OUTIL INFORMATIQUE, ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Michèle Artigue, IUFM de Reims et Equipe DIDIREM, Université Paris 7

La recherche sur les questions d'enseignement des mathématiques en environnement informatique a débuté dans un climat fortement idéologique. Il s'agissait avant tout de montrer que l'outil informatique apportait une efficacité nouvelle à l'enseignement des mathématiques, de soutenir et promouvoir son intégration. La recherche était avant tout celle de pionniers, convaincus et militants. L'ambiance était identique au niveau de la formation d'enseignants. Il fallait susciter l'intérêt, le désir d'utiliser les nouveaux outils, on gommait les difficultés prévisibles, on calmait les inquiétudes, on ne cherchait pas à cerner les limites de l'outil, ni à mettre en évidence les ruptures et adaptations coûteuses que son intégration impliquait. Aujourd'hui le corpus de recherches dont on dispose, la cohérence de certains des résultats obtenus permettent des approches plus rationnelles. Dans le même temps, l'évidence de la difficulté de pénétration de l'outil informatique montre les limites de l'action militante. La création de produits logiciels pour l'enseignement apparaît de plus en plus liée à la définition préalable de cahiers de charge pensés à la fois sur le plan didactique et informatique et l'on voit peu à peu s'imposer la volonté de comprendre en profondeur le fonctionnement des systèmes didactiques à composante informatique et de construire dans ce domaine des connaissances, fussent-elles dérangeantes.

C'est dans cette perspective que se situe la réflexion menée ici. En nous référant à quelques recherches récentes, nous nous centrerons sur trois aspects qu'il nous semble important de prendre en compte quand on s'intéresse aux apports potentiels de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques et aux questions liées à l'intégration de cet outil dans le système scolaire donc, en particulier, à la formation des enseignants qui en est un élément décisif. Ce sont les suivants :

-environnements informatiques et objets de connaissance,
-environnements informatiques et interaction entre cadres de fonctionnement des concepts,
-environnements informatiques et fonctionnement du système didactique.

Nous ne prétendons pas bien sûr couvrir ici l'ensemble des questions posées. Nous avons fait des choix, d'autres auraient sans doute été possibles et tout aussi pertinents. Les nôtres ont été sans aucun doute guidés, au moins partiellement, par des manques ressentis au niveau de la formation des enseignants.

I - ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES ET OBJETS DE CONNAISSANCE

Il est banal d'affirmer que les mathématiques sont affectées par les environnements informatiques dans lesquels on les rencontre, on les conceptualise, on les travaille. Dès les débuts de l'aventure LOGO, on a ainsi mis en évidence certaines différences entre la géométrie de LOGO et celle de la feuille de papier, en soulignant par exemple le fait que LOGO véhicule une conception différentielle, globale, dynamique du cercle mettant au

premier plan l'invariance de la courbure, alors que la géométrie usuelle privilégie une conception ponctuelle, statique mettant au premier plan l'invariance de la distance au centre. Au delà de cet exemple, le plus fréquemment cité, on a mis en évidence, à travers le rôle dominant joué par les angles, le repérage essentiellement local, une géométrie de LOGO par certains côtés plus proche de la géométrie du macro-espace, au sens défini dans (Brousseau 1983), que de la géométrie du micro-espace[4] et ce, en dépit de la taille de l'écran.

Mais il faut reconnaître aussi que si l'existence de différences est communément admise et affirmée - si, pour tel ou tel micro-monde, chacun peut citer comme je viens de le faire quelques exemples, quelques caractéristiques - l'analyse de ces différences, des impacts qu'elles peuvent avoir sur le transfert de connaissances construites dans un environnement à d'autres environnements, reste le plus souvent très superficielle et sans cohérence globale. Elle n'est que rarement considérée comme une question fondamentale et prioritaire dans la recherche sur ces environnements. Elle apparaît plutôt au détour du chemin, du fait de réactions ou de difficultés non prévues, rencontrées au cours d'expérimentations, qu'il faut comprendre, interpréter. L'affirmation de différences fonctionne le plus souvent comme déclaration liminaire et ne sert qu'à masquer le fait qu'au fond, la force dominante est celle qui tend à considérer comme transparents vis à vis du savoir les environnements informatiques.

Le repérage de ce phénomène, de ses raisons, l'analyse de ses effets négatifs sur l'intégration de l'outil informatique nous semblent cruciaux en matière de formation d'enseignants. L'illusion de transparence ne se nourrirait-elle pas en effet de la croyance culturelle que l'environnement usuel en papier/crayon est l'environnement naturel et normal du fonctionnement mathématique, donc en fait le seul environnement a priori légitime ? Dans ces conditions, tout repérage de déviance d'un logiciel constituerait une atteinte à la légitimité de l'utilisation de ce logiciel dans l'enseignement. On comprend bien alors que les concepteurs de produits logiciels et leurs promoteurs soient pris inconsciemment dans un système de double contrainte : d'une part mettre en évidence la nouveauté qui justifie le produit, d'autre part maintenir au moins un temps, le temps de lui assurer une place, l'illusion de transparence.

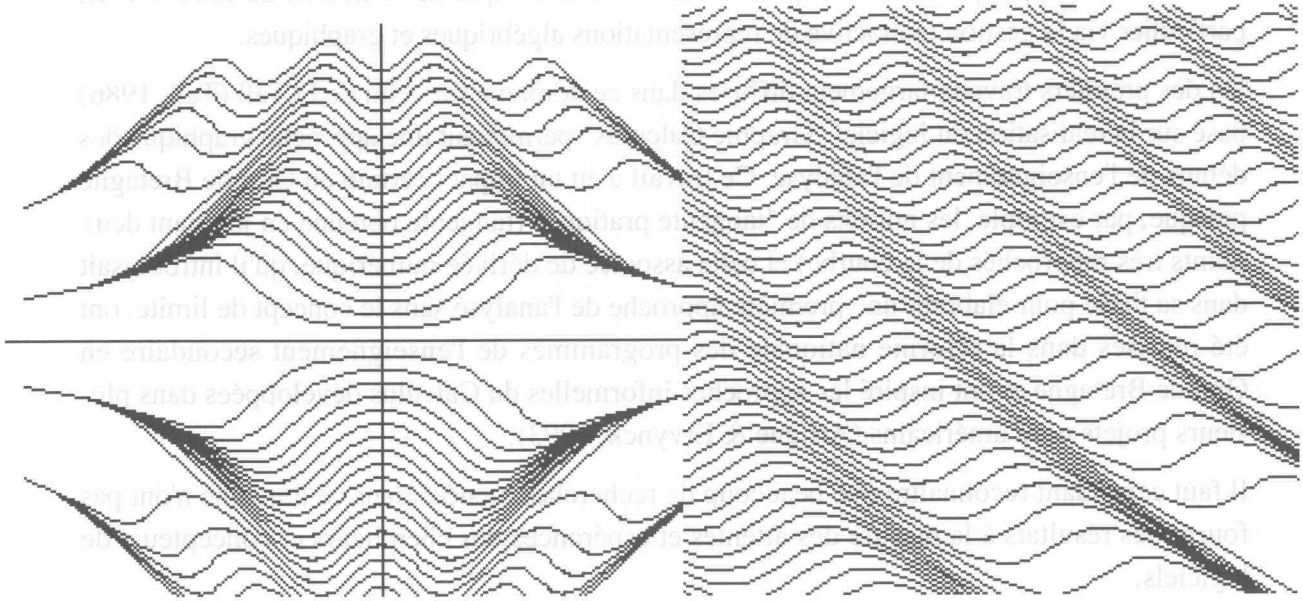
La façon dont sont posés les problèmes de transfert de connaissances est, elle aussi, révélatrice de ces questions de légitimité. Ils sont en effet toujours posés dans le même sens : on s'interroge sur la transférabilité possible en environnement usuel de connaissances construites dans des environnements informatiques. Une réponse négative tend à disqualifier l'environnement informatique utilisé. En sens inverse, des difficultés à exploiter un environnement nouveau pour faire des mathématiques sont toujours imputées au produit logiciel, non à la trop forte dépendance contextuelle des connaissances construites dans l'enseignement usuel.

Prenons un exemple particulièrement banal, celui des représentations graphiques de fonctions. L'enseignement usuel se base sur une théorie, implicite en grande partie, de la représentation graphique des fonctions : à une fonction correspond une représentation

[4]G.Brousseau distingue trois tailles d'espace présentant des caractéristiques sensiblement différentes : le micro-espace qui est celui de manipulation de petits objets et de la géométrie de la feuille de papier, le méso-espace, espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue (objets fixes entre 0.5 et 50 fois la taille du sujet) et enfin le macro-espace où le contrôle direct n'est plus possible.

générique, respectant un certain nombre de conventions ; ainsi le graphe tracé sera-t-il le plus simple possible compatible avec les contraintes connues, toutes les propriétés mathématiques repérées devront y apparaître de façon lisible, au prix éventuellement d'une déformation du dessin et l'on ne tracera pas par exemple exactement de la même façon une branche infinie à asymptote verticale et une branche parabolique de direction verticale[5]. Ces conventions ne se retrouvent pas dans les tracés informatiques : à une même fonction correspondent en général une grande variété de représentations perceptivement différentes suivant le choix de la fenêtre de représentation, toute fonction continue peut même être représentée par une horizontale - lequel d'entre nous n'a pas été choqué la première fois où voulant tracer une sinusoïde il a malencontreusement obtenu une droite horizontale ? - et les courbes n'hésitent pas à rencontrer leurs asymptotes ! Exploiter mathématiquement des tracés informatiques de solutions d'équations différentielles par exemple, suppose que l'on prenne conscience de ces différences et donc, rétrospectivement, des conventions qui gèrent les représentations usuelles.

Il est significatif de ce point de vue que, la recherche que nous avons menée à l'université de Lille 1 sur l'enseignement des équations différentielles (Artigue, 1992) ait montré que, pour l'une des premières activités proposées aux étudiants, qui consiste à associer des équations et des portraits de phase, la seule difficulté résistante consiste à admettre que l'équation : y'= sin(xy) puisse aussi bien être associée au tracé 2 qu'au tracé 1 :



Exploiter efficacement l'outil informatique dans l'enseignement exige donc que l'on prenne au sérieux l'analyse des rapports entre objets de savoir et environnements et le travail à faire pour permettre l'adaptation à de nouveaux environnements ou la gestion simultanée de plusieurs environnements. Cela exige aussi que l'on prenne conscience des implicites sous-jacents au fonctionnement dans les environnements usuels et que l'on soit prêt à remettre en cause la tendance naturelle à en faire les seuls légitimes dans l'enseignement. Ce regard décentré sur nos pratiques les plus familières peut d'ailleurs nous aider à prendre conscience de tous les implicites sur lesquels reposent ces pratiques, des implicites que nos élèves n'ont aucune raison de partager d'emblée.

---

[5]J.Rogalski avait essayé d'expliciter ces caractéristiques dans un exposé à la 2ème Ecole d'été de Didactique, (cf. Actes diffusés par l'IREM d'Orléans).

Une formation d'enseignants à l'utilisation d'outils informatiques dans l'enseignement devrait être l'occasion de poser ce type de problèmes à partir du travail sur des environnements précis, comme par exemple C.Laborde le fait dans quelques articles récents concernant le logiciel CABRI- Géomètre - (Laborde 1994) par exemple. Un tel travail peut être aussi l'occasion de s'interroger sur l'affirmation implicite d'unicité contenue dans le "la" souligné plus haut et de se demander quelles sont les géométries de l'enseignement et comment le système gère les difficultés liées aux différences qu'elles présentent, dans leur utilisation simultanée ou successive.

II - ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES ET MISE EN RELATION DE REGISTRES DE REPRESENTATION D'UN MEME CONCEPT

Beaucoup de recherches actuelles exploitent, même si elles ne font pas explicitement référence à la notion de cadre[6] (Douady, 1984) ou à celle de registre de représentation (Duval, 1988), la possibilité qu'offre l'outil informatique de gérer simultanément et économiquement plusieurs registres de représentation d'un même concept, favorisant en cela l'interaction entre cadres de fonctionnement de ce concept. C'est le cas par exemple de nombreuses recherches menées actuellement sur le concept de fonction comme en témoigne la monographie récemment publiée par le M.A.A.[7] sur le concept de fonction (Harel & Dubinsky, 1992) : dans un nombre importants des travaux présentés,. on cherche à exploiter l'outil informatique pour la conceptualisation mathématique de la notion de fonction, en particulier via la gestion interactive de représentations algébriques et graphiques.

Un des premiers travaux largement diffusés dans ce domaine fut celui de D.Tall (Tall, 1986) basé sur la réalisation du logiciel "Graphic Calculus" permettant une approche graphique des débuts de l'enseignement de l'analyse. Ce travail a eu un impact certain en Grande Bretagne puisque, par exemple, les notions de "tangente pratique" (tangente obtenue en joignant deux points très rapprochés de la courbe) et celle associée de dérivée numérique, qu'il introduisait dans sa thèse pour élaborer une première approche de l'analyse sans le concept de limite, ont été reprises dans la réforme nationale des programmes de l'enseignement secondaire en Grande Bretagne et ont inspiré les approches informelles du Calculus développées dans plusieurs projets nord américains (Artigue & Ervynck, 1993).

Il faut cependant reconnaître que beaucoup de recherches menées dans ce domaine n'ont pas fourni des résultats à la mesure des attentes et espérances des chercheurs et concepteurs de logiciels.

Même si elles ne sont pas les seules à s'être intéressées à ces questions : cf. (Leinhart, Zaslavsky, Stein 1990) par exemple), les recherches menées en environnement informatique sur les fonctions ont également contribué à mettre en évidence la charge de savoir que suppose une lecture adéquate des représentations graphiques et les illusions que pourraient nourrir les enseignants qui penseraient que les élèves voient dans une représentation

---

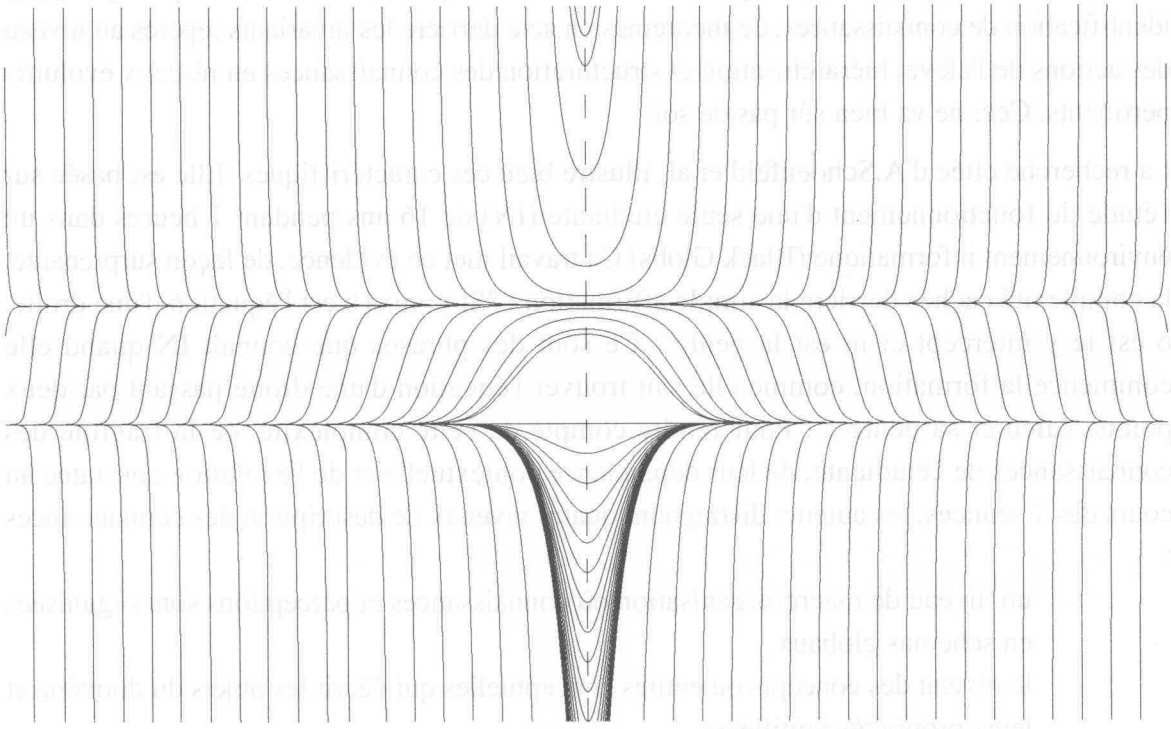
[6]R.Douady définit dans sa thèse un cadre comme composé d'objets d'un domaine mathématique, de relations entre ces objets, d'expressions et images mentales associées à ces objets. Deux cadres peuvent contenir les mêmes objets mais différer par les images mentales et problématiques développées à leur propos. La notion de registre utilisée par R.Duval est, elle, liée à une analyse des représentations de type sémiotique. Dans un même cadre, un objet est en général susceptible de représentations diverses présentant des caractéristiques sémiotiques différentes.

[7]M.A.A. : Mathematical American Association

graphique ou dans une évolution dynamique de représentations graphiques, les phénomènes qu'ils ont justement voulu montrer. J'en donnerai deux exemples, l'un extrait de la recherche déjà citée sur les équations différentielles, l'autre de (Goldenberg, Lewis, O'Keefe, 1992).

Le travail sur les équations différentielles met bien en évidence en effet les connaissances mises en jeu par une lecture graphique efficace. Ainsi, sachant que le portrait ci-après correspond à l'équation différentielle suivante : $y' = x(y^2-1)$, le mathématicien voit sur ce tracé deux solutions particulières correspondant aux droites d'équation y=-1 et y=1 qui partagent le plan en trois zones où les courbes-solutions sont respectivement piégées car l'équation satisfait les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sur tout le plan. Il sait que les courbes-solutions des zones médiane et inférieure admettent des asymptotes horizontales puisqu'aucune solution ne peut rencontrer les deux solutions particulières mais il sait aussi que, contrairement aux apparences, il ne peut conclure directement du tracé que les deux droites d'équation : y=-1 et y=1 sont bien des asymptotes communes à toutes les solutions. Il voit aussi que les courbes-solutions de la zone supérieure ont une direction asymptotique verticale mais sait qu'il ne peut discerner perceptivement entre asymptote verticale et branche parabolique de direction verticale. Dans la zone inférieure, enfin, il sait encore une fois qu'il ne doit pas se laisser piéger par les apparences : a priori, il existe deux types de solutions, des solutions qui rencontrent l'axe Oy, sont décroissantes puis croissantes et des solutions qui ne le rencontrent pas, mais ceci peut n'être qu'une apparence liée à la fenêtre de représentation.

Que verraient un élève de lycée, de premier cycle d'université, un artiste dans ces mêmes tracés ?



En fait, nous voyons ce que nous sommes préparés à voir avec notre connaissance du domaine et le deuxième exemple cité l'illustre de façon encore plus élémentaire. Disposant d'un traceur et voulant illustrer l'effet du changement du y-intercept[8], à pente constante,

[8]Le y-intercept désigne l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe Oy

P.Goldenberg a demandé à ses élèves ce qu'ils voyaient lorsqu'il faisait dynamiquement croître ou décroître ce y-intercept. Le mathématicien voit ici monter ou descendre la droite initiale parallèlement à elle-même. Cette interprétation est en fait complètement pilotée par le savoir injecté dans la situation. Les élèves, eux, y voient, à juste titre, tout aussi bien une droite qui se déplace vers la gauche ou vers la droite !

Il faut cependant souligner que les difficultés mises en évidence par beaucoup de travaux, tout en tempérant les enthousiasmes naïfs, ont eu un effet positif. Elles ont suscité des recherches plus fouillées cherchant à mieux comprendre comment s'établissent, dans un environnement donné, les connexions entre différents registres de représentation du concept de fonction, voire d'autres concepts et quels processus les sous-tendent, quels sont les difficultés et obstacles rencontrés dans cette articulation, donc des recherches visant à se donner les moyens de comprendre à la fois les réussites et les échecs et de mieux cerner, par contrecoup, les apports possibles d'environnements informatiques. C'est le cas de la recherche présentée par J.Kaput dans la monographie déjà citée par exemple mais aussi de divers travaux et nous évoquerons ci-après deux d'entre eux : une recherche pilotée par A.Schoenfeld (Schoenfeld, Smith, Arcavi 1990), souvent citée ces dernières années, et la thèse d'A.Dagher (Dagher 1993).

Ces recherches relèvent d'un point de vue méthodologique de l'analyse qualitative de cas. Elles abordent les interactions élève/logiciel à un niveau microscopique d'analyse, en se basant notamment sur l'enregistrement systématique de toutes les interactions élève/logiciel. Il s'agit bien sûr ensuite de remonter de ces informations microscopiques à une modélisation de l'élève et de l'apprentissage exprimables, au moins en partie, à des niveaux plus globaux : identification de connaissances, de théorèmes en acte derrière les invariants repérés au niveau des actions de l'élève, hiérarchisation et structuration des connaissances en réseaux évolutifs pertinents. Ceci ne va bien sûr pas de soi.

La recherche citée d'A.Schoenfeld et al. illustre bien ces caractéristiques. Elle est basée sur l'étude du fonctionnement d'une seule étudiante (IN) de 16 ans pendant 7 heures dans un environnement informatique (Black Globs) Ce travail met en évidence, de façon surprenante, la complexité cachée derrière la simple affirmation : "Si y=mx+b est l'équation d'une droite, b est le y-intercept et m est la pente". Ce sont des phrases que connaît IN quand elle commence la formation, comme elle sait trouver l'équation d'une droite passant par deux points, calculer sa pente .... Pour rendre compte de cette complexité, de la fragilité des connaissances de l'étudiante, de leur dépendance contextuelle et de l'évolution constatée au cours des 7 séances, les auteurs distinguent quatre niveaux de description des connaissances :

- un niveau de macro-organisation où connaissances et perceptions sont organisées en schémas globaux,
- le niveau des concepts ou entités conceptuelles qui décrit les objets du domaine et leurs propriétés familières,
- un niveau de structuration plus fine où se regroupent des éléments primitifs et leurs relations, dénommé "the Cartesian connexion" ,
- enfin, un niveau contextuel où les éléments primitifs sont indexés par des contextes précis.

Ils montrent qu'il y a au début fonctionnement au niveau du schéma sans que ce schéma ne soit ancré à des niveaux plus profonds sur des connexions cartésiennes correctes. Par exemple, au départ, IN fonctionne comme si elle décomposait le plan en deux demi-plans : positif et négatif, de part et d'autre de l'axe horizontal. Une droite de pente négative est alors pour elle une droite qui vient de la partie négative du plan, connaissance implicite qui coexiste avec une technique correcte de calcul de la pente. Pour arriver à une conception de la pente correctement articulée entre les pôles algébrique et graphique, c'est en fait tout un réseau cognitif qu'il faut modifier. De la même façon, la conceptualisation de IN de la notion de y-intercept passe au cours de la formation par une évolution complexe.

Les auteurs soulignent également qu'ils ne parviennent pas, contrairement à leurs attentes initiales, à expliquer l'évolution par une succession de micro-apprentissages ; ils repèrent plutôt des connexions qui se renforcent ou s'affaiblissent dans un réseau complexe.

La thèse d'A.Dagher, que nous avons citée également plus haut, met quant à elle bien en évidence la spécificité de certains processus d'adaptation mis en jeu dans les environnements informatiques. Etudiant le fonctionnement d'élèves face à un logiciel (Fonctuse) demandant d'associer à des courbes affichées sur l'écran (droites, paraboles, hyperboles), des expressions algébriques de forme spécifiée, il montre qu'une adaptation efficace, du point de vue de l'environnement logiciel, ne met pas nécessairement en jeu les connaissances d'articulation algébrique-graphique visées par l'apprentissage. Il identifie par exemple, dans le cas de paraboles auxquelles doit être associée une équation sous forme polynomiale, qu'un certain nombre d'élèves arrivent assez rapidement à une connaissance perceptive de la taille de l'ouverture (qui a, dans ce logiciel, nécessairement une valeur entière), qui leur permet d'en trouver la valeur exacte en 2, 3 essais maximum. Ceci leur permet de développer une stratégie efficace pour déterminer l'équation polynômiale demandée : estimer l'ouverture, lire l'ordonnée à l'origine pour déterminer la valeur du terme constant du polynôme, puis lire les coordonnées d'un point et écrire l'équation correspondante pour trouver la valeur du coefficient du terme de degré 1. En cas d'échec, il y a alors utilisation du feed back fourni (tracé de la parabole associée au polynôme proposé) pour corriger l'estimation de l'ouverture et modifier l'équation à résoudre ... Mais il apparaît que ces mêmes élèves ne sont pas nécessairement capables dans le post-test qui suit l'expérimentation, d'ordonner des paraboles tracées sur papier suivant la valeur de leur ouverture, comme si la connaissance construite dans l'action sur l'ouverture ne disposait pas d'ancrages conceptuels suffisants pour être exprimable et exploitable dans une formulation en termes de relation d'ordre.

A.Dagher met en évidence également certains facteurs qui pourraient expliquer l'efficacité constatée d'une utilisation même courte du logiciel lors des premières expérimentations. Ces expérimentations ont été menées avec des élèves en fin de lycée, familiers avec les droites, paraboles et fonctions polynômes de degré 1 et 2 mais ayant cependant des compétences apparemment limitées dans le domaine de l'articulation graphique-algébrique. Les évolutions observées, contrairement aux observations faites dans la recherche précédemment citée, sont des évolutions brutales et stables (le fait que le jeu proposé à l'élève varie peu explique sans doute en partie ces différences) : à un moment, un coefficient ou une caractéristique d'un coefficient semble prendre sens et il n'y a pas de retour en arrière dans la suite de la séance. Ces phénomènes brutaux, qualifiés par l'auteur de "cristallisations" ne se produisent pas

aléatoirement : la présence d'un catalyseur semble nécessaire. Le principal catalyseur identifié est la rencontre d'une situation particulière soit du point de vue algébrique, soit du point de vue graphique. Mais il faut reconnaître aussi que tout catalyseur ne provoque pas nécessairement de cristallisation. Ainsi, une situation particulière sera statistiquement moins efficace si elle est très particulière (par exemple $y=x^2$) ou si elle est rencontrée très tôt dans la séance. Mais l'analyse des enregistrements montre que, du fait de la rapidité de l'interaction informatique, le nombre de catalyseurs rencontrés dans une séance est suffisamment grand pour qu'un pourcentage d'efficacité même réduit puisse produire des effets réels.

Comment exploiter tout ceci au niveau de la formation ? Je voudrais ici suggérer quelques pistes :

- Il serait sans doute intéressant d'utiliser l'outil informatique pour renforcer la sensibilité des enseignants à l'existence de différents cadres de fonctionnement, de différents registres de représentation pour les concepts mathématiques, au rôle fondamental joué par l'articulation de ces cadres et registres dans le travail mathématique, pour construire des ingénieries favorisant cette articulation.

- Mais il est tout aussi important de ne pas laisser croire que l'articulation va devenir miraculeusement facile parce que l'on disposera d'outils logiciels qui la mettront économiquement et aisément en scène. L'articulation de cadres et de registres, comme toute articulation de points de vue est une opération mentale cognitivement très coûteuse et ce n'est pas un hasard si l'enseignement tend souvent à fuir cette complexité en compartimentant les domaines et les approches. Les articulations se construisent lentement et cette construction met en jeu, comme le montrent bien les recherches récentes, tout un réseau cognitif qui déborde largement les seules articulations visées.

- Enfin il nous semble important de sensibiliser les enseignants à la spécificité des processus d'adaptation mis en jeu par les environnements informatiques et aux variables qui les conditionnent, de souligner aussi la prudence nécessaire dans l'interprétation cognitive des comportements observés.

III - ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES ET FONCTIONNEMENT DU SYSTEME DIDACTIQUE

Nous nous réfèrerons plus particulièrement dans cette troisième partie à une recherche effectuée en collaboration avec J.Belloc dans un collège de la banlieue parisienne de 1988 à 1991 (Artigue 1991). Bien d'autres références auraient bien sûr là encore été possibles.

Dans l'euphorie pionnière des débuts ou même tant que les débats ont tourné de façon récurrente autour du "pour ou contre l'informatique dans l'enseignement des mathématiques", les travaux qui pouvaient mettre en évidence, soit des résistances fortes du système d'enseignement, soit des difficultés autres que matérielles ou résultant de refus de principe, n'étaient pas forcément les bienvenus. Aujourd'hui me semble-t-il, le problème n'est plus là et nous sommes bien conscients que pour assurer l'intégration de l'outil informatique dans l'enseignement, nous avons certes besoin de bons produits - mais ceci n'est plus forcément le plus difficile - nous avons aussi besoin de comprendre comment

l'outil informatique affecte le fonctionnement du système didactique et comment on peut aider les enseignants à prendre conscience des adaptations nécessaires et à les mener à bien.

La recherche menée avec J.Belloc sur le logiciel Euclide[9] en classe de 4ème, par son évolution même, illustre bien ce phénomène. Elle a démarré avec des objectifs précis, des hypothèses a priori raisonnables et banales :

- Euclide peut aider à la formulation en géométrie, par les contraintes de langage qu'il impose, par la proximité de ces contraintes de celles du langage mathématique dans ce domaine, par l'avantage didactique qu'il offre de mettre en scène ces contraintes comme des contraintes du milieu,

- Euclide peut aider à la conceptualisation en géométrie en obligeant à passer d'une géométrie perceptive, d'une géométrie du geste, à une géométrie opératoire où ces gestes sont décomposés, traduits en termes d'objets géométriques et de leur propriétés (pour tracer un parallélogramme, on ne fait pas glisser sa règle, on trace des parallèles dûment spécifiées, par exemple),

- Euclide peut aider à approcher des situations plus complexes que celles gérables dans les environnements usuels et permettre d'engager les élèves dans une approche expérimentale de la géométrie,

- Euclide peut enfin aider les élèves à entrer dans la rationalité mathématique en les aidant à prendre conscience de la généralité des énoncés mathématiques, du statut de la figure, des propriétés géométriques des configurations, invariants d'une classe infinie de figures.

L'expérimentation de la première année a globalement confirmé ces hypothèses et dans le même temps attiré notre attention sur des problèmes préoccupants, d'autant plus préoccupants qu'ils tendaient à montrer que les situations construites n'étaient pas robustes et exigeaient, pour fonctionner, un enseignant véritablement expert. Les problèmes rencontrés étaient principalement de trois types :

- le parasitage récurrent du travail mathématique par des difficultés de nature informatique,
- la difficulté à cerner la charge mathématique réelle de l'activité développée par les élèves,
- les difficultés rencontrées par l'enseignante pour se conformer aux prévisions expérimentales faites en commun, lors du pilotage réel de la classe.

Nous nous sommes donc intéressées plus précisément dans la suite à ces questions, d'une part en introduisant certaines modifications à l'ingénierie initiale pour mieux prendre en compte les difficultés rencontrées, d'autre part en mettant en place différents dispositifs expérimentaux pour étudier plus finement, et les difficultés, et l'effet des modifications introduites : suivi de groupes d'élèves, enregistrements des phases collectives, organisation de courts contrôles après chaque synthèse.

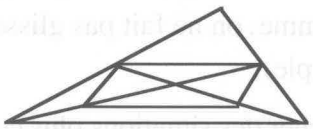
---

[9]Le logiciel Euclide réalisé à l'IREM de Grenoble est une extension de LOGO intégrant des macro-procédures adapté à l'enseignement de la géométrie à partir du collège : tracés de parallèles, perpendiculaires, d'images de points par les transformations usuelles...

Sans rentrer dans le détail des résultats obtenus, nous voudrions nous centrer ici sur deux aspects auxquels cette recherche nous a particulièrement sensibilisée : les changements dans les caractéristiques du milieu et dans les processus de gestion de la classe induits par l'environnement informatique. Nous pensons qu'il jouent un rôle important dans les difficultés d'intégration de l'outil informatique à l'enseignement, au delà, comme nous le soulignions plus haut, des problèmes matériels et institutionnels auxquels tout un chacun est sensible en priorité.

III-1 : Environnement informatique et milieu :

A un moment de l'enseignement, dans l'expérimentation menée, après la phase d'initiation au logiciel, les élèves étaient confrontés, à une tâche de construction de figure. Il s'agissait de la figure ci-dessous préparant l'étude de la configuration des médianes dont plusieurs représentants variant par la taille, l'orientation étaient proposés aux élèves.



Ils devaient en élaborer des programmes de construction en langage mathématique usuel et en langage Euclide. Ces programmes n'utilisant pas toutes les propriétés de la figure, on leur demandait également de fabriquer un ou plusieurs problèmes de géométrie à partir de la construction proposée.

Les résultats obtenus satisfaisaient sur le plan mathématique l'enseignante de la classe: ils traduisaient chez la grande majorité des élèves la capacité d'associer de façon cohérente une procédure de construction géométrique à une figure de ce niveau de complexité, ainsi que la possibilité de distinguer entre les propriétés de la figure qui servaient d'hypothèse à la construction (variables suivant les élèves) et celles qui restaient à prouver à l'issue de la construction. Les formulations des élèves étaient mathématiquement correctes même si souvent il s'agissait de formulations intermédiaires entre le langage mathématique usuel et le langage Euclide. En revanche, parmi les programmes Euclide proposés, 3 seulement sur 21 étaient opérationnels.

Ceci nous a conduit à introduire une hiérarchie dans les erreurs rencontrées, en termes d'**imbrication maths/informatique**. Pour la tâche de construction proposée, vu les caractéristiques géométriques de la figure, nous avons distingué 5 classes d'erreurs :

- les erreurs mathématiques (non définition de certains objets ou double définition, ajout de propriétés, confusions de termes mathématiques comme milieu et médiatrice...), code **EM**,

- les erreurs liées à l'existence de formulations mathématiques directement intraduisibles dans le langage Euclide (ex : soit G tel que C soit le milieu de [GE]), code **EF**,

- les erreurs liées à des différences d'ordre entre les deux syntaxes (ex : "Soit M' le symétrique de M par rapport à O" se traduit par "SOIT "M' SYMP :O :M"), code **EO**,

- les erreurs résultant d'une définition implicite en mathématiques (ex : en mathématiques, lorsque deux points ont été définis, la droite (AB), le segment [AB] le

sont automatiquement, ce n'est pas le cas dans Euclide, ni d'ailleurs dans le Géomètre), code **EDI**,

- les erreurs de syntaxe locale concernant intervalles, guillemets, deux points, crochets..., code **EIL**,

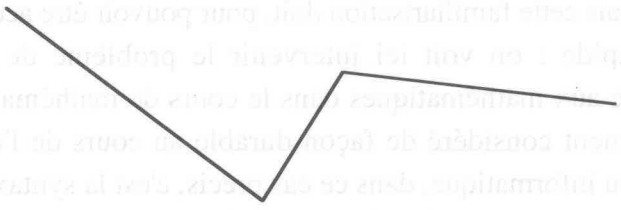
A ces catégories ayant servi à analyser les productions écrites, il faudrait par ailleurs ajouter, si l'on allait jusqu'à l'exécution effective, les erreurs rencontrées lors de l'entrée du programme en machine, l'édition, l'exécution, donc au moins une sixième catégorie concernant les erreurs de gestion des procédures, de gestion du système-éditeur...

Lorsque l'on opère cette distinction, on obtient les résultats suivants (pour 21 élèves, chacun ayant à coder cinq constructions) :

Code erreur	EM	EF	EO	EDI	EIL
Nombre	4	7	32	56	28
Elèves	1	2	8	18	9

qui mettent clairement en évidence le décalage existant entre correction mathématique et correction Euclide.

Les problèmes associés ont persisté jusqu'à la fin de l'expérimentation, les conséquences s'en trouvant aggravées par le manque de convivialité du logiciel et le caractère sommaire des messages d'erreur. En dépit des modifications apportées à l'ingénierie, le parasitage persista les deux années suivantes et les moyens de recueil de données mis en place mirent en évidence le phénomène qualitatif suivant, concernant les erreurs les moins imbriquées aux mathématiques :



c'est à dire : une décroissance nette pendant la phase d'initiation, une recrudescence lorsque l'on aborde les situations complexes, une légère décroissance par la suite, sans que l'on atteigne jamais un niveau raisonnable vis à vis du travail mathématique souhaité.

Comment, au delà de cette recherche précise, analyser didactiquement le phénomène? Nous reviendrons ici à la notion de "milieu". Cette notion a été introduite en didactique (Brousseau, 1988) dans le but de prendre en charge théoriquement les principes constructivistes selon lesquels l'élève apprend en s'adaptant à un milieu, qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres. Chez G.Brousseau, qui modélise les situations didactiques en terme de jeux, le milieu est défini comme système antagoniste de l'élève dans le jeu a-didactique associé à la situation.

Sans rentrer explicitement dans cette modélisation, nous considèrerons quant à nous le milieu comme:

- formé d'objets, outils, matériels ou conceptuels étant supposés avoir acquis une certaine transparence pour l'élève soit du fait de la culture, soit du fait d'apprentissages antérieurs (ainsi des notions comme celle d'équation du second degré, de fonction exponentielle... peuvent être à un certain moment des éléments du milieu au même titre que des instruments de tracé géométrique, un ordinateur, un logiciel....),
- support et environnement du travail mathématique de l'élève.

La situation didactique, si elle se veut moyen d'apprentissage, va nécessairement faire bouger le rapport de l'élève au milieu : le milieu y sera en un certain sens problématique. Ceci oblige à distinguer dans la modélisation deux composantes du milieu : la composante **inerte** et la composante **active**. La première est constituée de ce qui dans le milieu est supposé conserver le même niveau de transparence, ne pas être problématisé à travers la situation et c'est l'adaptation à la composante active qui doit provoquer l'apprentissage.

Il est clair que les milieux usuels en jeu dans l'enseignement des mathématiques sont des milieux qui peuvent être riches en composants mathématiques mais que ce sont en général des milieux pauvres en composants externes. L'entrée d'outils informatiques dans le système éducatif vient bouleverser cet ordre des choses. Elle crée ainsi des problèmes auxquels les enseignants ne sont pas habitués et qu'il serait dangereux de vouloir sous-estimer.

Si l'on revient avec ces outils d'analyse à la situation expérimentale décrite plus haut, l'ordinateur et le langage LOGO (pour certains élèves), puis le logiciel Euclide entrent avec l'expérimentation dans l'environnement didactique. Ils ne sont bien sûr pas d'emblée considérés comme des éléments du milieu : la phase de familiarisation avec le logiciel Euclide, qui occupe 5 séances de travail en groupes et les séances de synthèse correspondantes, par exemple, a justement pour objectif de constituer le logiciel comme élément du milieu. Mais cette familiarisation doit, pour pouvoir être acceptée par l'institution, être relativement rapide : on voit ici intervenir le problème de la légitimation d'un apprentissage externe aux mathématiques dans le cours de mathématiques. En fait, ce qui pourra être légitimement considéré de façon durable au cours de l'apprentissage comme partie active du milieu informatique, dans ce cas précis, c'est la syntaxe du logiciel dans ses aspects imbriqués aux mathématiques, c'est la structuration de la programmation qui renvoie à la structuration mathématique des procédures de construction de figures. Les autres aspects de l'apprentissage informatique doivent le plus rapidement possible gagner la transparence nécessaire à leur rattachement à la composante inerte du milieu. Malheureusement ce n'est pas trivialement le cas et l'enseignement va devoir gérer en permanence le décalage existant entre ce qu'il voudrait pouvoir considérer comme inerte et ce qui est réellement inerte.

Ces questions sont d'autant plus difficiles à résoudre que d'une part l'environnement culturel des élèves, dans la majorité des cas, ne suffit pas à faire gagner au milieu informatique "spontanément" le niveau de transparence souhaitée, d'autre part que les connaissances sous-jacentes tendent à être vécues comme hors-contrat par les différents protagonistes : élèves, enseignants mais aussi parents (diverses données de la recherche menée l'attestent ici clairement).

Il est clair que la prégnance des difficultés rencontrées, les limites des modifications introduites sont pour partie liées au logiciel lui-même utilisé, aux choix didactiques que nous

avons effectués, en particulier en matière de programmation par les élèves, au niveau des élèves concernés : le niveau collège. Mais on irait au devant de grandes désillusions si l'on en déduisait qu'il s'agit là d'un cas d'espèce et que, face aux environnements plus conviviaux dont on dispose maintenant, il n'y a pas lieu de sensibiliser l'enseignant à ces questions, de s'attacher à lui donner les moyens de repérer et interpréter correctement les phénomènes associés, de lui fournir aussi certains outils pour les gérer. Sinon comment éviter que, obligés de faire face à mains nues à d'incontournables problèmes que personne ne leur a pointés comme incontournables et réellement difficiles, ils n'attribuent leurs difficultés à leur seule incompétence !

III-2 : Environnement informatique et gestion de la classe :

Les problèmes posés par l'intégration d'outils informatiques à l'enseignement ne se limitent pas bien sûr à ces questions de non-transparence du milieu. Nous n'avons pas l'intention d'aborder ici les problèmes d'ordre matériel et institutionnel auxquels nous sommes tous sensibles en priorité, nous voudrions plutôt nous centrer sur le point suivant : l'utilisation d'environnements informatiques perturbe les systèmes de prévision et de gestion de l'enseignant, les deux ne fonctionnant pas indépendamment. En effet, l'ordinateur, même conçu simplement comme élément du milieu par l'intermédiaire duquel s'établit la relation de l'élève au savoir, modifie les rapports existants dans le triangle didactique : maître - élève - savoir.

Pour l'enseignant, la situation informatique apparaît d'emblée comme moins prévisible par le simple fait que se greffe sur le mathématique tout un ensemble de phénomènes annexes qu'il aura du mal à prévoir ou dont il tendra à sous-estimer l'importance. Par exemple, les prévisions de l'enseignante dans notre recherche sous-estimaient systématiquement le temps passé dans la communication (même réussie) avec la machine. Le fait que les systèmes de prévision de l'enseignant soient largement intuitifs accentue sans aucun doute la résistance dans la durée de cette imprévisibilité.

Dans un environnement informatique, quel qu'il soit, de plus, la médiation élève/savoir ne passe pas uniquement par l'enseignant. Un logiciel, même non tutoriel, fournit des feed back à l'élève et en ce sens a une dimension enseignante. Il devient en partie garant du vrai/faux, du possible/impossible. Cette composante est reconnue parfaitement par l'élève et rend les reprises en main, dans le cadre d'un travail en environnement multipostes, difficiles. Or cette capacité de reprendre facilement la main est essentielle à l'enseignant. Elle lui permet d'accélérer quand il en ressent le besoin l'avancée du temps didactique, en prenant appui sur les élèves qui ont déjà trouvé ou ont des idées pour démarrer. Elle lui permet de négocier les changements de tâche et l'on sait bien qu'un même exercice mathématique nécessite souvent de telles renégociations : on voudra passer d'une tâche de construction à une tâche d'émission de conjectures, de l'émission des conjectures à leur test, du test à des preuves plus formelles... Chaque changement implique en général une renégociation de la dévolution. La reprise en mains permet aussi à l'enseignant d'homogénéiser au moins en apparence la classe, de démarrer le processus d'institutionnalisation au cours même de l'activité au moyen d'institutionnalisations locales. S'il doit lutter pour reprendre la main, il perdra en liberté de manoeuvre et ceci changera la vision qu'il a de sa classe : il la verra

active certes, mais plus éclatée, hétérogène, plus lente et les perceptions négatives peuvent l'emporter sur les positives, le mettant mal à l'aise dans sa position d'enseignant[10].

On pourra dire bien sûr que de tels phénomènes sont déjà présents dans une certaine mesure dans toute séance de travail en groupes, que les enseignants y sont donc déjà partiellement adaptés. Ce serait méconnaître me semble-t-il le quotidien de l'enseignement.

IV - INTEGRATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Nous avons dans les paragraphes précédents, abordé un certain nombre de questions qui nous semblaient devoir être prises en compte lorsque l'on s'interroge sur les potentialités de l'outil informatique pour l'enseignement des mathématiques et sur les problèmes d'intégration de cet outil. La formation des enseignants est la clé de l'intégration et nous voudrions y revenir dans ce dernier paragraphe en nous appuyant sur la thèse en cours de M. Abboud. Elle s'y est interrogée au départ sur les raisons qui conduisaient un enseignant à accepter ou rejeter un logiciel (en se limitant à des logiciels exploitables a priori pour l'enseignement des symétries orthogonales et centrales au collège) ainsi que sur le type de scénario qu'un enseignant était susceptible de construire avec un logiciel choisi. Les grilles d'analyse de logiciels publiées dans la littérature l'ont dans un premier temps frappée par leurs caractéristiques essentiellement externes (caractéristiques techniques, ergonomiques, de communication...). Sans aucun doute, le souci d'embrasser une large catégorie de logiciels avec une même grille n'y est pas étranger, mais ce faisant toute composante didactique tend à disparaître de l'analyse. Pour les besoins de la recherche, elle a donc élaboré une grille plus didactique spécifiquement adaptée à l'analyse de logiciels susceptibles d'aider l'enseignement des symétries au niveau collège. Cette grille inclut, dans sa première partie se concluant par le rejet ou l'acceptation du logiciel, des éléments d'analyse didactique ; elle inclut également, en cas d'acceptation du logiciel, une deuxième partie consacrée à la prévision d'un scénario d'utilisation et à la comparaison de ce scénario avec des scénarios papier/crayon.

Cette grille a été expérimentée avec différents publics ayant des rapports différents à la didactique d'une part, à l'outil informatique d'autre part. Elle présente sans aucun doute des imperfections mais elle a donné des résultats trop radicaux pour être imputables à ces seules imperfections. Les résultats obtenus opposent en effet la facilité avec laquelle les personnes interrogées entrent dans l'analyse externe de logiciels et la difficulté avec laquelle ils entrent dans une analyse plus didactique. A ce niveau, beaucoup de questions restent sans réponse ou sont éludées. C'est le cas aussi pour les questions demandant d'anticiper des différences au niveau du fonctionnement de la classe entre fonctionnement informatique et fonctionnement papier/crayon. De plus, on ne note pas de différence sensible sur les pôles didactique et anticipation entre des enseignants interrogés à l'issue d'une formation à l'outil informatique (ne portant cependant pas directement sur les logiciels considérés) et des enseignants se préparant à la suivre.

[10] Nous ne faisons ici que décrire des changements incontournables. Que la classe que voit ici l'enseignant soit plus ou moins vraie que celle qu'il voit usuellement, que finalement il puisse être bénéfique qu'il ne puisse pas la manoeuvrer à sa guise, n'entre pas dans notre propos.

Ceci a conduit M.Abboud, dans une seconde phase de la recherche, à essayer de cerner, à travers la littérature et des entretiens avec quelques enseignants impliqués depuis plusieurs années dans des tâches de formation, les pratiques de formation dans ce domaine et leur évolution. Même si l'on peut noter une évolution, il semble bien que le modèle toujours dominant consiste à présenter des logiciels que l'on estime intéressants pour l'enseignement, à familiariser les enseignants avec leur utilisation, puis à leur proposer des situations d'enseignement qu'on a soi-même conçu et/ou fait fonctionner et qui "tournent bien", sans réellement chercher à préciser ce qui réellement les fait marcher, se préoccuper de savoir quel niveau d'expertise elles exigent de la part de l'enseignant qui doit les gérer, ou s'interroger sur leurs potentialités réelles en termes d'apprentissage. On proposera ensuite aux enseignants, si la durée de la formation le permet, d'essayer eux-mêmes ces situations dans leurs classes ou d'en construire de nouvelles et de les expérimenter, on organisera des séances de compte-rendu, mais sans pour autant fournir nécessairement des outils pour guider le recueil des observables et l'analyse des expérimentations, sans attirer la vigilance sur tel ou tel point reconnu comme critique.

Il reste encore beaucoup de travail à faire, dans de domaine comme dans d'autres, pour articuler efficacement recherche et formation.

REFERENCES :

Abboud M. : L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques : le cas de la symétrie orthogonale au collège, Thèse en cours, Université Paris 7.

Artigue M. (1991) : Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique, Petit x, N° 26, 5-27, Ed.IREM Grenoble.

Artigue M. (1992) : Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices, in The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy, G.Harel & E.Dubinsky (eds), MAA Notes, Vol. 25, 109-132.

Artigue M. & Ervynck G. (eds) (1993) : Proceedings of the Working Group 3, ICME 7, Québec, 1992, University of Sherbrooke.

Brousseau G. (1983) : Etudes de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Ed. IMAG.

Brousseau G. (1988) : Le contrat didactique : le milieu, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 9.3, 309-338.

Dagher A. (1993) : Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Douady R. (1984) : Dialectique outil-objet et jeux de cadres : une réalisation dans tout le cursus primaire, Thèse d'Etat, Université Paris 7.

Duval R. (1988) : Graphiques et équations, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. I, 235-253, IREM Strasbourg.

Goldenberg P., Lewis P. & O'Keefe J. (1992) : Dynamic representations and the Development of a Process Understanding of Function, in The Concept of Function : Aspects

of Epistemology and Pedagogy, G.Harel &E.Dubinsky (eds)., MAA Notes, Vol. 25, 235-260.

Harel G. & Dubinsky E. (eds) (1992) : The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol. 25.

Kaput J. (1992) : Patterns in Students' Formalization of Quantitative Patterns, in The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy, G.Harel &E.Dubinsky (eds)., MAA Notes, Vol. 25, 290-318.

Tall D. (1986) : Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics, Thèse, University of Warwick.

Leinhart G., Zaslavsky O. & Kay Stein M. (1990) : Functions, graphs anf graphing : Tasks, Learning and Teaching, Review of Educational Research, Vol. 60, N°1, 1-64.

Laborde C. (1994) : Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14.1/2, (à paraître).

Schoenfeld A., Smith J. & Arcavi A. (1990) : Learning : The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain, in R.Glaeser (Ed.), Advances in instructional psychology, Vol.4, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.