ENSEIGNER DES METHODES EN MATHEMATIQUES

I. Pourquoi enseigner des méthodes ?

(a) La contradiction enseignement/contrôle : la révélation d'un manque

Quand on regarde la réalité de l'enseignement des mathématiques au niveau de l'enseignement supérieur, on est frappé par la grande distance qui existe, la plupart du temps, entre l'essentiel de l'enseignement dispensé et la nature des contrôles qu'on fait subir aux étudiants.

D'un côté, des définitions, des théorèmes, des démonstrations, dans un discours presque toujours réservé aux enseignants, et se présentant le plus souvent comme des réponses à des questions non posées; de l'autre, des problèmes à résoudre par les étudiants, avec plus ou moins d'indications selon le niveau, et avec une utilisation très partielle de l'enseignement qui précède. On considère qu'un apprentissage a été fructueux si l'étudiant sait résoudre les problèmes qu'on lui propose......mais l'essentiel de l'enseignement porte sur les énoncés et les démonstrations, et pour une part beaucoup plus marginale sur les moyens de résoude les problèmes. Cette situation ne pourrait être qu'un paradoxe apparent, mais la réalité nous oblige à constater la grande inefficacité de cette démarche, et nous amène donc à nous poser quelques questions.

La liaison entre concepts et problèmes se présente sous deux aspects. Le premier commence à être assez bien analysé par les didacticiens: il s'agit de la construction des concepts et théories à partir de problèmes pour lesquels ils sont nécessaires et à travers des situations d'enseigement élaborées pour cela. Le rôle des situations-problèmes, la dialectique outil-objet, l'utilisation des changements de cadres, ont permis un enseignement "constructif" pour un certain nombre de concepts, en particulier au niveau de l'enseignement obligatoire (cf § II-1).

La démarche inverse dans l'enseignement:"comment utiliser les divers concepts construits pour résoudre des problèmes, d'autres problèmes", commence seulement à être prise en compte et analysée.

Dans la pratique dominante, on fait des exercices d'application, d'entraînement, où l'enseignant désigne, oralement, ou par des indicateurs écrits, ou simplement par le moment où les exercices interviennent, les concepts à utiliser, les théorèmes à appliquer, la démarche à suivre, ses étapes.

On laisse l'étudiant "deviner" seul comment et pourquoi cela marche. Il nous semble que c'est essentiellement celui qui a deviné, qui a su extraire seul, des nombreux exercices qu'il a faits, essayé de faire ou vu faire, des "méthodes générales", qui obtient des résultats positifs aux contrôles un peu difficiles, où des initiatives sont à prendre; il s'agit toujours d'une petite minorité des étudiants. Les autres ne savent résoudre des problèmes que si toutes les difficultés en ont été supprimées, ou atténuées, par les indications et le découpage en questions successives (ou s'ils peuvent avoir recours à une aide extérieure).

(b) Que font les étudiants devant un problème ouvert ?

Lorsqu'on regarde des élèves ou des étudiants essayer de résoudre des problèmes sans indications, on constate fréquemment trois types de faits:

* ils sont souvent bloqués au départ, ils ne savent pas démarrer;
* quand ils démarrent, c'est souvent dans une direction qui semble à l'enseignant observateur avoir peu de chances de succès;
* leur attitude devant les problèmes est en relation étroite avec une certaine représentation de l'activité mathématique: pour eux, chaque problème relève d'un truc, d'une astuce, est un cas particulier... sauf s'il y a une recette ou une formule générale; sinon, il faut un "don" particulier qu'ils pensent ne pas avoir!

Ces faits sont en rapport étroit avec un certain nombre de défauts qu'on dénonce souvent chez les étudiants:

* très grande difficulté de réinvestissement: faire ou voir faire 10 fois la même chose ne leur permet pas de le faire une onzième fois, dès lors qu'il s'agit de problèmes ouverts ne relevant pas d'applications immédiates du cours;
* recherche frénétique de recettes, de formules, d'algorithmes;
* pertes de sens au niveau des connaissances;
* incapacité à envisager et à gérer des démarches de résolution un peu longues ou complexes, même en ce qui concerne les calculs;
* attitude générale de passivité.

(c) Adaptation mutuelle des enseignants et des étudiants

Ces défauts renvoient en retour à l'habitude prise par les enseignants de donner des problèmes découpés en petits morceaux sans vraies difficultés, truffés de "montrer que" et d'indications. C'est en effet le seul moyen qui reste aux enseignants, en l'absence de changements importants concernant l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes, pour que les résultats ne soient pas catastrophiques si les contrôles portaient sur le niveau réel de l'enseignement et de la pratique mathématique qu'il est censé induire.

Inversement, cette adaptation des enseignements, en particulier lors des contrôles, présente aux étudiants une vision de l'activité mathématique qui renforce les défauts cités ci-dessus. Il s'établit ainsi un contrat implicite pernicieux: "nous enseignons des choses très savantes, mais vous savez bien qu'on ne vous contrôlera que sur quelques savoir-faire limités"; "nous savons bien que même sans avoir compris en profondeur le cours suivi, on nous donnera des problèmes standard et suffisemment machés pour pouvoir les faire". Et dans ce contrat disparaissent les mathématiques...et se renforce un cercle vicieux qu'il faudra bien briser quelque part !

Ce constat semble indiquer qu'il faut autre chose dans l'enseignement, d'autres activités qui permettent de passer des concepts enseignés aux problèmes qu'ils permettent de résoudre. <u>Pourquoi ne pas enseigner les méthodes</u> qui, dans certains domaines relativement limités, permettent d'amorcer la résolution des problèmes de ce domaine ? Ne serait-ce pas un moyen (parmi d'autres, cf § II-1) de faire mieux dominer les concepts mathématiques aux étudiants en les faisant travailler explicitement sur l'utilisation des mathématiques dans la résolution de "vrais" problèmes, en mathématique et éventuellement ailleurs ?

Dès lors qu'on envisage une telle problématique trois questions se posent immédiatement:

* y a-t-il des méthodes ? qu'est-ce précisément qu'une méthode en mathématique ? qu'est-ce qui la différencie d'une recette, d'un "truc" ?

* peut-on enseigner des méthodes ? quelles situations didactiques imaginer pour un tel enseignement, qui n'en fassent pas un simple apprentissage de recettes ? en particulier, y a-t-il lieu de changer les contrôles ?

* que peut-on espérer d'un enseignement de méthodes ? peut-on améliorer les performances des étudiants en matière de résolution de problèmes ouverts, sans indications ? peut-on redonner ainsi du sens aux concepts mathématiques enseignés ?

(d) <u>Objectifs possibles pour un enseignement de méthodes</u>

En ce qui concerne les qualités que l'on aimerait développer chez les étudiants, il nous semble qu'un enseignement de méthodes pourrait agir sur les points suivants:

1. Permettre de mieux saisir les concepts d'un domaine par leur *caractère opératoire* pour la résolution de problèmes: c'est au fond l'objectif essentiel de l'enseignement des mathématiques.

2. Habituer à *classer* des connaissances mathématiques, des techniques, des problèmes, des inconnues, des situations...

3. Permettre de *démarrer* une recherche sur un problème.

4. Donner les moyens d'*organiser une stratégie* de recherche, y compris pour des processus d'une certaine ampleur (au niveau du calcul comme au niveau du raisonnement) sur le déroulement desquels des *anticipations* pourraient être faites.

5. Habituer aux *changements de point* de vue sur un sujet, aux *reformulations* d'un problème sous des formes différentes.

6. Permettre de *prendre conscience* de ce qu'on est en train de faire, des choix de recherche qu'on a faits, et ainsi de pouvoir *explorer toutes les possibilités*, sans en oublier.

7. Se doter de moyens de *contrôle* et de *vérification* de ce qu'on fait.

8. Rendre disponibles des connaissances auxquelles on ne pense pas toujours à avoir accès ("*comment penser à...*").

9. *Contribuer à changer chez les étudiants la représentation qu'ils ont de l'activité mathématique*, la rendre plus proche de celles qu'ont les mathématiciens.

10. Augmenter ainsi la *confiance en eux* des étudiants, et les rendre plus *autonomes*.

Les points 2,3,4,5 concernent le contenu même des méthodes enseignées. Ils devraient permettre aux étudiants de résoudre mieux plus de problèmes plus difficiles. Les points 6 à 10 concernent plutôt les idées générales sur les mathématiques, les conceptions "métamathématiques"; c'est le fait même d'enseigner des méthodes, plus que leur contenu concret, qui risque d'être utile ici... à condition, bien sûr que l'enseignement en soit efficace, en particulier en ce qui concerne l'objectif du point 1.

Signalons de plus l'intéret que pourrait avoir un enseignement de méthodes dans les secteurs où les mathématiques sont une discipline de service: le risque est grand de les voir transformer en recettes et trucs, avec pertes de sens en mathématiques <u>et</u> dans la discipline où elles servent. Un enseignement de méthodes peut être un moyen d'éviter de telles dérives, sans exiger des utilisateurs qu'ils disposent de la même qualification que des mathématiciens professionnels.

II. Y a-t-il des méthodes ? Qu'est-ce qu'une méthode ?

(a) "Méthodes" au sens intramathématique

Le mot "méthode" est souvent utilisé en mathématiques, pour désigner une activité proprement intramathématique.

1. D'abord, on a appelé méthode, souvent, une manière de résoudre des problèmes qui correspondait en fait à l'introduction d'un nouveau concept, et qui est devenue ultérieurement une théorie, ou s'est intégrée dans une théorie. Ainsi, la "méthode des équipollences" s'est fondue dans le calcul vectoriel; la "méthode des indivisibles" est devenue la théorie de l'intégrale...

2. Ensuite, on appelle aussi "méthodes" des techniques qui servent dans divers domaines, avec, parfois, des variantes. Par exemple, la "méthode de variation de la constante" est utilisée sous des formes diverses, dans des problèmes linéaires (équations différentielles, suites récurrentes, équations aux différences finies...).

3. On trouve, enfin, des méthodes qui sont en fait des algorithmes adaptés à un domaine plus ou moins étroit: décomposition des fractions rationnelles, calcul des développements limités, méthode des pivots de Gauss... De plus en plus, ces algorithmes peuvent être pris en charge par des logiciels (ce qui entraîne le développement d'une "théorie des algorithmes"... qui n'a rien d'algorithmique !).

Ce n'est pas en l'un de ces sens que nous entendons le mot "méthode". Nous nous intéressons aux méthodes dans leur sens métamathématique, proche du mot heuristique.

(b) Heuristique et "problem solving"

Polya a largement développé l'idée d'heuristique. Dans sa présentation, on peut souligner deux idées. La première, c'est ce que n'est pas une heuristique; il rejette en effet explicitement l'idée suivante: "une méthode, c'est un truc qu'on utilise deux fois", idée qui renvoie aux sens évoqués plus haut de technique ou d'algorithme. La deuxième, c'est le sens qu'il donne au mot méthode: pour lui, une méthode, c'est "comment penser à un truc qui a déjà marché pour le réutiliser". C'est évidemment le "comment penser à" qui est pour nous l'aspect essentiel, spécifiquement métamathématique.

Mais il faut bien constater que si les textes de Polya sont fascinants à lire pour un mathématicien professionnel, il n'a jamais été possible, à notre connaissance, d'enseigner son heuristique. La présentation qu'en donne Polya est trop vaste, donc trop vague. Comment "changer de point de vue" de façon générale, quand le domaine étudié recèle mille possibilités, mille stratégies possibles ? Comment classer les problèmes, les techniques qui leur sont adaptées ? L'heuristique générale est inenseignable, elle ne peut guère servir qu'au mathématicien ayant une vaste culture: plus on connait de choses, plus il est facile de penser à telle idée, de changer de point de vue... Mais les étudiants sont loin de cette situation.

Plusieurs auteurs ont tenté de préciser et rendre enseignable l'heuristique au sens de Polya, en développant des <u>stratégies de résolution de problèmes ("problem solving")</u>.

Par exemple, A.H.Schoenfeld a bien analysé les démarches proposées par Polya et montré que leur ambiguïté oblige à les subdiviser en catégories plus fines. Par exemple, le précepte: "pour résoudre un problème complexe, résoudre un problème analogue plus simple...et exploiter la solution" est trop ambigü: selon les cas, il faudra exploiter le résultat trouvé, ou bien la méthode utilisée, ou bien seule une analogie permettra de s'en tirer.

Voici, par exemple le plan du chapitre "heuristics" d'un livre de "problem solving" de L.C.Larson:

1.1. Search for a pattern
1.2. Draw a figure
1.3. Formulate an equivalent problem
1.4. Modify the problem
1.5. Choose effective notation
1.6. Exploit symmetry
1.7. Divide into cases
1.8. Word backward
1.9. Argue by contradiction
1.10. Pursue parity
1.11 Consider extrem cases
1.12. Generalize

De tels préceptes semblent trop vagues pour attaquer un problème un peu compliqué. Par exemple, le problème:

"étudier la suite définie par
$(u_{n+1})^2 = u_n + (n+\log n)/(n+\cos n)$"

va demander de déterminer une stratégie, avec des étapes identifiables; et <u>comment ne pas faire rentrer les connaissances mathématiques sur les suites numériques dans une méthode qui permettrait de résoudre un tel problème</u> ? C'est à l'évidence impossible !

De façon générale, les exemples de travaux concernant le "problem solving" ne semblent s'appliquer qu'à des problèmes courts (de type Olympiades), utilisant peu de connaissances. Ils n'envisagent pas de stratégies longues, avec emboitements et retour en arrière. Et, surtout, ils semblent peu efficaces du point de vue des connaissances mathématiques à enseigner, à rendre opératoires pour la résolution de problèmes.

D'où l'idée de base pour permettre l'élaboration et l'enseignement de méthodes: réduire le champ des problèmes, pour permettre des classifications (des problèmes, des outils, ...) et limiter les choix. Cela peut alors autoriser des stratégies plus ambitieuses, s'appuyant sur les connaissances spécifiques d'un domaine; les préceptes généraux de l'heuristique peuvent alors être accrochés à ces connaissances et prendre un sens concret et non ambigü.

(c) A-t-on des exemples de méthodes, et de méthodes enseignées?

Nous allons donner des exemples de méthodes qui ont actuellement fait l'objet d'enseignements. Conformément à ce que nous avons dit plus haut, elles concernent chacune des domaines nettement plus restreints que le cadre général dans lequel le "problem solving" prétend intervenir.

1°/ *Résolution de problèmes de géométrie*

Des propositions de démarches méthodiques pour résoudre des problèmes de géométrie de terminale C ont été élaborées et enseignées par A. Robert et I. Tenaud (cf l'article cité en bibliographie).

On trouve dans cette méthode:

* une classification des types de problèmes (incidences, lieux géométriques, constructions, etc...);
* une classification des types d'outils (transformations, barycentres, analytique,etc...);
* des configurations de base utiles à reconnaître ou reconstruire dans les problèmes.

Ces classifications donnent aux élèves des repères liés aux contenus.

Expérimentée dans une classe de terminale, où elle a été enseignée explicitement, puis appliquée par les élèves pour résoudre des problèmes sans indications, par petits groupes de 4, elle semble améliorer effectivement l'efficacité ultérieure des élèves dans la résolution des problèmes de géométrie. Cet enseignement de méthodes a aussi été utilisé dans la préparation au Capes.

2°/ *Recherche de primitives*

Une méthode pour la recherche des primitives en DEUG A a été élaborée et est enseignée à l'Université de Lille 1. Elle s'inspire en partie d'une méthode analogue utilisée par A. Schoenfeld (voir la bibliographie). Le domaine assez restreint permet de classer des formes de fonctions, des tactiques de simplification, des outils techniques - à caractères d'ailleurs assez algorithmique. Mais on y trouve aussi des principes pour guider de façon méthodique les choix d'utilisation des outils (par exemple, comment choisir u et v dans l'intégration par partie; ou bien, comment "deviner" un changement de variable à faire, comment "anticiper" sur ce qui va se passer...).

La aussi, cet enseignement de méthode semble pouvoir être efficace auprès des étudiants: le progrès important semble être le fait qu'une recherche de primitive non immédiate ne relève plus pour eux de l'astuce ou de la chance (texte de la méthode à l'UFR de mathématiques).

3°/ *Etude de la convergence des suites*

Dans la même Université, on a mis au point une méthode pour étudier la convergence des suites qu'on peut rencontrer en DEUG A première année. Le sujet étant plus riche que le précédent, le côté méthodique: "comment penser à...", comment "contrôler" ce qu'on fait... y est important. On y distingue une stratégie de classement du problème, une stratégie de recherche d'hypothèses, une stratégie de preuve, un procédé de contrôle et de redémarrage en cas de blocage. Chaque stratégie comporte des tactiques (par exemple, pour la recherche d'hypothèses: diverses techniques de changement de point de vue, "faire n = ∞" dans certains morceaux,...; ou pour la preuve: prouver la divergence, prouver la convergence sans s'occuper de la limite, identifier la limite, tactique "ε-N avec encadrements" ...). Pour plus de détails sur cette méthode et son enseignement, cf le § III.5. Là aussi, l'effet principal de la méthode semble être de donner des armes aux étudiants pour "entrer" dans un problème non immédiat, tel celui cité au § (b) ci-dessus.

4°/ *Etude qualitative des équations différentielles*

Dans le cadre d'un enseignement nouveau d'étude qualitative des équations différentielles donné à l'Université de Lille 1 (cf § III.1), une méthode est enseignée. Elle comporte: *une classification du type de problèmes qu'on se pose* (prolongement, sens de variation, confinement dans certaines régions, branches infinies); *une liste d' outils à notre disposition* (transformations géométriques, isoclines et régionnement, solutions ou isoclines barrières, comportement de y' et branches infinies, comportement au "bout" d'une solution maximale, zones avec champ rentrant ou sortant à la frontière, sursolutions); *un plan d'exploration* (l'ouvert, les transformations, l'isocline, les solutions évidentes, le champ de pentes: calculatrice, micro-ordinateur); *une phase de recherche du champ des possibles* (tracer toutes les allures de solutions compatibles avec ces contraintes, repérer toutes les questions ouvertes); et *une phase d'établissement d'une stratégie d'utilisation des outils pour répondre aux questions de la phase précédente.*

L'évaluation qui a été faite de cet enseignement (cf § III.1) semble montrer que la méthode permet aux étudiants de se poser les bonnes questions, et assez souvent de les résoudre.

5°/ *Et ailleurs qu'en mathématiques ?*

Dans de nombreux domaines non mathématiques, des méthodes sont fréquemment enseignées. Citons: en programmation, dans la sécurité civile (gestion des moyens en cas de gros sinistre), dans l'industrie (étude de fiabilité, conduite de projets industriels), en intelligence artificielle, dans "l'art militaire", etc...

De façon générale, *l'utilisation de méthodes semble attachée à des activités ayant un haut degré de complexité* ... Pourtant, les mathématiciens semblent en général sceptiques quant à l'efficacité d'enseigner des méthodes dans leur discipline...voire même douter de l'existence de méthodes en mathématiques. Il semble qu'il y ait chez eux une sorte de pudeur à reconnaître qu'ils ont bien effectivement des méthodes, qu'ils préfèrent, au fond, parler "d'intuition"...ce qui est peut-être plus valorisant.

Mais quand on regarde de près comment un mathématicien résoud un problème d'un domaine donné, quand on lui fait expliciter et analyser sa démarche, on constate qu'il utilise effectivement des méthodes, mais qu'elles sont preque toujours inconscientes (même si elles ne l'ont pas toujours été), ou qu'elles sont refoulées par l'idée qu'avoir des méthodes pourrait limiter l'activité créatrice. Il s'agit là d'une fausse idée de la notion de méthode, qui, au contraire, peut permettre une économie de pensée et de temps, libérant et rendant plus efficace l'imagination créatrice.

(d) Qu'est-ce qu'une méthode ?

On peut maintenant se risquer à conclure que des méthodes existent effectivement en mathématiques et que ce peut être efficace de les enseigner, et essayer de définir ce que pourrait être une méthode.

Une méthode ou un ensemble de méthodes sur un champ donné est la description d'un ensemble d'activités du sujet, portant sur l'analyse et le classement de problèmes à résoudre dans un domaine assez précis, l'utilisation des outils et des techniques disponibles, les stratégies et tactiques possibles, la gestion dans le temps des choix des stratégies et de leur déroulement, la conscience de ces choix, les moyens de contrôle et de retour en arrière pour procéder à d'autres choix...

Un algorithme produit une réponse, une méthode fournit des questions: quoi, pourquoi, comment, par quels moyens... et donne des outils pour générer et contrôler la recherche des réponses.

Le fait d'enseigner des méthodes, permettant ainsi de rendre opérationnelles des connaissances, et donc d'accélérer un apprentissage du sens des concepts mathématiques, relève typiquement des moyens "métamathématiques" décrits au § II.1 pour changer le rapport au savoir mathématique des étudiants. Mais de plus cela peut contribuer à casser le cercle vicieux que nous évoquions au début: enseignement de concepts de haut niveau /contrôle de savoir faire techniques, dans la mesure où, avec des méthodes, les étudiants peuvent disposer des moyens d'aborder des problèmes non triviaux. Et ce n'est qu'à l'occasion de tels problèmes que les concepts mathématiques prennent vraiment leur sens.

Terminons ce point en remarquant que lorsqu'on établit le plan d'une méthode, on retrouve souvent au niveau des titres des paragraphes les préceptes des heuristiques classiques. L'heuristique générale apparaît ainsi comme se situant à un niveau plus global, et donc plus abstrait, que celui d'une méthode. C'est ce qui explique sans doute l'impossibilité de son enseignement immédiat à des étudiants. Mais, du coup, l'heuristique peut peut être se révéler utile lorsqu'on a enseigné plusieurs méthodes, comme moyen d'unifier des démarches valables chacune dans son domaine, et comme aide pour développer de nouvelles méthodes.

III. Comment élaborer et enseigner une méthode ?

Il y a, à notre connaissance, peu d'expériences actuelles dans ce domaine, essentiellement celles de A.Schoenfeld, aux USA, celles d'A.Robert et I.Tenaud à Paris, celles développées à l'Université de Lille 1.

Il faut d'abord identifier un domaine où il semble y avoir des méthodes, et élaborer, c.à.d. identifier le plus souvent, ces méthodes. Il y a ensuite un travail didactique nécessaire pour rendre la méthode enseignable.

(a) <u>Identifier et élaborer une méthode</u>

1°/ *La méthode " théorique"*

Deux aspects interviennent:

* identifier le domaine mathématique concerné: quelles connaissances? quels types de problèmes, quelles techniques? quels algorithmes? Il s'agit de classer et d'établir des rapports outils/connaissances/problèmes.

* extraire de "l'expert" sa démarche effective. Il s'agit, sur des problèmes types et sur d'autres aux limites du domaine, d'obtenir ses

prévisions, ses choix, les obstacles qu'il prévoit; de repérer les courts-circuits de sa pensée, ses automatismes inconscients.

Le résultat est à ce stade une méthode "théorique" qui reflète l'épistémologie de la démarche mathématique dans le domaine concerné. Elle n'est pas en général directement enseignable sous cette forme. Mais, déjà, cette élaboration peut amener à modifier le contenu et/ou la forme des connaissances qu'on veut rendre disponible chez les étudiants.

Par exemple, le "théorème des gendarmes" apporte peu de connaissances sur le concept de convergence, par son côté "automatique", et il est du coup parfois peu opérationnel. Un "théorème d'encadrement à ε près":

"si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n \to v$ et $w_n \to w$, alors pour n assez grand, on a $v-\varepsilon \leq u_n \leq w+\varepsilon$"

est bien plus opératoire, car il véhicule plus de sens relativement au concept de convergence.

Un test immédiat peut être fait avec le théorème de Césaro, ou avec l'étude de la suite évoquée plus haut:

$$(u_{n+1})^2 = u_n + (n+\log n)/(n+\cos n).$$

On s'aperçoit ainsi très souvent qu'on a intérêt à présenter une version "désalgorithmisée" de résultats standard de caractère "automatique". Il est de même utile de distinguer les procédures algorithmiques des procédures de recherche ou des démarches utilisant le sens des concepts, souvent plus délicates mais plus importantes; distinguer de même problèmes standard et plus ouverts. Ainsi, pour la convergence des suites (cf § III.5), la tactique: "montrer que la suite est monotone et bornée" est nettement plus algorithmique que la tactique:"faire n = ∞ avec encadrements", qui s'appuie fortement sur le concept de convergence en ε-N. Par exemple, dans la suite déjà évoquée plus haut,"faire n = ∞" c'est remplacer $(n+\log n)/(n+\cos n)$ par 1 : cette quantité est donc entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$, pour n assez grand, et on introduit les suites $(v_{n+1})^2 = 1-\varepsilon + v_n$ et $(w_{n+1})^2 = 1+\varepsilon + w_n$, qui encadrent u_n à partir d'un certain rang et convergent vers deux limites proches si ε est petit; tout cela va fortement demander de dominer le concept de convergence.

2°/ *Prise en compte des contraintes de l'enseignement*

Il faut alors adapter la description de la méthode, son organisation, aux types d'activités souhaités pour les étudiants, activités de résolutions de problèmes et activités réflexives sur le champ mathématique étudié, et ceci en prenant en compte ce qu'on sait des étudiants.

Plusieurs points sont à prendre en considération:

(i) Intégrer le cas échéant au niveau de la méthode les erreurs ou blocages persistants chez les étudiants. Par exemple, dans l'étude des suites, l'usage de la récurrence bute sur les difficultés du "raisonnement sous hypothèse"; il faudra donc aborder la question dans la méthode.

(ii) Mettre en évidence les divers cadres (numérique, graphique,...) dans lesquels fonctionne la méthode, et favoriser les changements de cadres dans les activités des étudiants prévues par la méthode, à cause de leur efficacité épistémologique (donc pour résoudre des problèmes) et de leur efficacité didactique (pour acquérir des concepts opératoires, donc ayant du sens). C'est un aspect important de l'idée de "changement de point de vue" qu'on trouve dans de nombreuses heuristiques.

(iii) Développer la démarche stratégique et organisationnelle, prévoir un temps d'explicitation par les étudiants de leur démarche ("que fais-je? où en suis-je?..."), qui leur permette de prendre conscience des choix faits pour essayer de résoudre un problème, et donc des pistes non explorées vers lesquelles on pourra revenir si besoin est.

(iv) Prévoir très explicitement des procédures de contrôle et de retour en arrière (automatiques et inconscientes chez le mathématicien, elles ne sont pas naturelles chez les étudiants), s'articulant sur la conscience des choix faits évoquée ci-dessus.

(b) Comment enseigner une méthode ?

Les problèmes didactiques posés par l'enseignement de méthodes sont loin d'être tous élucidés. Néanmoins, un certains nombres de faits ont été constatés lors des expériences de tels enseignements. Nous retiendrons essentiellement six points.

1°/ *Il faut dire explicitement qu'on enseigne une méthode*

Du point de vue métamathématique, l'enseignement de méthodes ne se place pas sur le même niveau que l'enseignement de théorèmes, par exemple, et il faut le dire. Le fait qu'il y ait des méthodes, que ce soit important de les enseigner, et que cela peut éventuellement changer les performances en matière de résolution de problèmes et pour la compréhension des concepts, sont des affirmations qui devraient modifier le rapport au savoir des étudiants, et qu'il faut donc mettre en valeur.

2°/ *Il est peut-être nécessaire d'enseigner explicitement une méthode*

C'est ce que semblent indiquer plusieurs expériences. C'est aussi dans le même sens que vont les essais d'enseignement de méthodes dans d'autres domaines que les mathématiques (programmation, industrie,...). C'est enfin ce que semble aussi indiquer la difficulté qu'ont les experts à dégager eux-mêmes leurs méthodes: quels moyens a-t-on d'assurer la dévolution de la construction d'une méthode aux étudiants eux-mêmes ?

3°/ *Organiser des activités préalables*

Il faut de toutes façons amener les étudiants à dégager un certain nombre de constats:
* on peut classer (des problèmes, des outils, ...);
* certaines démarches sont semblables;
* on a intérêt à organiser des plans d'étude d'un problème, des plans de preuve, des étapes de vérification,...;
* affronter un exercice non trivial sans indications est difficile si on ne dispose pas de ... méthodes !

4°/ *Faire discuter les étudiants de et sur la méthode*

Cela paraît un élément essentiel, pour que les étudiants prennent vraiment conscience de ce qu'apporte la méthode, de ses possibilités et de ses limites, en articulation avec les connaissances du domaine. Pour cela, il est utile de choisir des exercices et problèmes ad hoc, susceptibles de diriger les étudiants vers des pistes différentes, leur permettant de comparer des démarches. De ce point de vue, l'utilisation du travail en petits groupes semble particulièrement indiqué comme situation permettant la discussion (cf § II.2, et l'article de A.Robert et I.Tenaud cité dans la bibliographie, et le § III.5) .

5°/ *Donner des problèmes sans indications, où la méthode serve*

C'est évidemment l'un des moyens privilégiés de montrer l'utilité et la nécessité d'une méthode, et de se l'approprier. Il faut, bien entendu, donner aussi de tels problèmes dans les contrôles et examens. Comme il s'agit d'établir ainsi un nouveau contrat, cela peut être fait progressivement, mais c'est indispensable.

6°/ *Favoriser les situations porteuses de sens plutôt que d'algorithmes*

En effet, la demande d'algorithmes et de recettes est quelque chose de très fort chez les étudiants, et le risque existe qu'ils ne retiennent que les éléments de la méthode qui ont plus ou moins cet aspect (il y en a presque toujours dans une méthode). Il vaut donc mieux les faire travailler sur des situations où ces aspects seront peu utiles.

IV. Quelques problèmes ouverts

Beaucoup de problèmes se posent, tant du point de vue des méthodes elles-mêmes que de leur enseignement. Citons en quelques uns.

(a) Dans quels domaines mathématiques (en particulier au niveau du DEUG) peut-on détecter l'existence de méthodes utiles ? Et celles qu'on peut trouver ou élaborer sont-elles susceptibles d'être enseignées?

(b) Peut-on trouver ou élaborer une démarche méthodique pour des domaines à la frontière mathématiques/physique ? Par exemple, de bons indices semblent montrer que les procédures de mise en équation de phénomènes physiques simples par des équations différentielles ou par des intégrales peuvent s'enseigner sous la forme d'un enseignement de méthodes (cf des essais faits à Lille et à Genoble, et les travaux du GRECO de didactique des disciplines).

(c) Tous les différents aspects d'une méthode, tels qu'ils sont évoqués au § précédent, sont-ils toujours indispensables ? Par exemple, il semble que la présence explicite d'une procédure de contrôle ne soit pas utile dans une méthode pour la résolution de problèmes de géométrie (sans doute à cause de la présence des figures...).

(d) Quand faut-il démarrer un enseignement de méthode? Cela va certainement dépendre du domaine mathématique, de l'organisation globale de l'enseignement, des activités préalables nécessaires; une étude particulière est à faire pour chaque thème.

(e) Comment être sûr qu'une méthode n'est pas utilisée de façon formelle, comme un algorithme, ou comme le simple respect d'un contrat avec l'enseignant? Quelles contraintes doivent respecter les situations d'enseignement pour assurer que cette dérive ne se produira pas ?

(f) Quelle part de l'élaboration d'une méthode peut-elle être dévolue aux étudiants? Est-ce possible pour le premier enseignement de méthode effectué avec des étudiants donnés? Est-ce possible pour la deuxième ou troisième méthode enseignée aux étudiants? En particulier, une synthèse des principes heuristiques à l'œuvre dans deux ou trois méthodes peut peut-être permettre un transfert d'une méthode à une autre et autoriser une plus grande dévolution aux étudiants.

(g) Comment évaluer une méthode, d'une part en ce qui concerne son efficacité opérationnelle (interne aux mathématiques), d'autre part quant à l'utilité de son enseignement ?

Nous concluerons ce bref survol sur l'enseignement de méthodes en mathématiques en évoquant, par une citation commune à divers auteurs (Clausewitz, Arsac,...), l'état final auquel devrait aboutir ce type d'enseignement :

"l'un des buts de l' enseignement d'une méthode est que celle-ci soit complètement oubliée, c'est à dire devienne un automatisme...".

Bibliographie

L.C.Larson: Problem-Solving Through Problems, Springer Verlag

G.Polya: Comment poser et résoudre un problème, Dunod

A.Robert, J.Rogalski, R.Samurcay: Enseigner des méthodes, Cahiers de Didactique des Mathématiques n°38, IREM Paris Sud

A.Robert et I.Tenaud: Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, Recherches en Didactique des Mathématiques, n°9.1, 1989, la Pensée Sauvage, p.31-70

J.Rogalski: Enseignement de méthodes de programmation dans l'initiation à l'informatique, 1° Colloque francophone de didactique de l'informatique, l'EPI éditeur, 1989, p.63-72

M.Rogalski: 2 brochures: Comment chercher une primitive?, et Comment étudier la convergence d'une suite réelle?, Université de Lille 1, UFR de Mathématiques

A.H.Schoenfeld: Mathematical Problem Solving, Academic Press

A.H.Schoenfeld: 2 articles dans Am. Math. Monthly, 1978 (p.673...), et 1980 (p.794...)