

Marc Rogalski

Nous présentons ci-dessous le texte distribué aux étudiants dans une section de DEUG A 1^o année de Lille1 comme exemple d'une méthode pour étudier les suites qu'il est raisonnable de rencontrer en DEUG. Quelques mots sur un enseignement possible pour cette méthode. L'enseignement sur les réels et les suites s'étale d'octobre à décembre (avec en parallèle d'autres thèmes: algèbre linéaire, fonctions continues, dérivables...). Au fur et à mesure que des exemples de suites sont rencontrés, les enseignants essayent d'être systématiques dans les études faites, et de dégager des îlots de méthodes marchant dans tel ou tel cas. Ce n'est que vers la mi-décembre que la méthode elle-même fait l'objet d'un cours magistral, et que le texte de cette méthode est distribué aux étudiants. Nous étudions juste avant les suites récurrentes en T.D. et le raisonnement par récurrence en cours.

Une semaine après cet enseignement de la méthode, nous organisons un "atelier" d'utilisation de la méthode: les étudiants d'un groupe de T.D. sont répartis **par groupes de 4**, et on leur donne à **étudier une suite non évidente, choisie pour qu'une application systématique de la méthode donne plusieurs voies différentes de résolution**, avec même si possible des variantes pour chacune (par exemple, la suite $u_{n+1} = (2n/(n+1))\sqrt{u_n}$ peut, en suivant la méthode, s'étudier de 4 façons différentes).

Les étudiants de chaque groupe doivent **se mettre d'accord** sur la solution retenue, et nous leur demandons de **rédiger un bref compte-rendu de leur démarche de recherche**: quelles méthodes ont-ils successivement essayées et abandonnées, pourquoi, quelle méthode a-t-elle permis d'arriver finalement au résultat, quelles autres questions se posent-ils? **L'obligation de se mettre d'accord sur ce compte-rendu de nature "métamathématique" a pour but de faire réfléchir "sur" la méthode**, d'amener les étudiants à être capables de comparer diverses voies d'attaque d'un problème mathématique. A l'issue de la séance, les différentes manières d'étudier la suite sont rassemblées, et si besoin est l'enseignant met en évidence comment le recours à la méthode générale a permis de les dégager et éventuellement d'en dégager d'autres.

Dans le contrôle qui suit, nous donnons à étudier une suite sans aucune indication de façon à tester la capacité des étudiants à démarrer une étude; nous sommes moins exigeants sur le fait qu'ensuite ils soient capables de pousser l'étude à son terme (ce que nous exigeons des suites standard.), et il se peut même que nous leur demandions **seulement d'énoncer les conjectures** qu'ils font sur la suite. Nous avons ainsi posé le texte suivant à un partiel, avec un bon taux de réponses correctes:

" u_0 étant donné, on définit la suite u_n par

$$u_{n+1} = u_n^2 + \log u_n \quad \text{si } u_n > 0; \quad u_{n+1} = -1989 \quad \text{si } u_n \leq 0.$$

Quelles conjectures faites-vous sur cette suite?"

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

Suit.RC.001.01

Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode.

Marc LEGRAND

Introduction

Le but de ces notes est de donner une *méthode* assez générale pour étudier la convergence ou la divergence des suites réelles, au moins du type de celles qu'on rencontre fréquemment en DEUG première année. L'ensemble de ces types sera précisé plus loin au moyen d'un classement.

La méthode que nous allons proposer permet de *démarrer* une recherche, au moyen d'une *stratégie de classement* et d'une *stratégie de recherche de conjectures*, puis de la mener à son terme au moyen d'une *stratégie de preuve*. Certaines de ces stratégies comportent diverses *tactiques*, qui elles mêmes utilisent des *techniques*. La nature de la suite étudiée permet souvent de trier rapidement les tactiques qui paraissent adaptées. De plus, on donnera un *procédé de contrôle, correction et reprise* en cas d'insuccès.

A plusieurs reprises, nous insisterons sur l'idée du *changement de point de vue* qu'il faut savoir effectuer pour choisir une stratégie ou une tactique, ou pour en changer si nécessaire : passer d'un point de vue numérique (essais pour des valeurs de n , majorations...) à un point de vue géométrique (représenter u_n au moyen du graphe d'une fonction...), et réciproquement (traduire en inégalités une propriété géométrique...); ou bien, passer d'une suite particulière à un problème général, s'exprimant au moyen d'une suite non précisée, ou bien en faisant varier une constante, prise comme paramètre... Nous verrons plusieurs exemples de ces changements de point de vue.

Plan

0. Connaissances disponibles nécessaires.

- A. Les théorèmes généraux sur les suites.
- B. Les suites et les fonctions à connaître en toutes occasions.
- C. Trois techniques indispensables.

I. Stratégie de classement.

- 1) Classer le problème en problème général ou en problème particulier.
- 2) Classer une suite particulière.
- 3) Autres moyens de classement.

II. Stratégie de recherche.

- 1) Faire des tests préliminaires.
- 2) Etudier des cas particuliers.
- 3) Changer de point de vue.
- 4) Faire " $n = \infty$ ".

III. Stratégie de preuve.

- 0) Plan de démonstration.
- 1) Pour montrer une divergence.
- 2) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.
- 3) Identifier la limite.
- 4) Tactique " $\varepsilon - N$ avec encadrements".
- 5) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration.

IV. Contrôler, redémarrer.

- 1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
- 2) Contrôler par l'extérieur.
- 3) Redémarrage.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

0. Connaissances disponibles nécessaires.

A. Les théorèmes généraux sur les suites.

Avec exemples, contre-exemples, dessins associés... En particulier : suites monotones, suites adjacentes, le théorème d'encadrement à ε près (si $\forall n, v_n \leq u_n \leq w_n, v_n \rightarrow v$ et $w_n \rightarrow w$, alors $v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon$ pour n assez grand.), suites associées au théorème du point fixe... Bien sûr, le concept de convergence (formulation en ε — N) doit être dominé.

B. Les suites "à connaître en toutes occasions, même la tête en bas" : les suites et séries géométriques ou arithmétiques, les séries de Riemann, le comportement comparé de n^α , a^n , $n!$, les suites récurrentes linéaires à un terme, les suites $(1 + \frac{x}{n})^n$, et $\sum_0^n \frac{x^p}{p!}$...

Les fonctions de terminale, puis celles du DEUG.

C. Trois techniques indispensables.

- 1) Savoir majorer et minorer. Instruments essentiels : le théorème de comparaison (si $f(x_0) = g(x_0)$, et $f' \geq g'$, alors $f(x) \geq g(x)$ si $x \geq x_0$, et $f(x) \leq g(x)$ si $x \leq x_0$), la comparaison des positions relatives d'une courbe graphe d'une fonction à dérivée monotone et d'une de ses tangentes ou d'une de ses cordes (inégalités de convexité).
- 2) Raisonner par récurrence.
- 3) Utiliser les développements limités.

I. Stratégie de classement.

Remarque : Bien sûr, il y a des suites qui n'entrent pas dans classification ci-dessous, par exemple la suite $u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln(1 + \frac{p}{n})$.

- 1) Classer le problème en problème général ou en problème particulier.
- 2) Classer une suite particulière parmi :
 - les suites définies par une formule $u_n = f(n)$;
 - les suites définies implicitement par une équation, par exemple : " u_n est la plus grande racine de $x^3 - 3x - n$ " ;
 - les sommes de séries ;
 - les récurrences fixes à 1 terme : $u_{n+1} = f(u_n)$;
 - les récurrences variables à 1 terme : $u_{n+1} = f_n(u_n)$;
 - les récurrences linéaires à 2 termes : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$;
 - les doubles récurrences linéaires à 1 terme : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$;
 - ...

3) Autres moyens de classement.

- simplifier l'écriture en donnant un nom à certains groupements, par exemple : si $u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+\sin n}{n+\ln n} + u_n}$, poser $a_n = \frac{n+\sin n}{n+\ln n}$, et étudier le problème général : si $a_n \rightarrow l$, que fait la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$? On est ainsi passé d'un problème particulier à un problème général : c'est un changement de point de vue.
- modifier (u_n) pour la comparer à des suites plus simples qui sont dans la classification

précédente, par exemple : si $u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \dots \sqrt{\frac{1}{n}}}$ (n fois $\sqrt{}$), alors $w_n \leq u_n \leq v_n$, où $w_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2^n}}$ et $v_n = \sqrt{\frac{1}{n} + v_{n-1}}$ avec $v_1 = 1$.

II. Stratégie de recherche :

faire des hypothèses, se donner des idées et faire des conjectures.

Les questions à se poser concernent : convergence, divergence, identification de limite éventuelle, monotonie éventuelle, majorations ou minoration, comportement séparé de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , comparaison à des suites connues...

1) Faire des tests préliminaires.

- La suite est-elle connue ?
- Peut-on l'encadrer par des suites connues ? ou l'encadrer à ε près, pour n assez grand, par des suites connues ?
- Que suggère un dessin ? Attention : un dessin bien observé peut suggérer plusieurs pistes différentes ; si on décide d'en suivre une, ne pas oublier un retour possible aux autres en cas d'insuccès de la première.
- Calculer des valeurs de $u_0, u_1, u_2, \dots$ (attention aux fausses impressions comme avec $\frac{n!}{20^n}$). Faiblesse du calcul : une liste de nombres, croissante par exemple, ne donne aucune indication sur les raisons de la monotonie.
- La suite est-elle *évidemment* monotone (ce qui donne une piste de recherche) ? Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.
- Calculer *littéralement* $u_2, u_3, u_4 \dots$ pour deviner une formule éventuelle. Exemple : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.

2) Dans un problème général, étudier des cas particuliers. Exemples :

- Si $u_n \rightarrow l$, que fait $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$? Étudier le cas $u_n \equiv l$.
- Si $u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$, où $a_n \rightarrow l$, que fait u_n ? Étudier le cas $a_n \equiv l$.

3) Changer de point de vue sur la suite.

(a) Changer la formule ou l'expression. Exemples :

— $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1+u_0^2+\dots+u_n^2}{n+1}$ peut se définir par $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+n)}{n+1}$.

— $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n} + u_n^2}$ peut se définir par $u_n^2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1 + u_1^2$.

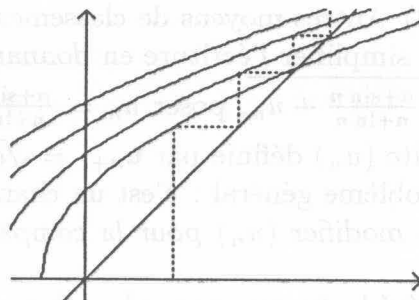
— Une suite homographique a une forme bien plus simple si on l'exprime au moyen des points fixes de la fonction associée.

— On peut utiliser la fonction logarithme pour transformer une suite exprimée multiplicativement en une suite de nature additive ou linéaire. Exemple : si $u_{n+1} = nu_n^3$, (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est une suite récurrente linéaire.

(b) Passer du cadre numérique au cadre graphique et inversement.

— Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, commencer par tracer le graphe de f et la bissectrice $y = x$.

— Pour une suite $u_{n+1} = f_n(u_n)$, tracer les courbes $y = f_n(x)$, l'escalier ou le colimaçon. Interpréter le comportement de (u_n) sur le dessin en termes de propriétés des f_n vues sur le graphique, et qu'il faudra prouver...



— Si $u_n = f(1) + \dots + f(n)$, tracer le graphe de f , en déduire des encadrements, par exemple à l'aide de $\int_1^n f(x) dx \dots$

- (c) Passer d'un problème général à un problème particulier, et inversement.
 - (d) Passer de l'étude de u_n à celle de $u_{n+1} - u_n$, et inversement. Par exemple, si $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)}{n+1}$ avec $u_1 = 2$, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$ à condition que $n \geq 1$, donc $u_n \geq \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \dots + \frac{2}{2} + 2$.
 - (e) Passer de l'étude de u_n à celle de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, et inversement (la fonction logarithme permettant éventuellement de passer du quotient à une différence).
- 4) Faire " $n = \infty$ ".

Dans l'expression définissant u_n , on remplace certains termes $\varphi(n)$ par leur limite quand n tend vers $+\infty$ (si on la connaît sans ambiguïté : attention aux $(u_n)^n$ par exemple) pour deviner le comportement de u_n . Il faut alors rendre précis le raisonnement, et dire "si n est grand, $\varphi(n)$ vaut presque l ", qu'on précise en : si $n \geq N_\varepsilon$, $l - \varepsilon \leq \varphi(n) \leq l + \varepsilon$; on peut alors faire des encadrements (dépendant de ε) de u_n pour $n \geq N_\varepsilon$.

III. Stratégie de preuve.

- 0) Ecrire d'abord un plan de démonstration, avec l'emboîtement stratégie-tactiques-techniques suggéré par la stratégie de recherche.

- 1) Pour montrer une divergence.

- (a) Montrer que la suite est non majorée ou non minorée. Cela peut se faire de plusieurs façons :

— On minore u_n par une suite non majorée. Exemple : si $u_{n+1} = nu_n^3$ avec $u_1 \geq 1$, alors on montre d'abord par récurrence que $u_n \geq 1$, puis $u_n \geq n - 1$.

— Par l'absurde, par exemple : Pour $u_n = n^{\frac{1}{n-1}}$, si u_n était majorée par M (avec $M \geq 1$), $n = u_n^{n-1}$ serait majoré par M^M !

- (b) Exclure la seule limite possible, ou montrer qu'une limite ne peut pas exister. Exemples :

— $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$; (u_n) est croissante, et si $u_n \rightarrow l$, $l \geq 1$ et $l = l + \frac{1}{l}$: absurde.

— $u_0 = -\frac{1}{4}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$; (u_n) est décroissante, $u_n \leq -\frac{1}{4}$, or si $u_n \rightarrow l$, $l = 0$ ou $l = 1$: absurde.

— $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$; en posant $f(x) = 3x - 2$, la seule limite possible $l = 1$ vérifie $f'(l) = 3$, donc est répulsive ; or $u_n = 1$ à partir d'un certain rang implique $u_0 = 1$.

- c) Trouver une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui ne peuvent avoir la même limite. Exemples :

— $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2}$; $u_{2n} \leq \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} \geq 2$.

— $u_n = \frac{n}{n+2+(-1)^n(n+\sin n)}$; $u_{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} \rightarrow +\infty$.

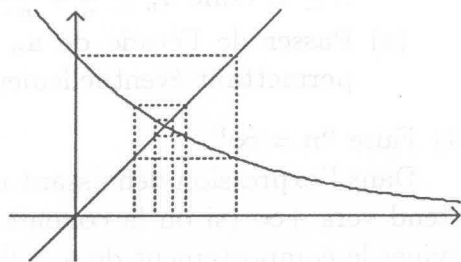
- (d) Nier le critère de Cauchy. En général, il faut minorer $|u_{n+p} - u_n|$ par un nombre strictement positif fixe, pour p convenable éventuellement dépendant de n . Par exemple, si $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $u_{n+p} - u_n \geq \frac{p}{n+p} \geq \frac{3}{4}$ pour $p \geq 3n$.

- 2) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.

- (a) Prouver la monotonie de (u_n) (calculs et/ou récurrence). Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser la monotonie de f ou le signe de $f(x) - x$.

- (b) Majorer ou minorer (u_n) (calculs et/ou récurrence). Dans le cas des suites récurrentes, pour trouver un majorant C on se laisse guider par le dessin, ou on choisit C pour que la démonstration de $u_n \leq C \Rightarrow u_{n+1} \leq C$ marche, au moins pour n assez grand.

- (c) Etudier séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; c'est une méthode bien adaptée aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante. Exemple : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$; ici (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.



- (d) Utiliser le critère de Cauchy. C'est souvent en désespoir de cause. Deux exemples importants quand même :
 — somme de série $u_n = v_1 + \dots + v_n$, avec v_n très petit pour n grand.
 — $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $|f'| \leq K < 1$; $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |u_1 - u_0|$.
- (e) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite λ : si $|\lambda| < 1$, $u_n \rightarrow 0$.
- (f) Utiliser la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, en montrant par des encadrements qu'elle converge. Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$.
- 3) Identifier la limite.
- (a) Si $u_n = f(n)$, f connue et ayant une limite en $+\infty$, alors $\lim u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. La recherche de cette limite peut utiliser les développements limités.
- (b) $u_{n+1} = u_n + 13 \cdot 10^{-n^2}$, $u_0 = 1,3$; on obtient le développement décimal illimité de la limite de (u_n) .
- (c) Si $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, si (u_n) converge vers l , on a $l = f(l)$; et si on peut éliminer tous les points fixes (par exemple les points répulsifs) de f sauf un, on peut conclure.
- (d) Plus généralement, si on peut éliminer tous les candidats à être la limite, sauf un. Exemple : u_n est la racine positive de $x^n + x^{n-1} + x^2 - x - 1 = 0$; $0 < u_n < 1$, (u_n) est croissante et on montre que si $t < 1$, t ne peut être limite ; donc $l = 1$.

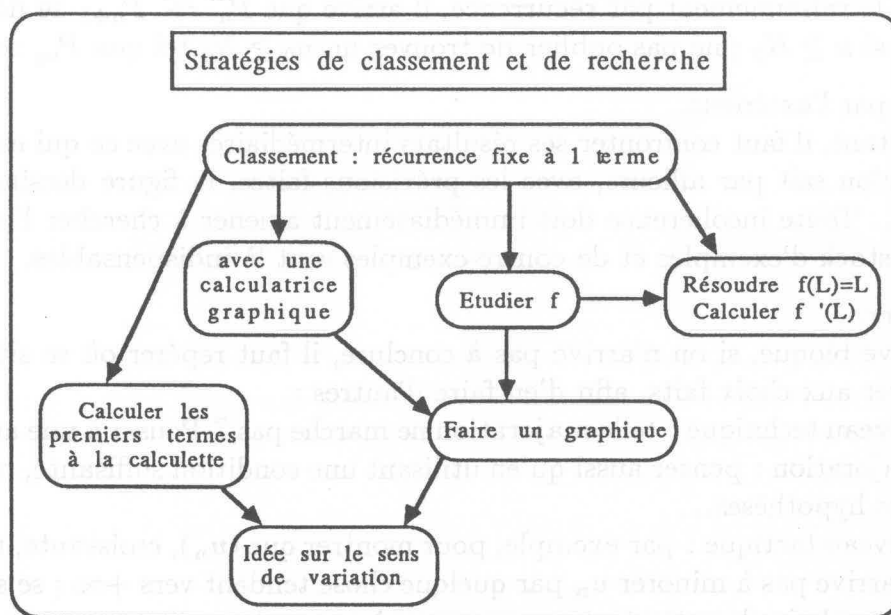
- 4) Tactique " $\varepsilon - N$ avec encadrements". Cette tactique est souvent utile pour les suites $u_{n+1} = f_n(u_n)$ et pour les suites à la marge de la classification. Il s'agit d'encadrer u_n , pour $n \geq N$, par deux suites dépendant de ε et plus faciles à étudier, en s'appuyant sur ce qu'on a deviné dans la tactique de recherche d'hypothèse "faire $n = \infty$ ". Exemples :

— $u_n \rightarrow l$, que fait $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$? Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que si $n \geq N$, $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$, donc $s_n \leq v_n \leq t_n$ avec $s_n = \frac{u_1 + \dots + u_N + (n-N)(l-\varepsilon)}{n}$ et $t_n = \frac{u_1 + \dots + u_N + (n-N)(l+\varepsilon)}{n}$; comme $\lim s_n = l - \varepsilon$ et $\lim t_n = l + \varepsilon$, il existe $N_1 \geq N$ tel que si $n \geq N_1$, $l - 2\varepsilon \leq s_n \leq v_n \leq t_n \leq l + 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim v_n = l$.

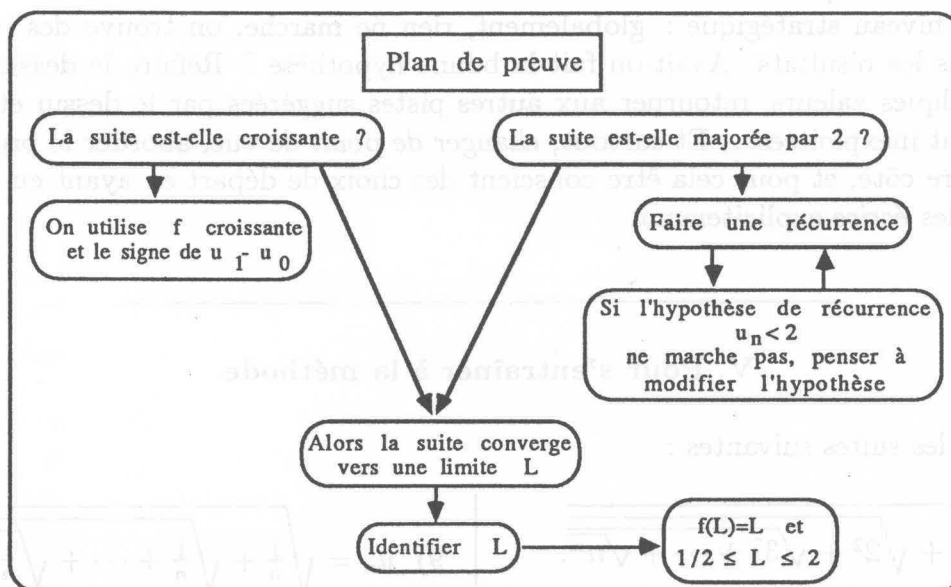
— $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n} + u_n}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que si $n \geq N$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. On pose $v_N = w_N = u_N$, et pour $n \geq N$, $v_{n+1} = \sqrt{\varepsilon + v_n}$ et $w_{n+1} = \sqrt{w_n}$; alors $w_n \leq u_n \leq v_n$. On montre alors que $\lim w_n = 1$ et que $\lim v_n = \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$. Donc pour un $N_1 \geq N$, si $n \geq N_1$, on a $1 - \varepsilon \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2} + \varepsilon$, d'où $1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + 2\varepsilon \dots$

Attention. Le difficile est de comprendre quand on a gagné : si on arrive à : pour $n \geq N$, $l - \varepsilon - 2\varepsilon^2 \leq u_n \leq l + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, c'est gagné ! Pourquoi ?

- 5) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration suggéré par les stratégies de recherche, avec mise en évidence des choix décidés... sur lesquels on peut revenir. Suite $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.



Stratégie de preuve, pour prouver ce qu'on a observé :



IV. Contrôler, redémarrer.

- 1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
 - (a) On a écrit un plan de démonstration : où en est-on ? Qu'est-ce qui est prouvé, reste à prouver... ? L'écrire, le noter dans le plan.
 - (b) On utilise des théorèmes du cours : vérifier l'énoncé, faire le dessin correspondant, se rappeler un exemple d'application, comparer à la situation actuelle. Va-t-on l'utiliser pour prouver une convergence, ou pour prouver une divergence, par exemple par l'absurde ?

- (c) Attention au raisonnement *sous hypothèse* : quand on a montré que "si on a P , alors on a Q ", on a tendance à faire ensuite comme si Q était vraie — on oublie de vérifier si l'hypothèse P est vraie.
- (d) Dans le raisonnement par récurrence, il arrive que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ se démontre seulement si $n \geq N_0$; ne pas oublier de trouver un $n_0 \geq N_0$ tel que P_{n_0} soit vraie.

2) Contrôler par l'extérieur.

A tout instant, il faut confronter ses résultats intermédiaires avec ce qui est déjà prouvé, avec ce qu'on sait par ailleurs, avec les prévisions faites, la figure dessinée, les valeurs calculées... Toute incohérence doit immédiatement amener à chercher l'erreur. Le bon sens et le stock d'exemples et de contre-exemples sont là indispensables.

3) Redémarrer.

Si la preuve bloque, si on n'arrive pas à conclure, il faut repérer où se situe le blocage, et comparer aux choix faits, afin d'en faire d'autres :

- (a) Au niveau technique : telle majoration ne marche pas ? Penser à une autre technique de majoration : penser aussi qu'en utilisant une condition suffisante, on perd un peu sur les hypothèses...
- (b) Au niveau tactique : par exemple, pour montrer que (u_n) , croissante, tend vers $+\infty$, on n'arrive pas à minorer u_n par quelque chose tendant vers $+\infty$; se souvenir qu'on a fait le choix de cette tactique ; penser à une autre : si on supposait $u_n \rightarrow l$, on obtiendrait peut-être une contradiction.
- (c) Au niveau stratégique : globalement, rien ne marche, on trouve des incohérences dans les résultats. Avait-on fait la bonne hypothèse ? Refaire le dessin, recalculer quelques valeurs, retourner aux autres pistes suggérées par le dessin et provisoirement inexploitées... Et surtout, *changer de point de vue*, aborder le problème d'un autre côté, et pour cela être conscient des choix de départ en ayant eu la prudence de les écrire explicitement.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

Etudier les suites suivantes :

$$1) u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^3 + \cdots + \sqrt{n^n}}}}$$

$$2) u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n} \text{ puis } v_n = u_1 + \cdots + u_n.$$

$$3) u_n = \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$4) u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2}.$$

$$5) u_1 = 2, u_n = n^{\frac{1}{u_{n-1}}}.$$

$$6) u_0 \geq 0, u_{n+1} = 2 \ln(1 + u_n).$$

$$7) u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{2n}{n+1} \sqrt{u_n}.$$

$$8) v_1 = 1, v_{n+1} = 1 + \frac{n}{v_n} \text{ et } u_n = v_n - \sqrt{n}.$$

$$9) u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n}}}} \text{ (n fois } \sqrt{\text{)}}.$$

$$10) u_0 = 1, u_{n+1} = 1 - \operatorname{th} u_n.$$

$$11) u_0 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

$$12) u_{n+1} = 1 - (u_n - 1)^3 \text{ (discuter selon } u_0 \text{)}.$$

$$13) u_{n+1} = u_n(u_n - 1) \text{ (discuter selon } u_0 \text{)}.$$

$$14) u_1 = 2, u_{n+1} = u_n - 1 + \frac{2n}{n+1} \frac{1}{u_{n-1}}.$$

$$15) u_{n+1} = 1 + \operatorname{Argsh}((u_n - 1) \operatorname{sh} 1) \text{ (discuter selon } u_0 \text{)}.$$