

ASPECTS DIDACTIQUES

A) Difficultés et manques de nos étudiants : quelques constats.

Eliminons le cas des étudiants qui ne travaillent pas un minimum, ou des éventuels blocages psychologiques graves (peu nombreux à ce niveau). Il nous apparaît qu'il manque souvent, à des degrés divers, aux étudiants qui ne "réussissent" pas bien, plusieurs éléments qui concernent différentes facettes des activités mathématiques. Nous les avons classées (un peu arbitrairement) dans diverses rubriques.

a) Acquis antérieurs (cf. I 3))

Certains étudiants ont des lacunes en ce qui concerne "les bases". Mais il est important de souligner que c'est du fait même des programmes que certaines connaissances n'ont pas été apprises dans suffisamment de cadres ou avec insuffisance dans la pratique des changements de cadres, ce qui peut handicaper les étudiants pour la suite des acquisitions. Notamment les étudiants issus de terminale D ont surtout des connaissances dans le cadre numérique et n'ont pas beaucoup manipulé dans les cadres graphique et formel (cf § I.3)).

b) Rapidité et performances en "calcul"

Nous nous plaignons souvent de la lenteur de certains de nos étudiants. Les calculs un peu compliqués sont souvent particulièrement ratés et on peut avoir l'impression que les deux phénomènes se renforcent.

c) Résolution des exercices et des problèmes

Il manque souvent une démarche un peu systématique de résolution de problèmes, en particulier au niveau du démarrage. De même tout ce qui est contrôle de la démarche (au début, mais aussi en cours de problème et à la fin, pour vérifier) est très rarement mis en oeuvre par les étudiants. Mais ce constat n'est-il pas à relier aux conceptions mêmes des étudiants, souvent assez pauvres nous semble-t-il, sur les activités mathématiques ?

On constate enfin, lors des résolutions de problèmes, la difficulté de passer de l'utilisation de propriétés évoquées explicitement dans les énoncés à des mises en fonctionnement spontanées de ces propriétés ; ce dernier cas correspond aux textes de problèmes ne comportant pas d'indications sur ce qu'on peut utiliser pour résoudre. C'est ce que nous caractérisons comme la difficulté de passer des "outils" (propriétés) mobilisables (c'est à dire mis en fonctionnement seulement sur demande) aux outils disponibles, dont le choix même est du ressort de l'étudiant.

d) Apprentissage du cours

Il nous apparaît que souvent le cours est simplement lu, voire relu, de façon très linéaire : il n'y a pas de méthode pour l'apprendre. Bien sûr nous ne prétendons pas qu'il y ait "une" méthode pour apprendre le cours, mais nous pensons que les étudiants peuvent avoir intérêt à développer certaines stratégies d'apprentissage spécifique du cours (chacun la sienne) ; on peut essayer de dégager les structures du cours, on peut avoir intérêt à mettre en rapport les théorèmes et leurs utilisations, on peut comparer les méthodes d'un même chapitre ou de plusieurs chapitres, on peut repérer systématiquement le local et le global, on peut essayer de dégager les motivations, les questions auxquelles le cours répond et celles qui sont éludées... On peut aussi transformer les théorèmes, en les réécrivant sous forme opérationnelle, par exemple en "si ..., alors ...", au cas où le texte initial du théorème n'est pas sous cette forme, etc...

Seulement toutes ces idées correspondent en fait, là encore, à une certaine conception des mathématiques, à la reconnaissance d'une certaine organisation des connaissances et c'est peut-être cela qui manque à nos étudiants. Cela pourrait expliquer que même si la nécessité de cet apprentissage du cours, souvent rappelée par les enseignants, est perçue (ce qui n'est pas toujours le cas), la bonne volonté ne suffit pas nécessairement à un apprentissage efficace. Cela débouche sur notre dernière rubrique, un peu plus générale.

e) Savoir mathématique en jeu

Plus généralement on peut donc se demander si les étudiants n'ont pas des idées très vagues, trop vagues même, sur la nature des mathématiques et sur les activités mathématiques. On a déjà mis en rapport certaines difficultés dans les démarches de résolutions de problèmes et dans l'apprentissage du cours avec des conceptions peut-être trop pauvres de l'activité mathématique et des mathématiques elles-mêmes. On peut en trouver d'autres traces.

Par exemple, beaucoup d'étudiants n'ont visiblement pas l'habitude de mettre en relation (presque systématiquement) divers éléments du cours, ni de réorganiser leurs connaissances acquises ou en cours d'apprentissage. Ainsi, ils ont du mal à changer de point de vue dans un problème, et cela peut entraîner des difficultés de démarrage.

De plus, ils ne semblent pas avoir toujours pris conscience du jeu, permanent en mathématiques, entre la présentation formelle et générale des notions (hors de tout contexte) et les mises en fonctionnement, demandées dans les problèmes (ce que nous appelons la contextualisation des notions). Et peut-être est-ce en partie ce manque de compréhension du "jeu auquel on joue" en mathématiques, qui est à l'origine de ces manipulations dénuées de tout sens assez fréquentes chez les étudiants (pertes de sens).

Enfin, sur un tout autre plan, le statut même de la preuve en mathématiques n'est pas toujours perçu : le rôle des contre-exemples, le vrai et le faux, ont rarement été l'objet d'une réflexion explicite et du coup ne sont pas identifiés dans leur véritable fonction (cf § III.2). Il peut en résulter un certain flou dans les démonstrations, et si certaines erreurs ne sont provoquées que par la nécessité que ressentent les étudiants d'écrire absolument quelque chose, même s'ils savent plus ou moins que c'est faux (erreurs du type "la fin justifie les moyens"), d'autres relèvent sans-doute aussi d'une méconnaissance de la démarche scientifique en mathématiques. Et à notre avis c'est tout ce que nous avons évoqué ci-dessus qui peut amener les "manques de rigueur" dont se plaignent souvent les enseignants, et qui pour nous ne sont pas uniquement des déficiences primitives réelles, logiques par exemple.

De même, pour nous, le manque de confiance en soi, voire même d'attention que l'on constate aussi, est plus une conséquence qu'une cause d'échecs : par un processus cumulatif bien connu, tous les phénomènes évoqués ci-dessus, toutes les difficultés rencontrées et laissées sans solution amènent au découragement et, par un cercle vicieux, éloignent encore plus les étudiants de la réussite.

B) Des moyens traditionnels pour remédier aux difficultés des étudiants

Habituellement, on essaie de jouer sur plusieurs tableaux : en particulier on (ré)explique, éventuellement autrement, on simplifie, on conseille de refaire les exercices faits en TD.

Nous allons indiquer certaines limites que nous attribuons à ces moyens traditionnels, en essayant de comprendre sur quelles hypothèses d'apprentissage ces moyens reposent. C'est pourquoi nous en proposerons d'autres.

Il s'avère souvent que la répétition, même fréquente, même avec d'autres mots, d'autres images, d'autres explications, ne suffit pas à débloquer les étudiants concernés par les incompréhensions ou les erreurs persistantes. Pourquoi ?

D'abord parce que, souvent, ce n'est pas au niveau où on répète qu'il y a incompréhension : c'est souvent en amont que le problème se pose. On peut comprendre localement une explication, mais c'est l'insertion de l'explication dans un ensemble plus général, voire la nécessité même de l'explication qui ne sont pas perçues... On peut comprendre une certaine règle du jeu sans avoir compris le jeu lui-même. W. Allen se promène dans les rues de New-York en criant "La réponse est oui mais quelle est la question ?"; certains de nos étudiants "faibles" pourraient bien parcourir les couloirs de nos facs en criant "j'ai fait un développement limité à l'ordre 8, mais quelle était la question?"...

Ensuite parce que, souvent, répéter veut dire que c'est le professeur qui explique, qui montre donc quelque chose, ce n'est pas l'élève qui s'empare du quelque chose pour se l'approprier : c'est "l'illusion de la transparence", de la transmission sans déformation ni incompréhension par le discours.

C'est aussi faire comme si il n'y avait rien là où on dépose la connaissance, alors qu'il y a toujours quelque chose, qu'il y aurait peut-être lieu de déplacer ou de transformer...

Nous avons été amené à vérifier qu'il est souvent nécessaire qu'il y ait mise en fonctionnement, expérimentation mathématique, action de l'élève lui-même, tout seul, parcourant à nouveau un parcours semé d'erreurs, pour qu'il puisse y avoir compréhension et remise sur les rails. Et cela semble d'autant plus efficace que l'élève a les moyens de rectifier tout seul une partie de ses erreurs, donc qu'il est capable de se contrôler.

Seulement cela nécessite du temps, cela veut dire que l'enseignant laisse les élèves agir tout seuls, qu'il se tait momentanément, même si des erreurs importantes sont dites, qu'il valorise les élèves, même faibles...

Enfin parce que, souvent, répéter amène à décomposer pour simplifier, pour faciliter, et qu'on aboutit ainsi à priver l'élève de la substance du concept qu'on cherche à lui transmettre. Si par exemple on ne fait traiter en exercices aux étudiants faibles que des suites monotones bornées (ou même seulement une majorité de telles suites), on aboutit à l'établissement d'un modèle (image mentale) monotone de convergence qui est insuffisant pour s'approprier ce dont on a besoin pour résoudre les autres exercices sur les suites (cf A. Robert). Simplifier n'est pas toujours une bonne solution, il y a un seuil au-dessous duquel la décomposition, la simplification dénaturent les connaissances visées (cf 3° et 6° de la bibliographie).

Quant à la solution de refaire faire des exercices déjà vus, elle a un inconvénient majeur qui est le vieillissement, le caractère "obsolète" qui empêchent un investissement réel des étudiants...

C) Propositions

Nos propositions ne sont pas en correspondance biunivoque avec les manques ou les difficultés constatées plus haut. Il s'agit plutôt pour nous de mettre au point un certain nombre de stratégies d'enseignement assez globales, portant sur l'organisation même de cet enseignement et dont nous estimons qu'elles sont susceptibles d'améliorer les acquisitions.

Nous ne prétendons pas à l'exhaustivité, nous ne pensons pas non plus qu'il faut adopter toutes les propositions à la fois pour remédier aux difficultés d'une bonne partie des étudiants. Cependant, nous avons expérimenté à nos dépens qu'un changement trop partiel, même s'il est bien, voire très bien reçu par les étudiants, n'entraîne pas de modifications sur le plan de l'acquisition des connaissances, qui reste notre principal souci.

Ces propositions sont issues d'une part de nos connaissances (en didactique des mathématiques) et en particulier de nos réflexions sur les spécificités de l'enseignement post-obligatoire en mathématiques, et d'autre part d'un certain nombre d'expériences et d'innovations dans ce domaine.

Nous avons regroupé les changements que nous proposons autour de plusieurs axes, essentiellement pour en clarifier la présentation, en réalité il n'y a pas toujours indépendance entre deux axes différents.

Dans la suite du § II, un certain nombre de ces propositions générales sont reprises en détail. Des exemples détaillés portant sur des sujets précis sont présentés en III.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'organisation habituelle, cours en amphi et TD en groupes de 30, mais on peut reprendre beaucoup d'idées dans le cadre d'une organisation moins standard (cours/TD intégrés, ateliers,...).

a) Changements des rapports cours/TD

L'organisation globale de l'enseignement peut être modifiée, pour certaines notions, en ce qui concerne le déroulement traditionnel et invariable "cours suivis d'exercices d'application traités en TD".

On peut en particulier faire travailler les étudiants en TD, avant le cours correspondant, sur des problèmes où les notions visées peuvent intervenir déjà partiellement. On suscite ainsi l'utilisation des concepts comme outils, et on peut s'appuyer dessus pour introduire les concepts comme objets, avec leurs propriétés énoncées hors du contexte de tout problème. Nous pensons que cela peut renforcer la motivation des étudiants au moment du cours, et que cela garantit aussi au moins

partiellement la prise de sens des notions (même générales, hors de tout contexte). Des références à des séquences ainsi conçues sont données au § III.

Ce type de gestion des activités peut d'ailleurs être favorisé par une organisation cours/TD intégrés : en effet si c'est le même enseignant qui assure les deux types d'activités, il peut mieux exploiter au moment du cours ce qui a eu lieu effectivement en TD, et réciproquement, il peut évoquer ensuite en toute connaissance de cause ce qu'il a pu dire en cours. En tout état de cause, dans l'organisation traditionnelle, un travail de ce type nécessite l'existence d'une véritable équipe pédagogique se réunissant très régulièrement.

b) Diversifications des contenus des activités en TD

@ Introduction du travail sur textes historiques

Il peut être intéressant de faire travailler les étudiants sur des textes de mathématiques un peu anciens, à condition de les guider dans leur travail (grille d'analyse, ou ...). Il y a une UV de maîtrise à P7 (Verley, Artigue) où ce type de travail a été expérimenté avec succès. L'intérêt est que ce type de travail peut aider à mieux saisir correctement ce qu'est l'activité mathématique. Mais beaucoup d'inconnues existent encore sur la manière dont des enseignements historiques peuvent être intégrés à l'enseignement mathématique (cf § IV.2).

@ Pluridisciplinarité

Il peut aussi être intéressant de proposer des problèmes issus d'autres disciplines, la physique en particulier, et même, si possible, des problèmes portant sur les programmes de physique de première année de DEUG. Il y a là une possibilité importante de "problématiser" des concepts mathématiques, et de faciliter des transferts par changements de cadres (cf § IV.3).

@ Problèmes difficiles, avec mise en fonctionnement de plusieurs cadres

Nous pensons qu'il est important de proposer aux étudiants des problèmes difficiles (mais pas infaisables), nécessitant de leur part certaines initiatives, comme l'introduction d'outils non indiqués dans le texte, ou des calculs un peu longs, et qui comportent des changements de cadres (à la charge ou non des étudiants).

Par exemple, pour certains problèmes d'analyse, il peut être nécessaire de faire une étude de fonction, soit graphique, soit numérique sans que cette étude ait été suggérée explicitement dans l'énoncé. Et s'il faut qu'on ait recours à la dérivée seconde pour trouver le signe de la dérivée première, il faut savoir gérer les calculs sans tout confondre, et il faut interpréter les résultats obtenus dans un cadre (numérique par exemple) pour déduire les résultats demandés dans un autre cadre éventuellement..

Les changements de cadres peuvent à la fois faciliter la résolution du problème, dans la mesure où les connaissances des étudiants peuvent être meilleures dans un cadre que dans un autre, et faciliter les apprentissages dans la mesure où ils ont permis de travailler dans un cadre moins familier.

Par exemple, si les étudiants savent bien résoudre les systèmes linéaires, on peut en profiter pour leur faire résoudre des problèmes de géométrie (dans un espace affine de dimension 3 par exemple) en utilisant de façon intermédiaire les coordonnées ; si au contraire c'est en géométrie qu'ils sont bons, on peut s'appuyer sur cet acquis pour faire comprendre l'interprétation des résolutions analytiques des systèmes (cas d'impossibilité, infinité de solutions ...).

@ Utilisation de microordinateurs

Il peut être intéressant de proposer des problèmes nécessitant l'utilisation de calculatrices programmables, voire d'ordinateurs. En effet, intégrer tout au long de l'année des séances sur ordinateur, permet soit de résoudre des problèmes un peu différents des problèmes habituels (utilisation de l'ordinateur comme outil de calculs), soit de développer une pratique de visualisation utile pour certains concepts, soit de mettre en place une activité exploratrice visant à faire énoncer et/ou vérifier des conjectures. Certains logiciels permettent aussi de faire faire des exercices de renforcement et l'idée de libre-service informatique est sans doute à creuser (cf § III.7).

c) Diversification des formes des activités proposées aux étudiants

Nous pensons que certaines formes d'activités (en TD ou non) peuvent aider les étudiants à acquérir les connaissances visées. Pour montrer la palette des moyens à la disposition des enseignants, nous évoquons aussi des activités traditionnelles qui n'ont rien d'originales, dans ce § comme dans les autres.

@ Devoirs sur table

Il nous semble important de proposer régulièrement (une fois par mois) des problèmes sur table, cela permet de ne pas faire perdre aux étudiants l'habitude du travail en temps limité.

@ Travail en petits groupes

Nous pensons que cette forme de travail peut être efficace par exemple pour faire chercher des exercices difficiles (cf § II.2).

On peut aussi l'utiliser pour améliorer la rédaction des exercices, par exemple en provoquant une prise de conscience collective du rôle de la rédaction d'un problème et de la possibilité de la discuter. Si une mauvaise note est attribuée à un devoir réalisé en petit groupe, résolu convenablement mais mal rédigé, on peut être presque sûr que, à la prochaine expérience identique, le groupe accordera une autre importance à la rédaction...

@ Questionnaires

La pratique des questionnaires sur l'enseignement, proposés régulièrement aux étudiants, permet une meilleure interaction entre enseignants et étudiants, mais elle est aussi porteuse d'une conception autre de l'interlocuteur étudiant. Si on tient compte de ses réponses, cela veut dire qu'on accorde de la valeur à ses opinions et cela peut rétroagir sur la représentation qu'il a de lui-même, sur son sérieux ... De plus cela l'amène à se poser des questions sur ses activités qu'autrement il ne penserait même pas à évoquer... (cf. § II.5).

@ Projets ou mémoires

On peut faire faire aux étudiants des mémoires ou projets, comme à Lille, Marseille, Paris 7, etc.... Bien entendu cela doit compter dans l'évaluation finale. Un des gros avantages de ce type de travail est le changement de rapport des étudiants à leur travail, permis à la fois par l'introduction du temps long et par l'autonomie relative; il s'introduit un enjeu plus proche de celui des situations professionnelles, avec ce que tout ce que cela comporte de responsabilité et d'engagement authentique dans le travail (cf. § III).

@ Débats scientifiques

Signalons pour terminer cette énumération (non exhaustive) les techniques de débat scientifique en amphi expérimentées à Grenoble et

au CNAM, qui permettent un investissement tout à fait différent des étudiants dans le savoir. Il s'agit de permettre aux étudiants de mieux comprendre la signification des algorithmes qu'ils utiliseront par la suite, et de se constituer une véritable épistémologie scientifique. Pour cela on met en place un contrat tout à fait spécifique pendant les séances de cours de type "débat". C'est la collectivité des étudiants qui a la responsabilité de la preuve de ce qui est avancé. Il y a un véritable engagement des étudiants dans la discussion qui a lieu sur cette preuve. Et ce débat a vraiment lieu d'être dans la mesure où l'incertitude a un statut officiel, l'enseignant ayant supprimé tout indicateur de vérité de son discours : on a en quelque sorte restitué l'enjeu de la preuve (cf. § II.6).

d) Interventions sur les mathématiques

Nous pensons qu'il est efficace de faire aux étudiants des interventions assez régulières sur les mathématiques, interventions introduites explicitement comme telles. C'est ce que nous qualifions de "discours métamathématique".

@ Règles du jeu générales

On peut expliquer dès le début de l'année scolaire quel travail personnel est demandé et pourquoi, compte-tenu des objectifs de l'enseignement, quitte à revenir sur le sujet une fois par trimestre (cf § III). Cela permet de préciser au moins en partie les attentes que l'enseignant a par rapport aux étudiants (ce que nous appelons le contrat). Dans certains cas on peut aussi fixer explicitement certains enjeux de l'enseignement par ce type de séances (cf II.6).

@ Epistémologie

On peut aussi donner quelques idées sur la nature des mathématiques, grâce à des incursions bien choisies, en rapport étroit avec le programme du DEUG, dans l'histoire des mathématiques. Cela peut aider à problématiser les cours, à préciser pourquoi telle question s'est posée, avant d'exposer les seules réponses aux étudiants. Cela peut amener aussi à montrer des fonctionnements généraux de l'activité mathématique, à pointer l'utilité des changements de cadres par exemple, tels qu'on peut les voir à l'oeuvre dans les progrès des mathématiciens.

@ Méthodes

On peut encore indiquer explicitement des éléments de méthodes de résolution de problèmes sur des domaines précis (classifications, heuristiques...). Plusieurs variantes sont possibles: on donne les méthodes à un moment supposé bien choisi (ni à la fin du cours, ni au début), on les fait au contraire chercher aux étudiants, ... (cf. § II.4).

@ Rédaction

On peut intervenir explicitement sur la rédaction des exercices de mathématiques ou sur la rédaction des textes de mathématiques, en faisant le lien avec les enjeux de vérité en mathématique, et le rôle qu'y joue la démonstration.

MAIS ... certains de ces cours risquent de n'avoir aucune influence sur les étudiants, surtout sur ceux qui en ont le plus besoin, si on ne se donne pas les moyens de forcer effectivement les élèves à utiliser les ressources correspondantes. La simple audition d'une méthode ou d'une manière de rédiger n'est pas toujours suffisante à enclencher son emploi par des étudiants qui jusqu'ici n'y avaient pas recours. C'est pourquoi nous pensons qu'il est indispensable de mettre les étudiants dans des situations de travail où ils ont réellement besoin des ressources indiquées dans les cours en question (métamathématiques). Un certain nombre des nouvelles formes proposées ci-dessus peut correspondre à ce type de situations. Certaines de ces situations seront développées dans la suite.

e) Changements dans l'évaluation des étudiants

On peut réécrire ce qui vient d'être énoncé ci-dessus à propos de l'évaluation : si les changements introduits dans les cours ou les activités n'ont aucune traduction en termes d'évaluation, nous pensons qu'ils peuvent rester lettre morte pour une grande partie des étudiants et spécialement pour ceux qui ont des difficultés. Il nous semble indispensable de tenir compte dans les contrôles de ce qui est introduit dans les cours, les TD, les activités ... S'il y a des méthodes, il faut qu'il y ait besoin de méthodes dans le sujet d'examen, s'il y a des projets ils doivent intervenir dans la note finale, s'il y a des débats de conjectures, il faut qu'il y ait une conjecture à l'examen... Cela pose le problème du temps court et du temps long dans les évaluations (cf § II.3).

D) Pourquoi les changements que nous préconisons peuvent-ils être efficaces ?

Nous allons développer deux types d'arguments qui sous-tendent nos propositions: certains acquis de la didactique des mathématiques, et des résultats plus généraux sur l'apprentissage, issus de la psychologie cognitive.

a) aspects didactiques

@ Résolutions de problèmes suivies d'explications, plutôt qu'explications suivies de résolutions de problèmes.

Il y a là une modification des rôles traditionnels de l'enseignant et des étudiants par rapport au savoir mathématique, ces derniers ont à leur charge une petite part de ce qui est conceptuel, ou de la découverte, ou de la démarche scientifique selon les cas. Tout se passe comme si on tentait de restituer aux étudiants une motivation d'ordre scientifique.

1°) Au lieu de réexpliquer, simplifier, décomposer..., nous proposons donc de donner à résoudre, dans un maximum de cas, des problèmes, non triviaux, non de simples applications du cours, où les notions visées interviennent effectivement comme outils, donc avec du sens. Cela peut intervenir avant le cours ou après, selon les scénarios. Il est exclu de le faire pour tous les concepts, ils ne s'y prêtent d'ailleurs pas tous, il s'agit de le faire dans un certain nombre de cas bien choisis. La réalisation de projets ou mémoires par les étudiants s'inscrit dans la même idée.

Cela garantit pour nous une certaine (re)construction des connaissances correspondantes dans leur fonctionnement, et non dans leur présentation générale parfaite qui est celle du cours. Il est impossible de faire parcourir aux étudiants le chemin qui les conduirait à reconstruire eux-mêmes le cours, en revanche cela peut se concevoir partiellement dans un problème donné. Nous pensons qu'en le faisant un certain nombre de fois, cela permet de ne pas le faire pour les concepts qui ne s'y prêtent pas, et/ou de gagner du temps sur certains chapitres.

2°) Une partie des explications de l'enseignant est conçue à partir de ces problèmes, elles sont données pendant la résolution ou après, pendant le bilan qui est fait, elles tiennent compte de ce qui s'est effectivement passé et cela contribue à restituer de l'importance à la démarche correspondante des étudiants.

3°) De plus, dans ces problèmes nous essayons qu'il y ait suffisamment de changement de cadres pour que s'enclenchent des jeux de cadres utiles à l'apprentissage : on joue sur le fait que les connaissances des étudiants sont différentes selon les cadres, on exploite les transferts possibles entre le connu et ce qui est à construire.

La conception de problèmes adaptés nécessite de ce fait une bonne connaissance des acquis antérieurs des étudiants dans les différents cadres, ce qui justifie des études précises à ce sujet (cf § I.3).

4°) Cela facilite, nous semble-t-il, l'acquisition des concepts dans leurs deux aspects complémentaires outil et objet et c'est cette "double" acquisition qui pour nous témoigne de l'apprentissage réel.

La résolution du problème permet en effet de comprendre, voire de découvrir les aspects outils des concepts, dans un contexte précis; le bilan ou le cours qui suivent permettent d'en présenter les aspects objets (définitions, propriétés ...). Mais ces propriétés peuvent prendre un tout autre relief pour les étudiants s'ils les ont déjà testées dans un problème.

Cette introduction des concepts en fonctionnement, dans un problème, nous semble importante pour éviter les pertes de sens, les dénaturations. En particulier un concept ne sera disponible à notre avis qu'après que ses deux aspects aient été explorés et acquis, au moins partiellement, par les élèves : certes l'acquisition résulte du va et vient entre les propriétés (énoncées en toute généralité) et les mises en fonctionnement dans les exercices, mais nous pensons qu'elle nécessite ce va-et-vient, qu'il ait été initialisé par un cours ou par un problème.

@ Détours au lieu de simplifications

Seulement il n'y a pas de raison que les étudiants sachent résoudre ces problèmes! C'est pour cela que nous proposons de donner des moyens supplémentaires, des détours en quelque sorte, qui cette fois-ci responsabilisent les étudiants en ce qui concerne leur action sur leur propre apprentissage.

Ces moyens sont de plusieurs types, comme on l'a vu, ou bien ce sont des formes de travail particulières facilitant la résolution des problèmes difficiles, ou bien ce sont des interventions de type métamathématique, accompagnées de situations adaptées.

Par exemple, en guise de nouveaux moyens, "détournés", pour aider à faire des mathématiques, on explique comment apprendre des mathématiques et/ou on expose comment s'attaquer à des exercices qu'on ne sait pas démarrer, comment apprendre un cours, comment

sont conçus la plupart des cours... Ce sont toutes les propositions exposées en C).

On joue aussi sur des formes de travail comme les petits groupes pour faciliter la résolution de problèmes difficiles (à la fois parce que cela fait diminuer l'insécurité et parce que la mise en commun des ressources facilite effectivement la résolution, cf § II.2)...

Dans d'autres propositions, on utilise le débat scientifique, c'est à dire qu'on initie à une démarche susceptible d'amener à faire des mathématiques "autrement", plus efficacement par rapport à ce qui est visé, et on retrouve aussi des leviers du premier type. La pratique des projets ou mémoire va dans le même sens.

Cela étant, toutes ces formes de travail, toutes ces interventions de type métamathématique se justifient par l'âge des étudiants, et ceci de deux façons au moins : d'une part, ce sont des adultes, ils peuvent entendre les discours "sur" quelque chose ; mais dans le même temps ils peuvent aussi percevoir que, en leur tenant ces discours (ou leur proposant telle activité qui les responsabilise) l'enseignant les traite en adultes, fait appel à des qualités d'adultes, rarement valorisées jusqu'à présent, et ceci peut être aussi un moteur de progrès.

Dans notre idée, tout cela finalement doit servir à enclencher un fonctionnement plus efficace vis-à-vis du savoir mathématique et c'est cela que nous recherchons. Et nous estimons qu'à ce niveau d'études scientifiques, un comportement plus proche de celui des professionnels va engendrer un fonctionnement qui peut favoriser l'apprentissage. Et toutes nos interventions, tous nos scénarios tendent précisément à rapprocher les pratiques des étudiants, les conditions d'élaboration de leur pensée mathématique, leurs représentations des mathématiques, de celles des professionnels...

b) Repères cognitifs : comment nous pensons que les étudiants apprennent

Nous avons retenu des théories cognitives de Piaget l'efficacité de "l'action" c'est à dire des résolutions de problèmes, et en son sein, l'efficacité des déséquilibres suivis de rééquilibrations. Nous pensons qu'on peut "opérationnaliser" ce dernier processus grâce aux *jeux de cadres* à condition que les connaissances des étudiants ne soient pas les mêmes dans tous les cadres, il faut qu'il y ait des domaines mieux connus et d'autres moins. Rappelons qu'on peut jouer pour une même notion et selon les notions sur les cadres graphique, numérique,

algébrique, vectoriel, éventuellement informatique...(pour plus de détails sur les jeux de cadres, cf I.2, I.3 et III.9).

Ces changements de cadres sont organisés par l'enseignant, par exemple dans l'apprentissage de la convergence des suites on peut jouer sur le graphique (plus connu, au moins perceptivement). Mais les changements de cadres ont aussi une grande efficacité quant à la résolution des exercices elle-même et les étudiants peuvent avoir à effectuer d'eux-mêmes pour résoudre un problème.

Nous avons aussi retenu le fait que *la construction collective des connaissances peut favoriser l'appropriation individuelle* en particulier pour des connaissances qu'on n'a pas encore mais qui sont proches de celles qu'on a déjà. Dans cet ordre d'idées, le travail en groupes, les conflits éventuels peuvent être source de progrès s'ils ont lieu à un moment propice.

Enfin nous nous appuyons fortement sur *les capacités métacognitives des étudiants* (pleinement développées vu leur âge) : ils peuvent distinguer connaissances et métaconnaissances, ils peuvent utiliser ces dernières à bon escient. De plus ils peuvent utiliser une réflexion sur leurs propres activités, ils peuvent jouer un rôle actif, conscient dans leur propre apprentissage. C'est ce qui justifie le recours aux discours métamathématiques.

Éléments de bibliographie

- 1° Douady R., Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7.2, 1986.
- 2° Jarraud P., Travaux dirigés sur micro-ordinateurs en DEUG SSM, 1ère et 2ème parties, Cahier de didactique des mathématiques n° 35 et 45, Irem Paris Sud (1987).
- 3° Legrand M. La crise de l'enseignement: un problème de qualité, ALEAS Ed.
- 4° Legrand M. et Al., Apprentissage du raisonnement, IREM de Grenoble (1985).
- 5° Robert A., L'acquisition de la notion de convergence des suites dans l'enseignement supérieur, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 3.3, 1982.

6° Robert A., De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n° 47, Irem Paris Sud (1987).

7° Collectif, Recherches sur l'Enseignement supérieur, Brochure de la Commission InterIrem Université pour le VIème congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME 1988, Budapest), Irem de Lille.