

L'EVALUATION DES CONNAISSANCES

Résumé : Les modes d'évaluation des connaissances modèlent indirectement les contenus de l'enseignement, les pratiques et les représentations des enseignants et des étudiants. Les modes usuels d'évaluation contribuent-ils positivement, de ce point de vue, à la formation ? Dans ce texte, nous montrons que ce n'est pas vraiment le cas et, en nous basant sur divers exemples, nous faisons quelques suggestions susceptibles d'améliorer la cohérence entre les objectifs affichés de l'enseignement et l'évaluation.

Les expériences menées depuis plusieurs années ont clairement montré qu'une modification efficace de l'enseignement passait nécessairement par une action sur les modes d'évaluation usuels. Ceci s'explique aisément :

- L'objectif premier des étudiants est, on ne peut le leur reprocher, l'obtention du diplôme. De ce fait, l'importance d'une activité est conditionnée par le poids qu'elle occupe dans l'évaluation, quels que soient les discours tenus par ailleurs. L'évaluation influence ainsi fortement les pratiques des étudiants mais aussi, par voie de conséquence, la perception qu'ils ont des enjeux de l'enseignement suivi et, au delà, les représentations qu'ils se construisent des mathématiques et de leur apprentissage. En particulier, des objectifs de méthode comme la formation à une démarche scientifique, le développement de l'autonomie et de l'esprit critique, si souvent mentionnés dans les entreprises rénovatrices, seront difficilement perçus comme des enjeux essentiels de l'enseignement s'il suffit aux étudiants pour réussir d'être capable d'appliquer rapidement des techniques.

- Force est de constater également que ce conditionnement par l'évaluation ne fonctionne pas uniquement au niveau des étudiants. Même si un enseignement affiche explicitement des objectifs comme ceux cités ci-dessus, les enseignants qui y participent, dans la manière dont ils organisent et gèrent les activités proposées aux étudiants, ne peuvent oublier les contraintes de l'évaluation. Et l'image qu'ils se font des étudiants et de leurs capacités d'apprentissage en mathématiques est à son tour déterminée par les réactions des étudiants aux activités proposées et en particulier aux tâches qui entrent en jeu dans l'évaluation. Les expériences déjà réalisées ont bien mis en évidence ce phénomène en soulignant en particulier les effets pervers dus à l'interdiction faite à certaines sections expérimentales de DEUG de développer une évaluation autonome.

Il est donc essentiel de trouver les moyens pour que l'évaluation soit porteuse des enjeux jugés décisifs de l'enseignement.

On distingue classiquement quand on traite de problèmes d'évaluation de connaissances entre évaluation *formative* et évaluation *sommative*. La première est menée en cours d'apprentissage. Elle est destinée à aider l'élève à se situer par rapport à ses apprentissages, à fournir un feed back à l'enseignant, à l'aider à détecter les difficultés résistantes, les blocages éventuels et à y adapter son enseignement. L'évaluation sommative, menée elle à la fin d'une formation ou d'une phase de la formation, a pour objectif de déterminer le niveau atteint par l'étudiant et de prendre une décision compte-tenu de ce niveau.

Dans le système usuel d'évaluation à l'université, l'évaluation est essentiellement sommative. Le contrôle continu qui existe le plus souvent, bien qu'il comporte des

évaluations locales en cours d'apprentissage, ne peut être assimilé à une évaluation formative. Son fonctionnement ordinaire correspond davantage en effet à une démultiplication de l'évaluation sommative sous forme de bilans successifs, démultiplication allant parfois jusqu'à l'émiettement avec tous les risques que cela comporte, qu'à une réelle évaluation formative. Il est en particulier généralement basé sur le système des moyennes qui ne tient aucun compte de l'apprentissage et interdit, si deux contrôles successifs concernent le même domaine, que la réussite au second efface l'échec au premier.

Chaque forme d'évaluation subit des contraintes et n'est de ce fait propre à évaluer qu'un éventail restreint de connaissances et de capacités. Comment évaluer en temps limité par exemple le développement de l'autonomie de l'étudiant ? Comment apprécier réellement ses capacités d'exploration d'une situation complexe, de recherche d'outils adaptés, de tenacité face à des problèmes résistants, sa capacité à changer de points de vue ?

Sur ce plan, l'évaluation universitaire usuelle est très insatisfaisante car d'une part elle est peu variée, puisque basée presque exclusivement sur des épreuves écrites en temps limité, d'autre part, elle est loin d'exploiter même toutes les possibilités offertes par le registre du temps limité.

Si l'on examine, par exemple, les annales de DEUG (cf. l'analyse présentée dans les Actes du Colloque de Rennes), on s'aperçoit que les sujets d'examens s'organisent autour de deux pôles : le grand problème d'une part, la succession d'exercices indépendants d'autre part.

- Les grands problèmes concernent en général des sujets d'un intérêt mathématique certain, mais les contraintes liées à la situation d'examen font que cet intérêt, indéniable au niveau de la conception du problème, c'est à dire du travail de l'enseignant, ne se retrouve pas en général au niveau de la résolution demandée, c'est à dire du travail de l'étudiant.

Ces contraintes forcent en effet le découpage en rondelles, l'accumulation d'indices, le guidage pas à pas. Si par exemple des changements de point de vue sont nécessaires, ils sont indiqués ; de même les réponses sont données dans les questions parce que nécessaires à la suite : il faut éviter de perdre l'étudiant en chemin ou du moins de le laisser trop tôt sur le bord du chemin. La résolution peut se faire et se fait alors pour la plupart des étudiants en se laissant guider à ce niveau local comme on suit un chemin de piste, sans que le sens mathématique du problème soit le moins du monde perçu : l'important est de glaner au fil des questions le maximum de points, en réalisant des tâches qui ne sont souvent que des tâches d'exécution. Et, d'ailleurs pour beaucoup d'étudiants, en temps limité, il est plus efficace de fonctionner en surface et au contrat, en essayant de deviner à des indices externes ce que l'enseignant attend, que de rentrer dans la signification mathématique profonde des questions à traiter.

En fait, le "beau problème" est rarement bien adapté à une évaluation en temps limité.

- La succession d'exercices indépendants, elle, n'oblige certes pas au même machage du travail de l'étudiant et est sans doute de ce fait mieux adaptée à l'évaluation des connaissances. Mais elle concerne nécessairement des objets restreints et peut, de ce fait, tendre à renforcer une certaine atomisation des savoirs. Il faut constater de plus que les exercices proposés n'exploitent pas généralement la richesse possible de cette structure. En particulier, pour pouvoir tester le maximum d'aspects et assurer en même temps un succès raisonnable, les concepteurs choisissent généralement de multiplier les exercices qui ne nécessitent qu'un engagement technique et limitent au maximum les problèmes conceptuels qui nécessiteraient du temps et de la réflexion.

Il s'agit là de tendances actuelles. On peut sans doute améliorer le fonctionnement des évaluations en temps limité et nous reviendrons sur ce point dans la suite. Il n'en demeure pas moins qu'il s'agit là d'un instrument par nature trop contraint pour mettre en jeu l'éventail des capacités que l'on cherche à développer chez les étudiants et ne pas fausser, s'il est le seul mode d'évaluation, les enjeux de l'enseignement et la représentation que s'en font les étudiants.

Ceci est d'autant plus essentiel que l'on peut attendre de l'évaluation à l'université, évaluation d'adultes, qu'elle commence à rompre avec une évaluation trop étroitement scolaire pour essayer de se rapprocher d'une évaluation plus professionnelle qui, elle, justement, ne peut pas éviter de prendre en compte ces compétences.

Dans sa vie professionnelle, en effet, on ne juge pas un mathématicien, un enseignant de mathématiques, un scientifique qui utilise les mathématiques sur leur rapidité, mais sur leur production dans un temps illimité si on le compare au temps de l'examen.

De même, ils travaillent en faisant appel à des aides diverses, matérielles mais aussi humaines, et leur capacité à trouver et exploiter ces ressources fait aussi partie de leurs compétences. C'est le plus souvent à eux de reformuler les problèmes qu'ils rencontrent pour les mettre sous une forme compatible avec les outils mathématiques dont ils disposent.

Des compétences de cette nature, difficiles par nature à apprécier, le sont bien plus encore dans le cadre des évaluations scolaires traditionnelles : aussi comprend-t-on fort bien que, dans ces dernières, on cherche plus à tester ce que les gens ont retenu d'un enseignement donné qu'à déterminer dans quelle mesure ils sont capables de l'exploiter dans des contextes non spécialement préparés pour cette exploitation, même si ce critère est finalement le critère réellement pertinent.

Partant des constats effectués et de ce souci de rapprocher l'évaluation universitaire d'une évaluation plus professionnelle, nous voudrions, sans sous-estimer la difficulté du problème, proposer quelques pistes, pistes pour la plupart déjà exploitées d'ailleurs dans les expérimentations menées à ce niveau d'enseignement.

Une meilleure exploitation des épreuves en temps limité :

Ceci peut s'effectuer notamment en incluant dans ces épreuves des questions qui permettent d'échapper à la réduction technique et de tester des capacités plus diversifiées que celles usuellement testées, par exemple :

- en proposant des énoncés de type vrai/faux ou en demandant de statuer sur telle ou telle conjecture, comme dans les cas suivants extraits d'épreuves écrites ou de tests utilisés dans le courant de l'enseignement (Grenoble, Paris 6 et 7) :

"Conjectures (4 points) Résoudre les conjectures suivantes

Conjecture 1 : Soit f une fonction intégrable sur un domaine simple que l'on note Ω et vérifiant :

$$\int_{\Omega} f = 1$$

Alors, pour toute constante positive k , on a : $\int_{\Omega} (f+k) = 1+k$

Conjecture 2 : Soit U le rectangle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ et g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x,y) = \exp(2x-y^3)$, alors $\int_U g \geq 2$."

"Vrai/faux (extraits de Léonhard Epistémon - Algèbre Vol.1)

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et u est un endomorphisme de E . Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? (les réponses seront justifiées par des démonstrations ou des contre-exemples) :

- Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est libre.
- Si $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est génératrice, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice.
- Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice, $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est génératrice.
- Soit x un vecteur non nul de E , si $u^2(x) = x$ alors $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$."

- en suscitant des explorations sur calculatrices devant aboutir à des conjectures que l'on essaiera de prouver, comme dans ces sujets sur les développements décimaux (Lille) :

"Déterminer les développements décimaux illimités des fractions :

37/9999 37/999 241/9999 3227/9999 99/99 6997/9999 40001/999999
123456789/9999999999

Quelle conjecture pouvez-vous faire à partir des résultats précédents ?

Prouvez la conjecture que vous avez faite. Pouvez-vous en déduire une méthode pour trouver presque sans calcul le développement décimal illimité des fractions suivantes : 61322790/9999 999/99 70999959999/999. ?"

- en faisant formuler puis démontrer des conjectures, comme dans les questions ci-dessous extraites d'un sujet portant sur l'étude qualitative de l'équation différentielle : $y' = x^2 + 1 - y^2$ (Lille) :

"1 - Régionaliser le plan suivant le signe de y'

2 - Etudier les invariances du champ et montrer qu'il existe une solution affine.

3 - On considère les solutions maximales f_1 et f_2 passant respectivement par les points $(0,0.5)$ et $(0,2)$. On appelle C_1 et C_2 leurs courbes représentatives. Tracer les allures a priori possibles pour C_1 et C_2 . Quelles conjectures faites-vous ? Quelles questions vous posez-vous ?

4 - Justifier les conjectures faites sur le comportement de C_1 et C_2 pour $x > 0$."

ou dans ce sujet sur les suites (Lille) :

"1 - Déterminer les limites des suites suivantes:

$(1+1/n)^n, (1+3/n)^n, (1-1/n)^{3.5n}, (1+1/\sqrt{n})^n, (1+1/n^2)^n, (1+1/n)^{n^2},$
 $(1+1/n)^{\sqrt{n}}, (1-1/n)^{\log(n)}, (1-4/\log(n))^{\log(n)}, (1+1/\log(n))^{\sqrt{n}}$

2 - On se donne deux suites (u_n) et (v_n) , tendant respectivement vers 1 et $+\infty$ lorsque n tend vers ∞ . Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire sur le comportement respectif des suites :

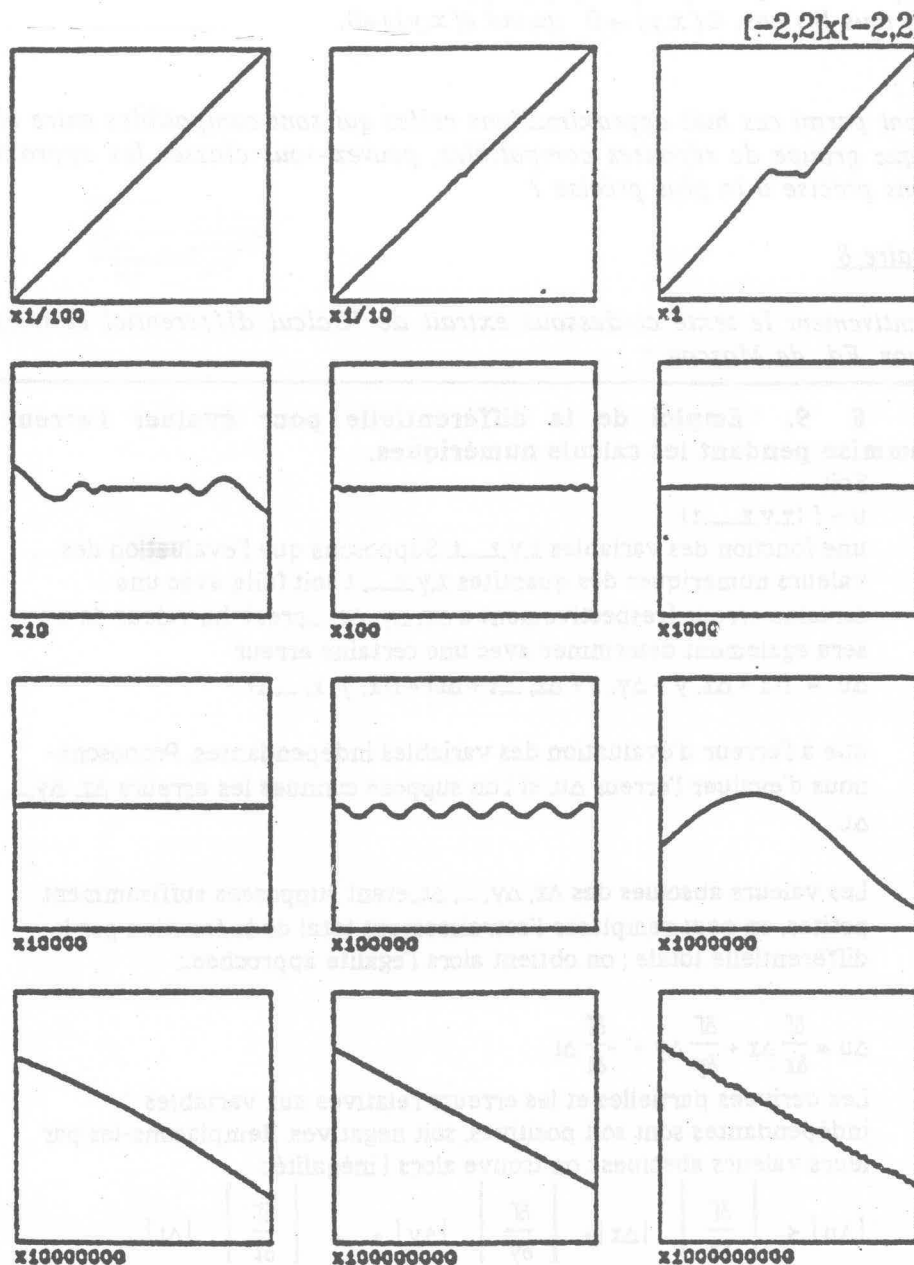
$w_n = u_n^{v_n}$ et $t_n = v_n(u_n - 1)$?

3 - Prouver ces conjectures."

- en faisant analyser mathématiquement une situation à partir de quelques documents, comme par exemple cette situation de dérivation au zoom au moment de l'étude des dérivées (document fourni par A.Deledicq) :

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $0 \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

Expliquer la série de tracés relatifs à cette fonction obtenue en faisant des zooms successifs à partir d'une fenêtre initiale centrée en 0.001.



- en faisant critiquer des productions écrites comme par exemple dans ces extraits de la brochure : "Questionnaires de travail sur les différentielles" (IREM Paris 7, LDPES) :

Questionnaire 5

Ayant à déterminer des approximations d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ au voisinage du point $(0,0)$, des étudiants ont proposé les réponses suivantes :

E1 : $f(x,y) = 2x + 3y + \mathcal{E}(x,y)$

E2 : $f(x,y) = 5x + 4y + xy + (x^2 + y^2)\mathcal{E}(x,y)$

E3 : $f(x,y) = 2x + 3y + 2xy + \sqrt{x^2 + y^2}\mathcal{E}(x,y)$

E4 : $f(x,y) = 2x + 3y + \sqrt{x^2 + y^2}\mathcal{E}(x,y)$

E5 : $f(x,y) = 5x + 4y + \mathcal{E}(x,y)$

E6 : $f(x,y) = 5x + 4y + (x^2 + y^2)\mathcal{E}(x,y)$

$$E7 : f(x,y) = 5x + 4y + (x^2+y^2) + \varepsilon(x,y)$$

$$E8 : f(x,y) = 2x + 3y + xy + (x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$$

avec, dans tous les cas, $\varepsilon(x,y) \rightarrow 0$ quand $\|(x,y)\| \rightarrow 0$.

Questions :

Quelles sont parmi ces huit approximations celles qui sont compatibles entre elles ?

Dans chaque groupe de réponses compatibles, pouvez-vous classer les approximations de la moins précise à la plus précise ?

Questionnaire 8

Lisez attentivement le texte ci-dessous extrait de "Calcul différentiel et intégral" de N.Piskounov, Ed. de Moscou :

§ 9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques.

Soit

$$u = f(x, y, z, \dots, t)$$

une fonction des variables $x, y, z, \dots, t$. Supposons que l'évaluation des valeurs numériques des quantités $x, y, z, \dots, t$ soit faite avec une certaine erreur (respectivement $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ pres). La valeur de u sera également déterminée avec une certaine erreur

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t)$$

due à l'erreur d'évaluation des variables indépendantes. Proposons-nous d'évaluer l'erreur Δu , si l'on suppose connues les erreurs $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$.

Les valeurs absolues des $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$, étant supposées suffisamment petites, on peut remplacer l'accroissement total de la fonction par la différentielle totale : on obtient alors l'égalité approchée :

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$$

Les dérivées partielles et les erreurs relatives aux variables indépendantes sont soit positives, soit négatives. Remplaçons-les par leurs valeurs absolues : on trouve alors l'inégalité :

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|$$

Si l'on désigne par $|\Delta x|, |\Delta y|, \dots, |\Delta t|$ les erreurs absolues maximales des variables correspondantes (les bornes des valeurs absolues des erreurs), on peut évidemment admettre que :

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|$$

Exemples.

1) soit $u = x + y + z$, alors

$$|\Delta u| = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

2) soit $u = x - y$, alors

$$|\Delta u| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

3) soit $u = xy$, alors

$$|\Delta u| = x|\Delta y| + y|\Delta x|$$

4) soit $u = \frac{x}{y}$, alors

$$|\Delta u| = \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta y| = \frac{y|\Delta x| + x|\Delta y|}{y^2}$$

Répondez ensuite à cette question :

La démonstration ci-dessus contient une erreur de raisonnement. Situez la et illustrez la sur ceux des exemples donnés dans le texte qui vous semblent convenir.

L'intervention dans l'évaluation d'activités menées en temps non limité et d'activités plus proches d'activités professionnelles :

Les systèmes de projets, les activités expérimentales menées en liaison avec l'introduction de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, développées dans différentes expériences de rénovation de DEUG, consistent sans aucun doute un pas important dans cette direction (cf. brochure Budapest et également cette brochure). Les résultats obtenus montrent d'ailleurs que ce ne sont pas nécessairement les mêmes étudiants qui se révèlent positivement dans ces activités et dans les évaluations usuelles et qu'on ne peut donc inférer directement ces compétences moins scolaires des résultats aux évaluations traditionnelles.

De manière plus classique, les problèmes ont aussi un rôle à jouer à ce niveau, en particulier s'ils sont vus comme l'occasion de faire mettre en oeuvre par l'étudiant des outils variés et pas seulement ceux dont l'apprentissage est en cours, de faire mobiliser ces outils dans des contextes riches, non complètement préalablement adaptés à l'enseignement dispensé, s'ils sont l'occasion de changements de cadre et de points de vue sur les objets manipulés. Un certain nombre de beaux problèmes d'examen pourraient d'ailleurs être adaptés dans ce sens et permettre réellement une activité mathématique riche et formatrice.

Ainsi donc, en conclusion, il nous semble qu'au niveau du premier cycle universitaire, il faut s'orienter vers une diversification des modes d'évaluation sommative, en faisant jouer à chacun d'eux, du mieux possible, le rôle qu'il peut jouer et en s'assurant de la cohérence du système d'évaluation et des enjeux de l'enseignement. Il serait sans doute nécessaire à côté de cette évaluation sommative de développer une évaluation formative, plus spécifiquement chargée quant à elle de permettre aux étudiants de se situer, et de fournir un moyen de pilotage aux enseignants, tout en contribuant par incitation à l'activité mathématique à la consolidation des connaissances. Une telle évaluation formative ne saurait intervenir dans l'évaluation sommative, sans risque de voir ses objectifs réels pervertis.