

LES NOMBRES REELS: COMMENT EN FAIRE PARLER EN T.D. AVANT DE LES ENSEIGNER EN COURS ?

Marc Rogalski

Nous donnons un exemple de travail possible en T.D. avant le cours, ayant pour but de mettre en place une problématisation de la construction des réels.

Faut-il construire les nombres réels en DEUG 1^{re} année? Il est sûr que peu de professions, même scientifiques, nécessitent d'avoir compris à fond ce que sont les réels. Néanmoins, nombreux sont les étudiants qui ressentent un malaise à leur propos: ils se servent des nombres depuis longtemps sans avoir d'idée claire à leur sujet, et on leur a laissé entendre qu'un certain nombre de théorèmes avaient été admis faute, justement, de savoir ce qu'est un réel. De plus, la pratique intensive des calculatrices impose insidieusement l'idée qu'un nombre n'est qu'une suite finie de décimales. Cela se traduit par de nombreuses confusions qui ressortent à la moindre occasion, en particulier l'idée fréquente qu'une suite convergente est une suite stationnaire, ce qui est bien clair, souvent, sur une calculatrice; ou bien l'idée que $1/3$ c'est, selon les cas, 0,3 ou 0,33 ou 0,333, etc. Il nous semble donc qu'il est nécessaire de faire comprendre de quoi il retourne, sans pour autant entrer dans les détails fastidieux d'une construction complète.

Plusieurs possibilités s'offrent alors, si l'on veut faire le point sur les réels. Une de celles souvent utilisées dans les manuels est de donner un ensemble de propriétés axiomatiques de $\mathbb{R}$, dont on admet l'existence. Dans d'autres manuels, on effectue la construction détaillée des réels par les suites de Cauchy; mais à la lecture, on a l'impression que les auteurs font une telle construction "pour le principe", pour être "complet", sans croire vraiment que cela puisse apporter quelque chose aux étudiants. Outre que ceux qui arrivent désormais en DEUG ne semblent pas pouvoir profiter de ces présentations, celles-ci ont pour gros défaut d'être coupées de la pratique dominante des nombres par les lycéens: les nombres décimaux lus sur une calculatrice. C'est ainsi qu'il n'est pas rare de rencontrer en maîtrise des étudiants de mathématiques qui ne savent pas vraiment si $0,99999999\dots$ coïncide ou non avec le nombre 1; et même ceux qui en sont convaincus n'arrivent pas à convaincre ceux qui en doutent.

Par ailleurs la propriété la plus opérationnelle dans les débuts de l'analyse de l'ensemble des nombres réels est sans conteste le théorème de la borne supérieure: il apparaît dès les premiers théorèmes sur les suites, il joue un grand rôle pour l'étude des fonctions continues, le théorème des accroissements finis, et dans les techniques de majoration.

Nous avons donc choisi de construire les réels comme développements décimaux illimités. C'est une approche qui permet d'utiliser tout l'acquis antérieur des étudiants, y compris et surtout les ambiguïtés et les contradictions qu'ils véhiculent. C'est aussi l'une de celles qui réduisent quasiment à rien le recours au concept de "quotient", qui passe très difficilement à ce niveau de l'enseignement (il y a juste à "identifier" les développements propres et impropres d'un même décimal...et c'est d'ailleurs le point le plus difficile). Et si la méthode des coupures présente aussi cet avantage, elle a l'inconvénient très sérieux de supposer une familiarité avec le maniement des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$, familiarité que n'ont manifestement pas les étudiants. Enfin, l'approche par les décimaux est celle qui rend le théorème de la borne supérieure proche de la pratique antérieure de la comparaison des nombres par la comparaison de leurs décimales: pour obtenir la borne supérieure d'un ensemble, on prend la plus grande partie entière de tous les nombres qu'il contient, puis la plus grande première décimale de tous ses éléments ayant cette partie entière, puis la plus grande deuxième décimale de ses éléments ayant la partie entière et la première décimale déjà construites, etc..., et on obtient la borne supérieure. Bien sûr, les approximations décimales d'un nombre forment une suite d'approximations très particulières; il faut donc assez rapidement sortir de ce cadre trop particulier une fois la construction des réels faite, et faire prendre conscience aux étudiants que bien d'autres types de suites sont utiles, tant du point de vue théorique que pour la pratique des calculs numériques.

Nous considérons par ailleurs qu'une construction des réels ne peut guère passer si elle est parachutée dans un cours magistral. Il paraît nécessaire de créer un besoin fort de synthèse et de clarification de la question en faisant prendre conscience aux étudiants de toutes les contradictions de leurs conceptions des réels, par exemple en suscitant des conflits entre ces conceptions et la possibilité de répondre à quelques questions simples concernant des nombres usuels et leur maniement.

Nous avons donc décidé d'introduire les réels au moyen d'un débat autour de quelques questions, qui amènent la nécessité d'une définition plus rigoureuse que le seul usage naturel. Cela a lieu au moyen d'un ensemble d'activités se déroulant pendant 2 ou 3 séances de T.D., au début de l'année. Une semaine environ après ces séances, ont lieu les cours de synthèse, qui doivent tirer le bilan et assurer la clarification, alors attendue, sur les réels. Nous donnons quelques indications sur ces cours, avant d'évoquer les activités préalables en T.D.

Ces cours en amphi comportent quelques éléments historiques, qui permettent une comparaison entre les points de vue géométrique et algébrique sur la construction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$, et qui permettent surtout de faire sentir (par opposition au cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$) l'idée nouvelle de

"processus infini d'approximations" qui caractérise le passage à $\mathbb{R}$. On définit alors les développements décimaux illimités, le plongement des rationnels et des décimaux, l'ordre sur les réels; le théorème de la borne supérieure (naturel à prouver...mais toujours délicat à utiliser!) donne immédiatement la construction de l'addition. On poursuit avec la construction de l'opposé, la structure de groupe, les intervalles et voisinages, le prolongement des inégalités (inégalités à ε près). On termine avec les premiers théorèmes sur les suites (utilisés en terminales en les admettant). A ce stade, les étudiants semblent accepter l'idée qu'on pourrait, avec un peu de temps et de courage, établir toutes les propriétés habituelles de $\mathbb{R}$ utilisées par eux depuis longtemps. Nous ne le faisons pas, l'objectif de mise au point et clarification étant en principe atteint, au moins pour une grande partie des étudiants.

Venons-en maintenant aux activités préalables en T.D., dont le but est de "problématiser" la construction des réels. Ces activités ont été mises au point par l'équipe enseignante d'une section de DEUG de l'université de Lille 1 (M.C. Ayats, E. Cousquer, S.Kim, M.Rogalski, C.Sacré). Nous donnons ci-dessous les fiches de référence qu'utilisent les enseignants lors des séances de débat en T.D. sur les réels, et qui résument bien le contenu de ces activités (elles ont été rédigées par E. Cousquer).

Ces fiches ne sont pas immédiatement distribuées aux étudiants. L'expérience a en effet montré que les conceptions des étudiants sur les nombres réels étaient à la fois si riches et si contradictoires que n'importe laquelle des questions figurant dans ces fiches était susceptible de faire partir le débat dans des directions imprévisibles, variables d'un groupe à l'autre, d'une année à l'autre. Vouloir canaliser le débat dans un ordre fixé a priori entraîne un risque didactique important: limiter l'initiative des étudiants, obliger l'enseignant à des interventions intempestives vis à vis d'eux, réduire ses possibilités d'exploiter leurs réactions. Notons de plus que chacune des questions de ces fiches fait, très souvent, surgir les autres. Ces fiches ont donc pour rôle essentiel de permettre à l'enseignant de vérifier que le champ des questions intéressantes sur les réels a bien été largement balayé au cours du débat, et de disposer de situations susceptibles de les faire intervenir le cas échéant.

Donnons quelques précisions sur le rôle des divers points abordés lors de ces séances, ainsi que quelques réactions fréquentes des étudiants.

Le premier exercice de la première fiche a pour but de faire surgir d'emblée diverses conceptions des étudiants sur les nombres, ainsi que des confusions fréquentes. C'est en général le point de départ de la séance. Dès cet instant apparaissent le glissement entre rationnels et décimaux, le sens très flou donné aux points de suspension dans les écritures proposées, l'existence de faits dont les étudiants ont entendu

parler mais auxquels il n'a jamais été donné de sens précis (par exemple, beaucoup d'étudiants "savent" que π est irrationnel...mais ne savent pas ce qu'est un nombre irrationnel). Il s'agit dans cette phase de faire prendre conscience aux étudiants qu'il ne suffit pas de savoir "nommer" ou "écrire" un nombre pour l'utiliser, mais qu'il faut se servir du fait que l'écriture en question représente un processus d'approximation. Une méthode efficace pour cela est de leur demander de calculer la somme de deux des nombres proposés, ou le carré de l'un d'entre-eux: ils ne savent pas comment faire... à leur grande surprise !

Signalons aussi la grande difficulté qu'ont les étudiants à manipuler des nombres du type $0,000\dots001$, avec n zéros, mais n n'étant pas précisé. L'une des causes de cette difficulté est certes dans l'idée d'approximation, mais interviennent sans doute aussi les problèmes de maniement des quantificateurs, dans la mesure où on se sert souvent de ces nombres pour montrer qu'il existe n tel que telle propriété ait lieu, ou que pour tout n on a telle propriété...

Selon les réponses des étudiants à ce premier exercice, leurs questions et leurs arguments, la suite de la séance va faire intervenir, dans un ordre ou dans un autre, le contenu des trois exercices suivants et le premier point de l'exercice 5.

Dans le problème de l'égalité de 1 et de $0,9999999\dots$, les étudiants résistent en général beaucoup. Une phrase fréquente est: "ce n'est jamais tout à fait égal, il manque toujours un petit quelque chose". La méthode de la série géométrique ne convainc que ceux qui ont une certaine intuition du concept de convergence. La remarque que $3 \times 1/3 = 3 \times 0,3333\dots = 0,9999\dots$, donc que ce "nombre" vaut 1, en convainc d'autres... On peut aussi utiliser la méthode analogue suivante: $(1/2) \times (1 + 0,999\dots) = 0,999\dots$ (plus généralement, il est très instructif de demander aux étudiants de construire un réel z entre deux réels x et y donnés). Mais l'argument qui marche le mieux est celui où la difficulté est cachée: si on pose $X = 0,9999\dots$, alors $10X - 9 = X$, et on en déduit formellement que $X = 1$. En définitive, il apparaît que X "est" un nombre pour les étudiants beaucoup plus parce qu'on peut calculer formellement dessus que parce qu'il représente un processus d'approximation.

Dans l'exercice n°4, il n'est pas question d'attendre des étudiants une démonstration du fait que seuls les décimaux ont plusieurs développements illimités (c'est le seul point difficile de cette construction des réels), mais de faire conjecturer le résultat et de faire découvrir les techniques de passage entre les 2 développements. Les rapports de cette question avec les approximations décimales sont repris dans l'exercice 1 de la deuxième fiche, mais il se peut qu'on doive le traiter relativement tôt, selon ce qui se sera passé autour de l'exercice 4 de la première fiche.

Arrivé à ce stade, il n'y a plus d'inconvénient à distribuer les fiches de travail aux étudiants. L'exercice 6 de la première fiche est plus classique. Il permet, en jouant sur un cadre géométrique simple, de

donner un processus concret d'approximation d'un nombre. Une activité analogue est théoriquement envisageable pour approcher π , mais les difficultés géométriques sont très difficiles pour des étudiants de DEUG (nous avons donné un devoir sur la méthode des isopérimètres une année, et cela a été un échec complet: la partie géométrique ayant épuisé toutes les énergies, l'aspect numérique de l'approximation a été très peu traité).

Les exercices 2, 6 et 7 de la deuxième fiche ont pour rôle de préparer au théorème de la borne supérieure et à son rapport avec les suites, l'exercice 7 servant de plus à lier les concepts à l'écriture formelle.

L'exercice 5 sert à fixer des notations, l'exercice 4 à faire découvrir les problèmes d'arrondis sur les calculatrices (l'exemple est spectaculaire!), et l'exercice 3 a pour objectif à la fois de tester les capacités (en général mauvaises!) des étudiants à manier les inégalités sur les nombres, et de montrer comment un changement de cadre (passage au graphique en regardant les couples (b,a) dans le plan) peut résoudre très simplement un problème délicat.

C'est après ces séances de T.D. qu'a lieu le cours sur la construction des réels que nous avons évoqué plus haut, et il se réfère au maximum, évidemment, à cette activité préalable; l'objectif doit alors paraître clairement aux étudiants: il s'agit d'institutionnaliser les réponses aux problèmes vus dans les séances préalables de T.D., en fixant des concepts et des formalismes qui ont alors leur raison d'être et leur utilité, et qui vont très rapidement être réinvestis dans des résolutions de problèmes, en particulier dans les problèmes d'équations numériques (borne supérieure et théorème des valeurs intermédiaires) et d'approximations de nombres réels.

Bibliographie

La quasi-totalité des ouvrages de premier cycle universitaire en français construisent $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy ou admettent l'existence d'un ensemble ayant les propriétés usuelles prises comme axiomes. Pour une construction par les développements décimaux illimités, on peut consulter:

H. Lebesgue : La mesure des grandeurs (monographie de L'Enseignement Mathématique 1, 1956);

J. Lelong-Ferrand : Les fondements de la géométrie (PUF).

En ce qui concerne les acquis et les conceptions des bacheliers sur les nombres, on peut consulter:

J. Robinet : Les réels: quels modèles en ont les élèves ? (Cahiers

de Didactique des Mathématiques n° 21, IREM Paris-Sud).

Pour des considérations didactiques, épistémologiques et historiques sur les débuts de l'analyse et les réels, on peut consulter:

J.L.Ovaert et J.L.Verley: Analyse vol. 1, Collection Léonhard Epistémon (Cédic-Nathan).

A.Robert: Rapports enseignement-apprentissage (Débuts de l'analyse sur $\mathbb{R}$), (Cahiers de Didactique des Mathématiques n° 180 et 181, IREM Paris-Sud).

Bibliographie

- La quasi-totalité des ouvrages de premier cycle consacrés au calcul différentiel et intégral, et par conséquent à la notion de limite, ont été écrits par des auteurs qui ont eu une vision très restrictive de la notion de limite. Pour une construction plus rigoureuse de la notion de limite, on peut consulter:
- H.Lebesgue : La mesure des grandeurs (monographie de l'Enseignement Mathématique 1925).
- J.Lévy : Les fondements de la géométrie (PUF).

En ce qui concerne les écoles et les conceptions des professeurs sur les nombres, on peut consulter:

J.Robinet : Les réels, quels modèles en ont les élèves ? (Cahiers

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

Réels.Ex.002.01

Introduction aux nombres réels

Ex 1. Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?

$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, $e, f = 0,333\ldots 3\ldots$, $g = \sqrt{2}$, $h = 0,123456789123456789123\ldots$, $i = 0,1234567891011121314\ldots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

Ex 2. Vrai ou faux : $1 = 0,99999999\ldots 9\ldots$?

Ex 3. Connaissez-vous une propriété caractéristique du développement décimal des nombres rationnels ? Démontrez cette propriété. Réciproquement si un développement possède cette propriété, comment calculer le rationnel associé à ce développement décimal ?

Donner le développement décimal de $13/7$, $27/17$.

Mettre sous forme de fraction $1,12615384615384\ldots$.

Ex 4. Un nombre peut-il avoir plusieurs développements décimaux ? Si oui, caractérisez les nombres qui ont plusieurs développements décimaux.

Ex 5. A propos de $\sqrt{2}$

- 1) Prouver qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont la carré soit égal à 2.
- 2) Pouvez-vous proposer des méthodes pour approcher $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels, ou par des nombres décimaux.
- 3) Que connaissez-vous du développement décimal de $\sqrt{2}$. Ce développement s'arrête-il ou est-il illimité ? Ce développement est-il périodique ?

Ex 6. Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$:

Dans le plan xOy , on porte sur Ox une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et sur Oy une suite de points $b_1, b_1, \ldots, b_n$, construites de la manière suivante :

a) $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$

b) $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

c) $a_n b_n = 2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2)

- 1) Représenter cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n .
- 2) Démontrer que :
 $\forall n \quad b_n < a_n$; $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante ; $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.
- 3) Calculer $a_n - b_n$ en fonction de $a_{n-1} - b_{n-1}$ et a_n . Montrer que l'on a l'inégalité :

$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}$$

- 4) Calculer les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grosso modo* à chaque pas.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

Réels.Ex.003.01

Nombres réels

Ex 1. Valeurs approchées :

1) On considère le nombre 0,7453621947. Donner ses valeurs approchées par défaut et par excès (s'écrivant avec le minimum de chiffres) à 10^{-3} , 10^{-5} , 10^{-8} près.

2) Si on connaît une valeur approchée par défaut d'un nombre x à 10^{-27} près, combien de décimales exactes connaît-on ?

3) Combien de développements décimaux illimités a le nombre 0,7453621947 ?

Ex 2. On considère les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$.

Y a-t-il un nombre rationnel juste avant $\sqrt{2}$, plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$?

Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?

Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ?

Ex 3. Soient deux nombres réels a et b vérifiant :

$$-1 < a < 4 \quad \text{et} \quad -3 < b < -1$$

Donner un encadrement de $a - b$ et de $\frac{a}{b}$.

Ex 4. Calculer avec votre calculatrice :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

Expliquer le résultat.

Ex 5. Qu'appelle-t-on partie entière d'un nombre décimal ? Qu'appelle-t-on partie décimale d'un nombre décimal ? Donner la partie entière et la partie décimale de 12,587 et de -3,05472.

Ex 6. On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n est un entier strictement positif. Cet ensemble est-il majoré ? minoré ? a-t-il un plus petit élément ? a-t-il un plus grand élément ? Justifiez vos réponses.

Ex 7. Etant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

- 1) M est un majorant de A
- 2) P n'est pas un majorant de A
- 3) m est un minorant de A
- 4) A est majoré
- 5) A n'est pas minoré
- 6) A est borné
- 7) A n'est pas borné.