

VARIETE DES ACQUIS DES BACHELIERS C-D-E-F.

Hélène Authier

Nous nous proposons d'exposer ici certains résultats mettant en évidence les différences des modes de fonctionnement des connaissances des étudiants à l'entrée en Deug Scientifique, selon leur série de baccalauréat et permettant ainsi de mieux appréhender les différences de réussite en Deug constatées.

Depuis quelques années, plusieurs recherches ont été menées pour essayer de caractériser les connaissances des étudiants à leur entrée en Deug scientifique.

A l'origine, il y a quelques constatations. Ainsi, il est clair, pour tous, depuis longtemps que les différents types de bacheliers n'ont pas des chances égales de réussite a priori. Pour fixer les idées, voici quelques données reflétant assez bien la situation générale.

Ce premier tableau reprend les résultats d'une enquête de A. Charlot (Cereq) tels qu'ils apparaissent dans son exposé au colloque "Demain, quels premiers cycles ?" (23-24 juin 1988. Université de bordeaux I)

série de bac	effectif des étudiants entrés en 1ère année de Deug SSM en 83.84	% de l'effectif ayant obtenu le Deug en 2 ou 3 ans
C	4066	71 %
D	3858	48 %
E	732	43 %
F	783	14 %

Il apparait donc que les raisons pour lesquelles certains étudiants ont plus de chance de réussite a priori à leur entrée en Deug ne sont pas limitées aux seuls programmes et horaires de mathématiques en second cycle car cela n'explique pas les différences de réussite qui existent entre les bacheliers C et E. On ne peut pas non plus dire, ou du moins uniquement dire, qu'il y aurait d'un côté des "bons" étudiants et de l'autre des "mauvais", les notes obtenues au bac en mathématiques par les bacheliers C et E permettent de penser que ça n'est peut être pas aussi simple. A ce sujet, on peut consulter, par exemple, les données suivantes (Artigue 1986) relatives à une population d'étudiants de première année de Deug SSM à Paris 7 en 1984. On pourra remarquer que les données relatives à la réussite aux examens donnent la même image que les données précédentes portant sur 9439 étudiants.

	Bacheliers C	Bacheliers D	Bacheliers E	Bachelier F
ont obtenu l'examen de maths de février de la 1ère année de Deug	87 %	52 %	58 %	17 %
avaient eu une note en maths inférieure à 6 au BAC	32 %	4 %	18 %	4 %
avaient eu une note en maths inférieure à 10 au BAC	62 %	31 %	54 %	26 %

Les pourcentages sont calculés sur l'effectif de chaque catégorie de bacheliers dans la section de Deug considérée.

De plus, dans le même ordre d'idées, on a pu constater (Boschet. Robert 1984) que parmi des étudiants ayant une note équivalente à un même prétest passé en début d'année, certains améliorent leur score lors de contrôles ultérieurs alors que d'autres, au contraire, ont de moins bons résultats.

Par ailleurs, on a pu voir que tous les essais d'enseignements de soutien destinés aux étudiants titulaires d'un bac de technicien (en particulier F pour les deugs scientifiques) se sont soldés par des échecs plus ou moins flagrants alors qu'ils permettaient, semble-t-il, à des bacheliers D "faibles" de progresser au moins temporairement.

Ces quelques considérations permettent donc de penser que certains étudiants sont moins bien préparés que d'autres à l'enseignement des mathématiques en Deug, mais que les raisons de cet état de fait ne sont pas uniquement liés aux résultats antérieurs en mathématiques, ni aux programmes suivis.

Les études, dont nous parlons ici, n'ont pris en compte que certaines caractéristiques des connaissances en mathématiques des étudiants à leur entrée dans l'enseignement supérieur. Il est clair que d'autres éléments peuvent favoriser ou au contraire gêner l'adaptation des élèves à l'enseignement universitaire. On peut penser par exemple à l'image qu'ils ont des mathématiques et de l'activité mathématique. Des

travaux sont en cours à ce sujet. On peut consulter par exemple les travaux d'E. Bautier, A. Robert. (Bautier-Robert 1987 et 1988).

Si on se limite au fonctionnement des connaissances des étudiants, le problème est de trouver une "mesure" qui permette de comparer des étudiants issus d'enseignements différents. Cette "mesure" doit pouvoir permettre un diagnostic global en mettant par exemple en évidence des conditions "nécessaires" ou "suffisantes" de réussite a priori. Elle doit aussi servir à la proposition de remèdes, c'est à dire d'éléments favorisant une meilleure adaptation de l'enseignement aux étudiants tels qu'ils sont. Il est clair que cette adaptation éventuelle concernera essentiellement l'organisation de la présentation des contenus en fonction des connaissances antérieures des élèves et non les contenus eux mêmes.

Pour établir cette "mesure", il a été pris en compte un certain nombre de résultats de recherches sur l'acquisition des connaissances qui seront plus détaillées au paragraphe I.6. Il s'agit, en particulier, des travaux de R.Douady (Douady 1986). Cette dernière introduit la notion de cadre de fonctionnement des connaissances et met en évidence l'importance des caractéristiques du fonctionnement de celles ci dans les différents cadres où elles peuvent intervenir.

Pour éclaircir ces différentes expressions on peut donner quelques exemples: Ainsi si l'on veut résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ on se place a priori dans le cadre algébrique, si on utilise, par exemple, la méthode usuelle (discriminant) de résolution des équations du second degré on reste dans le même cadre. Par contre si l'on veut résoudre l'équation $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ on se place a priori dans le cadre algébrique; si on utilise pour résoudre cette équation la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ de façon à trouver la solution particulière $1/2$ et que l'on résout ensuite par la méthode précédente, après mise en facteur, $x^2 - 2x - 1 = 0$, on passe du cadre algébrique de départ au cadre graphique dans lequel on travaille dans un premier temps, avant de revenir dans le cadre algébrique et d'y travailler. Il y a dans ce cas ce qu'on appelle deux changements de cadre. On a introduit ici deux cadres : le cadre algébrique et le cadre graphique. Le premier est lié à des activités "algébriques", c'est à dire des activités de calcul où peuvent intervenir des lettres, des égalités ou des inégalités. Le deuxième est associé à la représentation dans le plan de courbes et à l'utilisation de ces représentations. Par ailleurs on a mis en évidence le fonctionnement d'une même notion : la résolution d'équations algébriques, dans deux cadres différents.

On peut ainsi définir divers cadres de fonctionnement et pour chaque notion, envisager les différents cadres dans lesquels elle peut fonctionner.

D'autre part, il a été mis en évidence (Boschet, Robert 1984) que certains étudiants ont toujours recours au même type de procédures quel que soit le problème posé. On peut penser que, du fait des divers "cheminements cognitifs" possibles, il s'est établi chez certains étudiants des cadres préférentiels de fonctionnement mathématique. Or on a remarqué que les "bons" élèves se caractérisent plutôt par des changements de cadre ou de stratégie. On peut penser que des connaissances effectives dans les différents cadres peuvent favoriser ces changements spontanés.

Tous ces éléments ont conduit à penser qu'un bon critère d'appréciation des connaissances des étudiants à l'issue de leurs études secondaires est le degré de mise en fonctionnement des notions dans les différents cadres où elles interviennent.

Pour cela, on a choisi un certain nombre de notions dont on voulait tester l'acquisition et défini les divers cadres de fonctionnement possibles, au niveau de l'entrée à l'université, de ces notions. On a ensuite déterminé un certain nombre de blocs de connaissances caractérisant chacun un aspect de mise en fonctionnement d'une notion dans un cadre d'intervention fixé⁽¹⁾. Chaque étudiant obtient un score à chacun de ces blocs qui tient compte du degré de mise en fonctionnement de la notion correspondante, dans sa réponse écrite à un certain nombre d'exercices. La répartition des scores aux différents blocs détermine le profil de l'étudiant. Cette méthodologie a été utilisée dans différentes recherches (Robert 1985 - Artigue 1986 - Authier 1986 - Authier 1987). On trouvera, en annexe, un exemple d'exercices et du dépouillement correspondant.

Les résultats obtenus, comme cela a été indiqué plus haut, sont de deux ordres. Tout d'abord, il s'agissait de déterminer des profils de connaissances pouvant permettre de prévoir a priori un apprentissage réussi. C'est ainsi que les différentes études ont pu établir que, dans le cas d'un enseignement classique, des étudiants "équivalents" en ce sens que leurs résultats à un même prétest sont dans une même tranche de notes, réussissent mieux s'ils ont des connaissances, même imparfaites, dans de nombreux cadres que s'ils ont des connaissances même importantes dans un nombre plus restreint. Il semble, cependant, que ces connaissances, éventuellement partielles, dans de

nombreux cadres devraient dépasser un seuil minimal dans un certain nombre de cadres, en particulier dans le cadre algébrique, pour que l'on puisse espérer un apprentissage réussi.

Le deuxième point était de différencier les profils des connaissances des étudiants, selon leur série de baccalauréat et d'apporter ainsi des éléments destinés à mieux adapter l'enseignement des mathématiques aux étudiants tels qu'ils sont. L'examen des différents profils "types" selon la série de baccalauréat a mis en évidence deux lignes de clivage (les séries de bac considérées sont les suivantes : C-D-E-F2 ou F3⁽²⁾). Dans un premier temps, on constate une opposition entre les bacheliers C et E d'un côté, D et F de l'autre. Les premiers ont des connaissances réparties dans de nombreux cadres alors que les seconds ont des connaissances concentrées dans un nombre plus restreint de cadres. Cela corrobore l'idée que les bacheliers C et E ont plus de chances de réussite a priori que les bacheliers D ou F mais ne permet pas de comprendre les différences existant entre les bacheliers C et E d'un côté, D et F de l'autre. La deuxième ligne de clivage passe par contre entre les bacheliers C et D d'un côté, E et F de l'autre. En effet, il apparaît que les profils des bacheliers C et D d'une part, F et E de l'autre sont structurés à partir d'une base commune. Les bacheliers F considérés ici, sont, rappelons le, des bacheliers F2 ou F3. D'autres bacheliers F, à savoir les bacheliers F7 ou F7' ont été aussi étudiés mais ils forment une catégorie à part parce qu'ils ont un profil de connaissances très particulier et qu'ils ne suivent pas un Deug A mais un Deug B. Ainsi, les bacheliers C ou D ont au moins des connaissances dans le cadre algébrique et des connaissances élémentaires dans le cadre symbolique. Les bacheliers D ont souvent des connaissances dans le cadre graphique plus faibles que les bacheliers C. D'autre part, les procédures choisies ou les changements de cadre spontanés laissent penser que ces deux catégories d'étudiants auraient une préférence pour le cadre algébrique. Par contre, les bacheliers F ou E ont des connaissances au moins partielles dans les cadres algébrique et graphique. Les bacheliers F ont souvent des connaissances plus faibles que les bacheliers C dans le cadre algébrique, mais comme les bacheliers E, plus solides dans le cadre graphique. Les mêmes arguments que précédemment, permettent de penser que les deux types de bacheliers préfèrent le cadre graphique. Ce dernier clivage donne un autre éclairage sur les différences de réussite constatées. En effet, l'enseignement universitaire "standard" a tendance à privilégier le fonctionnement dans les cadres numérique et symbolique. Ceci est d'ailleurs renforcé au niveau des contrôles. Quand un enseignement s'adresse à des étudiants a priori en difficulté, il privilégie souvent des activités se

déroulant dans le cadre numérique et les conduites de types algorithmique.

On voit donc que des étudiants qui auraient un cadre graphique préférentiel et/ou des connaissances dans le cadre numérique ou symbolique insuffisantes seraient en partie inadaptés aux enseignements suivis.

Enfin, il apparaît également une distance entre les connaissances des étudiants et les connaissances implicites supposées par les enseignants de Deug.

Toutes ces considérations peuvent servir à l'élaboration d'enseignements plus adaptés. C'est ainsi qu'un enseignement explicite dans le cadre symbolique semble nécessaire à tous les étudiants, y compris les bacheliers C ; de même les notions relatives à la majoration ou à la minoration d'ensembles de nombres réels ne sont pas connues par l'ensemble des bacheliers D ou F (ces notions fonctionnent dans le cadre numérique, elles ont été différenciées du traitement des inégalités fonctionnant dans le cadre algébrique).

Par ailleurs un enseignement utilisant systématiquement les jeux de cadre devrait permettre à chacun d'avoir l'occasion de travailler dans son cadre préférentiel éventuel et d'acquérir des connaissances dans les cadres où elles sont fragiles. Cela dit on peut se demander s'il n'existe pas des seuils minimaux de connaissances en deçà desquels les jeux de cadre ne peuvent pas s'enclancher efficacement.

L'objectif d'une mise à niveau ou d'un enseignement de soutien pourrait être de remplir le maximum de cadres possibles. Pour cela, ces enseignements peuvent s'appuyer sur les connaissances déjà existantes dans les différents cadres et les éventuels cadres préférentiels. Plus précisément pour les étudiants ayant un bac D, il faudrait essayer de "remplir" le cadre graphique par exemple, en s'appuyant sur le cadre algébrique, à l'aide de problèmes où les notions mises en jeu interviennent dans les deux cadres. Alors que, pour essayer de consolider les connaissances des bacheliers F2 ou F3 dans les cadres algébrique et graphique, on pourrait utiliser l'aspect sans doute préférentiel du cadre graphique et les connaissances déjà existantes, en particulier algorithmiques, dans le cadre algébrique, à l'aide du même type de problèmes.

(1) Suivant les travaux, ce ne sont pas exactement les mêmes notions qui ont été retenues bien que la partie commune soit très large.

Le premier cadre envisagé par tous a été le cadre algébrique. Dans ce cadre les connaissances testées étaient liées à la maîtrise de calculs algébriques d'une part, au traitement additif ou multiplicatif des inégalités d'autre part.

Ensuite, des connaissances dans le cadre graphique ont été prises en compte. On a considéré d'une part les capacités de traduire des données (numériques, graphiques par exemple) en termes graphiques, celles d'interpréter une courbe ou une représentation graphique d'autre part (par exemple pour résoudre une inéquation). Dans le cadre symbolique, on a pu envisager deux types de connaissances, l'un lié à la compréhension de données symboliques (implications simples par exemple), l'autre à la production d'implications par exemple, entre deux propositions.

Enfin, il a pu être étudié des activités de modélisation, ou des connaissances relatives aux nombres réels (majoration-minoration-rationnels-irrationnels...).

- (2)- Les bacheliers F2 ou F3 ont une spécialisation en électronique ou électrotechnique.
- Les bacheliers F7 et F7' ont une spécialisation en biologie ou en biochimie.

Bibliographie

Artigue M (1986) Une section de Deug SSM 1ère année en 1984-1985 - brochure Irem - Paris - n° 63.

Authier H (1986) Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de Deug scientifique selon les séries de bac d'origine - cahier de didactique des mathématiques n° 31 - Irem Paris 7.

Authier H (1987) Connaissances en mathématiques des étudiants issus des bac F - Cahier de didactique des mathématiques n° 46 - Irem Paris 7.

Bautier E. Robert A (1987) Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post obligatoire, de l'accès au savoir mathématique. Cahier de didactique des mathématiques n°41-Avril 1987-Irem Paris 7.

Bautier E. Robert A (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques - Revue française de pédagogie n°84 p 13-19 Juil. Août.Sept 88.

Boschet F. Robert A (1984) L'acquisition des débuts de l'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de deug 1ère année - cahier de didactique des mathématiques n° 7 - Irem Paris 7.

Charlot A (1988) "Demain quels premiers cycles ?" colloque "Promosciences". 23-24 Juin 1988 - Université de Bordeaux I.

Douady R (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet - Recherches en didactique des mathématiques - vol 7-2 - p 5-31.

Robert A (1985) Les connaissances des élèves sur les débuts de l'analyse sur $\mathbb{R}$ à la fin des études scientifiques françaises - cahier de didactique des mathématiques n° 18-0 Irem Paris 7.

Robert A (1985) Analyse d'une section de Deug 1ère année - (les connaissances antérieures et l'apprentissage) - cahier de didactique des mathématiques - n° 18 - 1 - Irem Paris 7.

Annexe

1) Enoncé

Le texte suivant est une partie d'un test proposé à une population de Deug Sciences à la rentrée 1986.

I - Représenter dans le plan l'ensemble $A = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x - 2| \leq 1\}$.

II - Soient a et b deux réels vérifiant $-1 \leq a \leq 4, -1 \leq b \leq 3$, donner un encadrement de $a-b$.

III -

a) On considère l'ensemble des nombres de la forme $\frac{x}{1+x^2}$ où x est un réel. Cet ensemble est-il minoré ? majoré ? borné ?

b) On considère l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(-1)^n}{n}$ où n est un entier strictement positif. Cet ensemble est-il minoré ? majoré ? borné ?

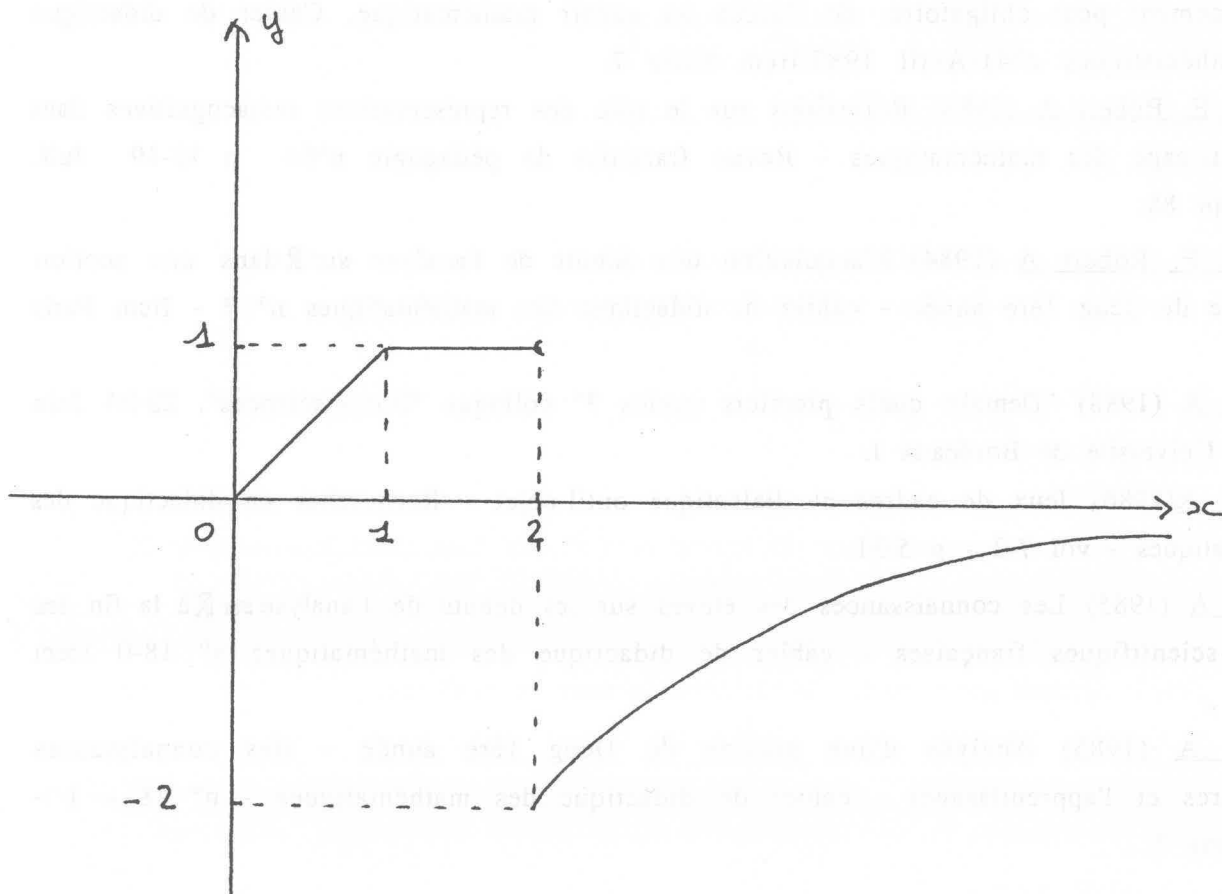
IV - Résoudre graphiquement $x^3 + 2x + 1 > 0$

V - On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = 0$ sur $[-1, 0]$, $f(x) = \sqrt{2}|x| + \sqrt{2}$ sur $]0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2} - 1$ sur $]-\infty, -1[$. Résoudre $f(x) = \frac{4}{3}$.

VI - On se donne $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ pour n entier strictement positif. Ecrire sous forme d'une fraction $u_6 - u_5$ puis $u_{n+1} - u_n$.

VII - Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est la suivante :



a) En quels points f est-elle continue ?

b) En quels points f est-elle dérivable ?

c) Quelle est l'allure de la représentation graphique de la dérivée ?

2) Codage des questions :

Dans l'étude correspondante au test dont une partie est ci-dessus, 8 blocs de connaissances avaient été retenus. Dans les questions précédentes 6 d'entre eux sont représentés.

Dans la première question on a choisi de prendre en compte trois éléments, l'examen des copies ayant permis d'en vérifier la pertinence.

I 1) traitement algébrique de la valeur absolue

I 2) traitement additif des deux couples d'inégalités

I 3) représentation graphique.

La deuxième question concerne le traitement additif et multiplicatif des inégalités.

Dans la troisième question, on voulait tester les connaissances des étudiants relatives à la majoration et à la minoration d'ensembles de nombres réels.

L'examen des copies a conduit à séparer les réponses à cette question des réponses relatives au traitement algébrique des inégalités.

Dans la quatrième question on a pointé deux éléments :

IV 1) la représentation graphique (de quelque chose ayant un rapport avec l'énoncé)

IV 2) l'utilisation de la représentation graphique pour résoudre l'inéquation.

Dans la cinquième question on a choisi de considérer

V 1 : le traitement algébrique de la valeur absolue

V 2 : le traitement du radical

V 3 : la résolution proprement dite en tenant compte des contraintes imposées à f .

Dans la sixième question après lecture des copies on a retenu chacun des deux points VI 1: écriture pour $n=5$, VI 2: écriture pour n quelconque.

Enfin dans la question 7 on voulait tester la lecture de certaines propriétés d'une fonction sur sa représentation graphique. On a choisi de prendre en compte quatre éléments différents.

VII a),b) lecture sur la courbe de la régularité de la fonction.

VII c) 1) lecture sur la courbe de certaines propriétés de la dérivée et leur traduction numérique (par exemple $f'(x) = 1$ sur $[0,1[$, 0 sur $]1,2[$, >0 sur $]2, +\infty)$ ou graphique (ce qui était demandé).

VII c) 2) représentation graphique indicative de la dérivée.

Les notions envisagées sont donc essentiellement les équations et les inéquations dans les cadres algébrique et graphique, les valeurs absolues et radicaux dans le cadre algébrique, la minoration ou la majoration d'ensembles de nombres réels dans le cadre numérique, la régularité et la dérivée d'une fonction dans le cadre graphique et enfin la lecture d'une écriture indicielle incomplète et sa manipulation dans le cadre algébrique.

Les six blocs de connaissances retenus ont alors été les suivants. Il s'agit d'abord de deux blocs caractérisant des connaissances intervenant dans le cadre algébrique. Il y a d'une part le bloc "calcul" pour lequel il s'agit d'effectuer des calculs algébriques a priori simples. Il est représenté par les questions I 1), V 1)2)3). Le deuxième aspect concerne la manipulation des inégalités et, en particulier, la maîtrise de leur traitement multiplicatif et additif. Il est représenté dans la question II et deux fois dans I 2). On a ensuite deux blocs caractérisant deux aspects des connaissances intervenant dans le cadre graphique. Il s'agit d'une part du bloc "représentation de graphes" où intervient la possibilité d'exécuter dans le plan des représentations d'ensembles ou de fonctions, les données étant soit numériques, soit graphiques, et d'autre part, du bloc "interprétation de graphes" qui comprend les facultés de lire et d'interpréter des données graphiques, le résultat étant donné soit graphiquement, soit numériquement.

Le premier bloc est représenté par les questions I 3), IV 1), VII c) 2), le deuxième par IV 2), VII c) 1), VII a) b).

Enfin la question III est répertoriée dans un bloc intitulé "ordre".

La question VI intervient dans la constitution d'un bloc nommé "interprétation symbolique" où l'on testait non seulement la lecture et la manipulation algébrique d'écritures indicielles incomplètes mais aussi d'implications simples portant sur des objets "algébriques" (il y avait par exemple $a^2 = 9 \implies a = 3$ est-elle vraie ou fausse ?).

Ces deux questions concernaient des notions, fonctionnant dans le cadre numérique pour la première, symbolique pour la deuxième.

Ces choix induisaient le codage des différentes questions de la façon suivante :

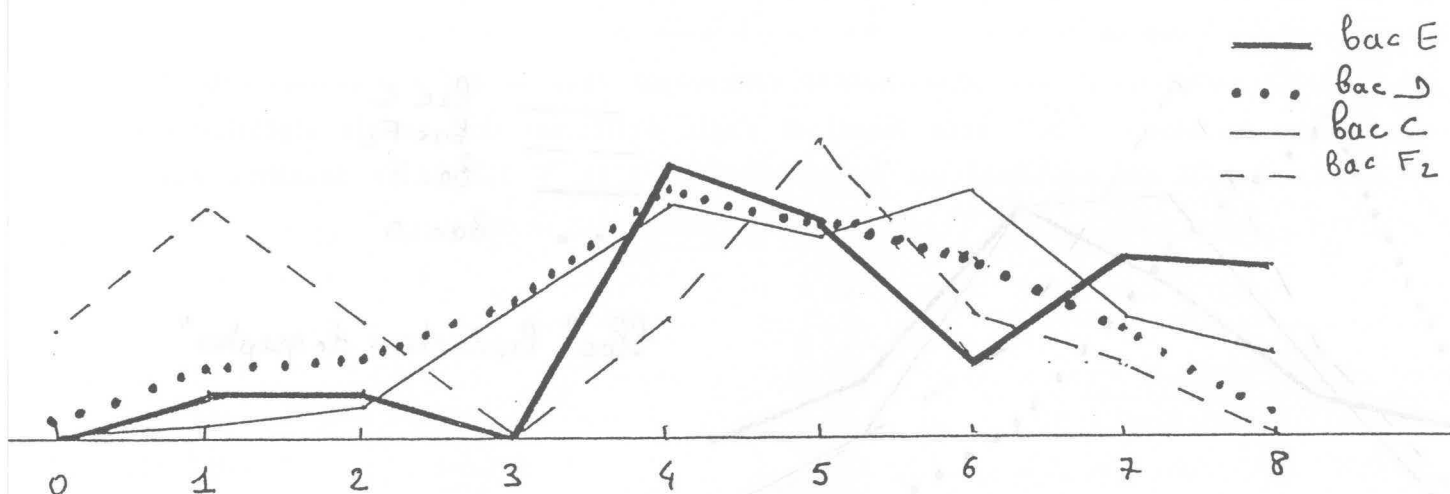
I): 1C, 2I, 1Rg ; II): 1I ; III): 20 ; IV): 1Rg, 1Ig ; V): 3C ; VI): 2F ; VII): 3Ig, 1Rg.

Chaque copie obtient ainsi un certain nombre de points pour chacun des blocs retenus (remarque : la réponse à la question VIIc limitée à l'intervalle $[0,2]$ a été notée $1/2$ Ig, $1/2$ Rg).

3) Dépouillement

a) exemple du bloc calcul

Chaque copie est affectée d'un nombre de points dont le maximum ici serait 4 mais dans le test complet il était de 8. Ceci fait, on construit les courbes de dispersion des totaux selon les séries de baccalauréat (les ordonnées correspondent à la fréquence du total porté en abscisse dans la population de bacheliers concernés).



L'examen des différentes courbes conduit à distinguer :

- les totaux 0,1,2 pour lesquels on dira que le bloc "calcul" est vide.
- les totaux 3,4,5 pour lesquels ce bloc sera dit à moitié plein.
- les totaux 6,7,8 pour lesquels il sera plein.

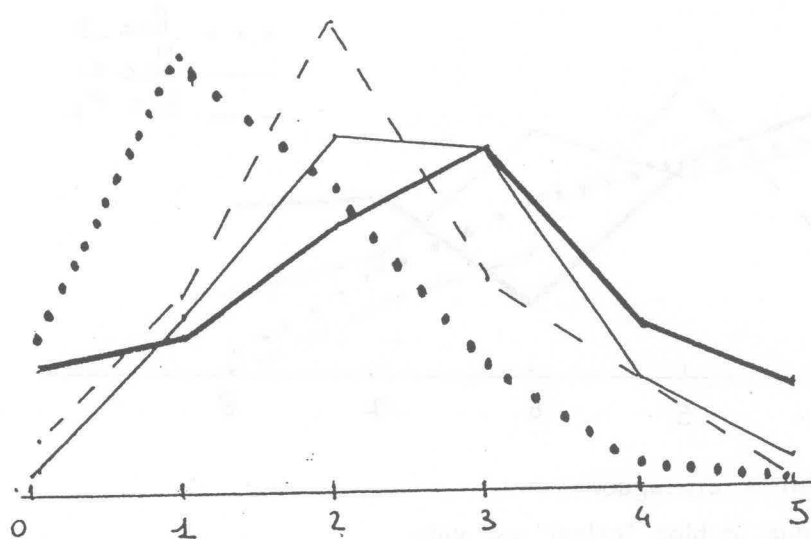
Ce qui donne les résultats suivants :

notes au bloc "calcul" \ série de bac	C	D	E	F ₂
bloc vide	5%	14%	10%	41%
bloc à moitié plein	54%	57%	47%	41%
bloc plein	41%	29%	42%	18%

Les pourcentages sont calculés sur le total des colonnes.

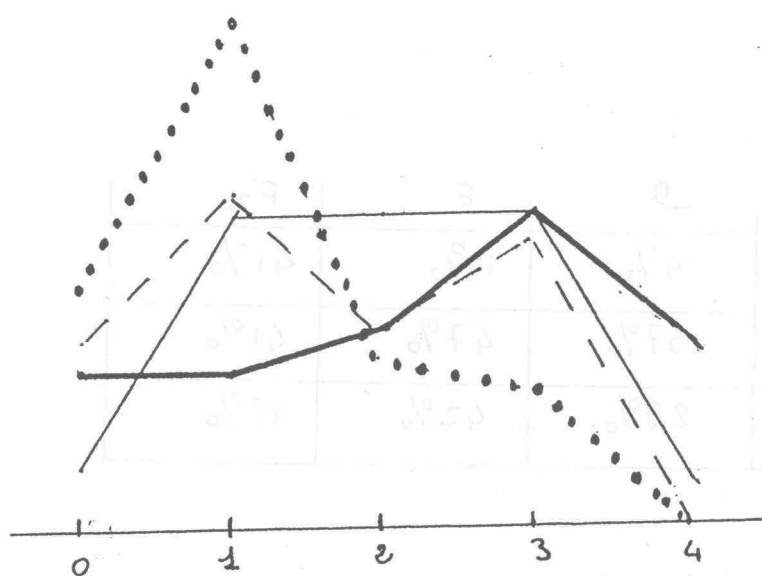
b) On opère de même pour les différents blocs. Ensuite si on veut étudier les résultats simultanés relatifs à un cadre on opère comme ci-dessous dans l'exemple du cadre graphique.

On fait la somme des résultats obtenus à chacun des blocs : un bloc vide valant 0 point, un bloc plein 2 points et un bloc à moitié plein 1 point. On obtient ainsi des totaux dont le maximum est 4. Les courbes de dispersion des totaux conduisent à un découpage en tranches comme précédemment. Voici par exemple les résultats obtenus dans le cas du test partiellement cité plus tôt, pour le cadre graphique.

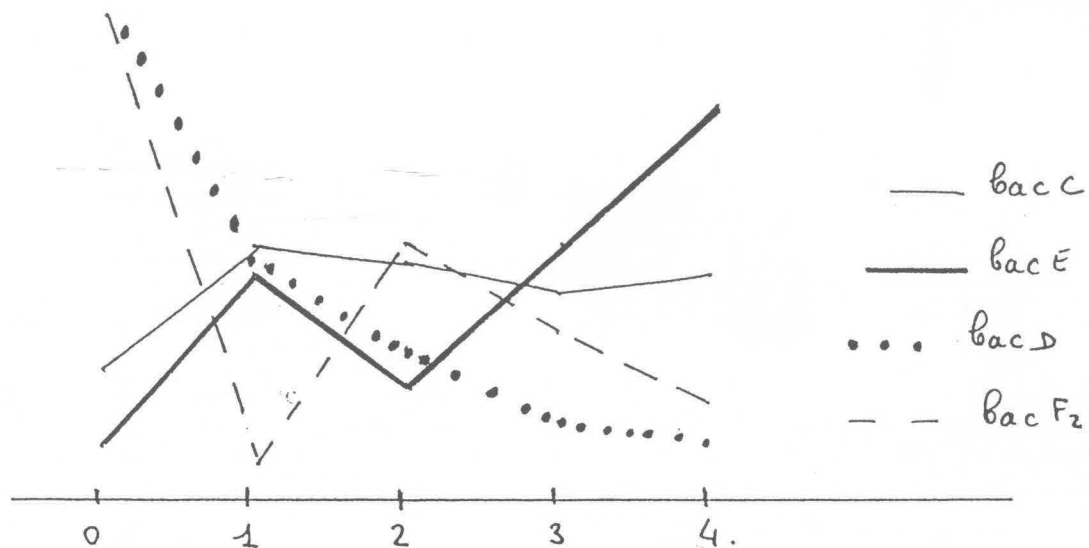


— Bac C
 - - - Bac F2
 — Bac E
 . . . Bac D

floc " Production de graphes "



floc " Interprétation
 de graphes " .



Résultats simultanés aux deux blocs graphiques

total des scores aux blocs graphiques \ série de bac	C	D	E	F ₂
0 ou 1	33%	72%	26%	50%
2	23%	12%	10%	5%
3 ou 4	43%	15%	63%	45%

Les pourcentages sont calculés sur le total des colonnes.