais l'équipe d'enseignants doit donner son accord (il s'agit essentiellement de vérifier l'intérêt et la faisabilité). Une fois les thèmes choisis, chaque groupe reçoit des documents et/ou une bibliographie.

2/ Durée et modalités de réalisation

Le travail d'élaboration des mémoires dure entre 2 et 3 mois: de mars à mai (on les ramasse souvent vers le 20 mai). La date relativement tardive dans l'année permet de donner des sujets qui vont exploiter les connaissances apprises pendant la première année de DEUG.

Une dizaine de jours après que les groupes aient reçu leurs documents, chaque enseignant responsable d'un thème reçoit les groupes qui ont choisi ce thème. Le but de cette réunion est de "cadrer " le traitement possible du mémoire: points importants qu'on s'attend à

trouver, idées de plans, longueur du mémoire (on essaye de limiter à 20 pages, mais nous recevons assez souvent des mémoires de 30 pages ou plus), programmes informatiques possibles...et déblocages éventuels pour certains groupes.

Jusqu'à présent, et même lorsque nous avons annoncé une permanence début mai, aucun groupe n'a éprouvé le besoin de recontacter l'enseignant responsable de son thème: il y a une volonté manifeste de se débrouiller seul qui semble montrer que l'objectif d'autonomie est spontanément pris en compte par les étudiants dans ce type d'activité.

3/ Contrôle

Une fois les mémoires ramassés, ils sont lus par l'enseignant responsable du thème. La note tient compte de la présentation et de la rédaction, de l'effort de recherche de documentation, de la cohérence du plan, de la compréhension du sujet, et de la correction mathématique. Il semble souhaitable, à ce propos, d'exiger qu'une bibliographie figure dans le mémoire. Les premières années, la note entrait pour le quart de la note de mathématique, ce qui est assez notable pour justifier un investissement important, mais semble-t-il, n'entraîne pas de déformation de type scolaire, dans la mesure où il n'y a pas de modèle préexistant de ce qui est attendu par les enseignants (contrairement à l'énoncé type du problème de baccalauréat, par exemple).

Depuis que les physiciens participent aussi à l'opération, et que les sujets relèvent aussi de la physique, voire de la chimie, la note est sortie du barème des mathématiques et s'ajoute au barème global; son coefficient est donc moindre, sans qu'on ait détecté la moindre baisse d'investissement de la part des étudiants, ce qui est très encourageant, étant donnés les objectifs visés.

Par ailleurs, la note est collective, et nous nous interdisons volontairement d'évaluer l'apport de chacun des membres du groupe (sauf dans le cas, très rare, où par exemple un étudiant a pratiquement disparu pendant l'élaboration du mémoire). Ce point est très important pour laisser aux étudiants la liberté d'organiser leur travail, et pour l'apprentissage de la responsabilité collective inhérente à ce genre d'activité. Il faut bien voir qu'il y a là un changement important du contrat à l'oeuvre habituellement dans l'enseignement, cela peut poser un problème aux enseignants.

Les thèmes choisis par les étudiants

1/ En 1986-87

Nous avons proposé pour cette première année 14 thèmes de mémoire.

Les étudiants ont choisi les suivants:

- * la datation par le carbone 14
- * diverses méthodes de résolution de l'équation du 3^e degré
- * le nombre 6174...et quelques jeux sur les entiers
- * comment se servait-on d'un astrolabe?
- * autour de la formule de Machin (calcul de π par la série arctg)
- * les mathématiques et le médecin légiste
- * comment calculer le taux d'intérêt que vous cache votre banquier?
- * comparaison de diverses méthodes de résolution d'équations
- * à propos des sommes $1^k + 2^k + \dots + n^k$
- * le jeu de loto (sujet proposé par les étudiants eux-mêmes)

2/ En 1987-88

Nous proposons cette année là 20 sujets de mémoires (6 de plus que l'année précédente). Outre les sujets ci-dessus, souvent repris, les sujets nouveaux qui suivent ont été choisis par les étudiants:

- * une population, un circuit électrique, la ruine des joueurs...une même méthode mathématique
- * divers modèles différentiels de croissance de populations
- * comment votre calculatrice calcule-t-elle $\text{tg}x$, $\sin x$, $\ln x$...?
- * la suite $u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n)$ et le chaos (proposé par les étudiants)

De plus 2 sujets ont été proposés par les chimistes et choisis par des groupes:

- * les lanceurs spatiaux
- * la pollution

3/ En 1988-89

Cette année là, nous avons supprimé deux sujets antérieurs (souvent pris par les étudiants, et dont nous étions nous-mêmes lassés!) et en avons introduit un nouveau. En plus de beaucoup des précédents, les étudiants ont choisi:

- * comment calculait-on les logarithmes avant les ordinateurs?
- * quelques propriétés de la suite de Fibonacci
- * optimisation d'un coût de transport

- * sur les mathématiques chinoises (proposé par les étudiants)
- * Gauss et les nombres complexes (proposé par les étudiants)

De plus, les physiciens ont proposé 4 sujets (les chimistes n'en proposaient pas cette fois):

- * la télédétection
- * l'appareil photo
- * symétries et cristaux
- * le télescope et la lunette astronomique

L'éventail des sujets choisis est donc assez large. Les sujets de mathématiques appliquées ont eu le plus de succès. Certains thèmes de mathématiques "pures" n'ont encore jamais été choisis:

- * détermination de tous les carrés magiques 3x3 à coefficients entiers
- * quelques fractions continues remarquables
- * les nombres algébriques et les nombres transcendants
- * groupes et géométrie
- * on peut découper une pomme en un nombre fini de morceaux, recoller différemment les morceaux et obtenir....la lune!

En 1988-89, un peu plus de la moitié des étudiants ont choisi des thèmes de mathématiques, les autres des thèmes de physique.

Bien qu'il n'y ait pas d'informatique en première année de DEUG A à Lille (par manque de moyens), certains des sujets demandaient la rédaction de programmes, soit sur calculatrice, soit, pour ceux qui savaient s'en servir, sur micro-ordinateur. Ces derniers ont pu avoir accès aux Goupil de l'UFR.

Le travail des enseignants

1/ Où trouver des sujets de mémoires?

De nombreuses possibilités existent; au début, la plupart des sujets ont été "inventés" à partir de la lecture de revues de vulgarisation ("La Recherche", "Pour la Science") ou de bulletins d'associations (l'APMEP, la Gazette des mathématiciens...). Parfois l'idée d'un sujet prend corps en discutant de mathématiques avec les collègues. On peut aussi utiliser une "anticipation" sur des enseignements d'années ultérieures, voire des thèmes de recherches récentes.

Il est souvent utile de rechercher des sujets qui font un pont entre

des secteurs différents ou des disciplines différentes: ce type de sujet est particulièrement apprécié des étudiants.

2/ Etudier la faisabilité

Il faut rechercher des documents disponibles; ce peut être long...mais on peut aussi utiliser la voie orale, ou travailler soi-même. Ensuite, il faut situer soigneusement le niveau des concepts utilisés dans le thème par rapport aux connaissances des étudiants ou à celles qu'ils pourraient acquérir en peu de temps, et au programme de l'année. Il faut étudier les outils techniques nécessaires à la réalisation du mémoire (calculatrice, micro-ordinateur, matériaux pour une construction...).

En définitive, cela demande à l'auteur du thème de mémoire de le réaliser lui-même sommairement, au moins pour ses parties délicates, et d'avoir une idée des limites du thème.

3/ Etudier l'intérêt pédagogique

Il faut vérifier qu'un nombre suffisant des divers aspects pouvant intervenir dans un mémoire sont présents:

- * mise en oeuvre de connaissances du programme;
- * utilisation de qualités techniques acquises en cours d'année: méthodes de calcul, programmation...
- * obligation de recherche de documents d'une certaine ampleur;
- * nécessité d'une mise en ordre d'un sujet un peu touffu;
- * variété suffisante des cadres et des domaines différents qui vont intervenir dans le sujet;
- * approfondissement de connaissances permis par le sujet;
- * autonomie et partage des tâches permis par le sujet (choix du plan, des limites, des documents, jusqu'où apprendre de nouvelles choses, qu'est-ce qu'il faut admettre, comment se répartir le travail à plusieurs...).

4/ Le coût pour les enseignants

Trois stades sont à prendre en compte;

(a) *Lancement d'une opération mémoire* : il faut alors constituer un stock initial de sujets; c'est le plus coûteux, si une seule personne le fait. A titre d'exemple, le stock des 14 sujets donnés la première année à Lille a demandé l'étude de 35 sujets repérés, dont seulement 14 ont été jugés faisables et pédagogiquement intéressants. Le temps passé a été

de l'ordre de 200 heures... mais souvent passionnantes! Par ailleurs, on peut utiliser des sujets exploités dans d'autres établissements, ce qui diminue notablement le travail.

(b) *Entretien et renouvellement du stock* : c'est là beaucoup plus facile. Les idées existantes en amènent facilement d'autres, on peut imaginer des variantes ou des thèmes analogues; deux heures de travail peuvent alors suffire. Pour des sujets plus neufs, en particulier pluridisciplinaires, cinq heures de travail semblent nécessaires. Pour une section de DEUG, le renouvellement peut ne concerner que 3 à 4 sujets chaque année, ce qui n'est pas énorme.

(c) *Il y a enfin le suivi des étudiants* (les recevoir sur un thème demande 2 heures au plus), et le travail de correction finale: lecture d'un petit nombre de mémoires, entre 3 et 6 en général (1 à 2 heures chacun en moyenne...quand on est rodé).

Les effets pédagogiques de la pratique des mémoires

Quand nous avons commencé l'expérience des mémoires, nous avons quelques inquiétudes sur la faisabilité au niveau du DEUG 1^{re} année: n'allions nous pas trouver de simples paraphrases des documents, des travaux très scolaires ou constater des échecs complets?

1/ Le constat brut

Dès la lecture des premiers mémoires, nos inquiétudes se sont dissipées: le succès dépassait notre attente, sur plusieurs plans:

- * les étudiants se sont, dans la quasi-totalité des groupes, passionnés pour leur thème; ils ont en particulier souvent faits des recherches documentaires et bibliographiques dépassant le cadre strict de ce qui était nécessaire;

- * la qualité de présentation et de rédaction a été sans commune mesure avec le travail habituel des étudiants;

- * la qualité mathématique (démonstrations ou calculs), l'exhaustivité dans l'étude des cas, le retour aux problèmes concrets après l'étude mathématique, tout était à un niveau nettement supérieur au niveau des productions habituelles des étudiants.

L'existence d'une véritable gageure, les possibilités du temps non limité, le travail en équipe, le sentiment d'avoir à résoudre un problème de type nouveau, non scolaire...tous ces facteurs ont sans doute contribué au succès de l'expérience. Ce succès s'est maintenu les deux années suivantes avec les mêmes caractéristiques.

Les notes attribuées sont donc la plupart du temps au dessus de la moyenne. Il y a quand même eu quelques rares mémoires ratés. D'une part, un ou deux groupes refusent le contrat "non scolaire" des mémoires, et rendent une resucée mal digérée de documents. D'autre part, il arrive qu'un groupe échoue dans son mémoire par suite de déficiences graves que les modes habituels de contrôle des connaissances, par leur côté "machés", n'avaient jamais détectées; par exemple, un groupe n'a pu réaliser convenablement le mémoire sur la datation par le carbone 14 parce qu'il confondait variables, paramètres et fonctions, et croyait que toute équation peut se résoudre par une formule exacte!

2/ Une évaluation plus objective de l'expérience

Au delà du constat brut, nous avons essayé d'avoir des renseignements plus fins et plus objectifs de la pratique des mémoires. D'abord, à l'issue de la première année nous avons voulu savoir ce que les étudiants eux-mêmes en pensaient. Nous avons pour cela diffusé le questionnaire suivant, auquel nous avons eu 42 réponses, sur 105 étudiants présents à la fin de l'année; la date trop tardive du questionnaire (dernière semaine d'enseignement) ne nous a pas permis d'en récupérer plus; cela relativise évidemment la valeurs des réponses obtenues, d'autant que les étudiants qui ont été reçus à la fin de l'année étaient sur-représentés dans le groupe des étudiants ayant répondu.

Le questionnaire:

1/Combien d'heures avez-vous consacrées au mémoire (discussions, recherche de documents, rédaction....)?.....

2/L'éventail des sujets proposés comme mémoires était (cochez la case)

trop restreint: ☐ ; convenable:☐ ; trop vaste: ☐

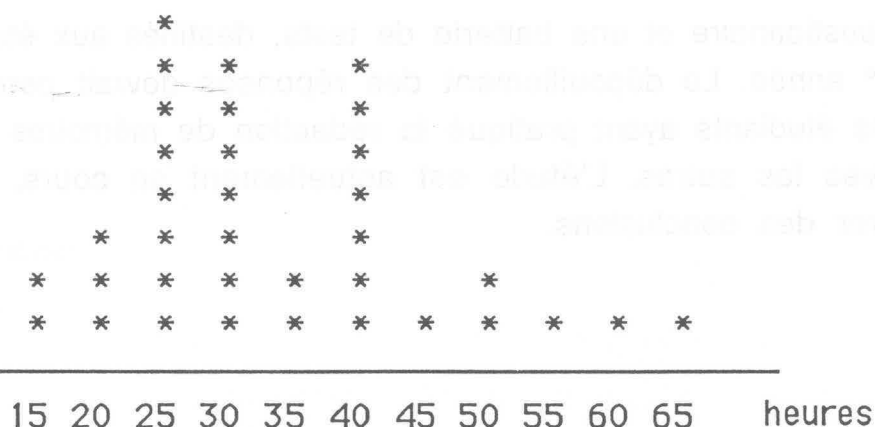
3/Les sujets vous ont paru (cochez la case)

trop guidés dans le détail:☐ ; trop ouverts, pas assez précis:☐ ; convenables:☐

4/Que pensez-vous de la pratique des mémoires?.....

Les réponses:

1° question : les étudiants ont consacré en moyenne 35 heures à la réalisation du mémoire (un peu plus pour les bacheliers C, un peu moins pour les D); l'histogramme est le suivant:



2° question : l'éventail des sujets proposés était
trop restreint....7; convenable....35; trop vaste....0.

3° question : les sujets vous ont semblé

* trop guidés dans le détail....6

* trop ouverts, pas assez précis....12

* convenables....24

4° question : après lecture des réponses, nous avons relevé les principales idées qui y figuraient, et noté combien de réponses évoquaient chacune de ces idées:

1-Appréciation globalement positive : 25

2-Autonomie et motivation : 19

3-Recherche et utilisation de documents : 5

4-Importance de la rédaction, de la présentation : 4

5-Ouverture sur la pratique professionnelle future : 7

6-Acquisition en profondeur de nouvelles connaissances : 4

7-Caractère synthétique du travail, interdisciplinarité....: 6

8-Aspects socio-cognitifs (travail en groupe, discussion...) : 6

9-Durée insuffisante du temps consacré au mémoire : 10.

On peut noter que certaines réponses étaient enthousiastes...et fort agréables à lire pour nous!

Après ce sondage sur l'opinion des étudiants, nous nous sommes demandés si les qualités éventuellement renforcées ou créées par cette activité avaient un caractère persistant. La question n'est pas facile à circonscrire; de plus nos étudiants nous sont difficilement accessibles l'année d'après. Un travail de recherche didactique se propose d'étudier l'ensemble des mémoires produits par les étudiants et de dépouiller un

questionnaire et une batterie de tests, destinés aux étudiants de DEUG A 2^e année. Le dépouillement des réponses devrait permettre de comparer les étudiants ayant pratiqué la rédaction de mémoires en première année avec les autres. L'étude est actuellement en cours, il est trop tôt pour tirer des conclusions.

ANNEXE

Exemples de sujets de mémoires distribués aux étudiants

Nous en donnons quelques uns dans les pages qui suivent, représentant bien les divers aspects de l'ensemble des sujets et la variété du choix offert aux étudiants.

1. LA DATATION PAR LE CARBONE 14

Il s'agit de dater des objets contenant du carbone qui provient d'organismes ayant été vivants (sculptures en bois, textiles, os ou cartilages, certains pigments de peintures.....).

Tout organisme vivant absorbe, directement ou indirectement, en permanence, du carbone provenant du CO_2 atmosphérique. Or le carbone de celui-ci contient un pourcentage, approximativement constant au cours du temps, de carbone 14: C^{14} . Celui-ci est radioactif, et se désintègre lentement. Tant que l'organisme vit, le pourcentage de son C^{14} par rapport à son carbone total est identique à celui de l'atmosphère (environ 10^{-12}). Dès qu'il meurt, le C^{14} n'est plus renouvelé et sa quantité décroît. Elle est divisée par 2 en 5568 ans ("période" ou "demi-vie" du C^{14}). Si on mesure ce que la radioactivité est devenue à l'instant présent, on peut déterminer la date de la mort de l'organisme, et donc savoir, par exemple, quand vivait un homme dont on retrouve les ossements.

La radioactivité du C^{14} atmosphérique est de 15 désintégrations par minutes et par gramme de carbone contemporain (la vitesse de désintégration du stock d'atomes est proportionnelle au nombre d'atomes de C^{14} présents dans l'objet).

Il s'agira donc dans ce mémoire:

1° d'établir et de résoudre l'équation différentielle donnant, en fonction du temps, le poids (ou le nombre d'atomes) $N(t)$ de C^{14} présent dans 1 gramme de carbone;

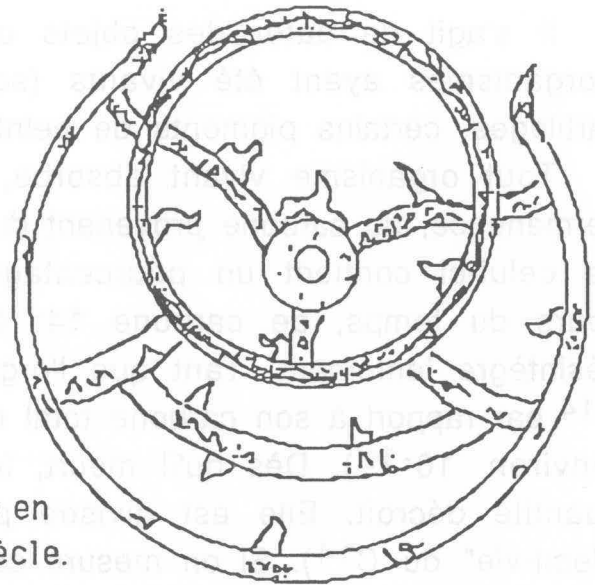
2° d'établir l'équation permettant de calculer l'âge de l'objet en fonction du taux de désintégration $(dN/dt)(t_a)$ mesuré à l'instant actuel t_a , ou en fonction du nombre $N(t_a)$ directement mesuré, et de la résoudre sur des exemples;

3° de faire le même travail en supposant que la proportion de C^{14} dans l'atmosphère a varié, par exemple de façon affine (pour simplifier), pendant la période 1890-1945, en décroissant (effet de la pollution industrielle; il a augmenté à nouveau depuis 1945 par suite des essais d'armes nucléaires); cela permet, par exemple, de détecter de faux tableaux anciens fabriqués pendant cette période;

4° de comparer la méthode du C^{14} à d'autres méthodes de datation.

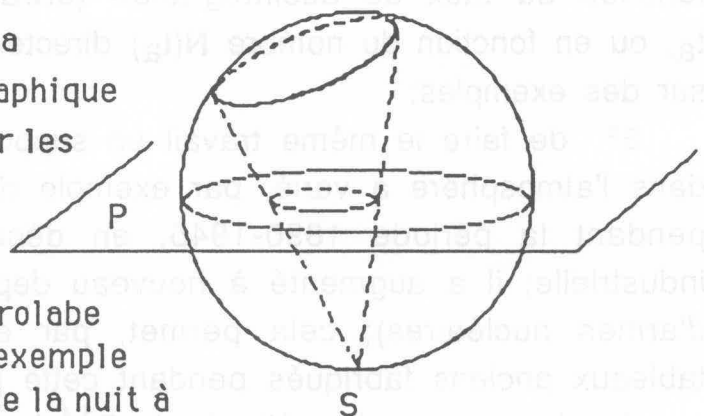
4. COMMENT SE SERVAIT-ON D'UN ASTROLABE ?

L'astrolabe était un instrument dont se sont servi les astronomes pendant des siècles. On l'a surnommé le "bijou des mathématiciens". On s'en est servi dès l'antiquité, et beaucoup chez les Arabes, jusqu'au 19^e siècle. Ils l'ont transmis en Europe à la fin du 10^e siècle.



Ce n'est pas un instrument d'observation, mais un instrument de calcul et de prévision. Il sert à représenter sur un plan la sphère céleste mobile autour du centre de la terre. Pour cela, on utilise la projection stéréographique d'une sphère sur un plan P parallèle à l'équateur à partir de son pôle sud S . Il s'agit donc d'abord d'étudier cette projection, qui a la propriété de transformer tout cercle de la sphère ne passant pas par S en un cercle du plan P . Par ailleurs, les cercles usuels liés à l'observateur et à son zénith deviennent des cercles dans le plan, mais excentrés. Leur position dépend de la latitude de l'observateur sur la terre. Un astrolabe comporte donc plusieurs pièces échangeables, selon la latitude à laquelle on se place.

Les propriétés de la projection stéréographique permettent de situer les divers cercles intéressants, de les graduer, et de pouvoir faire avec l'astrolabe des prévisions, par exemple la durée du jour et de la nuit à telle latitude en telle saison...



Le mémoire devra établir toutes ces propriétés et justifier les constructions géométriques correspondantes. Il devra être accompagné d'un astrolabe construit en un matériau au choix, et fonctionnant effectivement.

8. AUTOUR DE LA FORMULE DE MACHIN: LE CALCUL DE π PAR DES SERIES D'ARCTANGENTES

Il est très facile de voir graphiquement, sur papier quadrillé, des formules telles que:

$$\pi/4 = \text{Arctg } 1/2 + \text{Arctg } 1/3,$$

$$\pi/4 = 2\text{Arctg } 1/3 + \text{Arctg } 1/7,$$

et d'autres, telles la formule de Machin:

$$\pi/4 = 4\text{Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239}, \text{ ou, plus étonnante:}$$

$$22\text{Arctg}(1/28) + 2\text{Arctg}(1/443) - 5\text{Arctg}(1/1393) - 10\text{Arctg}(1/11018)$$

a pour valeur $\pi/4$.

On peut établir ces formules à partir de la relation:

$$\text{Arctg } x + \text{Arctg } y = \text{Arctg}\{(x+y)/(1-xy)\} + k\pi.$$

Or, à partir de la formule

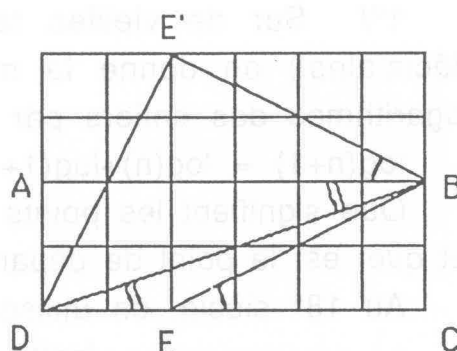
$$1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2n+2}/(1+t^2)$$

et du fait que $\text{Arctg } u$ est la primitive nulle en 0 de $1/(1+u^2)$, on voit que $\text{Arctg } u = u - u^3/3 + u^5/5 - \dots + (-1)^n u^{2n+1}/(2n+1) + R_n$, avec $|R_n| < |u|^{2n+3}/(2n+3)$.

Si $|u| < 1$, par exemple si $u = 1/x$, avec x entier > 1 , R_n est très petit, et la somme est une bonne approximation de $\text{Arctg } u$. En appliquant ceci aux formules précédentes donnant $\pi/4$, on peut calculer π avec une excellente précision. On peut définir une notion d'efficacité ou "facteur de convergence" de la méthode, représentant en gros le temps de calcul sur machine, et chercher des formules du même type très performantes.

Pour déterminer toutes les formules de ce type, on se ramène à chercher les points à coordonnées entières sur des cercles de centre 0 dans $\mathbb{R}^2$. On est ainsi conduit à étudier les solutions (x,y) entières de l'équation $x^2 + y^2 = n$ (entier). On peut ainsi montrer des propriétés du genre: si n est entier, les cercles de rayon $\sqrt{n}$ et $\sqrt{(2n)}$ contiennent autant de points à coordonnées entières.

L'étude peut se terminer par la rédaction d'un petit programme, pour calculatrice ou micro-ordinateur, pour calculer π avec de nombreuses décimales.



11. COMMENT CALCULAIT-ON LES LOGARITHMES... AVANT LES ORDINATEURS ?

1°/ Sur de vieilles tables de logarithmes (parfois à 7 ou à 8 décimales!) on donne la méthode suivante, qui permet le calcul des logarithmes des entiers par récurrence:

$$\log(n+1) = \log(n) + \log(1+1/n) = \log(n) + 1/n - 1/2n^2 + 1/3n^3 - 1/4n^4 + \dots$$

Que signifient les points de suspension? Est-ce une méthode rapide? Et quel est le point de départ de la récurrence?

Au 18^e siècle, on utilise les formules suivantes:

$$\log(2) = 2 \sum_{p \geq 0} 1/(2p+1)3^{2p+1}, \text{ et}$$

$$\log(n+1) = \log(n) + \log(n-1) + 2\{1/n + 1/3n^3 + 1/5n^5 + \dots\},$$

qui permettent en principe de calculer de proche en proche les logarithmes de tous les entiers. Comment calculer celui d'un rationnel?

Il s'agira dans le mémoire de préciser et de justifier ces formules, et de préciser l'ordre de grandeur des erreurs. On pourra aussi étudier cet autre exemple étonnant:

$$\log(x+5) = \log(x+3) + \log(x-3) + \log(x+4) - \log(x-4) - \log(x-5) - 2\log x - 2\{u + u^3/3 + u^5/5\},$$

où $u = 72/(x^4 - 25x^2 + 72)$ (ATTENTION: vérifier la formule...).

2°/ Lorsque n est petit, ces formules donnent des calculs peu rapides. A partir de la formule

$(1/2)\log\{(x+1)/(x-1)\} = 1/x + 1/3x^3 + \dots + 1/(2p+1)x^{2p+1} + \int_0^{1/x} \{t^{2p+2}/(1-t^2)\} dt$, avec x grand, on peut calculer avec précision, par exemple, $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$, $\log 7$. On choisit 4 valeurs entières de x : x_1, x_2, x_3, x_4 , inférieures à 100, à trouver, telles que l'on ait: $x_1+1 = 2^a 3^b 5^c 7^d$ (décomposition en facteurs premiers), $x_1-1 = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'}$, et des formules analogues pour $x_2, \dots$. On obtient alors 4 équations linéaires à coefficients entiers vérifiées par $\log 2, \log 3, \dots$:

$$(a-a')\log 2 + (b-b')\log 3 + (c-c')\log 5 + (d-d')\log 7 = 2\{1/x_1 + 1/3x_1^3 + \dots\}$$

et de même pour $x_2, \dots$

Ces équations sont simples à résoudre par la méthode de Gauss, et permettent de calculer $\log 2, \dots$ à 10^{-7} près, par exemple. Pour accélérer les calculs, il faut un petit algorithme pour calculer les puissances x^n d'un nombre x sans faire $n-1$ multiplications (si $n=2p$, on calcule x^2 , si $n=2p+1, \dots$). On précisera quelle valeur de n il faut prendre pour obtenir la précision de 10^{-7} . Comment déduire du résultat une bonne évaluation du logarithme de 7350 ?

16. UNE POPULATION, UN CIRCUIT ELECTRIQUE, LA RUINE DES JOUEURS... UNE MEME METHODE MATHEMATIQUE

Le but du mémoire est de montrer que 3 problèmes d'origines différentes, se modélisant en 3 problèmes mathématiques différents, peuvent se résoudre par une même méthode mathématique générale.

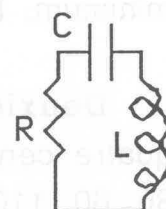
1/ L'évolution d'une population d'année en année est régie par la loi suivante: l'accroissement de population $u_{n+2} - u_{n+1}$ entre l'année $n+1$ et l'année $n+2$ est formé d'un terme proportionnel à la population u_n de l'année n et d'un terme proportionnel à l'accroissement entre l'année n et l'année $n+1$. On obtient ainsi la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On connaît u_0 et u_1 , et on veut savoir comment évolue u_n en fonction de n .

2 /

L'intensité i du courant dans le circuit RLC ci-contre est régie par l'équation différentielle

$$Li'' + (1/C)i' + Ri = 0$$

On cherche la fonction i du temps t .



3/ Soient 2 joueurs B et J ayant respectivement b et j francs. Ils jouent à un jeu de hasard donnant la probabilité q de gagner à B et $1-q$ à J; à chaque coup qu'un joueur perd, il donne 1 franc à l'autre. On cherche la probabilité de ruine de B. Si $f(x)$ est la probabilité de ruine de B quand il possède x francs, il faut montrer que $f(x) = qf(x+1) + (1-q)f(x-1)$. On cherche la fonction f , connaissant $f(0)$ et $f(b+j)$.

Plus généralement, on a 3 classes de problèmes mathématiques:

1° Trouver les suites vérifiant $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ (suites récurrentes linéaires à 2 termes).

2° Trouver les fonctions y vérifiant $ay'' + by' + cy = 0$ (équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants).

3° Trouver les fonctions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x) = 0$ (équations linéaires aux différences finies).

En fait ces 3 problèmes relèvent de la même méthode générale: on introduit une application linéaire T (décalage d'indice, dérivation, translation de h sur la variable) dans un espace vectoriel convenable (à préciser dans chaque cas), et l'équation revient à chercher les vecteurs u qui vérifient $(aT^2 + bT + cI)(u) = 0$. Dans les 3 cas, on décompose ce polynôme en facteurs du 1° degré; on se ramène à résoudre les 2 équations $(T - \alpha I)(u) = 0$ et $(T - \beta I)(u) = v$ (v donné). Pour cette dernière, on utilise une technique de "variation de la constante", sous une forme appropriée dans chacun des cas. Il s'agira donc de résoudre ces 3 problèmes en mettant en évidence les analogies et les spécificités.

20. OPTIMISATION D'UN COUT DE TRANSPORT

Premier problème. Deux centres de production A et A' produisent respectivement 200 tonnes et 100 tonnes d'un produit P . Trois centres de distribution X , Y , et Z doivent être alimentés avec respectivement 50 t, 170 t, et 80 t de P . Le coût du transport de A vers X est de a francs par tonne, de A vers Y , b francs par tonne, de A vers Z , c francs par tonne ; de même, les coûts de transport en provenance de A' sont a' , b' , c' francs par tonne vers X , Y , Z respectivement.

Il s'agit d'organiser les transports de façon que les trois centres de distribution soient approvisionnés, et que le coût total du transport soit minimum. Discuter selon les valeurs de a , b , c .

Deuxième problème. Énoncé analogue au précédent mais avec quatre centres de distribution X , Y , Z , T demandant respectivement 50, 80, 60, 110 tonnes de P , les productions de A et A' restant les mêmes.

Méthode suggérée à partir d'un graphique dans l'espace... Le logiciel Gauss pourra être utilisé pour faciliter la représentation.

Troisième problème. On revient au premier problème, mais avec une production de A' de 120 tonnes au lieu de 100 tonnes. Organiser les transports au coût minimum, les 20 t inutilisées restant au(x) centre(s) de production. *On peut aussi imaginer d'autres modalités : destruction onéreuse des surplus, solde sur place, ...*

Quatrième problème. Ce problème est complètement indépendant des précédents. Trois centres de distribution X , Y , Z sont disposés au bord d'une voie de communication, Y entre X et Z , à 200 km de X et à 300 km de Z . Ils ont besoin respectivement de x , y et z tonnes d'un produit P . Il s'agit cette fois de trouver l'endroit où construire un unique centre A destiné à produire les $x + y + z$ tonnes de P nécessaires. On posera des hypothèses raisonnables sur le coût du transport vers X , Y , Z .

Imaginer éventuellement d'autres problèmes sur le même thème...

22. DIVERS MODELES DIFFERENTIELS DE CROISSANCE DE POPULATIONS

Pour une population assez nombreuse, on peut supposer que le nombre $N(t)$ d'individus est une fonction dérivable réelle du temps.

Modèle explosif

Le taux de croissance est proportionnel au carré de la population (phénomènes chimiques): $N' = aN^2$.

Modèle exponentiel

Le taux de croissance est proportionnel à la population. C'est un cas rare dans la réalité (populations de bactéries).

Modèle de Verhulst, dit "modèle logistique"

Dans ce modèle, le taux d'accroissement est proportionnel à la population et à l'écart $m - N(t)$ entre la population et une population optimale m , supposée être permise par les ressources du territoire de la population.

Modèle avec prédateur

On suppose de plus que la présence de prédateurs apporte une cause supplémentaire de diminution de la population, qu'on traduit en retranchant à N' un terme $a(t) > 0$; selon que $t \rightarrow a(t)$ est ou non une constante, on peut ou non résoudre explicitement l'équation.

Modèle avec fertilité périodique

Dans les populations animales, la fertilité présente souvent un caractère périodique; dans cette hypothèse, on suppose que l'on a

$$N' = \{b + p\cos(qt)\}N - cN^2 - a(t), \text{ avec } b > p.$$

En général, il faut faire une étude qualitative de cette équation, jointe à une résolution numérique (micro-ordinateur ou calculatrice programmable).

Le but du mémoire est de mettre au point les modélisations, en précisant leurs hypothèses, d'étudier les solutions des équations différentielles obtenues par diverses méthodes (qualitative, résolution explicite quand c'est possible, calcul numérique,...), et d'interpréter les résultats pour le devenir des populations, selon leur taille initiale $N(0)$: croissance ou décroissance, exponentielle ou vers une limite, extinction, variations périodiques, développement explosif,... On pourra, pour une population réelle donnée, comparer le résultat théorique aux relevés statistiques dont on dispose.

Enfin, on peut comparer le modèle différentiel logistique au modèle discret correspondant: l'accroissement $u_{n+1} - u_n$ de la population de l'année n à l'année $n+1$ vaut $ku_n(m - u_n)$.