POURQUOI UN TEL ECHEC DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE ?

Marc Rogalski

Un constat général

Il n'y a sans doute pas un premier cycle universitaire en France où les enseignants ne fassent le constat de l'échec de l'enseignement traditionnel de l'algèbre linéaire. Donnons quelques exemples des difficultés des étudiants, souvent relevées par les enseignants, ou exprimées par les étudiants eux-mêmes.

(a) Des commentaires d'étudiants

Tirées d'une enquête (cf [8]) faite auprès de 183 étudiants de Lille 1, de 50 étudiants de Paris 6 et de 146 étudiants de Paris 7, en début de DEUG 2° année, quelques réponses fréquentes à la question "Quelles sont pour vous les difficultés de ce domaine [l'algèbre linéaire] ?" peuvent être classées en 5 rubriques principales.

L'abstraction trop grande :

* "Le fait que ce soit abstrait, pas d'intuition possible, pas de vérification possible";
* "Le côté très abstrait de l'algèbre";
* "Ce domaine est très théorique, on ne voit pas à quoi cela correspond".

La difficulté de certaines notions :

* "La notion d'espace vectoriel";
* "La notion d'endomorphisme, de groupe";
* "Les difficultés sont les bases, dimension, image et ker de u".

Trop de définitions et résultats nouveaux :

* "Les multitudes de propriétés et de théorème à apprendre".
* "Le nombre de définitions...".

Difficultés de calcul :

* "Les difficultés? Calculer rapidement sans erreur...";
* "Les erreurs de calcul sont fréquentes, car le calcul matriciel est en général assez rébarbatif";
* "...les calculs peuvent être longs et difficiles".

Les problèmes de rigueur :
* "Les démonstrations";
* "La rigueur et la précision";
* "La logique et les quantificateurs";
* "La grande importance accordée à tous les détails".

(b) Quelques erreurs et blocages fréquents

Il s'agit là de constats souvent faits par les enseignants, et étudiés plus particulièrement dans les travaux [8] et [2] (extrait de [3]).

Les pertes de sens importantes

On les remarque surtout dans deux types d'activités: d'une part les problèmes portant sur l'algèbre linéaire "pure" [exemple: à la question "quel rapport entre les assertions $v \circ u = 0$ et $im(u) = ker(v)$?" posée dans [8], il y a un grand nombre de réponses dénuées de sens]; de l'autre dans les problèmes du type "modélisation" en termes d'algèbre linéaire de questions venant d'un autre secteur des mathématiques [exemple: quand il s'agit de trouver la matrice d'une application entre espaces de polynômes, il n'est pas rare de trouver la variable x ou les coefficients des polynômes dans les coefficients de la matrice; on a parfois aussi des confusions entre une fonction et les nombres que sont ses valeurs].

Les problèmes avec la logique élémentaire

Deux aspects principaux apparaissent. D'une part les difficultés de l'implication et de l'équivalence [exemple: une démonstration d'indépendance se conclue assez souvent par "si les a_i sont nuls, on a montré que $a_1u_1 + \ldots\ldots + a_nu_n = 0$, donc les u_i sont indépendants"]. De l'autre les gros problèmes soulevés par les quantificateurs [exemple: dans un contrôle où l'on demandait à quelles conditions sur le paramètre t l'espace $\mathrm{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ contenait l'espace $\mathrm{lin}\{u(t), v(t)\}$, de nombreux étudiants ont traduit (maladroitement mais correctement) la question par: chercher t pour que $\forall\, x,y \ni a,b,c$ vérifiant $xu(t) + yv(t) = ae_1 + be_2 + ce_3$......aucun d'entre eux ne s'en est sorti !]. On trouvera dans [2] une analyse plus fine de ces problèmes; voir aussi [1].

Les difficultés avec le langage ensembliste

L'algèbre linéaire s'appuie beaucoup sur ce langage, bien plus que l'analyse du DEUG A1. On passe son temps à identifier des sous-ensembles, donc à montrer des inclusions dans un sens puis dans l'autre, ce qui est peu familier aux nouveaux étudiants, qui confondent souvent inclusion et égalité pour des sous-ensembles [cf l'exemple de

$v \circ u=0$ et de im(u) et ker(v)]. On utilise intersection et réunion (et cette dernière est souvent confondue par les étudiants avec la somme vectorielle; de même ils confondent inclusion et inégalité de dimension).

Des problèmes analogues apparaissent avec la notion d'application: on interprète en termes de bijections, injections...la résolubilité d'équations de la forme $f(x)=y$; on utilise une notion générale d'application, déconnectée de tout support numérique ou graphique...Tous ces concepts et toutes ces méthodes présentent beaucoup de difficultés pour des étudiants qui les rencontrent là pour la première fois (cf [1], et [3], [8] pour une analyse didactique).

La difficulté à utiliser des dessins

Spontanément, les mathématiciens utilisent des dessins pour tester une affirmation, contrôler un résultat, se donner des idées dans la recherche d'un problème. C'est très difficile en algèbre linéaire pour les étudiants, à qui on n'a absolument pas appris à se servir de dessins en dehors du cadre de la géométrie pure ou des graphes de fonctions. Or, quand on dessine sur une feuille deux sous-espaces vectoriels et trois vecteurs, ce n'est absolument pas "figuratif", on perd volontairement de l'information (sur les dimensions, par exemple), et il faut savoir laquelle il est pertinent de garder compte tenu du problème étudié. Il est fréquent que les cours, y compris d'algèbre linéaire abstraite, utilisent beaucoup de dessins au tableau, mais quel sens cela a-t-il pour nos étudiants, si on ne parle jamais de ces problèmes de choix de l'information à perdre, si on ne les fait pas travailler explicitement sur la question de la représentation graphique symbolique, sur ses règles, ses difficultés et ses avantages ? A un questionnaire passé à l'université de Lille 1, 40% des étudiants ayant répondu disent avoir des difficultés avec les dessins; et sur 72 réponses à une question où il fallait dire si l'on utilisait un dessin "très souvent, assez souvent, assez rarement ou très rarement" pour diverses tâches, la moyenne des réponses pour la tâche "chercher un problème d'algèbre linéaire" est "assez rarement".

Les difficultés persistantes dans les rapports avec la géométrie

Cela se voit sur de nombreux points, outre l'utilisation des dessins qu'on peut aussi rapprocher de cette rubrique : confusions sur le nombre d'équations nécessaires pour définir une droite dans l'espace; mélanges entre l'affine et le linéaire, entre l'euclidien et l'affine (cf [3]); difficulté avec les définitions implicites ou paramétriques de sous-ensembles de l'espace...

La difficulté à faire intervenir spontanément l'algèbre linéaire dans des situations ou problèmes venant d'autres secteurs mathématiques

Il peut y avoir là plusieurs aspects. Parfois, les concepts d'autres secteurs ont été étudiés antérieurement dans un cadre si restreint que les regarder avec un point de vue algébrique étonne violemment les étudiants, est une rupture brutale avec tout un mode antérieur de fonctionnement [c'est semble-t-il le cas pour les fonctions numériques, voir [1] et l'exclamation spontanée d'un étudiant lillois "Pour nous, une fonction, c'est pas un vecteur !"].

Cet aspect peut être renforcé quand les objets mathématiques étudiés sont déjà assez complexes: y rajouter de l'algèbre linéaire ne fait que rebuter encore plus les étudiants, ou bien la complexité cache la simplification qu'apporterait l'algèbre linéaire (cf [2]). On retrouve aussi le fait qu'utiliser une structure algébrique, c'est ne considérer qu'une facette des objets mathématiques étudiés, donc c'est à la fois perdre de l'information et comprendre en profondeur les raisons d'une démonstration ou les ressorts d'une méthode: on ne se sert que de telle propriété, donc on peut axiomatiser ainsi ...Voir à ce propos [1].

De plus, il y a le fait fréquent que les problèmes que les étudiants ont à résoudre par l'algèbre linéaire leur ont parfois été résolus sans elle avant, ou leur semblent plus naturels à résoudre par des méthodes directes, de calcul par exemple. Ainsi, l'utilisation de l'algèbre linéaire dans d'autres domaines ne relève la plupart du temps en DEUG A1 que du contrat didactique, et si l'enseignant ou l'énoncé ne le signale pas explicitement, on peut être à peu près sûr que les étudiants n'y penseront pas spontanément; voir [2] pour une analyse du type de problèmes ainsi donnés fréquemment en DEUG.

Quelles causes ont été identifiées ?

Il y a sans doute de nombreuses raisons à cette situation, et il semble nécessaire de les identifier si l'on veut pouvoir améliorer la compréhension de l'algèbre linéaire par les étudiants. Mais cette identification n'est pas simple, peu de travaux ont eu lieu sur le sujet. Néanmoins, des éléments de diagnostic peuvent être faits, sur la base de constats de nombreux enseignants, et grâce à quelques travaux didactiques récents: cf [3], [5], [8], [10]. Par ailleurs, bien sûr, si on veut évaluer la situation par rapport à la situation antérieure, il faut se demander si la meilleure réaction à l'algèbre linéaire des étudiants des années 70 ne provenait pas simplement du fait que théorie des ensembles et algèbre linéaire, justement, étaient des éléments importants de la sélection des bacheliers de l'époque. Un tel constat vraisemblable ne résout en rien notre problème, puisqu'il nous faut travailler avec les bacheliers tels qu'ils sont.

(a) <u>L'absence de connaissances préalables et de pratique en algèbre</u>

Il s'agit de la disparition du secondaire, souvent suivie du non enseignement en DEUG, de connaissances élémentaires sur le langage de la théorie des ensembles et des applications, sur le maniement formel de lois de composition simples (groupes, anneau des entiers...), ou de méthodes de preuves dans ces domaines (par exemple: comment montrer que A=B quand il s'agit d'ensembles?). Cette absence entraîne évidemment un handicap (cf [1]), mais il est possible qu'en termes de réussite elle intervienne moins que ce à quoi on pourrait s'attendre (cf [2]).

(b) <u>Un seuil global minimum de connaissances de logique non atteint</u>

Il ressort d'ailleurs de [2] qu'il n'est pas important d'avoir de nombreuses connaissances logiques, mais que ce qui semble en corrélation avec le succès à des épreuves d'algèbre linéaire est le fait de ne pas avoir de "trou" dans ses connaissances logiques: dans la mesure où l'on peut répartir celles-ci en plusieurs blocs représentants des compréhensions ou des savoir-faire différents, il semble que l'absence d'un ou deux de ces blocs soit souvent liée à l'échec en algèbre linéaire.

(c) <u>Des connaissances insuffisantes en géométrie analytique et en géométrie vectorielle</u>

Ce manque concerne fortement les bacheliers D (cf § II. 2 et 3), qui n'ont plus fait, très souvent, de géométrie depuis la première S; mais les difficultés avec la géométrie analytique touchent aussi les bacheliers C. Surtout, la pratique d'un aller retour permanent entre le langage des vecteurs et l'utilisation des coordonnées est sans doute ce qui manque le plus aux étudiants.

(d) <u>Une pratique insuffisante de la traduction intra-mathématique</u>

On pratique très peu dans le secondaire le jeu consistant à traduire des propriétés d'un domaine mathématique dans un autre, ou d'un cadre de fonctionnement dans un autre: du numérique en graphique ou en symbolique, etc... (cf II.1). C'est une activité essentielle pour saisir le sens de nombreux concepts, mais c'est aussi un moyen essentiel de mise en équation et de résolution. Or c'est à une activité de ce type qu'on convie les étudiants lorsqu'on leur demande de résoudre par l'algèbre linéaire des problèmes sur les polynômes ou sur les équations différentielles...

(e) Une absence totale de motivations pour la démarche axiomatique

Même si la partie proprement axiomatique de l'algèbre linéaire est fort réduite (car en pratique tout se ramène pendant longtemps à des sous-espaces de l'ensemble des fonctions numériques sur un ensemble), la démarche utilisée en algèbre linéaire (et plus généralement en algèbre) est d'esprit axiomatique, en particulier quand il s'agit d'appliquer l'algèbre linéaire: il s'agit dans un certain domaine et sur un problème de savoir abstraire de la situation les seules informations utiles susceptibles de se modéliser par de l'algèbre linéaire, et de faire tourner alors la "machine" abstraite de ce domaine. Or les étudiants n'ont aucune raison d'être spontanément motivés pour ce qui est très nettement une conduite de détour. Il leur manque certainement un apprentissage de ce type de démarche et une pratique de son intérêt. Or la démarche axiomatique n'est presque jamais problématisée dans l'enseignement.

Quels changements proposer ?

Il est certainement prématuré de faire des propositions définitives d'enseignements différents pour l'algèbre linéaire. Certes des idées existent et certaines ont même été mises en œuvre, mais il a rarement été fait une évaluation des réalisations effectives, au delà des sentiments subjectifs des enseignants et des étudiants impliqués. Cela n'empèche pas de les prendre en compte comme éléments de discussion et de réflexion, et de penser que certains consensus ont des chances d'être justifiés.

(a) Quelques idées semblant faire consensus

On peut en dégager au moins trois, qui sont développées dans plusieurs ouvrages, travaux didactiques ou expériences d'enseignement (cf [1], [3], [5], [6], [7], [8], [10]). Elles ne sont pas partagées par tous les enseignants, en particulier ceux qui ont sucé le lait bourbakiste ont quelque mal à comprendre les difficultés des étudiants, mais il y a fort à parier que les évènements imposeront inéluctablement ces évolutions.

Ne pas démarrer l'algèbre linéaire par la théorie axiomatique abstraite

Il semble clair que les étudiants actuels ne peuvent guère supporter ce genre d'approche, tant pour des raisons tenant à leur état d'esprit qu'à cause de l'absence de prérequis dans un certain nombre de domaines cités plus haut. Pourtant, les étudiants préfèrent en apparence cette démarche: d'une part elle leur semble neuve, donc ils n'ont pas l'impression de revoir des choses connues; de l'autre, son aspect formel leur évite d'y mettre du sens, et ils pensent au début que c'est plus facile. Et il n'est pas rare que les enseignants préfèrent aussi la démarche axiomatique, pour sa rapidité et son efficacité apparente. Mais ils déchantent vite, et les étudiants aussi, car il apparaît rapidement une grande difficulté à donner du sens à toutes ces connaissances abstraites...Il semble d'ailleurs d'après [5] qu'il est nécessaire de passer d'abord par l'étape de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$...

Développer des prérequis avant et parallèlement à l'algèbre linéaire

Il semble que les prérequis nécessaires, dont certains sont sans doute à enseigner en même temps que l'algèbre linéaire (voir [2] à ce propos), soient principalement:

* <u>le langage des ensembles et des applications, et l'algèbre élémentaire</u>: lois, groupes, anneaux des entiers et des polynômes...

* <u>la logique et le raisonnement mathématique</u> (rappelons que nous en préconisons un enseignement non formel, cf III.2; voir aussi [1]); il paraît nécessaire de choisir des formulations d'algèbre linéaire qui n'aggravent pas les difficultés logiques: définir un système libre de vecteurs en disant "il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre les vecteurs du système", c'est à coup sûr l'incompréhension de cette double négation par les étudiants; il vaut sans doute mieux en faire un critère, après une définition du style "aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres"...

* <u>la géométrie vectorielle et la géométrie analytique dans l'espace de dimension 3</u>; la première est neuve pour les bacheliers D, et la seconde pour tous les bacheliers; il s'agit essentiellement de développer des situations et des activités qui donneront du sens à des concepts d'algèbre linéaire introduits en toute généralité plus tard: sous-espaces vectoriels et affines, combinaisons linéaires, équations implicites et paramétrages, équations linéaires...

Développer très tôt la résolution des équations linéaires

Cette approche, par exemple au moyen de la méthode du pivot, se trouve entre autres dans [6], [7], et est utilisée dans plusieurs universités (voir [1]). Elle a pour avantage de donner un moyen puissant pour résoudre très tôt de nombreux problèmes, sans être obligé d'attendre la fin d'une exposition axiomatique et abstraite pour disposer de tels moyens; elle permet par surcroît d'introduire assez tôt des concepts importants en dimension n: indépendance linéaire, base et dimension, espace engendré, rang, dualité nombre d'équations/nombre de paramètres...Cette approche par la méthode du pivot risque d'avoir l'inconvénient de ne développer chez les étudiants qu'une vision algorithmique ou calculatoire de l'algèbre linéaire, mais ce danger semble disparaître par la pratique d'équations avec paramètres, qui demande d'investir du sens dans la discussion (voir [2]), et si un lien suffisamment étroit avec des problèmes de géométrie dans l'espace est établi.

(b) Des propositions plus ouvertes, à préciser et évaluer

Du point de vue didactique, et compte tenu de la nature des concepts de l'algèbre linéaire, il semble qu'on puisse envisager deux voies d'attaque différentes et sans doute complémentaires pour l'enseignement de cette discipline. D'une part, une étude historique et épistémologique (cf [3], [4] et [9]) semble montrer que les concepts d'algèbre linéaire sont essentiellement unificateurs et généralisateurs, les problèmes élémentaires (au niveau du DEUG A1) où ils interviennent pouvant souvent être résolus autrement. D'autre part, il ne semble pas y avoir, contrairement à plusieurs concepts de l'analyse (cf par exemple le §III.6), un ou deux problèmes fondamentaux permettant d'introduire naturellement les concepts de base de l'algèbre linéaire: il s'agit plutôt à leur sujet d'une convergence de nombreux problèmes d'origines différentes intervenant dans un grand nombre de domaines et de cadres variés.

Les propositions qu'on peut faire vont donc s'articuler autour de ces deux idées: faire saisir l'enjeu unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, c'est à dire son aspect algébrique et axiomatique; organiser la convergence des situations problématiques utilisant chacune une ou plusieurs des faces de l'algèbre linéaire, et des domaines privilégiés de fonctionnement.

L'articulation entre ces deux aspects complémentaires ne va pas de soi; il semble qu'il faudra utiliser le levier métamathématique (cf II.1 et III.9), modifier la nature des problèmes d'algèbre linéaire donnés aux étudiants, (en particulier ceux intervenant dans l'évaluation, cf le § II.3), et peut-être utiliser des moyens spécifiques (micro-ordinateurs pour visualisation, apprentissage de l'utilisation de dessins symboliques...).

Présentons, très succintement, quelques idées.

1/ *Développer explicitement les avantages de l'axiomatique des espaces vectoriels* (comme de l'algèbre), par exemple en faisant discuter les étudiants, comme à Grenoble (cf [3]), du minimum de règles de calcul dont il faut disposer pour pouvoir résoudre l'équation $ax=b(x+x_0)$, où a et b sont des nombres, que x et x_0 soient des réels, des complexes, des vecteurs de l'espace, des polynômes, des fonctions dérivables, des applications linéaires dans le plan, etc...

2/ *Mettre au point des activités de résolution de problèmes où l'enjeu soit explicitement de modéliser dans l'algèbre linéaire les données du problème, cette modélisation étant à la charge de l'étudiant* (et non comme trop souvent, et sans le dire, de l'énoncé...voir à ce propos [2]), et étant ouvertement demandée. On peut par exemple demander de définir espaces vectoriels et applications linéaires permettant de traduire le poblème; ou bien développer une pratique de la recherche systématique de bases adaptées à un problème, c'est souvent commode dans les polynômes: bases pour la formule de Taylor, pour celle de Gregory, pour l'interpolation...(cf [1] et [2]).

3/ *Prévoir, après avoir fait la même démonstration dans des domaines différents de l'algèbre linéaire ou dans des secteurs différents d'application, un temps explicite dans l'enseignement pour dégager la structure linéaire commune de ces démonstrations et valoriser ainsi le côté unificateur de l'algèbre linéaire* (cf [1]). Par exemple, on peut comparer explicitement diverses démonstrations d'indépendance linéaire; ou bien faire comparer les résolutions des trois problèmes: (i) trouver les suites vérifiant $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$, (ii) trouver les fonction vérifiant $f(x+2h)=af(x+h)+bf(x)$, (iii) résoudre l'équation différentielle $y''=ay'+by$ (cf le sujet de mémoire n°16 en annexe de III.8).

4/ *Faire travailler les étudiants sur des situations élaborées pour faire saisir la simplification apportée par l'algèbre linéaire* : géométrie dans l'espace, choix de bases adaptées dejà cité en 2/, théorèmes d'existence difficiles ramenés à des théorèmes d'unicité bien plus simples par repérage préalable de la dimension (cf l'exemple des fractions rationnelles de dénominateur $(x-1)^2(x+1)x^3$ et à numérateur de degré au plus 5: quelle est la dimension de l'espace qu'elles forment? quels en sont les éléments simples du point de vue de la recherche des primitives? etc...).

5/ *Dégager des méthodes pour résoudre des problèmes d'algèbre linéaire* (cf § II.4). Il résulte en effet d'un questionnaire soumis aux étudiants de Lille 1 que la troisième difficulté (dans l'ordre de la fréquence des citations) qu'ils ressentent en ce qui concerne l'algèbre linéaire est "l'absence de méthodes". On peut avancer quelques propositions (qu'il faudrait élaborer avec précision):

* distinguer des techniques "locales" (où l'on regarde des vecteurs individuellement) de techniques "globales" (où l'on utilise des arguments de dimension);

* comment montrer qu'un sous espace F est inclus dans un sous espace G? (utiliser des générateurs explicites de F: technique locale);

* comment montrer que F=G ? (utiliser des générateurs de F et un argument de dimension [global] ou des générateurs de G [local]);

* montrer que n vecteurs d'un sous-espace F l'engendrent en montrant qu'ils sont libres et que dim(F)=n [global], ou pour x donné dans F trouver des coordonnées explicites [local];

* utiliser l'équivalence de la surjectivité (existence de solutions) et de l'injectivité (unicité des solutions, souvent plus simple à prouver).

* dégager des techniques pour prouver l'indépendance linéaire, adaptées à la nature des éléments des espaces vectoriels étudiés: degrés ou ordre pour les polynômes, valeurs en des points de fonctions, de leurs dérivées..., valeurs sur des termes de suites, de leurs différences..., triangulation du tableau des coordonnées pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$,...; et des techniques dans le cas abstrait, par exemple regarder l'image des vecteurs par une application linéaire bien choisie...

Bien sûr il faut dégager explicitement ces méthodes et élaborer des problèmes où elles apportent une aide véritable à la résolution...tout reste à faire !

6/ *Créer des savoirs locaux dans divers domaines, en termes d'algèbre linéaire, et les reprendre au moment de l'introduction de la théorie abstraite* . On peut ainsi dégager une théorie linéaire des droites et plans dans l'espace de dimension 3, tout savoir sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ définis par des équations linéaires, rassembler beaucoup de connaissances sur les polynômes s'exprimant linéairement, et reprendre tous ces résultats dans le cadre abstrait.

7/ *Organiser la convergence d'aspects différents vers un même thème de l'algèbre linéaire* . Quelques exemples:

* sur la notion de base, on peut faire converger de la géométrie dans l'espace, l'étude des polynômes, l'étude de suites, la détermination des carrés magiques, la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants...

* sur les notions d'indépendance linéaire, de rang et de dimension, on peut faire converger: la résolution des équations linéaires, avec description de l'espace des solutions et de celui des conditions de résolution; le fait que si une équation de plus rajoutée à un système linéaire ne modifie pas l'ensemble des solutions, elle est combinaison linéaire des équations originales; l'étude des faisceaux de plans en dimension 3, avec visualisation éventuelle de la méthode du pivot sur micro-ordinateur; l'étude des courbes et surfaces simples en dimension 3, avec le double aspect: nombre d'équations et nombre de paramètres, avec la technique de l'élimination pour passer de l'un à l'autre, et le rapport avec la dimension de l'espace tangent; un peu plus tard, l'étude des applications linéaires apportera un autre éclairage sur ces notions...

8/ *Utiliser dès l'étude de $\mathbb{R}^n$ un langage et des méthodes algébriques* (en particulier pour les problèmes d'indépendance linéaire et de rang), afin de montrer la simplification par rapport aux calculs sur les coordonnées, et pour motiver l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite.

9/ *Etudier des problèmes venant d'autres disciplines et qui se modélisent en termes d'algèbre linéaire* . C'est en effet une demande des étudiants de savoir "à quoi sert l'algèbre linéaire?": à Lille 1, sur 62 réponses à un questionnaire, 90% des étudiants disent ne pas connaître d'applications de l'algèbre linéaire, et 84% souhaitent en connaître, en ajoutant presque toujours: "cela serait moins abstrait, on comprendrait mieux l'algèbre linéaire". Les possibilités ne manquent pas: électricité, économie...(et analyse des données en 2° année de DEUG ?).

10/ *Faire un enseignement explicite sur la manière d'utiliser des dessins symboliques en algèbre linéaire* (et sans doute en géométrie analytique), en faisant discuter de ce qu'il est important de garder comme information, compte tenu du problème posé, et de ce que l'on peut perdre.

11/ *Utiliser des T.P. sur micro-ordinateurs* . Cela peut par exemple permettre de visualiser et ainsi de faire mieux comprendre, en lui donnant un sens géométrique, la méthode des pivots pour les équations linéaires: on peut voir physiquement les plans pivoter quand on élimine une variable, voir autour de quelle droite, assister au parallélisme progressif par rapport aux axes et plans de coordonnées...voir le § III.7.

Toutes ces suggestions sont loin d'être exhaustives. Ce ne sont que quelques exemples se situant dans la double perspective d'utilisation du métamathématique pour prendre en compte la nature épistémologique de l'algèbre linéaire, et de construction de la convergence de situations et de problèmes concernant diverses faces de cette théorie.

De plus, il y a tout à faire: construire des situations didactiques explicites, et mettre sur pied une organisation globale de l'enseignement qui permette cette double approche. Le problème le plus difficile étant sans doute de déterminer ce qui, dans cette perspective, doit être pris en charge, au niveau de la problématique et de la construction des concepts, par les étudiants eux-mêmes.

En ce qui concerne l'évaluation de séquences d'enseignement qui s'appuieraient sur ces idées, le problème principal sera sans doute du seuil minimal de changements à assurer pour éviter de simples effets de contrats locaux qui, au delà de la réussite à des épreuves, sont sans doute insuffisants pour garantir un apprentissage effectif et des connaissances disponibles ayant un caractère de permanence minimum. Mais ce problème n'est pas spécifique de l'algèbre linéaire...et il est vraisemblable que c'est l'utilisation du levier métamathématique, permettant aux étudiants de saisir et de s'approprier les enjeux de l'enseignement scientifique, et en particulier de celui des mathématiques, qui sera l'une des clefs pour atteindre ce seuil minimal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.Caron, E.Cousquer, R.Devoldere, A.D'Hoine: Enseignement d'algèbre en premier cycle. UFR de mathématiques de l'université de Lille 1.

[2] J.L.Dorier: Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire. Cahier de DIDIREM 6, 1990, IREM, université Paris 7.

[3] J.L.Dorier: Thèse de l'université de Grenoble 1, juin 1990.

[4] J.L.Dorier: Histoire de l'algèbre linéaire. Cahier de DIDIREM 5, 1990, IREM, université Paris 7.

[5] G.Harel: A comparison between two approaches to embodying mathematical models in the abstract system of linear algebra. Proceedings of the 8-th annual conference of PME, NA Michigan (pp 127-132), Ed G.Lappan, (Michigan 1986).

[6] E.Lehmann: Mathématiques pour l'étudiant de première année, 1 et 2. Belin.

[7] C.Leruste et J.L.Verley: Cours d'algèbre linéaire. EDF-GDF, Centre de formation des Mureaux.

[8] A.Robert et J.Robinet: Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. Cahiers de didactique des mathématiques 53, 1989, IREM, université Paris 7.

[9] J.Robinet: Quelques réflexions sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG. Document de l'IREM, université Paris 7.

[10] Contrat de rénovation pédagogique, universités de Lille 1, Paris 6 et Paris 7: Rapport intermédiaire, juin 1988, UFR de Mathématiques de l'université de Lille 1.

@@@@@@@@@@@@@@@