Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale.

Dans l'intention de faciliter la reproductibilité du montage didactique que nous pratiquons sur l'intégrale depuis plusieurs années en DEUG A1 à Grenoble, nous adjoignons à sa description le résumé sommaire de l'analyse qui nous[1] a conduits à bâtir un tel dispositif.

Cela conduit au découpage suivant:

Quel objectif ?

La plupart des mathématiciens ou des physiciens considèrent que l'intégrale est un concept très riche et tout à fait central dans le développement de la science. Chacun sait d'expérience que ce qui est prioritaire pour maîtriser les éléments fondamentaux de ce concept, ce n'est ni de développer la théorie pour elle-même ni de la réduire à un simple calcul de primitives. Ce qui compte essentiellement ici, c'est de concrétiser la philosophie qui se cache derrière cette construction élaborée en détectant le type de problèmes théoriques ou pratiques dont la solution passe par une procédure intégrale et en repérant de quelle façon cette dernière intervient pour permettre une mathématisation convenable de ces problèmes.

I) Le problème scientifique que nous nous proposons de mettre en évidence au sujet de l'intégrale

En deux mots, on peut dire que le "processus intégrale" intervient de façon déterminante à chaque fois qu'on veut effectuer une sorte de moyenne pondérée ou un bilan complexe, c'est-à-dire lorsqu'on se rend compte qu'on ne peut évaluer directement par simple proportionnalité un résultat global parce qu'il est engendré par un phénomène qui varie dans le temps ou dans l'espace, mais que par contre il est tout à fait possible de le faire apparaître comme la somme de résultats élémentaires qui, eux, sont quasi proportionnels à deux grandeurs: l'intensité du phénomène d'une part et la mesure du domaine sur lequel ce phénomène garde pratiquement la même intensité de l'autre.

Il est clair que si le monde était exclusivement régi par des phénomènes constants, les scientifiques n'auraient pas été contraints (sauf en tant que jeu de l'esprit) à construire un concept aussi sophistiqué que l'intégrale pour modéliser quantitativement la réalité. En effet, si tel était le cas, le bilan, l'évaluation de la "somme" de contributions élémentaires résultant de la présence d'un phénomène dont l'action est diffuse suivrait un modèle linéaire (il suffirait de faire le produit de

1) Il s'agit de Denise Grenier, Françoise Richard et Marc Legrand, membres du groupe de recherche en didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur à Grenoble, qui ont travaillé sur ce sujet depuis 1984 en forte interaction, par le biais du GRECO Didactique, avec Michèle Artigue, Jeanine Ménigaux et Laurence Viennot de Paris VII.

l'intensité du phénomène par la mesure (longueur, aire, volume, durée suivant les situations) du domaine spatial ou temporel sur lequel le phénomène agit pour produire le résultat. C'est bien ainsi qu'on évalue par exemple l'aire d'un objet rectangulaire (problème dans lequel le phénomène "largeur de la figure" demeure constant quand on se déplace sur la dimension "longueur de la figure"), ou la masse d'un corps homogène (le phénomène densité étant alors constant quand on se déplace à l'intérieur de l'objet), ou encore le travail d'une force constante le long d'un chemin rectiligne (la projection orthogonale de la force sur l'axe du trajet a un module constant), etc.

Comme précisément il n'est pas idoine à la réalité de représenter par des constantes l'intensité de la plupart des phénomènes qui produisent des résultats globaux, il nous faut remplacer le modèle linéaire "simple produit de la grandeur du phénomène qui engendre le résultat par la mesure du domaine sur lequel il agit" par un modèle de même essence mais beaucoup plus complexe: "la procédure intégrale".

Cette procédure, nous la décrivons qualitativement comme la réussite successive de cinq actions élémentaires dont trois peuvent totalement échouer si le problème que l'on tente de résoudre ne correspond pas au type de mathématisation que nous envisageons d'effectuer.

En clair, il s'agit ici en définissant cette procédure de décrire et les hypothèses de modélisation que nous choisissons et leur philosophie, afin de cerner du même coup les problèmes que l'on pourra ainsi traiter. (Pour ce qui est de l'enseignement, nous essayerons de montrer dans la quatrième partie quel intérêt il y a à ne pas procéder dans cet ordre.)

Hypothèses et algorithmes de la procédure intégrale

H1) Décomposition additive des problèmes

Les problèmes que l'on cherche à traiter sont globaux mais parcellisables, et lorsqu'on les décompose en deux ou en un nombre fini de problèmes partiels, les lois qui interviennent garantissent l'additivité des résultats : *le résultat global est la somme des résultats partiels correspondants* (beaucoup de phénomènes suivent ce principe additif mais tous ne le font pas, par exemple quand il y a des effets de synergie, des interactions entre les causes, ou des effets de seuils qui font que ce qui advient du tout n'est pas forcément égal à la somme de ce qui se produit avec les parties : réactions chimiques ou thermo-nucléaires, pollutions, etc.)

H2) Encadrement des résultats partiels par application de la procédure élémentaire "simple produit"

Si l'intensité du phénomène qui engendre le résultat global est majorée (resp. minorée) sur une partie du domaine, le résultat partiel correspondant admet alors pour majorant (resp. minorant) le simple produit d'un majorant (resp. minorant) de l'intensité sur cette partie par la mesure (longueur, aire, volume) de cette partie (i.e. si le résultat global ou partiel n'est pas nécessairement proportionnel aux grandeurs en jeu, il admet néanmoins des majorations directement proportionnelles aux majorants des grandeurs en jeu).

H3) Réduction de la complexité du phénomène par localisation

Puisqu'on ne suppose pas ici que le phénomène qui engendre le résultat à évaluer agisse tout le temps avec la même intensité, il n'est pas possible de modéliser globalement cette intensité par une constante (notre problème est précisément de découvrir la constante qui pourrait après coup être considérée comme la valeur moyenne de cette intensité variable); par contre, *on va supposer qu'il est possible de décomposer le domaine global en parties ou morceaux "suffisamment petits" pour qu'il soit alors raisonnable de modéliser sur chaque morceau l'intensité du phénomène par une constante.*

Sur des domaines qui ne sont pas trop vastes, il est souvent possible de traiter comme quasi constants par morceaux les phénomènes qui s'y produisent, surtout si l'amplitude de leur variation n'est pas trop gigantesque et que les brusques variations sont rares; cela peut par contre devenir très problématique si on veut maîtriser des phénomènes qui se développent sur une trop grande période ou une trop vaste étendue, ou encore lorsqu'on affronte des phénomènes fortement discontinus sur une trop grande étendue.

En pratique, pour que cette condition H3, qui indique clairement la manière dont la procédure tente de s'adapter à la variabilité du phénomène, soit mathématiquement contrôlable, il faut la quantifier, i.e. la remplacer par la condition (H'3)[1].

Alg.1 (Synthèse de H2, H3) : Modélisation des contributions locales par la procédure élémentaire "simple produit"

Comme nous venons de le voir, pour des raisons de variabilité des phénomènes en jeu, vouloir appliquer directement la procédure élémentaire "simple produit" pour résoudre le problème global n'est pas réaliste du tout; par contre, localement c'est très raisonnable.

Puisqu'en vertu de H2 les résultats locaux sont nécessairement des infiniment petits avec les diamètres des parties considérées, il suffit alors d'évaluer par ce biais l'ordre de grandeur de ces infiniment petits. *La partie principale ou l'ordre de grandeur de ces contributions infinitésimales (le bon modèle infinitésimal) est donné par le simple produit de l'intensité locale du phénomène* (valeur qui a du sens, vu H3) *par la mesure de la partie infinitésimale concernée.*

Alg.2 (Synthèse de H1, H2, H3) : L'intégrale du phénomène est la valeur limite qui fournit la seule modélisation idéale du résultat global.

En sommant les modélisations infinitésimales des contributions locales (les éléments différentiels Alg1), *on obtient des valeurs théoriques qui sont* (en vertu de l'additivité du problème) *des approximations du résultat global.* Ces approximations, H3 nous laisse espérer qu'elles sont intéressantes, H3' nous garantit qu'elles sont aussi bonnes qu'on peut le souhaiter pouvu que l'on effectue des découpages assez fins.

En passant donc à la limite sur des découpages de plus en plus fins, découpages choisis de façon ad hoc pour faciliter la détermination des modélisations locales (premier aspect fondamental de

1) **H'3) Disparition de l'accumulation des erreurs d'approximation par passage à la limite** : *on suppose qu'en effectuant des découpages de plus en plus fins la somme des erreurs d'approximation effectuées au niveau des modélisations locales devient arbitrairement petite.*

la philosophie de la procédure), *on obtient une famille d'approximations successives du résultat global qui converge vers la seule valeur théorique qui puisse constituer la modélisation idéale du résultat qu'on se donnait à évaluer.*

Cette valeur théorique étant totalement indépendante des choix de découpage faits pour faciliter les évaluations (deuxième aspect fondamental de la philosophie de cette procédure), *elle constitue un objet mathématique bien identifié qu'on appelle l'intégrale de Riemann de l'intensité du phénomène sur le domaine considéré.*

II) L'épistémologie développée par la mise en avant d'une telle procédure

Cette approche de l'intégrale comme outil de modélisation de certains problèmes montre d'emblée que l'intégrale est d'abord le prolongement (assez sophistiqué certes), mais le prolongement quand même de la procédure élémentaire "simple produit", c'est-à-dire qu'elle est basée sur la volonté d'adapter le modèle linéaire à une réalité complexe.

Les formules de base comme **" $\int_\Omega f = f.\mathrm{mes}(\Omega)$, quand f est constante"** et plus généralement **" $\inf[f(\Omega')].\mathrm{mes}(\Omega') \leq \int_{\Omega'} f \leq \sup[f(\Omega')].\mathrm{mes}(\Omega')$, pour toute partie mesurable Ω' de Ω "** sont donc constitutives de ce concept.

Il est clair que la "procédure intégrale" ne se détache véritablement de la "procédure simple produit", conceptuellement très élémentaire et opératoirement très accessible, qu'à partir du moment où cette dernière devient inadéquate pour représenter une réalité régie par des phénomènes qui varient trop; on lui substitue alors une procédure conceptuellement beaucoup plus complexe et opératoirement beaucoup plus délicate parce que, contraints à complexifier la procédure élémentaire, les mathématiciens ont choisi la qualité face à la quantité (le scientifique débutant[1] ne fait pas spontanément ce choix). *Ainsi, plutôt que de construire une procédure universelle conduisant à un résultat approximatif, les mathématiciens ont opté avec l'intégrale pour un outil de modélisation idéal, mais qui de ce fait ne s'appliquera pas forcément à tous les problèmes.*

La clef de cette opération intellectuellement coûteuse est donc l'hypothèse H3' qui garantit que lorsque la procédure intégrale s'applique, elle fournit non pas une mathématisation approximative, mais une modélisation parfaite du problème, c'est-à-dire qu'elle n'introduit aucune erreur systématique de méthode.

En définitive, lorsque les grandeurs qui entrent en jeu dans le problème sont correctement modélisées (i.e. le domaine sur lequel on étudie l'action d'un phénomène variable étant représenté par un sous-ensemble Ω de la droite, du plan ou de l'espace, et l'intensité du phénomène par une fonction numérique f définie sur cet ensemble Ω), le nombre $\int_\Omega f$ que fournit la procédure n'est pas seulement (comme le pensent un grand nombre d'étudiants de licence ou de maîtrise de mathématiques ou de physique) une "bonne approximation" ou un "bon encadrement" du résultat (sans d'ailleurs pouvoir préciser ce que signifierait ce "bon" : 1%, 5%, 20%, 10^{-20} ???), c'est l'évaluation exacte du résultat dans le modèle choisi.

---

1) Voir "Questionnaires de travail sur les différentielles" (IREM et LDPES de PARIS VII)

C'est donc pour pouvoir soutenir ce projet que les mathématiciens introduisent une condition comme H'3, c'est-à-dire inventent **le concept de fonction intégrable** (ici au sens de Riemann).

L'expérience montre que ce dernier concept reste étranger, voire inaccessible à la plupart des étudiants qui ne le perçoivent que comme un "pinaillage" de mathématiciens et ne le voient absolument pas comme la clef de voûte, la garantie de bonne fin de la nouvelle procédure à laquelle ils s'initient.

En pratique, nous faisons l'hypothèse didactique que c'est en grande partie l'impossibilité de concrétiser[1] auprès des étudiants ce concept d'intégrabilité qui ruine l'enseignement de la théorie de l'intégrale.

En effet, dans une saine économie de la pensée et de l'apprentissage, à quoi sert-il scientifiquement parlant de remplacer une procédure simple que l'on maîtrise bien par une procédure infiniment plus complexe (que de plus on ne maîtrise pas encore quand on l'apprend), si on ne peut garantir à la clef de cet investissement intellectuel que l'outil sophistiqué nouvellement fabriqué est franchement meilleur que le précédent et s'il est impossible de caractériser, ou pour le moins d'identifier, la classe des nouveaux problèmes qu'il permet de traiter avec une totale fiabilité.

Notre hypothèse est donc que l'obstacle que nous rencontrons tous plus ou moins dans l'enseignement de cette théorie n'est pas fondamentalement didactique (i.e. la difficulté que l'étudiant rencontre dans l'assimilation de cette théorie ne relève pas essentiellement de la nouveauté et du manque de familiarité avec les objets manipulés), il est beaucoup plus de nature épistémologique *(nous pensons que tant que l'étudiant n'entre pas dans une certaine problématique scientifique de modélisation du réel, de contrôle d'adéquation et de validité des procédures engagées, l'enseignement de concepts sophistiqués comme celui de l'intégrale ne peut se présenter à lui que comme une sorte de mystification ; dès lors il va très probablement réduire le concept au premier algorithme de calcul qu'on lui offrira, car seul ce calcul aura une signification en tant que moyen d'action).*

Il nous semble que c'est précisément parce que l'acquisition de ce concept correspond pour les étudiants de premier cycle à un saut épistémologique dans leur appréhension d'une démarche scientifique que la plupart d'entre eux tendent inconsciemment à le réduire à une simple gesticulation autour du calcul des primitives. Par cette réduction ils maintiennent l'intégrale dans le champ de ce qu'ils savaient faire antérieurement, mais par là même ils s'interdisent l'accès au niveau plus élaboré de la connaissance scientifique auquel cette étude pouvait très naturellement les conduire, tant sur un plan purement mathématique que sur celui des sciences appliquées (mise en équation des problèmes et mathématisation des concepts fondamentaux : notion de travail d'une force variable, de force résultante, d'énergie, etc. etc.)

---

1) Pour nous, concrétiser le concept d'intégrabilité ce n'est pas seulement donner un ou deux exemples de fonctions intégrables ou non intégrables, c'est parvenir à identifier le type de problèmes concrets dont le traitement mathématique relève de la procédure intégrale et ceux qui n'en relèvent pas.

III) L'observation des faits d'enseignement

Ressentant de longue date plus ou moins confusément ce qui est exprimé dans le paragraphe précédent, nous avons essayé pendant des années, en tant qu'enseignants soucieux de pratiquer une pédagogie qui favorise les acquisitions conceptuelles, de nombreuses tentatives directes dans l'espoir de parvenir à persuader nos étudiants de l'intérêt et de l'utilité de maîtriser cette théorie de l'intégrale comme processus de découpage, d'encadrement et de passage à la limite prolongeant la procédure élémentaire simple produit. Néanmoins, quels que soient le discours proposé, les métaphores utilisées, les domaines d'applications choisis, le résultat didactique est resté assez invariablement le même: de 5% à 10% de nos étudiants spécialement motivés par les mathématiques semblaient momentanément s'intéresser à cette procédure, mais à terme on pouvait constater qu'il ne restait pratiquement rien de tout ce travail de réflexion et de compréhension. Seuls deux acquis mineurs et totalement réducteurs (que beaucoup d'étudiants possèdent déjà avant nos enseignements) semblaient résister à l'usure du temps : en mathématiques, celui du calcul des primitives, et en physique celui d'un formalisme commode de mise en équation.

Par exemple, en mathématiques la quasi-totalité des étudiants de DEUG, mais aussi de licence, ne peuvent travailler sur une intégrale que lorqu'ils se croient capables de calculer une primitive de l'intégrant; ainsi ils passent systématiquement par le biais d'une primitive pour calculer l'intégrale d'une constante, et sont fort désappointés devant le calcul de l'intégrale d'une fonction en escalier comportant plus d'une marche.

Il semble d'ailleurs que le souci général de ne pas multiplier inutilement les causes d'échec contribue à cette pathologie; en effet, constatant chaque année davantage l'inanité des longs développements théoriques (qui apparemment n'intéressent plus personne), nous nous sentons condamnés par nécessité pédagogique (puisque la quasi-unanimité de nos étudiants ne travaillent que ce qui est matière à exercices stéréotypés) à exploiter plus que nous ne le souhaiterions les facilités qu'apportent les notations différentielle et intégrale, lesquelles dictent ce qu'il faut faire sans qu'il soit toujours indispensable de réfléchir véritablement à ce qu'on fait.

Les vraies raisons de la théorie n'apparaissent donc qu'à la fin de l'étude au niveau de quelques applications ou en filigrane lors de la démonstration de théorèmes généraux (intégrabilité des fonctions continues, indépendance du mode de subdivision etc). Mais ces théorèmes ont mauvaise presse auprès des étudiants: comme ils ne donnent pas lieu à exercices et problèmes immédiats, ils les considèrent comme un luxe théorique dont ils peuvent faire l'économie car, pensent-ils, ces connaissances ne servent à rien au niveau des examens et ne peuvent améliorer leur rapport avec la réalité matérielle.

Et en physique le sens n'est malheureusement, semble-t-il, pas beaucoup plus présent[1] ; par exemple, copiant la mise en équation du calcul de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude, (problème qui nécessite fondamentalement une mise en équation intégrale, la densité du gaz variant avec l'altitude), la quasi-totalité des étudiants considèrent comme indispensable de recourir à cette

1) Voir "Questionnaires de travail sur les différentielles" (IREM et LDPES de PARIS VII)

même procédure pour calculer la pression en fonction de l'altitude à l'intérieur d'un liquide non compressible (problème à la résolution duquel la procédure "simple produit" suffit amplement, puisque la densité est constante et qu'on choisit ici de ne pas tenir compte de la variation de l'intensité de l'attraction terrestre).

Paradoxalement, les sciences appliquées qui mettent en œuvre l'intégrale de façon permanente ne fournissent pas à l'étudiant les paradigmes qui faciliteraient l'émergence du concept, car les "mises en équations intégrales" sont le plus souvent présentées de façon formelle et totalement "naturaliste".

En effet, la pratique quasi universelle est approximativement la suivante:

- pour calculer un résultat R représentant par exemple une grandeur attachée à un objet, on se propose d'évaluer la quantité Σ dR correspondant à une parcellisation de cet objet en petits morceaux,
- on choisit alors un paramétrage x,
- on se place en un point M(x), on prend un élément dΩ "infiniment petit" de l'objet considéré, situé autour de M(x), et on matérialise sa mesure par les symboles dl ou dS ou dV etc. (Cette pratique devrait normalement donner lieu à des discussions sur le sens que l'on attribue au d( ), puisque la seule mesure infiniment petite dans le modèle standard est zéro et qu'il ne peut être question ici d'écrire que toutes les quantités infinitésimales sont nulles, car la somme serait elle aussi invariablement nulle. Mais le contrat didactique tacite est ainsi fait qu'on constate que ces discussions n'ont pour ainsi dire jamais lieu.)
- puis on calcule la contribution élémentaire ou infinitésimale correspondante dR en utilisant le formalisme dR = f(x)dx, où f(x) est une formule tenant compte de l'intensité du phénomène produisant le résultat et du choix du paramétrage x,
- enfin on marque son intention de calculer la somme des contributions infinitésimales en plaçant devant le produit f(x).dx l'un des symboles $\int$, $\iint$, $\iiint$ suivant les cas.
- une fois ce "rite intégrale" accompli (rite dans lequel le glissement symbolique du signe Σ au signe $\int$ a le pouvoir magique de résorber tous les conflits sémantiques), on s'engage dans la recherche d'une primitive; si on y parvient, la mathématisation du problème est considérée comme totalement réussie (le résultat du problème est sans le moindre doute celui que fournit la variation de la primitive entre les extrêmités du domaine d'intégration).

En clair, la "procédure intégrale" maintes fois utilisée à bon escient en sciences appliquées n'est cependant pour les étudiants qu'un formalisme de mise en équation des problèmes concrets sur lesquels ils n'ont pratiquement aucun contrôle sémantique. Par exemple, ils ne voient absolument pas dans quelle direction il faudrait chercher (en tout cas ils ne soupçonnent pas que le problème se situe probablement au niveau de l'ordre de grandeur des infinitésimaux négligés) pour expliquer le paradoxe suivant : si on applique la procédure "découper une sphère ou un cône en fines tranches et remplacer le volume de chacune d'entre elles par celui d'une tranche du cylindre inscrit ou circonscrit (peu importe) de même épaisseur", on obtient par sommation et passage à la limite les formules classiques du volume de la sphère ou du cône (donc la méthode est bonne!); si on réapplique exactement la même technique aux mêmes objets en remplaçant le volume par la surface latérale, on obtient un peu "n'importe quoi" (donc la méthode n'est fiable que lorsqu'elle est choisie par le professeur!).

IV) L'écologie du concept d'intégrale dans l'enseignement

Face à l'échec persistant de l'enseignement d'un concept qui nous paraissait néanmoins central pour l'accès à une meilleure compréhension de la démarche scientifique tant en mathématiques que dans les disciplines appliquées, notre proximité avec la recherche en didactique nous a conduits à étudier l'écologie de ce concept dans l'enseignement.

Cette étude a mis en évidence les faits suivants:

- En mathématiques, même si la plupart des cours sur l'intégrale débutent par un commentaire épistémologique plus ou moins développé montrant quelles difficultés s'opposent au calcul élémentaire de l'aire d'une surface non rectangulaire ou à la détermination du volume d'un corps non parallélépipédique ou du poids d'un corps non homogène etc., **aucune activité spécifique n'est en général organisée en préalable pour faire en sorte que les étudiants ne puissent aborder cette théorie de l'intégration sans éprouver une profonde insatisfaction vis-à-vis des procédures plus élémentaires qu'ils ont étudiées auparavant.**

Rien donc n'a été entrepris pour qu'ils soient intimement persuadés que ces procédures élémentaires qui leur ont permis, certes assez facilement, de mathématiser certains problèmes concrets, n'ont réussi que parce que ces "dits problèmes concrets" étaient en fait des cas très particuliers, des caricatures, des modélisations grossières des problèmes réels qu'ils évoquaient (la plupart des paramètres ayant été artificiellement supposés constants).

- Dans les autres sciences, lorsqu'en premier cycle on aborde la mathématisation de problèmes nécessitant des procédures plus évoluées, on ne montre pour ainsi dire jamais quelles "erreurs infinitésimales" dans la mise en équation du problème pourraient faire échouer les procédures différentielle et intégrale (par exemple en effectuant un mauvais calcul de la surface de la sphère ou du cône); on ne peut donc compter sur cette utilisation de l'outil mathématique pour susciter le besoin conceptuel.

La raison de cette "naturalisation" des procédures complexes assez universellement répandue en sciences appliquées tient, semble-t-il, pour une bonne part au fait que la coutume est dans l'enseignement des sciences de n'aborder que très prudemment les problèmes posés par l'adéquation et la fiabilité des modélisations proposées; on discute volontiers de l'inadéquation des modélisations antérieures que l'on va rejeter, par contre on évite d'introduire un véritable débat sur l'adéquation des modèles qu'on propose en dernier ressort.

Pour l'étudiant donc, les discussions épistémologiques qui s'imposent assez naturellement en sciences appliquées et qui pourraient, si elles étaient d'actualité, rejaillir sur un questionnement mathématique, concernent le passé (elles permettent d'évacuer les scories du passé), elles n'ont qu'un vague rapport avec le présent et ne conditionnent pas l'avenir.

Ainsi les seules difficultés que l'étudiant perçoit dans une mise en équation intégrale sont soit de ne pas savoir comment paramétrer, soit de ne pas trouver les primitives de l'intégrant qui s'est imposé, soit de se tromper dans le calcul de la primitive; il ne subodore pas par contre qu'il peut facilement, non par erreur de calcul algébrique, mais par défaut de compréhension de la procédure, se construire un intégrant qui ne représenterait pas bien l'intensité du phénomène agissant.

En définitive, on constate que l'étudiant habitué dans le secondaire à une mathématique et une physique très algébrisées n'a aucune raison profonde en premier cycle de souhaiter connaître des constructions mathématiques prenant intrinsèquement en compte la variabilité de la réalité, constructions qui sont propres à l'analyse.

Rien donc ne prépare les étudiants qui abordent l'étude de l'intégrale à la nécessité d'un changement d'état d'esprit ; dans le meilleur des cas ce n'est qu'à la fin de l'étude de cette théorie que certains perçoivent le changement de point de vue indispensable, et les autres passent franchement à côté du problème (en tout cas les arguments magistraux que nous développons au début, au milieu ou à la fin de nos cours, n'ont pas l'air de provoquer une telle prise de conscience).

En clair il n'y a pas, semble-t-il, dans l'enseignement que nous prodiguons de quoi faire vivre scientifiquement le concept d'intégrale, l'étudiant subit totalement la partie théorique parce qu'il lui semble ne pouvoir y prendre aucune initiative positive, y mener aucune action dont il ait le contrôle. En fait, il croit à la vérité de nos assertions de part notre statut d'enseignant, mais c'est une croyance en des mots, une accoutumance à des notations, à des rites, et non une conviction de nature scientifique, basée sur des arguments rationnels.

Par contre, dès qu'arrive la méthode d'évaluation des intégrales par un calcul de primitives, ce même étudiant a le sentiment de pouvoir recouvrer une certaine autonomie scientifique puisqu'une fois présentées les quelques techniques de base, il s'offre à lui toute une gamme d'exercices plus ou moins astucieux dans lesquels il peut exercer son imagination, faire fonctionner ses connaissances antérieures et surtout contrôler par lui-même l'exactitude de son travail. (Par exemple, à tous les niveaux, on observe qu'il est assez naturel pour un étudiant de contrôler la validité d'un résultat intégral par un éventuel pénible calcul de dérivation, alors qu'il est assez rare qu'il regarde la compatibilité du signe de son résultat avec celui de l'intégrant; extrêmement rares sont les cas où il va confronter son résultat avec l'approximation numérique qu'il peut obtenir au moyen d'une calculette programmable, totalement invraisemblable est de le voir effectuer des majorations grossières pour tester si l'ordre de grandeur du résultat est compatible avec la majoration par la procédure élémentaire simple produit).

On pourrait penser que cette impossibilité de faire vivre ce concept est propre au premier cycle et que "les choses vont s'arranger" avec un plus gros bagage scientifique; en pratique il semble que cette réduction du concept à un de ses algorithmes de calcul perdure bien au delà. En effet, quand par exemple on est confronté à ce problème avec des étudiants de préparation à l'agrégation qui ont en général "vu" la théorie de Riemann puis celle de Lebesgue, ils sont presque toujours incapables de décrire les rapports qu'elles exercent entre elles : l'une prolonge-t-elle l'autre ?? Si une fonction est "doublement intégrable", le symbole $\int_\Omega f$ "à la Riemann" désigne-t-il la même valeur que $\int_\Omega f$ "à la Lebesgue" ??? Voilà bien des questions philosophiques que le calcul des primitives leur a évité de jamais se poser!!

A partir d'une telle analyse, il nous a semblé comprendre un peu mieux pourquoi, quels que soient nos efforts pour enseigner ce sujet, seule la partie symbolique et calculatoire laissait à terme quelques traces: c'est la seule sur laquelle l'étudiant pouvait agir scientifiquement. Notre recherche a donc consisté à déterminer comment donner à l'étudiant la possibilité d'exercer son initiative et ses compétences antérieures sur la partie conceptuelle, et ce suffisamment tôt pour qu'il soit possible de rentabiliser cette mise de fond initiale tout au long de l'étude mathématique et favoriser les prises de sens qui devraient normalement se produire au cours de l'utilisation de l'outil intégrale dans les diverses disciplines appliquées.

Cette recherche a débouché sur des montages qui nécessitent au moins localement d'adopter un contrat didactique voisin de celui que nous décrivons à propos du débat scientifique en cours.

V) Un exemple de montage didactique sur l'intégrale de Riemann

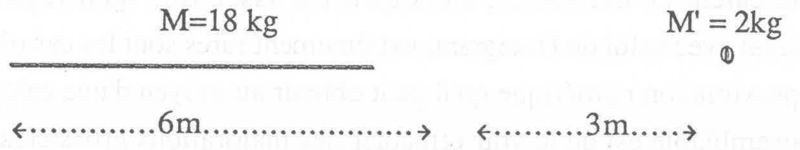
A) Entrée dans la problématique:

1) Suppression de tout commentaire épistémologique introductif au cours sur l'intégrale (commentaire qui n'est en général écouté que par ceux qui sont déjà dans le coup, les autres attendant que le cours commence); la leçon ne possède d'ailleurs pas le titre "Intégrale", mais "Mise en équation de certains problèmes de physique".

2) La loi d'attraction universelle de Newton entre deux masses ponctuelles situées à distance r : $F = k\, M.M'/r^2$ étant rappelée, le cours de mathématiques sur l'intégrale commence par la question suivante :

Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6m de long et de 18kg et la masse M' de 2kg étant considérée comme ponctuelle?

Au tableau figure le dessin ci-dessous et la question : **F = ?**



3) Les étudiants disposent de cinq minutes pour résoudre ce problème individuellement ou en petits groupes, l'enseignant n'intervient pas.

4) Les étudiants proposent toute une gamme de solutions dont voici un exemple : (la première ligne représente les réponses et la deuxième ligne la proportion d'adhésions de l'amphi à telle ou telle réponse.)

F =	- 8 k	4/9 k	k	4/3 k	4 k	8 k	?
Nb. d'étud.	10	3	#50	8	10	4	#25

5) S'engage un débat entre les étudiants, débat que l'enseignant préside et structure, mais au cours duquel il ne donne son avis ni sur la vérité ni sur la pertinence des propositions des étudiants, débat contradictoire dans lequel les arguments d'autorité sont sans valeur.

Par exemple, la réponse F = 4/3.k, "parce qu'on a calculé l'intégrale $\int_{[3,9]}k.M'/r^2.M/6.dr$!", provenant éventuellement de quelques redoublants, est inscrite au tableau mais ne peut être discutée à partir du seul argument d'autorité: "c'est le bon résultat, parce que l'année dernière le prof de méca a fait comme ça !"; si par contre, ces étudiants expliquaient pour quelles raisons le calcul d'une certaine primitive garantit ici un résultat adéquat, l'amphi serait bien obligé de prendre très au sérieux la proposition (ce cas de figure ne s'est jamais présenté jusqu'à ce jour chez nous).

Inversement les résultats primitivement inscrits sans débat au tableau ne peuvent être rejetés (barrés du tableau) parce qu'ils ne plaisent pas à certains qui les considèrent comme faux ou aberrants (l'adhésion comme le rejet doivent être argumentés, sinon le débat scientifique s'essoufle immédiatement et l'enseignant est contraint de trancher, ce qui casse l'aspect problématique de cette situation de départ).

Ainsi, le principe du centre de gravité "tout se passe comme si la masse de la barre était concentrée en son milieu" est un principe de "bon sens" qui conduit au résultat erroné F = k, lequel est généralement adopté d'emblée par la majorité des étudiants. Ce résultat est donc déterminant (vu notre objectif épistémologique), puisqu'il sort la majorité des étudiants de la neutralité conceptuelle qui caractérise leur situation d'apprenants: ils ont maintenant une forte conviction sur le problème, certains même ont le sentiment qu'il est franchement absurde ou anti-scientifique de penser autrement.

Or, par chance, cette forte conviction est logiquement auto-destructrice: il suffit que la passion du débat pousse un étudiant à couper la barre en deux et qu'il réapplique ce même principe à chacune des deux moitiés, pour obtenir alors F # 1,21. k , c'est-à-dire une valeur très significativement différente de k!

Si, comme personne n'en doute ici, on considère comme idoine à la réalité l'hypothèse d'additivité des forces d'attraction (la force d'attraction qu'exerce M' sur le bâton entier est la somme des forces qu'elle exerce sur chaque morceau), chacun des deux nombres k et 1,21.k est, en vertu du même principe du centre de gravité, la valeur quasi exacte de cette unique force F. La présence d'un paradoxe aussi incontestable qu'inattendu, détecté le plus souvent par l'un des fermes défenseurs du "bon sens", fait lever dans l'amphi un souffle de rigueur scientifique (en tout cas un souffle que notre seul discours magistral a bien du mal à susciter). On observe dès ce moment que les appels à l'autorité, à l'évidence, au "bon sens" ou à l'opinion majoritaire se font plus rares pour tenter d'imposer des solutions non argumentées.

En général cette péripétie n'est scientifiquement pas vaine, car devant l'impossibilité d'obtenir par un calcul rapide un résultat dont l'adéquation soit incontestable, ceux qui ne veulent pas s'avouer vaincus sont conduits, ne serait-ce que pour éliminer rationnellement les propositions qui leur paraissent physiquement invraisemblables, à majorer et à minorer l'évaluation de cette force en concentrant fictivement la masse de la barre à l'une ou l'autre extrêmité; on obtient alors, vu la monotonie de la formule ponctuelle r ------> F(r), l'encadrement très grossier : $4/9.k \leq F \leq 4.k$, qui permet déjà d'évacuer les valeurs extrêmes du tableau, mais ne permet toujours pas d'effectuer une discrimination pertinente entre les valeurs centrales du tableau.

Néanmoins le "processus intégrale" est enclenché, car il apparaît assez naturel de découper la barre en deux et de reprendre l'encadrement précédent sur chaque moitié.

De l'encadrement $4/9.k \leq F \leq 4.k$ pour la barre entière, on passe à $13/18.k \leq F \leq 5/2.k$, c'est-à-dire à un encadrement deux fois plus fin pour deux demi-barres !

Il suffit alors d'itérer le processus pour récupérer des encadrements de plus en plus fins qui, après avoir éliminé la solution majoritaire et "évidente" k, vont converger autour de la valeur non naïve 4/3.k.

Cette valeur 4/3.k qui était "tombée du ciel" sous forme d'intégrale (les étudiants qui l'avaient proposée ne pouvant en donner aucune explication rationnelle) apparaît maintenant comme la seule qui satisfasse à tous les encadrements qu'on sait effectuer; elle devient donc la seule qui soit rationnellement crédible, alors que des valeurs plus évidentes et spontanées n'ont pu, elles, résister aux contrôles objectifs que permettent les majorations et les minorations.

La procédure intégrale (découpage, additivité, majoration, minoration, passage à la limite) devient donc ici progressivement, pour l'ensemble des protagonistes du débat, le seul procédé rationnel qui permet simultanément de faire des calculs mathématiques tout en collant à la réalité physique.

B) L'institutionnalisation

Après cette phase de propositions et de débat, basée sur une situation physique qui permet en général l'entrée du plus grand nombre des étudiants dans la problématique de l'intégrale, l'enseignant doit aborder une phase plus paradoxale puisqu'il doit maintenant, s'il veut enseigner des mathématiques, caractériser la procédure générale en l'extrayant de ce problème particulier et, simultanément, faire en sorte qu'elle garde du sens si on la pense en dehors de cette situation de départ.

Il doit donc amener les étudiants à séparer nettement ce qui est intrinsèquement lié à la barre, la masse, la loi de gravitation, de ce qui (une fois dégagées les hypothèses de modélisation) va devenir une procédure très générale susceptible de s'adapter à tout autre sorte de problèmes "concrets" et qui, au-delà même des applications pratiques, va déboucher sur un questionnement purement mathématique: ce que nous avons réalisé avec la fonction $r \dashrightarrow k / r^2$ sur l'intervalle [3,9] est-il généralisable à n'importe quelle fonction sur n'importe quel ensemble ?

Il s'agit donc de théoriser une pratique, sans pour autant provoquer une rupture qui ferait disparaître le sens qui vient tout juste de naître.

Pour extraire non artificiellement la procédure intégrale de cette première expérience, nous avons éventuellement recours à l'étude comparative de plusieurs autres situations constitutives[1]. Cette recherche de similitude sur des situations assez différentes permet d'institutionnaliser sans cassure et sans ambiguïtés (vu les paradigmes sur lesquels elle s'appuie) la procédure théorique suivante :

1) Voir "Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A1", Cahier de didactique n° 22, IREM de PARIS VII .

Théorisation des pratiques de mise en équation intégrale

Lorsqu'il s'agit d'évaluer mathématiquement une grandeur qui se présente comme la résultante globale de l'action d'un certain phénomène variable de type numérique ou vectoriel, on peut dans bien des cas modéliser ce résultat par un nombre réel R (ou éventuellement un vecteur), et le domaine (généralement spatial ou temporel) sur lequel on étudie l'action du phénomène par un sous-ensemble Ω borné et mesurable de la droite, du plan ou de l'espace.

La procédure intégrale consiste alors à réaliser les étapes de décomposition, d'encadrement et de passage à la limite suivantes:

1) Le problème global est additivement localisable :

- On suppose le problème parcellisable, c'est-à-dire qu'on part du principe que si le symbole $R(\Omega)$ a naturellement du sens pour désigner le résultat global (c'est la masse, le volume, la charge, etc. de l'objet), il en est de même de $R(\Omega_i)$ lorsqu'on réalise certaines décompositions du domaine global Ω en domaines partiels Ω_i (i.e. le problème est tel qu'on peut désigner sans ambiguïté par $R(\Omega')$ le résultat partiel de sa restriction à certaines parties Ω' : c'est la masse, le volume etc. du "morceau" Ω'). Sous ces hypothèses, on dira que le problème est localisable si cette opération de restriction du problème global peut s'effectuer sur des parties Ω' localisables autour de n'importe quel point de Ω (i.e. autour de tout point de Ω, on peut trouver de telles parties Ω' de "diamètres" arbitrairement petits).

- "Le problème est additif" signifie alors que lorsqu'on découpe ou décompose Ω en tranches ou morceaux, c'est-à-dire lorsqu'on effectue une partition finie du domaine global Ω en parties Ωi telles que $R(\Omega i)$ ait du sens, le résultat global $R(\Omega)$ n'est autre que la somme des résultats partiels $R(\Omega i)$ correspondants : $R(\Omega) = \sum R(\Omega i)$.

2) Le problème admet partout des encadrements de type "simple produit"

L'intensité du phénomène variable produisant le résultat global étant modélisée par une fonction $f: \Omega \dashrightarrow R$, on suppose que l'on a par hypothèse sur tout "bon" sous-ensemble Ω' de Ω l'encadrement élémentaire (E) du résultat partiel :

$$\text{(E)} \qquad \inf f(\Omega').\ \mathrm{mes}(\Omega') \leq R(\Omega') \leq \sup f(\Omega').\ \mathrm{mes}(\Omega')$$

("Bon" sous-ensemble signifie que l'on peut donner du sens d'une part à $R(\Omega')$ comme résultat partiel, et d'autre part à la quantité $\mathrm{mes}(\Omega')$ comme longueur, aire ou volume de la partie Ω').

3) L'erreur globale d'encadrement "disparaît par passage à la limite"

Soit encore, la somme des erreurs locales d'encadrement

$$\Delta(f,\ \Omega_1,\Omega_2,\ ,\Omega_n) \ = \sum [\sup f(\Omega_i) - \inf f(\Omega_i)]\ .\ \mathrm{mes}(\Omega_i)$$

peut être rendue arbitrairement petite par choix de découpages finis de Ω en parties dont le diamètre est de plus en plus petit (i.e. f est intégrable au sens de Riemann sur Ω).

Théorème de "bonne fin" d'une mathématisation par la procédure intégrale

Sous les trois conditions précédentes, il existe un unique nombre réel S susceptible de représenter le résultat que modélise R, c'est celui qui satisfait à tous les encadrements globaux (ΣE) suivants :

$$(\Sigma E) \qquad \sum \inf f(\Omega i).\mathrm{mes}(\Omega i) \leq S \leq \sum \sup f(\Omega i).\mathrm{mes}(\Omega i)$$

pour un quelconque découpage fini $(\Omega_i)_i$ de Ω ; **on l'appelle par définition l'intégrale de Riemann de f sur Ω et on le note $\int_\Omega f$.**

Remarque:

L'existence de ce nombre S est garantie par le caractère complet de la droite numérique, son unicité et son adéquation à représenter le résultat R sont garanties par les conditions de la procédure, puisque par 1) et 2), R vérifie comme S tous les encadrements (ΣE) et par 3) R et S sont deux réels infiniment proches, donc égaux.

C) Le questionnement mathématique induit par cette approche concrète du concept

A partir de cette théorisation de la mise en équation des problèmes concrets par la procédure intégrale, notre cours sur l'intégrale se développe autour des thèmes plus mathématiques suivants :

1) Le contrôle de l'erreur globale d'encadrement $\Delta(f,\Omega_1,\Omega_2, ,\Omega_n)$ étant visiblement une opération mathématique délicate, on ne peut éluder les questions cruciales suivantes :

a) Y a-t-il un risque dans cette procédure si on ne contrôle pas mathématiquement cette erreur globale d'encadrement (i.e. y a-t-il des fonctions non intégrables de Riemann ?); si oui, quelle est la nature de ce risque (peut-on encore donner un sens au symbole $\int_\Omega f$?), peut-on intuitivement prévoir cette pathologie ?

b) Inversement, en dehors des fonctions constantes et des fonctions en escalier, y-a-t-il des classes de fonctions qui, bien que variant constamment, admettent une erreur globale d'encadrement qui puisse devenir arbitrairement petite ? En d'autres termes, **existe-t-il des fonctions intégrables de Riemann non triviales ?** Si oui, comment les repérer autrement qu'en évaluant directement cette erreur $\Delta(f,\Omega_1,\Omega_2, ,\Omega_n)$ (intégrabilité des fonctions bornées continues ou monotones par morceaux sur des domaines bornés).

2) La définition de l'intégrale comme nombre frontière séparant l'ensemble des approximations intégrales par excès de l'ensemble des mêmes approximations par défaut est **conceptuellement agréable**, car elle donne un sens très concret à cet objet idéal, **mais dans bien des cas elle n'est pas opératoire**; il nous faut donc préciser :

a) quelles sont les règles opératoires de l'intégrale : propriétés classiques de l'intégrale, en particulier comment se comporte la fonction intégrale dépendant de la borne supérieure x ---> $\int_a^x f$?

b) comment évaluer une intrégrale autrement qu'en effectuant "à la main" des découpages, des encadrements, des sommations et des passages à la limite : calcul des primitives, calcul numérique, programmation d'algorithmes.

3) Vérifier directement l'encadrement local par "simple produit" (E) :

$$\inf f(\Omega').\ \text{mes}(\Omega') \leq R(\Omega') \leq \sup f(\Omega').\ \text{mes}(\Omega')$$

n'est pas toujours une opération simple; ne peut-on pas assouplir cette condition ?

Lors de la mise en équation d'un problème concret, il n'est pas toujours possible une fois qu'on a pressenti une fonction f: $\Omega \dashrightarrow R$ susceptible de modéliser l'intensité du phénomène agissant de vérifier directement que l'encadrement (E) par simple produit est effectif. Souvent il ne sert à rien de s'acharner sur cette vérification directe, car **la résistance qui s'oppose à nos calculs est structurellement liée à l'opérationalité de la procédure que nous utilisons.**

En effet, quand on dit comme on le fait en sciences appliquées: "prenons un morceau très ou infiniment petit", c'est parce qu'on a l'intention de négliger tout ce qu'on ne sait pas calculer. Si le morceau est grand, faire de telles approximations est a priori trop risqué pour qu'on s'y hasarde; par contre si les dimensions sont très petites, l'opération "négliger ce qu'on ne sait pas calculer" peut devenir parfaitement légitime du moment que ce que l'on "jette" est bien d'un certain second ordre.

Pour que ce second ordre ne soit ni un carcan inutilisable, ni "un peu nimporte quoi" (i.e. pour que chez l'étudiant rigueur et opérationalité ne s'opposent pas systématiquement), il nous est apparu nécessaire de préciser **comment asssouplir sans prendre de risques la vérification de l'encadrement par simple produit** (négliger purement et simplement cette vérification comme c'est la coutume, c'est à notre sens perdre le contrôle scientifique de la mise en équation. En effet, cette vérification reste le plus sûr moyen de contrôler a priori que la fonction f qu'on a déterminé en effectuant des approximations représente bien l'intensité du phénomène variable).

Assouplissement de l'encadrement local par simple produit (E)

Si on a trouvé une fonction f : $\Omega \dashrightarrow R$ vérifiant la double inégalité (Eε) :

$$(\mathrm{E}\varepsilon) \qquad \inf f(\Omega_i).\text{mes}(\Omega_i) - \varepsilon_i \leq R_i \leq \sup f(\Omega_i).\text{mes}(\Omega_i) + \varepsilon_i\ ,$$

pour tous les éléments Ω_i d'une famille de découpages de plus en plus fins, **quel ordre de grandeur ε_i est-il tolérable** pour qu'on puisse continuer à affirmer (si par ailleurs f est intégrable) que $R = \int_\Omega f$?

Une réponse simple est donnée par la condition triviale suivante : **il suffit que les approximations effectuées sur chaque morceau soient uniformément petites devant la mesure des morceaux, soit encore** " $\varepsilon_i \leq \varepsilon\ .\ \text{mes}(\Omega_i)$, où ε est une quantité pouvant être rendue arbitrairement petite pour des choix de découpages $(\Omega_i)_i$ suffisamment fins".

Cette condition grossière (car uniforme)[1] est néanmoins un critère suffisamment souple pour permettre à l'étudiant d'effectuer par lui-même un contrôle sémantique lors de la plupart des mises en équations intégrales qu'on lui montrera en sciences appliquées, ou qu'il aura à inventer quand il abordera seul la mathématisation de certains problèmes dits concrets.

1) Dans le cas où $\Omega = R$, la procédure différentielle : $\Delta R = f(x).\Delta x + \Delta x.\varepsilon\ (\Delta x)$ est plus souple puisque non uniforme.

En guise de conclusion:

Il serait totalement utopique de laisser croire que si la quasi-totalité des étudiants de premier cycle boudent l'aspect conceptuel de l'intégrale par manque de sollicitations épistémologiques, il va subitement se dégager dans nos amphis une forte passion scientifique grâce à de tels montages didactiques; ce serait négliger qu'un retournement de cette nature nécessite pour perdurer un minimum d'adhésion du sujet à un projet d'apprentissage plus scientifique. Cette adhésion, nous pouvons la favoriser, non l'imposer.

Nous avons pu constater néanmoins, sur plusieurs cohortes d'étudiants "standard" de DEUG A première année, qu'à partir d'une telle entrée épistémologique les "amphis" parviennent à s'impliquer suffisamment dans la problématique suscitée pour conjecturer, discuter, débroussailler par preuves et réfutations la majeure partie des propriétés classiques de l'intégrale. En d'autres termes, ce type de montage didactique permet à l'étudiant qui souhaite comprendre ce qu'il apprend, d'avoir dès le premier abord la certitude qu'ici c'est possible; tout au long de l'élaboration de la théorie, il peut se prouver que théorisation n'est pas synonyme de perte de sens et que bien au contraire un tel contrôle sémantique, loin d'être un carcan inutile, peut s'avérer très opérationnel : cela libère ses énergies intellectuelles (imagination, intérêt), lui donne intuitions et garde-fous, et ce même lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes qu'il pourrait aussi aborder (non sans risques) en appliquant plus systématiquement certaines "recettes".

Le choc épistémologique provoqué par l'étude du paradigme du barreau apparaît donc suffisant pour que les questions plus mathématiques qui découlent assez naturellement de cette première approche deviennent effectivement de vraies questions pour beaucoup d'étudiants de ce niveau et qu'il soit dès lors parfaitement justifié de passer du temps à y réfléchir ensemble.

Soulignons toutefois que, puisque ce faisant nous ramons délibérément à contre-courant des coutumes d'apprentissages, les lois du système didactique vont s'opposer à nos efforts et amplifier considérablement l'importance de tout ce qui dans notre dispositif permet à notre insu de pérenniser les habitudes d'économies conceptuelles. C'est ainsi qu'il nous a fallu systématiquement résister à la facilité pédagogique consistant à aborder assez tôt le calcul des primitives (facilité, car cela fournit instantanément beaucoup d'exercices standard, que les étudiants aiment bien faire de surcroît) et il nous est apparu nécessaire d'avertir nos étudiants qu'aux examens et partiels ils auraient probablement à manipuler des intégrales de fonctions dont ils ne sauraient pas forcément calculer les primitives.

A défaut de ces précautions pédagogiques un peu primaires certes, nous avons dû constater à regret que la pression algorithmique devient telle, en raison des économies de pensée que permettent les notations différentielles, que les enseignants ne peuvent plus faire vivre l'intégrale en tant que concept ; à chaque fois donc que nous n'avons pas eu la vigilance de maintenir une sorte de contre-pression conceptuelle (manipulation fréquente d'intégrales incalculables par des primitives), nous avons rapidement vu l'intégrale se réduire à une notation et un simple algorithme de calcul, et ce même auprès d'étudiants qui avaient participé avec un certain enthousiasme à l'élucidation du concept et à la mise en évidence de ses propriétés fondamentales.