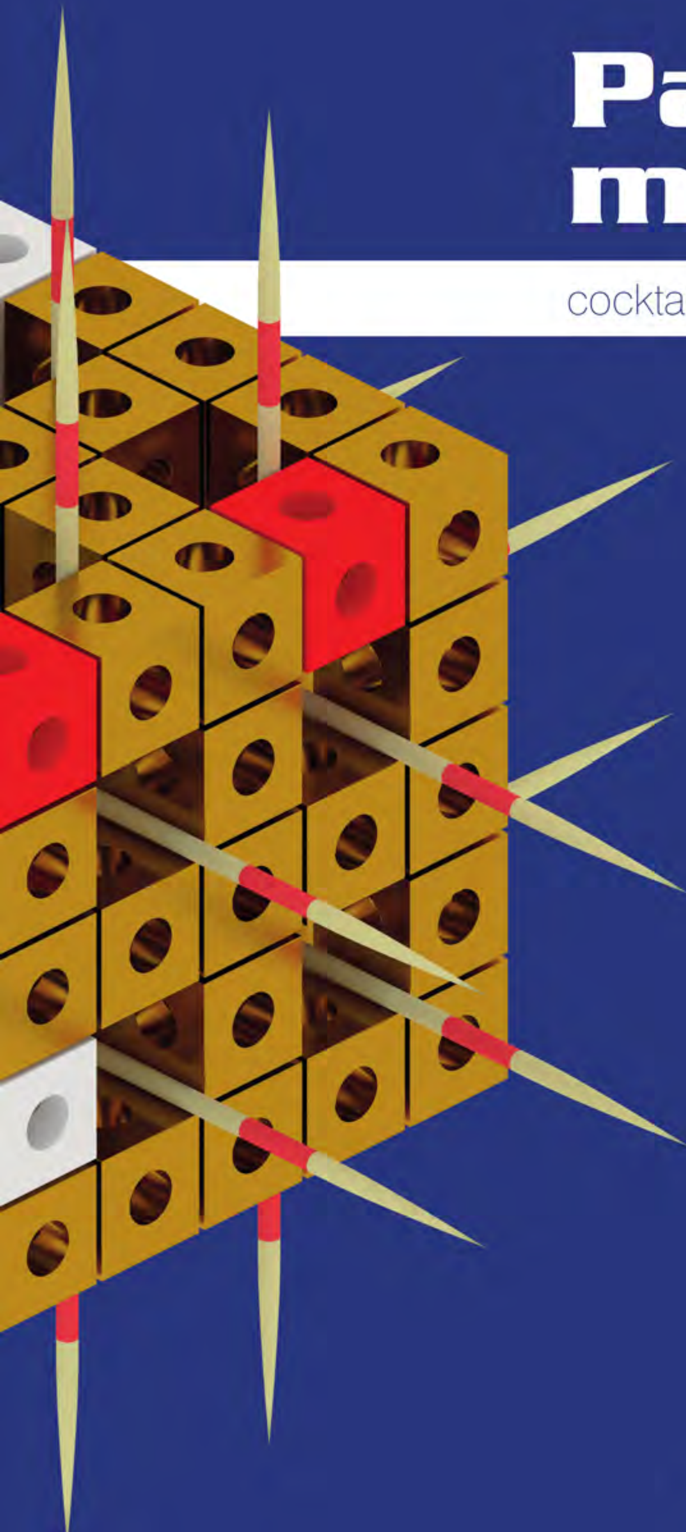
Panora math 7

cocktail de pistes et d'idées



co-édition

CIJM - IREM - APMEP

Panora math 7

cocktail de pistes et d'idées

réalisé par la

Commission Inter IREM Popularisation des Mathématiques

co-édité par

le Comité International
des Jeux Mathématiques
cijm.org

le réseau des Instituts de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques
www.univ-irem.fr

l'Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
apmep.fr

Nous remercions

Catherine Houdement pour sa préface,

tous les auteurs sans lesquels ce livre n'existerait pas,

tous les relecteurs,

Emmanuel Pinaud pour l'illustration de la couverture,

Yannick Bonnaz pour la maquette de couverture.

La Commission Inter IREM Pop'Math est un espace/temps de réflexion sur la popularisation des mathématiques, où se retrouvent des membres des IREM, de l'APMEP et du CIJM, pour constituer une caisse de résonance, mais aussi de « raisonnance », de la vulgarisation des mathématiques. La CII [1] est composée de trois sous-groupes qui travaillent sur les thèmes :

— les rallyes mathématiques ;

— les jeux mathématiques comme vecteur d'apprentissage ;

— la popularisation des mathématiques à travers des événements pour le grand public.

La CII Pop'Math et ses partenaires ont organisé les 4-5-6 juin 2015, à Toulouse, un colloque à destination des professeurs, des écoles au supérieur, sur le thème « Les mathématiques, une culture pour tous ! ».

Le sous-groupe Rallyes s'est chargé de collecter les articles et de réaliser cette 7^{e} édition de Panoramath tout au long de l'année 2018.

1. www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique22

Le Comité International des Jeux Mathématiques

Association loi 1901, fondée en 1993, le CIJM se donne pour mission de changer l'image des mathématiques auprès du grand public et il fédère 40 associations qui touchent plusieurs millions de personnes dans le monde. Il propose une plate-forme internationale d'échanges. Reconnu par les pouvoirs publics, agréé Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire, il a reçu l'agrément de l'Éducation Nationale. Il est soutenu par un comité d'honneur prestigieux et par de nombreuses institutions et universités scientifiques. Marie-José Pestel, Présidente de l'association, a reçu en 2008, le Prix d'Alembert, décerné par la Société Mathématique de France, pour l'ensemble de ses actions de diffusion de la culture mathématique au sein du CIJM.

Parmi les actions, de plus en plus nombreuses du CIJM[2], notons :

Le Salon Culture et Jeux Mathématiques

Depuis sa création, en 2000, à l'occasion de l'Année Mondiale des Mathématiques, ce salon parisien sur la place Saint-Sulpice a connu un succès grandissant, fidélisant le dernier week-end du mois de mai, un très large public. Le CIJM insiste beaucoup sur la part culture de ce salon et offre aux visiteurs l'occasion de découvrir des aspects culturels de notre discipline. Mais c'est aussi le salon du jeu. Tous, des enfants de la maternelle aux adultes, sont invités à jouer, réfléchir, se poser de vraies questions mathématiques. Ce salon est ainsi en adéquation complète avec les 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques définies dans le rapport Villani - Torossian de février 2018.

Des publications

- **Panoramath**, édité ou co-édité par le CIJM depuis le premier volume ;
- **Math'Express**, brochure publiée et distribuée gratuitement chaque année sur le thème du Salon dont il complète l'aspect culturel ;
- le **Jeu de HEX**, remis à l'honneur, distribué et accompagné d'un livret de recherche ;
- et de nombreux **livrets jeux** distribués chaque année pour petits et grands.

2. Toutes ces actions sont développées sur le site www.cijm.org

Le réseau des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Les 28 IREM académiques constituent, depuis 1969, un réseau d'instituts universitaires dont les missions sont :

— de contribuer à la formation initiale et continue des enseignants ;
— de mener des recherches sur l'enseignement des mathématiques de la maternelle à l'université, d'expérimenter, d'innover en matière de pédagogie ;
— d'élaborer et diffuser des documents, à destination des enseignants et formateurs, sur les résultats de ces recherches, notamment dans les revues du réseau : Repères IREM, Petit x (secondaire) et Grand N (primaire) ;
— de diffuser la culture mathématique en organisant des séminaires, colloques, conférences de vulgarisation et rallyes ;
— d'être des centres de ressources (bibliothèques spécialisées), de rencontres et d'échanges ouverts à toute personne intéressée par l'enseignement des mathématiques.

La principale originalité des IREM est de mettre en synergie, dans les différents groupes de recherche, le travail d'environ un millier d'enseignants de mathématiques de tous horizons (de l'école au supérieur) et de chercheurs.

Les membres des différents IREM se rencontrent régulièrement lors des Commissions Inter-IREM (CII), en fonction de leur domaine de recherches. Certaines de ces commissions sont centrées sur un cycle (la COPIRELEM, les commissions Collège, Lycée, Lycée professionnel, Université et la CORFEM), d'autres sur un thème (commissions Épistémologie, Informatique, TICE, Didactique, Statistiques et probabilités) et d'autres encore sur un type d'activités (Pop'Math, Repères IREM, Publimath). Ces CII organisent des colloques nationaux et internationaux à destination des enseignants et formateurs. Elles publient également des ouvrages mutualisant les ressources produites dans les différents IREM.

L'ensemble du réseau est piloté par l'Assemblée des Directeurs d'IREM bénéficiant du soutien, du suivi et des réflexions d'un Comité Scientifique. Le site « Portail des IREM [3] » offre un grand nombre d'informations sur les activités du réseau et permet d'accéder facilement aux sites des différents IREM.

3. www.univ-irem.fr

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

de la maternelle à l'université

Promouvoir l'enseignement des mathématiques et défendre les intérêts des enseignants, telle est la mission de l'**APMEP** [4].

Dans ce but, elle mène une politique active et dynamique, comme en témoignent ses prises de position, ses propositions, ses productions, ses interventions et ses efforts de communication.

L'**APMEP** est totalement indépendante ; elle ne vit que de ses productions et des cotisations de ses adhérents.

Pour quoi adhérer ?

Pour promouvoir et défendre collectivement une certaine conception de l'enseignement des mathématiques : donner à tout élève, à tout étudiant, la formation mathématique la plus adaptée à ses capacités, ses intérêts, ses besoins et ceux de la société.

Pour pouvoir disposer à moindre coût de brochures en prise avec l'actualité de l'enseignement des mathématiques.

Pour contribuer à donner à l'Association les moyens de faire face à ses frais de fonctionnement et à ses prestations gratuites : site, bulletin Au fil des maths, BGV, Plublimath (base bibliographique)...

Pour participer au travail coopératif qui se fait à l'**APMEP**.

4. apmep.fr

Préface de Catherine Houdement,

Professeur Émérite, Université de Rouen Normandie

Cet ouvrage de trois-cent-trente pages montre la vitalité des initiatives qui encouragent et initient les élèves, mais aussi le grand public, à trouver du plaisir à faire des mathématiques. C'est en effet un challenge fort de convaincre les élèves et ce, dès le plus jeune âge, mais aussi les adultes, enseignants et parents, que l'activité scientifique, en particulier mathématique, peut distraire, épanouir, passionner ; qu'il est possible de se prendre au jeu, seul ou grâce à un collectif, et à un enjeu (gagner, dédier, comprendre) et pour les plus « accrochés » d'entrer en compétition.

L'ensemble des vingt-neuf contributions de Panoramath 7 décrivent des dispositifs impliquant élèves et enseignants, de toutes classes, parfois aussi des chercheurs en mathématiques. Ces initiatives se déroulent dans différentes régions françaises (sans oublier les Antilles), mais aussi dans d'autres pays : Algérie, Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Niger, Suisse, Tunisie, Ukraine... Elles sont portées par des comités issus des institutions qui gèrent l'éducation du pays et/ou par des associations de spécialistes, régionales, nationales ou transnationales, créées spécifiquement pour gérer toute l'infrastructure nécessaire aux rencontres des acteurs, à la conception des activités et leur étalonnage sur des niveaux scolaires, à la construction du calendrier, à la recherche des locaux, aux corrections et notations des productions des élèves... avec parfois le soutien des régions ou en association avec des partenaires privés.

Que donne à voir cet ensemble de contributions sur le plan de l'éducation mathématique ?

La variété des problèmes utilisés

Les problèmes laissent très souvent une grande part d'initiative aux résolveurs : pour interpréter le contexte, se familiariser avec le jeu, se représenter ce qui est demandé voire construire la question, pour inférer des connaissances mathématiques qui permettent d'avancer, pour construire des stratégies qui pourront être remplacées plus tard dans la scolarité par des techniques mathématiques plus sophistiquées, pour communiquer la réponse. Les problèmes mettent en jeu différents domaines des mathématiques : arithmétique et numérique, algébrique, grandeurs, géométrique, algorithmique, logique… avec des incursions dans la théorie des graphes, les mathématiques discrètes, le numérique. Ils sollicitent bien sûr des concepts et techniques de ces domaines, mais nécessitent aussi des connaissances pragmatiques (du monde et sur le monde), des expériences répétées, engagent des compétences sociales et d'autres moins spontanément pointées, comme des compétences spatiales (visualiser, orienter, dé/re-composer, organiser, *patterns*…), voire des compétences gestuelles…

La variété des contextes

Les contextes proposés sont variés : problèmes intra-mathématiques, problèmes de réalité évoquée (*word-problems*), avec énoncé plus ou moins humoristique, adaptation de situation didactique, anticipation des transformations d'un objet, usuel ou complexe, analyse d'un jeu…

La variété des types de communication vers les résolveurs

Sont visibles des textes accompagnés (ou pas) de dessins, de schémas, de graphiques, de programmes, avec des documents plus ou moins authentiques, tels que photos, cartes géographiques ; des contextes de fabrication d'un objet réel ou virtuel, des descriptions de jeu. Les énoncés intègrent des questions intermédiaires ou pas, proposant des indices pour faire avancer ou pas…

La variété des « outils » autorisés

On rencontre bien sûr l'incontournable doublet papier-crayon, mais aussi des objets réels pour lancer le problème ou pour expérimenter, des instruments de calcul et de dessin, matériels ou virtuels, tels que calculatrices, tableurs, robots, logiciels de géométrie dynamique, logiciels permettant des changements de registres… Tous ces outils sont parfois résumés dans les contributions sous l'expression « matériel usuel de la classe ».

La variété des modalités de travail

Les résolveurs peuvent travailler individuellement, en groupe, choisi ou imposé ; en classe entière ; avec toutes ces modalités à la fois ; sous le contrôle des élèves ou de l'enseignant ; sous la surveillance de l'enseignant usuel ou d'un enseignant qui doit être autre…

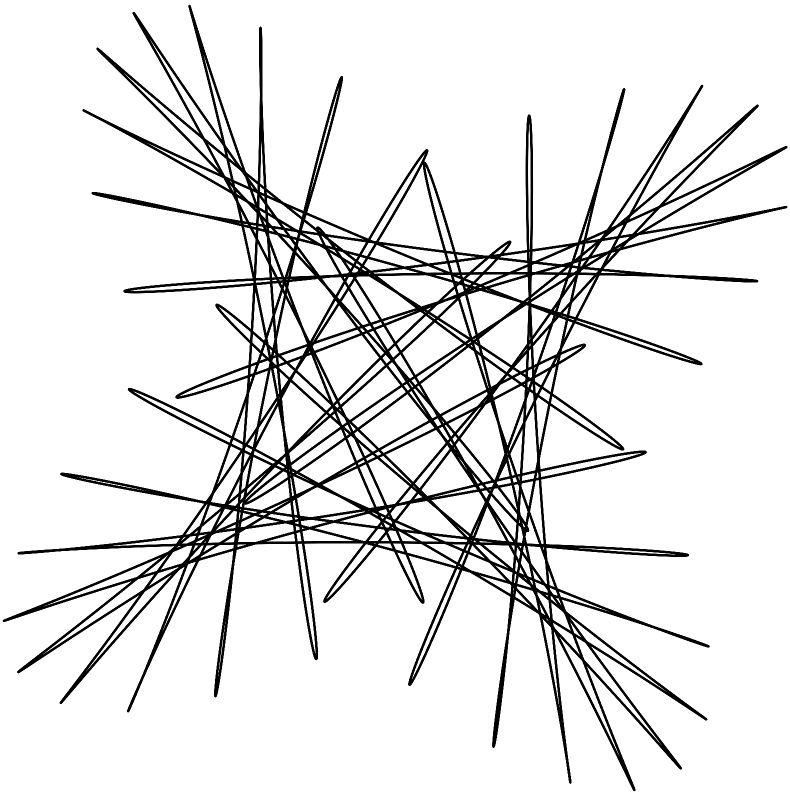
De nombreuses contributions proposent des accompagnements pour une réutilisation des problèmes proposés

La présence d'analyses des problèmes est une valeur ajoutée pour en permettre l'appropriation par des personnes ne les ayant ni conçus, ni encore utilisés. Sont particulièrement intéressants des exemples de stratégies différentes de réussite, engageant plus ou moins de connaissances mathématiques ; des exemples de formes de réponses différentes ; des exemples de difficultés d'élèves, anticipées par l'enseignant ou réellement rencontrées ; et enfin le repérage de connaissances minimales pour avancer vers la réussite. Cela aide notamment à déceler la potentialité de tel problème pour introduire une technique plus économique ou renforcer le sens d'un concept, pour permettre un débat avec des argumentations à visée mathématique. Ces accompagnements facilitent et motivent une réutilisation dans le cadre des mathématiques ordinaires de la classe.

La présence de feuilles de recherche d'un élève ou d'un groupe d'élèves témoigne de l'intérêt qu'il y a à se pencher sur ces écrits, notamment pour repérer la place que prennent, dans les réponses des élèves, des traces graphiques informelles, des dessins, des schémas, des arbres, des tableaux, correspondant à une externalisation de la structuration progressive de la pensée mathématique qui précède souvent la transformation en symboles mathématiques plus conventionnels.

Oui, vraiment, ce Panoramath 7 est un bel ouvrage qui témoigne de l'énergie des collègues investis dans le partage de leur passion pour les mathématiques. Il devrait permettre à ceux qui le souhaitent de rejoindre une équipe proche de chez eux, pour participer au travail de choix, conception, adaptation et analyse des problèmes. Il devrait permettre à ceux qui le souhaitent, dans le cours de l'enseignement ordinaire, d'engager leurs élèves à de profondes réflexions mathématiques, à des défis à leur pensée, à partir de tels problèmes.

Bonne lecture ! Bonnes recherches ! Bonnes mathématiques !



$$\begin{cases} x(t) &= 100\cos(-44t) - 84\cos(-2t+101) + 94\cos(48t+33) \\ y(t) &= 100\sin(-44t) - 84\sin(-2t+101) + 94\sin(48t+33) \end{cases}$$

Table des matières

Le lecteur notera la très grande diversité des situations décrites dans cette brochure ; c'est ce qui en fait sa richesse.
L'appel à contribution pour cet ouvrage demandait « de choisir deux ou trois sujets et de nous faire parvenir les énoncés, les solutions et une analyse de ces sujets ». Les contributeurs ont pu interpréter librement cette consigne, en fonction de leurs méthodes pédagogiques. Cette liberté a parfois ouvert des échanges lors des relectures.
À la suite de ces échanges, les auteurs restent responsables de leur article.

Mathématiques sans Frontières Junior

Une compétition vraiment internationale

Présentation

Mathématiques sans Frontières junior est une compétition entre **classes de CM2** et de **sixième** en **France** et de niveaux équivalents à l'**étranger**. Toutes les classes participent le même jour sur le même sujet, cependant les palmarès et remises des prix relèvent d'une organisation par secteur. En France, les inspections pédagogiques régionales des académies participantes se chargent d'organiser la compétition.

Née en 2004, elle fonctionne comme sa grande sœur « Mathématiques sans Frontières » qui s'adresse depuis près de 30 ans aux classes de troisième et seconde.

La participation n'a cessé d'augmenter et en 2018, 3 248 classes ont participé à Mathématiques sans Frontières Junior, permettant à environ 72 000 élèves de composer sur le même sujet, dans une trentaine de pays !

Une **équipe de professeurs des premier et second degrés** de l'académie de Strasbourg est chargée de la création des sujets : 9 exercices pour tous depuis la réforme des programmes, l'énoncé du premier exercice est donné en **allemand, anglais et arabe et les élèves doivent y répondre dans une de ces langues**. Chaque année, une épreuve d'entraînement est proposée aux participants pour préparer l'épreuve finale.

Épreuves, corrigés et rapports de jury sont consultables sur le site de la compétition. Pour permettre aux enseignants d'utiliser plus facilement les exercices, ils sont sélectionnables grâce à une **classification** par plusieurs entrées : les notions du programme, les domaines mathématiques, les stratégies mises en œuvre, etc.

La compétition s'adresse aux **classes entières** et ne demande qu'une réponse par classe et par exercice : cela favorise donc la participation de tous, l'esprit d'équipe, l'initiative des élèves. La difficulté graduée et les thèmes variés des exercices permettent à tous les élèves d'une même classe d'apporter leur contribution et chacun peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Une classe de CM2 et une classe de sixième peuvent choisir de s'associer pour concourir ensemble dans la catégorie jumelage favorisant une liaison inter-degrés vivante, effective et initiant des échanges de pratiques professionnelles constructifs et appliqués. Ce mode d'inscription est depuis quelques années très plébiscité : plus de la moitié des classes le choisissent !

Cette compétition permet de renforcer la liaison inter-degrés, d'ouvrir des frontières entre la France et les autres pays, entre les établissements, entre les mathématiques et les langues étrangères et entre les élèves d'une même classe !

Contacts

@ msfju@ac-strabourg.fr
maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/MSF_junior/SommaireJunior.htm

Notes pour la suite

Dans cette édition de Panoramath, nous proposons une série d'épreuves qui ont été réutilisées lors de défis ou sur des salons à destination du grand public : ces épreuves présentent la particularité d'être manipulables ou d'avoir une ergonomie ludique. Nous proposons une rubrique « conseils pour un défi » pour partager les astuces utilisées par les collègues lors de ces manifestations.

Dans les sujets d'origine, ces exercices sont souvent liés à l'annexe, volet détachable comportant des éléments à découper. Les élèves sont ainsi clairement invités à manipuler.

Un extrait du rapport de jury donnera une analyse des résultats obtenus lors du concours.

Lumi-cache (extrait de la finale 2015)

Énoncé

Pour l'éclairage de sa soirée d'anniversaire, Jules dispose de 4 dalles de spots de couleurs et de 4 caches qu'il peut tourner et retourner.

Les 4 dalles de spots :
(B pour bleu, J pour jaune, R pour rouge, V pour vert)

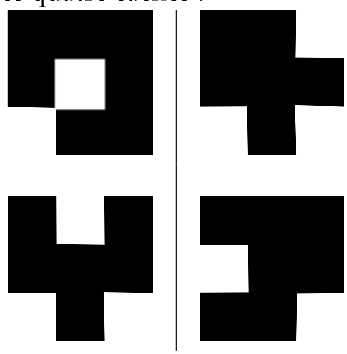
B	V	B
J	R	J
R	B	R

J	R	R
B	V	B
R	J	V

R	V	V
J	V	B
R	B	J

J	V	J
B	B	R
V	R	J

Les quatre caches :



Pour créer une ambiance, il veut que chaque dalle :

— ne diffuse qu'une seule couleur (vert, jaune, rouge ou bleu) ;

— ait une couleur différente des autres.

Colle un cache sur chaque dalle pour créer l'ambiance voulue par Jules.

Conseils pour un défi

Agrandir les pièces, les plastifier et les découper.

L'énoncé peut être découvert seul par le joueur capable de se représenter la situation. Des joueurs à partir de 4 ans peuvent également réussir l'épreuve à condition d'accompagner l'énoncé d'un exemple qui serait de placer un cache sur une dalle de manière à illustrer qu'on ne peut, sur cette proposition, voir qu'une seule couleur ; reste à conclure : « À ton tour, trouve le bon cache à placer sur la bonne dalle pour voir une seule couleur ». Il y a alors deux niveaux de jeu possibles : trouver une manière de voir juste une couleur sur une dalle ou trouver la solution complète pour avoir les 4 dalles comme le demande l'énoncé d'origine.

Solution

Il faut penser à retourner certains caches.

Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

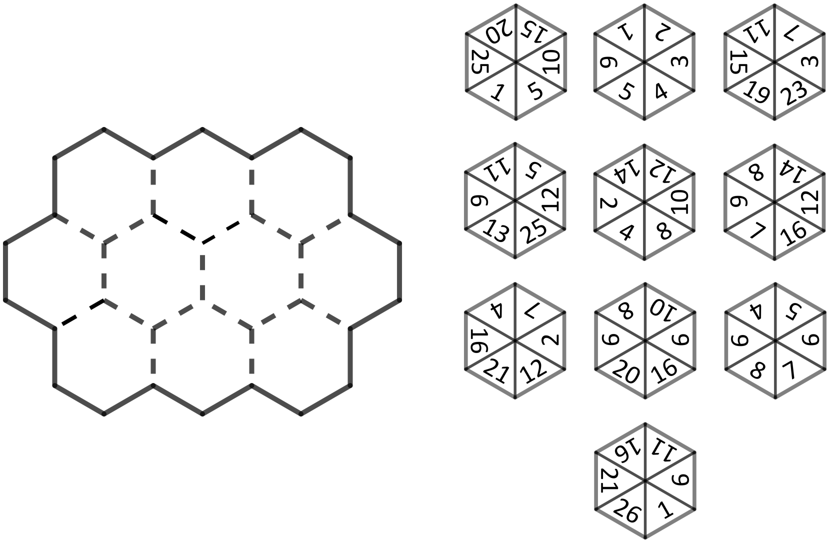
Cette épreuve avait pour objectif de permettre aux élèves de manipuler en géométrie, notamment en jouant sur des effets de symétrie et de positionnements relatifs des objets. La situation demandait des connaissances culturelles (une dalle de spot) et l'énoncé était typique de ceux mélangeant des informations de natures et de fonctions variées : texte intégrant des conditions qui s'appliquent sur l'illustration, images utiles ou non à la résolution, gestion des annexes. Si l'énoncé était attrayant, il comportait des particularités textuelles qui posent plus de difficultés dans les contextes d'éducation prioritaire, comme constaté lors des sessions précédentes.

A noter que le taux de « Non Réponse » est plus important au collège qu'à l'école. Est-ce un effet de contrat didactique pour une épreuve pas assez mathématique ou trop enfantine selon les représentations des collégiens ? Difficile de l'affirmer sans entretien d'explicitation.

À 12 ça colle (extrait de la finale 2016)

Énoncé

Léonore réalise un puzzle avec 10 pièces. La somme des nombres inscrits dans 2 triangles que l'on place l'un contre l'autre doit être égale à 12.
Colle, sur cette forme, les 10 pièces de son puzzle.

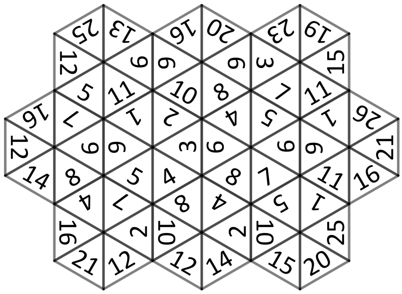


Conseils pour un défi

Agrandir les pièces, les plastifier et les découper. L'idéal étant de coller les pièces sur du carton plume pour épaissir et permettre une meilleure préhension des pièces.

La résolution demande un certain temps. Comprendre que les nombres supérieurs à 12 doivent se trouver « en extérieur » permet une nette avancée. Il peut être intéressant, pour relancer un joueur, de placer une pièce comportant de tels nombres à « l'intérieur » et de lui suggérer de poursuivre pour faire naître cette idée.

Solution



Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

Non-réponse : 7,67 %. Ce nombre reste en contradiction avec l'analyse a priori qui avait conduit à valider cet exercice et notamment l'aspect contraint, ludique et manipulatoire de la réponse. Aspect trop contraint ? Avec des contraintes géométriques et notamment de positionnement relatif ? Il semble que beaucoup de groupes aient abandonné la résolution ne réussissant que partiellement et ne rendant rien, ou encore ayant du mal à démarrer l'exercice en considérant que la présence de nombres supérieurs à 12 rendait l'exercice impossible. Un dommage collatéral de la propension des élèves français à préférer ne pas répondre plutôt que de se tromper.

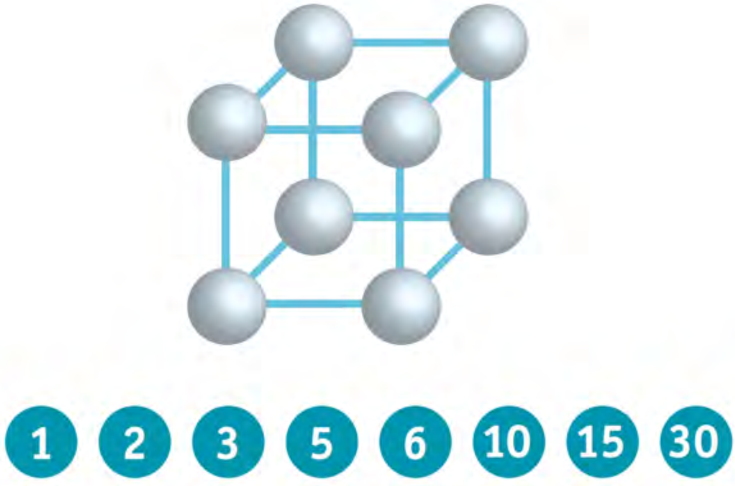
Un quart des réponses ne respectent les contraintes que pour une partie des triangles.

Quoiqu'il en soit, cette épreuve a été massivement réussie et participe à l'obtention d'une meilleure note finale. De quoi renforcer le sentiment de compétence des élèves en mathématiques et d'efficacité des outils.

Liaisons multiples (extrait de la finale 2015)

Énoncé

Pierre veut réaliser cette construction cubique. Il dispose de bâtonnets aimantés et de boules aimantées numérotées.
Un bâtonnet relie deux boules uniquement si l'un des nombres inscrits est multiple de l'autre.
Numérote le schéma de la construction de Pierre.



Conseils pour un défi

Agrandir le cube sur une feuille format A4 et le glisser dans une pochette transparente lisse (pochette de classeur « cristal »). Les essais peuvent alors se faire à l'aide d'un feutre ardoise.

Il peut être intéressant de faire apparaître les boules à côté du cube pour rappeler au joueur les nombres dont il dispose.

Solution

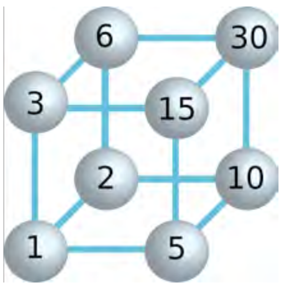
Il y a plusieurs solutions possibles…

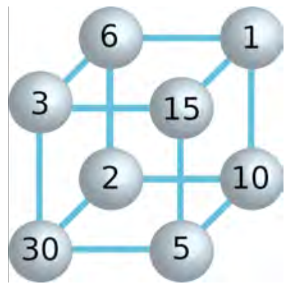
Pour répartir les nombres sur les sommets du cube, on peut grouper les nombres selon qu'ils sont multiples ou sous multiples les uns des autres ou non.

Il est également important de considérer que chaque nombre est lié à 3 autres.

Ainsi, on peut répartir les nombres pairs/impairs (2, 6, 10, 30 et 1,3, 5, 15).

Voici deux solutions :





Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

Cette épreuve a été réussie par plus de 70% des classes. Réussite à relativiser quand on observe le nombre de classes qui font au moins 2 erreurs de calcul (1 classe sur 6 en général, 1 sur 4 en REP) ou dont les réponses (1 classe sur 10, 1 sur 5 en REP) montrent notamment une mauvaise interprétation de la relation « multiple de » dans cette situation de transfert simple. Ainsi, pour ces réponses, a est multiple de $b \Rightarrow b = n \times a$.

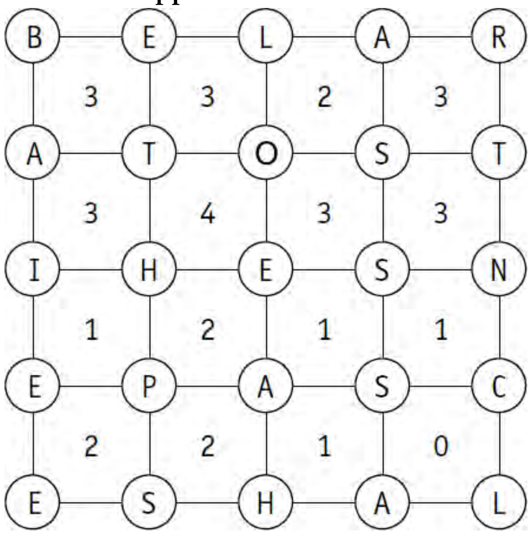
Ce modèle mathématique simple, faisant appel à la notion de multiple, notion assez bien maîtrisée en fin de cycle 3, explique probablement ces résultats. De plus, si l'habillage est géométrique, en 3D même, la présentation de la figure fait qu'elle s'apparente assez facilement à un jeu de grille. Ces types de jeux, depuis leur renouveau initié par le Sudoku, sont régulièrement utilisés à l'école mais aussi en dehors.

Cette épreuve est une situation classique de transfert de notions normalement assises à cet âge-là, avec un contrat didactique ludique et des contenus maîtrisés : une occasion de valoriser les réussites des élèves ! Pour aller plus loin, ce problème pourrait être un outil de repérage des difficultés à calculer ou transférer en mathématiques.

Le cœur a ses raisons... (extrait de la finale 2015)

Énoncé

Le nom d'un mathématicien célèbre se cache dans cette grille, mais il y a des lettres en trop.
Le nombre inscrit dans chaque case indique le nombre de lettres à noircir sur les sommets de cette case.
Colle la grille en faisant apparaître le nom du mathématicien.

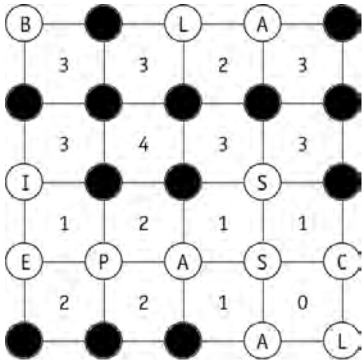


Conseils pour un défi

Agrandir la grille sur une feuille format A4 et la glisser dans une pochette transparente lisse (pochette de classeur « cristal »). Les essais peuvent alors se faire à l'aide d'un feutre ardoise.

Une astuce de jeu consisterait à entourer une lettre si on est certain qu'elle ne sera pas noircie. Il y a une relation binaire : « entourée / non entourée » : avoir une des deux informations permet de progresser.

Solution



Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

La grande majorité des classes est entrée dans le problème et s'est représenté la situation (75%) : trouver le nom d'un mathématicien grâce à la grille. Parmi elles, une classe sur 6 propose un nom sans rapport, ce qui, croisé avec les constats lors des observations, met en évidence deux difficultés :

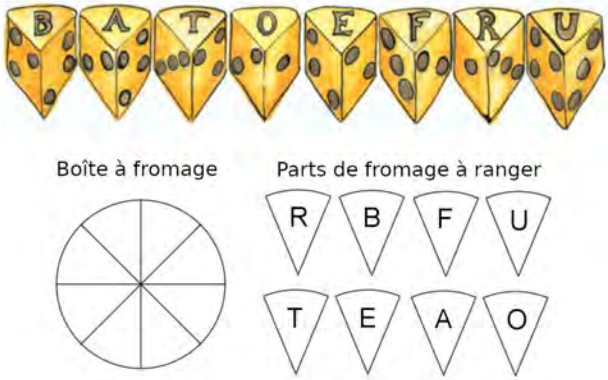
- transformer la condition écrite (2e phrase de l'énoncé et grille à côté) en procédure pour identifier les cases à noircir ou non ;
- mener la démarche à terme. En effet, des classes ont proposé des noms, souvent de mathématiciens, comme Thalès ou Ératosthène : les élèves finissaient par noircir des cases en identifiant les lettres qui composent le nom du mathématicien deviné.

Pour ces démarches, la contrainte finale (langagière et culturelle) prenait le pas sur les procédures mathématiques dans la grille. Le profil des écoles REP, où les difficultés langagières sont plus fréquentes et les faits culturels moins maîtrisés, tend à confirmer l'importance du langage dans cet énoncé (le profil montre que seule la moitié des classes produit une réponse sensée, un tiers produit la réponse juste) ou de la culture dans la formulation de la réponse (une proportion double de classes sans nom de mathématicien formulé mais avec une grille juste).

Domino Fromage (extrait de la finale 2017)

Énoncé

Julie joue à un jeu proposé par son fromager.
Pour poser les parts dans la boîte, il faut que chaque trou d'une face touche un trou d'une autre face.
Colle les huit parts de fromage dans la boîte.



Conseils pour un défi

Agrandir les pièces, les plastifier et les découper. L'idéal étant de coller les pièces sur du carton plume pour épaissir et permettre une meilleure préhension des pièces.

Pour des élèves plus jeunes, il peut être intéressant de proposer d'imaginer le fromage avant sa découpe pour mettre en évidence la logique de correspondance des trous, la consigne devient alors « Place les parts pour reformer le fromage comme avant qu'il ne soit découpé ».

Solution

Beaufort.

Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

Cette épreuve dans le domaine de la géométrie a été massivement réussie, notamment du fait de la manipulation, de la validation intrinsèque par la nature de la réponse (un mot qui avait du sens et qui de plus est un fromage) et de la difficulté (certes légère en cycle 3) qui résidait principalement dans la gestion de la contrainte des trous en face des trous. Celle-ci a causé la grande majorité des erreurs (de 1 à 4 points obtenus) dans les classes où seule la quantité des points a été considérée, pas leur répartition.

Nom valide (extrait de la finale 2014)

Énoncé

Mathis vient de faire son meilleur score à un jeu vidéo et souhaite l'enregistrer. Il inscrit son prénom en fin de partie en faisant défiler l'alphabet sur la molette à l'aide de ces 4 touches :

 et  permettent de passer d'une lettre à l'autre.

 permet de valider le caractère choisi.
Après chaque validation, la molette revient à A.

 permet de valider le prénom.

Chaque fois que l'on appuie sur une touche, on entend un bip.
Combien de bips au minimum entendra Mathis pour enregistrer son prénom ?

Conseils pour un défi

Il est possible de fabriquer une molette en collant une bande de papier sur un couvercle de boîte à fromage et de mimer les déplacements possibles pour bien comprendre la situation. Il est cependant intéressant d'éloigner les joueurs de la manipulation pour travailler la capacité de représentation mentale : s'imaginer ce qui n'est pas sous ses yeux et opérer à des déplacements virtuels.

Solution

De A à M, 12 touches + Validation de la lettre : 13 bips.
De A à A, 0 touche + Validation de la lettre : 1 bip.
De A à T, 7 touches + Validation de la lettre : 8 bips.
De A à H, 7 touches + Validation de la lettre : 8 bips.
De A à I, 8 touches + Validation de la lettre : 9 bips.
De A à S, 8 touches + Validation de la lettre : 9 bips.
Touche verte de validation finale : 1 bip.
Mathis entendra au minimum 49 bips au total.

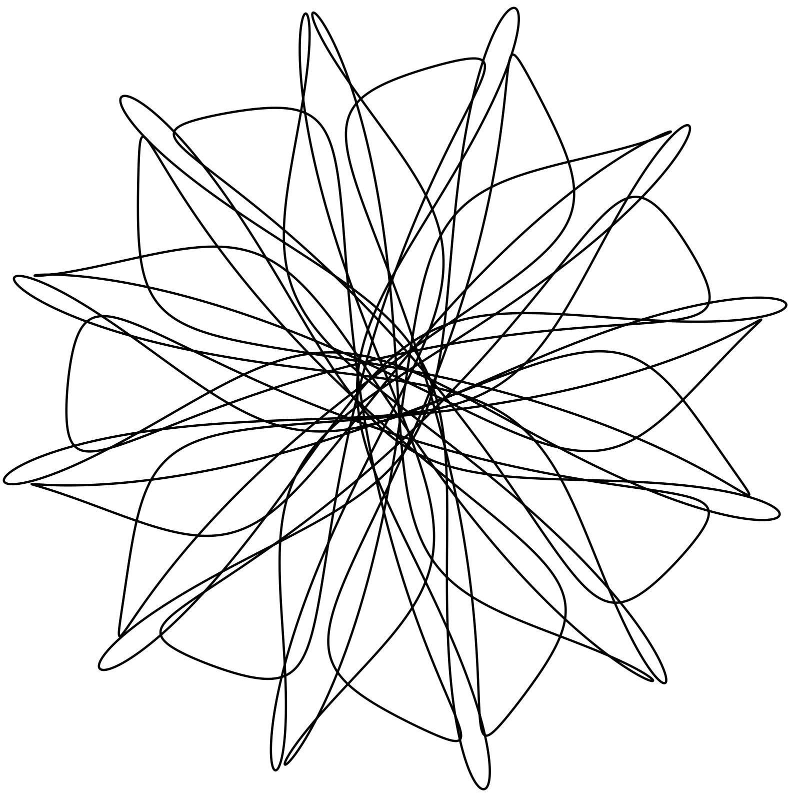
Analyse de l'épreuve lors du concours (extrait du rapport du jury)

Cet exercice a un profil trompeur, ce qu'a confirmé une analyse plus fine des productions et l'observation de la passation. Ainsi les réponses 71, 73 et 77 bips (donnant 1 ou 1,5 point), obtenues en utilisant des progressions uniquement en avançant ou en reculant, comptant le A ou oubliant la validation, montrent une bonne représentation de la situation et du problème, le nombre n'étant pas optimisé.

De plus, le très faible taux de « non-réponse » et le peu de réponse à 0 point montrent que cet exercice a été investi par une grande majorité des classes. Parmi les raisonnements faux, le plus fréquent utilisait la somme des rangs des lettres, sans tenir compte ni de la validation, ni du retour à A après la validation.

Parmi les démarches employées, là encore une grande variété s'est fait jour, notamment dans leur structuration, allant de l'utilisation de tableaux aux calculs, en passant par la schématisation de molettes ou les dessins des touches pour chacune des pressions, en correspondance ou non avec les lettres.

Cette épreuve a donc généré recherche et développement de procédures personnelles de résolution en cohérence avec une situation accessible : un objectif essentiel et pour les enseignants et pour les concepteurs de Mathématiques sans Frontières Junior !



$$\begin{cases} x(t) &= 100\cos(-18t+180) - 100\cos(13t+45) - 21\cos(43t-8) \\ y(t) &= 100\sin(-18t+180) - 100\sin(13t+45) - 21\sin(43t-8) \end{cases}$$

Rallye Mathématique des lycées de Bourgogne

Présentation

Ce rallye est gratuit et est destiné aux élèves des lycées de Bourgogne, de la seconde à la terminale, quelle que soit la série.

Historique

Ce rallye a été créé en 1979 par Messieurs G. Bouillot, J. Chèze, R. Durier (directeur de l'IREM), D. Estève, R. Guyot, M. Lafond, G. Michelot, D. Reisz, L. Sautereau, J. Arbault.

Il y a beaucoup moins d'intervenants aujourd'hui.

Après une pause de 1986 à 1989, il fonctionne sans interruption depuis 1990.

Partenaires

IREM de Dijon - Institut Mathématique de Bourgogne - Rectorat de l'Académie de Dijon.

Compétition

Ce rallye se déroule chaque année, l'avant-dernier ou le dernier mercredi après-midi de janvier, de 14h à 18h.

Les élèves s'inscrivent individuellement ou par équipes (il leur est conseillé de participer en équipes de trois ou quatre) et ils doivent traiter six exercices durant ces quatre heures. Ils peuvent utiliser tous les documents et machines possibles. Quatre catégories ont été retenues depuis quelques années :

— Seconde (y compris les élèves de lycée professionnel) ;

— Première et Terminale d'autres séries que la série S ;

— Première S ;

— Terminale S.

Ce rallye est sans prétention. Les exercices posés ont un caractère ludique autant que mathématique et les énoncés sont toujours courts et aussi « attrayants » que possible. Les connaissances exigées sont modestes.

L'intérêt du public est grand, grâce à l'appui de la presse régionale et parfois des stations de télévision bourguignonnes. Les énoncés et les solutions paraissent dans les quotidiens, ce qui permet à de nombreux amateurs d'envoyer leur solution, sans oublier leurs commentaires.

Ce rallye rassemble environ 700 élèves chaque année. À titre d'exemple, en janvier 2018 ont participé 675 élèves regroupés en 208 équipes et provenant de 27 lycées.

Un peu plus de 20 % des élèves participants sont récompensés (livres d'énigmes mathématiques ou de vulgarisation mathématique, clés USB, casse-têtes).

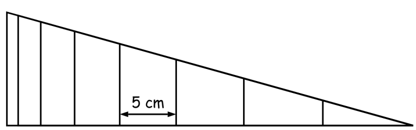
Contacts

Patrick Guisset, Michel Lafond, Florian Plastre et Marie Wagner.
@ florian.plastre@ac-dijon.fr
irem.u-bourgogne.fr/rallyes-mathematiques/lycees.html

Hissez les couleurs (2017, 1re S et TS)

Énoncé

La Rallynésie occidentale vient d'acquérir son indépendance, et le choix de son drapeau porte sur un motif triangulaire rectangle (voir figure).



Les 8 bandes verticales ont pour largeur en cm : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Chacune des bandes sera colorée soit en rouge soit en vert.

Comment faire en sorte que les aires des domaines rouges et verts soient égales ? Faire le dessin.

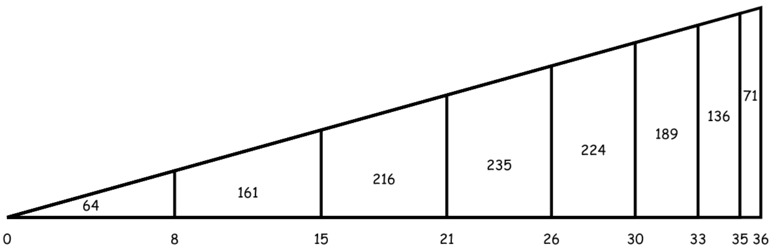
Solution

Les bases des triangles rectangles successifs mesurent :
8 cm ; $8+7=15$ cm ; $15+6=21$ cm ; $21+5=26$ cm ; $26+4=30$ cm ; $30+3=33$ cm ; $33+2=35$ cm et $35+1=36$ cm.

Les hauteurs de ces 8 triangles sont proportionnelles à leurs bases. On peut donc supposer que les hauteurs de ces 8 triangles sont : 16 cm, 30 cm, 42 cm, 52 cm, 60 cm, 66 cm, 70 cm et 72 cm.

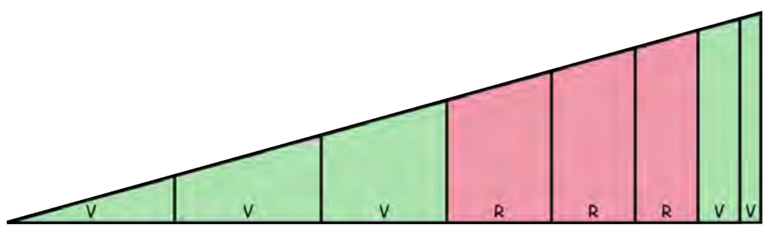
Les aires sont alors : 64 cm^2, 225 cm^2, 441 cm^2, 676 cm^2, 900 cm^2, 1 089 cm^2, 1 225 cm^2 et 1 296 cm^2.

Par soustraction des aires de triangles consécutifs emboîtés, les aires des bandes verticales sont : 64 cm^2, 161 cm^2, 216 cm^2, 235 cm^2, 224 cm^2, 189 cm^2, 136 cm^2, 71 cm^2.



Il faut trouver des bandes dont la somme des aires est $\frac{1\,296}{2} = 648$. Si l'on suppose que la bande d'aire 235 cm^2 est de couleur rouge, il reste à colorier en rouge $648 - 235 = 413$ cm^2 qui n'est réalisable qu'en coloriant les bandes d'aire 224 cm^2 et 189 cm^2.

D'où la solution unique à permutation près des couleurs :



Analyse

Cet exercice a été traité par 80 % des équipes, avec un taux de réussite de 40 %. Beaucoup d'équipes ont choisi arbitrairement une hauteur de drapeau, sans justifier que le résultat est indépendant de ce choix. Sans parler de proportionnalité, l'utilisation du théorème de Thalès était une alternative. Ensuite, un petit test permettait de résoudre ce problème.

Mèches (2015, tous niveaux)

Énoncé

Trois mèches se consument respectivement en 64 secondes, 48 secondes et 24 secondes lorsqu'on les allume à un bout et moitié moins longtemps si on les allume aux deux bouts !
On ne peut pas les allumer ailleurs qu'aux extrémités.
Il est facile de chronométrer exactement une minute : on allume à un bout, et on laisse bruler la mèche de 48 secondes, puis on allume aux deux bouts celle de 24 secondes.
Mais comment chronométrer exactement 47 secondes ?

Solution

Soient A la mèche de 64 s, B la mèche de 48 s et C la mèche de 24 s.

On allume la mèche A et la mèche B à un bout, et la mèche C aux deux bouts.

Au bout de **12 secondes**, il restera une mèche A de 52 s, allumée à un bout ; une mèche B de 36 s, allumée à un bout. On allume alors le deuxième bout de la mèche B.

Au bout de **18 secondes**, il ne reste qu'une mèche A de 34 s.

Si à cet instant on allume le deuxième bout de la mèche A, au bout de **17 secondes**, il ne restera plus rien.

Le temps total de la combustion a été 12 + 18 + 17 = **47 secondes**.

Analyse

Cet exercice a été traité par 82 % des équipes, avec un taux de réussite de 22 %. Nous espérions une meilleure réussite mais beaucoup d'équipes ont proposé des solutions dans lesquelles le chronométrage était évasif.

Cet exercice ne nécessite aucune connaissance mathématique : seule une part d'imagination et de logique suffisait. Beaucoup de tentatives ont cependant été infructueuses.

Réverbération (2018, tous niveaux)

Énoncé

Le produit d'un nombre entier N par le nombre « miroir » N' obtenu en écrivant N de droite à gauche est égal à 16 029 559.
Que vaut N ?

Solution

Si N avait moins de 4 chiffres, on aurait $NN' \leqslant 999^2$ soit

$$NN' \leqslant 998\,001$$

d'où $NN' < 16\,029\,559$.

Si N avait plus de 4 chiffres on aurait $NN' \geqslant 10001^2$ soit

$$NN' \geqslant 100\,020\,001$$

d'où $NN' > 16\,029\,559$.

Donc N a exactement 4 chiffres : $N = abcd$ et on peut supposer $a \leqslant d$.

Puisque NN' se termine par 9, les seules possibilités pour (a,d) sont $(1,9)$; $(3,3)$; $(7,7)$.

— Si $N = 3bc3$, on a $NN' \leqslant 3\,993^2$ soit $NN' \leqslant 15\,944\,049$ d'où

$$NN' < 16\,029\,559.$$

— Si $N = 7bc7$, on a $NN' \geqslant 7007^2$ soit $NN' \geqslant 49\,098\,049$ d'où

$$NN' > 16\,029\,559.$$

On conclut donc que N est de la forme $1bc9$ (ou son miroir).

On étudie ensuite les valeurs de b possibles.

— Si $b \leqslant 5$, on a $NN' \leqslant 1\,599 \times 9\,951$ soit $NN' \leqslant 15\,911\,649$ d'où

$$NN' < 16\,029\,559.$$

— Si $b \geqslant 8$, on a $NN' \geqslant 1\,809 \times 9\,081$ soit $NN' \geqslant 16\,427\,529$ d'où

$$NN' > 16\,029\,559.$$

Il reste donc deux possibilités : $N = 16c9$ ou $N = 17c9$ (ou leur miroir).

Quelques essais pour la valeur de c montrent que la seule possibilité est **N = 1 729 ou son miroir 9 271.**

Travaux d'élèves

Programme en Python proposé par le lycée Stephen Liégeard de Brochon :

Exercice 4 : J'ai créé un programme python qui essaye tous les nombres de 0 à 10000.

```
def main() :
    liste = []
    for y in range(10 000):
        yy = str(y)
        liste = list(yy)
        try :
            a = liste[0]
        except:
            a = 0
        try :
            b = liste[1]
        except:
            b = 0
        try :
            c = liste[2]
        except:
            c = 0
        try :
            d = liste[3]
        except:
            d = 0
        try :
            e = liste[4]
        except:
            e = 0
        try :
            f = liste[5]
        except:
            f = 0
        nb = f + e + d + c + b + a
        nb2 = int(nb)
        total = y*nb2
        if total = = 16029559:
            print y

main()
```

Je transforme le nombre y pour qu'il soit possible de l'inverser.

J'utilise des try/except pour ne pas avoir d'erreur si le numéro de la liste n'existe pas.

La réponse est 1729 ou 9271 car 9271 est le nombre miroir de 1729 et inversement.

Une seconde **programmation en Python** proposée par le lycée Eiffel de Dijon :

Exercice 1

Afin de résoudre cet exercice, nous avons utiliser un algorithme coder en Python. Nous avons donc :

```
unite; dizaine, centaine; millier = 0;0; 0;0
N, N' = 0, 0
def changement ():
    global unite, dizaine, centaine, millier, N, N'
    if unite == 10:
        unite = 0
        dizaine = dizaine + 1
    if dizaine == 10:
        dizaine = 0
        centaine = centaine + 1
    if centaine == 10:
        centaine = 0
        millier = millier + 1
for x in range (100 000):
    N = unite + dizaine x 10 + centaine x 100 + millier x 1000
    N' = unite x 1000 + dizaine x 100 + centaine x 10 + millier.
    if N x N' = 1602 9559:
        print (N)
        print (N')
    unite = unite + 1
    changement ()
```

Programmation sous Algobox proposée par le lycée Julien Wittmer de Charolles :

Algorithme de l'exercice 1 :

```
sanstitre  -  24.01.2018

******************************************

******************************************

VARIABLES
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
  G EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
  F EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  Y PREND_LA_VALEUR 16029559
  //Y représente le nombre à trouver
  G PREND_LA_VALEUR 0
  POUR A ALLANT_DE 1 A 9
    DEBUT_POUR
    POUR B ALLANT_DE 0 A 9
      DEBUT_POUR
      POUR C ALLANT_DE 0 A 9
        DEBUT_POUR
        POUR D ALLANT_DE 1 A 9
          DEBUT_POUR
          //On va tester pour faire en sorte que le nombre composé des 4 chiffres A, B, C et D balait toutes les possibilités de 1001 à 9999.
          E PREND_LA_VALEUR A*1000+B*100+C*10+D
          //E représente ici le nombre N.
          F PREND_LA_VALEUR D*1000+C*100+B*10+A
          //F représente ici le nombre "miroir" N'.
          G PREND_LA_VALEUR E*F
          //On va calculer N*N'.
          SI (G==Y) ALORS
            DEBUT_SI
            AFFICHER E
            //On affiche N et N'.
            FIN_SI
          FIN_POUR
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Analyse

Près de 84 % des équipes ont proposé une réponse correcte à cet exercice.

C'est un bon exemple d'exercice-type du rallye :

- son énoncé est court ;
- il est suffisamment attractif pour que les élèves s'y plongent facilement ;
- il donne l'impression que sa résolution est simple ;

— son traitement ne demande aucune connaissance mathématique : il suffit d'un peu de réflexion, d'intuition, de tests.

Il est intéressant de noter que certaines équipes ont proposé une résolution sous forme d'un programme. C'est pourquoi trois exemples ont été proposés ci-dessus : l'un sous Algobox et deux en Python (dont l'un avec la gestion de listes).

Cet exercice peut être proposé lors d'une séance d'algorithmique précédée d'un question préliminaire : comment, par des opérations numériques, récupérer chaque chiffre d'un nombre donné ? C'est l'occasion de manipuler la division euclidienne par 10.

Pour terminer cette analyse, nous nous attendions évidemment à un fort taux de réussite (ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas) et à quelques résolutions sous forme de programmation : cette attente a été largement comblée !

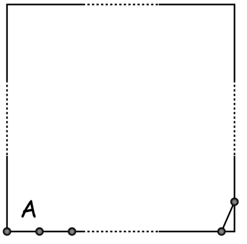
La puce sauteuse (2018, 1re S et TS)

Énoncé

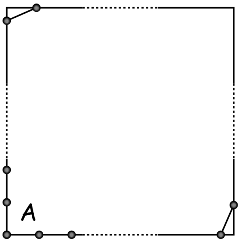
Une puce savante fait des sauts sur un fil tendu selon un carré. Elle commence en un sommet du carré et ensuite fait des bonds en avant de 20 cm. Son dernier saut, après un seul tour, la ramène exactement à son point de départ. Elle a effectué 130 sauts, sans nécessairement passer par tous les sommets du carré.
Quelle est l'aire du carré délimité par le fil ?

Solution

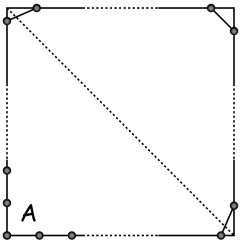
Représentons par des petits disques gris tous les points sur lesquels la puce s'est posée. La lettre A désigne le point de départ.

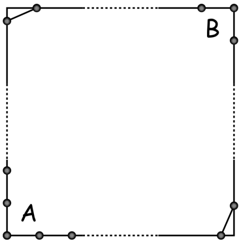


Par symétrie, on a donc :

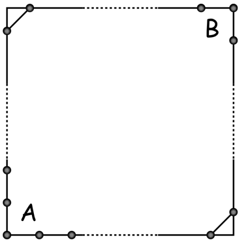


Il y a alors deux possibilités selon que la puce a atteint ou non le coin B en haut à droite :





Le premier cas est impossible, car le nombre de disques situés sous la diagonale (en pointillé) serait impair, et le nombre de disques situés au dessus serait pair. Le nombre total de disques serait impair, ce qui n'est pas le cas de 130. On est donc dans le second cas et la diagonale (AB) est axe de symétrie. Ceci amène à la configuration ci-dessous :



Si k est le nombre de disques situés sur chaque côté, on a

$$4(k-1)+2=4k-2=130$$

d'où $k=33$.

Le côté du carré mesure $((k-1)+\frac{\sqrt{2}}{2})20=640+10\sqrt{2}\simeq 654{,}14$ cm d'où l'**aire demandée** $(640+10\sqrt{2})^2 \simeq$ **427 901,93 cm²**.

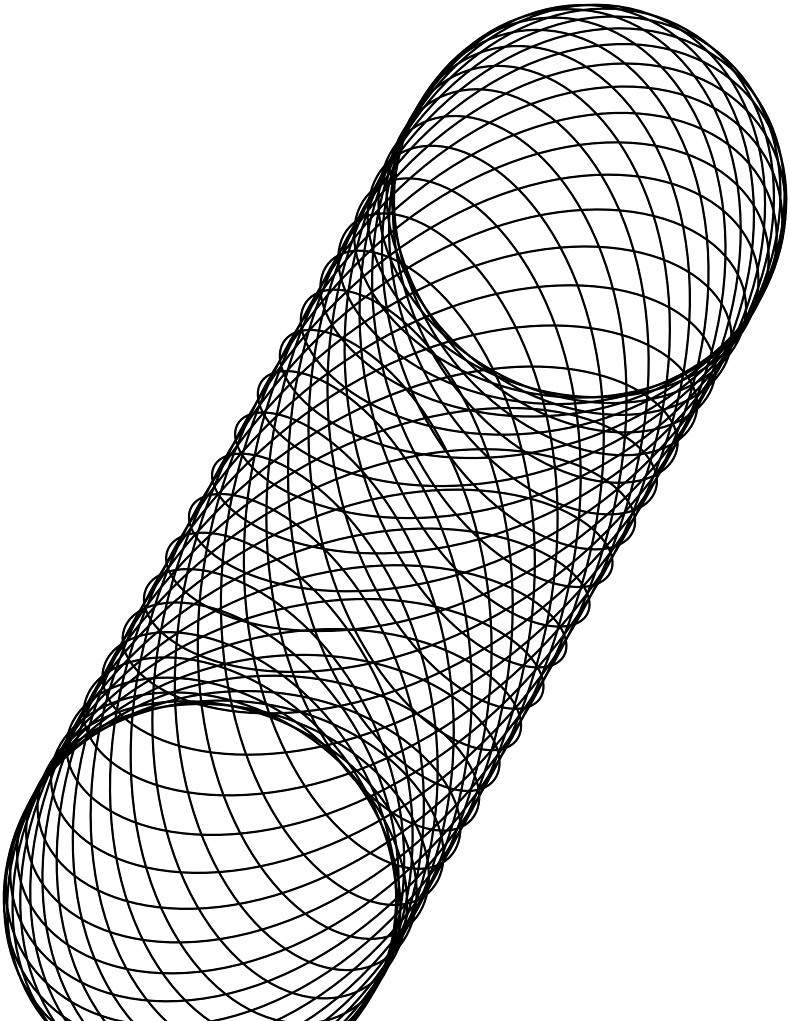
Analyse

Seulement 30 % des équipes ont correctement résolu cet exercice, bien évidemment plus difficile que le précédent (c'était l'avant-dernier exercice du sujet proposé aux élèves).

Cet exercice reprend les caractéristiques d'un exercice-type, énoncées dans l'analyse précédente, avec un item essentiel supplémentaire : ne pas avoir d'a priori. En effet, ici, il faut comprendre que la puce retombe toujours sur le fil, sans que son bond soit nécessairement effectué à la verticale du fil.

Logique, symétries et théorème de Pythagore suffisent à résoudre cet exercice.

Cet exercice peut faire l'objet d'un devoir à la maison pour des élèves de 2$^{\text{nde}}$ ou en début d'année de 1$^{\text{re}}$ S ou ES.



$$\begin{cases} x(t) &= 73\cos(-18t+156)+72\cos(18t+154)+71\cos(53t+132) \\ y(t) &= 73\sin(-18t+156)+72\sin(18t+154)+71\sin(53t+132) \end{cases}$$

Rallye mathématique de l'Académie de Lyon

Présentation

Historique

Le rallye a été créé en 2006. Le principe est celui d'une recherche collective sur des problèmes suffisamment variés pour que tous les élèves puissent participer.

En plus, un problème ouvert est proposé aux classes volontaires. La recherche se fait de manière collaborative : les classes postent leurs trouvailles au fur et à mesure sur un site. Ces trouvailles peuvent être enrichies par d'autres classes.

L'année du rallye se clôture avec la fête des mathématiques. Sur une journée, les classes finalistes viennent s'affronter autour d'énigmes puis assistent à des conférences faites par des universitaires. La journée se termine par une remise des prix.

Les structures qui organisent cet événement sont :

— l'APMEP,

— l'IREM de Lyon,

— l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques.

L'organisation et la gestion du Rallye sont assurées par l'association RMAL (Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon). Le président est Christian Mercat, le directeur de l'IREM de Lyon.

Compétition

► **Nombre de participants**

En 2018, plus de 26 000 élèves ont participé soit 916 classes de l'académie.

► **Niveaux d'études**

3^{e}, 2^{nde} (générale et professionnelle) et 1^{re} professionnelle.

Type d'épreuves proposées

— Le problème ouvert.

— L'épreuve écrite de deux heures contenant plus de trente énoncés (une version 1 heure est possible pour les classes qui le souhaitent). Il y a trois niveaux d'énigmes. Parmi les énoncés proposés, les élèves en choisissent un qu'ils illustrent. Trois exercices sont écrits en langue étrangère (le même exercice en anglais, espagnol, allemand et italien). Le thème Astronomie est également abordé à travers plusieurs énoncés.

— La journée de la finale pour les 12 classes finalistes.

Calendrier 2018

— De février à mars 2018 : Recherche du problème ouvert

— Jeudi 15 mars 2018 : Épreuve écrite du Rallye

— Jeudi 7 juin 2018 : Finale pour les classes lauréates

Contacts

@ Rallye.Math@ac-lyon.fr

rallye-math.univ-lyon1.fr

Cinq vues de trois (grandes) tours (Niveau 1 – 2018)

Énoncé

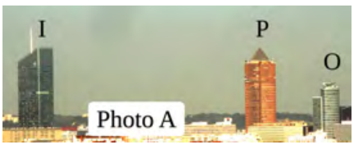
L'emplacement des trois tours du quartier Part-Dieu à Lyon est indiqué sur le plan donné ci-dessous. Voici leurs hauteurs :

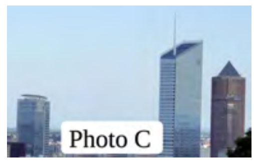
— tour Part-Dieu, « le crayon », 165 mètres : P ;

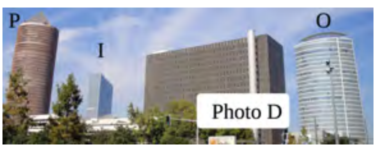
— tour Oxygène, 117 mètres : O ;

— tour Incity, « la gomme », 202 mètres : I.

Elles se voient donc de loin, mais selon l'endroit où l'on se situe dans Lyon, la position des trois tours les unes par rapport aux autres varie beaucoup.







Ces cinq photos ont été prises à partir des zones 1 à 5 indiquées sur le plan.
Associer chaque photo à son lieu de prise de vue.

Analyse

Cet énoncé est classé dans notre rallye niveau 1 car il ne présente pas de difficulté particulière. Les énoncés niveau 1 permettent aux élèves qui les cherchent de se donner confiance et d'aller chercher d'autres énoncés un peu plus difficiles ensuite. Celui-ci à l'intérêt de préparer une réflexion sur un énoncé niveau 2 dont l'analyse sera faite après celle-là. Cet énoncé est attractif puisqu'il fait référence à des bâtiments célèbres pour les lyonnais. La plus grande difficulté de cet exercice était sa réalisation par ses concepteurs, qui ont dû trouver les bons points de vue pour faire ces photos. L'adapter sur un autre site demanderait un effort du même ordre.

Solution

La photo A a été prise de la zone 5, la photo B a été prise de la zone 4, la photo C a été prise de la zone 2, la photo D a été prise de la zone 3 et la photo E a été prise de la zone 1.

Commentaires

Cet énoncé original permet aux élèves de travailler la vision dans l'espace et la correspondance entre la représentation plane et la réalité. Il peut être proposé au cycle 3.

Une suite de l'exercice pourrait être de demander un schéma d'une photo qui serait prise depuis un 6e point de vue sur le plan. Outre la position des tours l'une par rapport aux deux autres, il faudrait se poser la question de leurs tailles relatives. Des observations des tailles des tours sur les photos D et A peuvent apporter des éléments de réflexion.

Points de vue sur trois (grandes) tours

(Niveau 2 – 2018)

Énoncé

L'emplacement des trois tours du quartier Part-Dieu, à Lyon est indiqué sur le plan de l'annexe. Voici leurs hauteurs :

- tour Part-Dieu, « le crayon » (point P) : 165 mètres
- tour Oxygène (point O) : 117 mètres
- tour Incity, « la gomme » (point I) : 202 mètres

Elles se voient donc de loin, mais selon l'endroit où on se place dans Lyon, la position des trois tours les unes par rapport aux autres varie beaucoup. On se place en dehors du triangle formé par les trois tours, on néglige les obstacles à la vue dus au relief du sol et aux autres constructions, on assimile la base des tours aux points P, O, et I sur la carte.

Sur cette carte, colorier en bleu la zone dans laquelle on voit la tour I entre les tours O et P. Colorier en rouge la zone dans laquelle on voit, la tour P à gauche, la tour I à droite, et la tour O entre les deux autres.

Analyse

Cet énoncé est donné de manière indépendante du premier, mais réfléchir conjointement aux deux peut aider à la résolution de chacun. L'équipe de conception du sujet a choisi de faire deux énoncés séparés autour du même thème plutôt qu'un seul pour graduer la difficulté et garder des énoncés simples et attractifs.

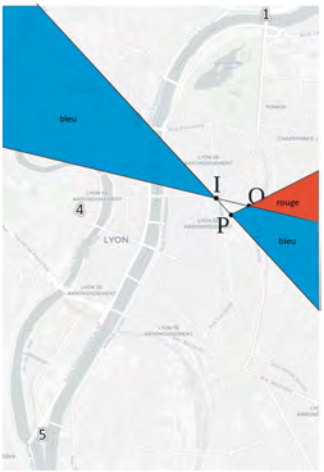
Solution

On commence par tracer les droites (IO), (IP) et (OP). La zone délimitée par le triangle IOP est exclue par l'énoncé.

On peut remarquer que tout point sur la droite (IP) ne permet pas de placer I et P à gauche ou à droite l'un de l'autre. C'est donc la frontière qui délimite ce choix. De la même façon pour les autres droites.

Les droites, à l'extérieur du triangle délimitent alors 6 zones.

Pour déterminer la zone bleue : celle où l'on voit I entre O et P, les points solutions sont les points situé dans l'angle $\widehat{PIO}$ sans le triangle IOP et dans l'angle opposé à $\widehat{PIO}$ par le sommet. Pour déterminer la zone rouge : celle où l'on voit P à gauche, I à droite et O entre les deux, il y a une contrainte supplémentaire, c'est pourquoi cette fois, une seule zone convient. Les points solutions sont les points situés dans l'angle opposé par le sommet à l'angle $\widehat{IOP}$.



Commentaires

Cet exercice fait de nouveau travailler la vision dans l'espace et la représentation plane mais cette fois-ci de manière plus abstraite.

Cet exercice a été traité par une moitié des classes participantes. Beaucoup d'erreurs ont été commises pour la zone rouge en particulier.

Stand : Perles (finale 2017)

Énoncé

Votre bouteille contient des perles de couleur et des perles blanches.
Vous avez à votre disposition :
la bouteille, des récipients.
Une information :
il y a en tout dans la bouteille 250 perles blanches.

De deux façons différentes, à décrire, estimer le nombre de perles contenues dans la bouteille.
La bouteille peut être ouverte. Vous avez 15 min.

Analyse

Cet énoncé est une des épreuves données à la finale du rallye mathématique. Les élèves des classes finalistes (5 classes de 2^{nde}, une classe de 2^{nde} ou 1^{re} professionnelle, 6 classes de collège dont une relevant de l'éducation prioritaire) passent une journée sur le campus de l'université Lyon 1.

Le matin, chaque demi-classe a un parcours de 4 épreuves à suivre. Les épreuves de la finale privilégient des sujets nécessitant des manipulations et des mesures de lieux du site.

Cet énoncé peut utiliser des méthodes statistiques ainsi que de la géométrie dans l'espace. Le matériel mis à disposition est une bouteille que l'on peut considérer cylindrique dans laquelle se trouvent les perles, des récipients « petits » comme des cubes sans couvercle construits dans du carton, un pot vide de petit-suisse cylindrique.

Solution

Nous avons placé 900 perles dans la bouteille. 250 sont blanches.

Pour déterminer le nombre de perles de la bouteille, les élèves peuvent tout d'abord estimer le nombre de perles contenues dans une petite boite cubique de 2 cm de côté.

Dans 8 cm^3, les élèves comptent environ 64 perles.

Le volume occupé par les perles peut alors être estimé : la hauteur des perles dans la bouteille cylindrique étant de 5,7 cm et le rayon de la base étant de 2,5 cm, le volume occupé par les perles vaut $5,7 \times \pi \times 2,5^2$ cm^3 soit environ 112 cm^3.

On a donc (par proportionnalité) pour estimation du nombre de perles : $\frac{112\times 64}{8} = 896$ perles.

Une autre méthode utilise le nombre de perles blanches. On prélève un échantillon de 100 perles et on compte le nombre de perles blanches de ce prélèvement. Supposons que les élèves trouvent 26 perles blanches dans un prélèvement de 100 perles. Comme le total du nombre de perles blanches est de 250, on peut estimer le nombre de perles par le calcul de proportionnalité suivant : $\frac{250\times100}{26} \simeq 960$ perles.

Commentaires

Ces méthodes font travailler les calculs de volume, les statistiques et la proportionnalité. Il est intéressant de parler avec les élèves des estimations obtenues. On ne trouve pas le nombre exact de perles mais seulement une valeur approchée car les méthodes utilisées sont expérimentales et donc soumises à des erreurs de précision.

On peut prolonger le travail en classe de seconde avec la méthode statistique. Le nombre de perles du prélèvement est important puisque c'est lui qui donne la précision du résultat. En réalité, comme il y a 250 perles blanches sur 900 perles, la fréquence de perles blanches dans un échantillon de 100 perles appartient à l'intervalle de fluctuation

$$\left[\frac{250}{900}-\frac{1}{\sqrt{100}};\frac{250}{900}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]\backsimeq[0,178;0,378]$$

(formule de la classe de 2^{nde}). Il y a donc 95% de chances de trouver entre 17 et 38 perles blanches. On estimera alors le nombre de perles dans la bouteille à un nombre entre 658 et 1 470 perles.

Cette méthode statistique peut ne pas paraître fiable mais elle est pourtant concrètement utilisée, par exemple pour compter le nombre de poissons dans un lac : on marque un certain nombre de poissons d'un lac. On attend quelques jours (de façon à ce que les poissons se soient mélangés et que le prochain prélèvement soit considéré comme pris au hasard parmi tous les poissons du lac). Il ne reste plus qu'à calculer la fréquence de poissons marqués parmi le nouvel échantillon pêché pour en déduire le nombre total de poissons.

Parmi les groupes (24 groupes de 12-18 élèves), 3 ont essayé de compter toutes les perles. Un des groupes, mal organisé, n'a tout de même pas trouvé de résultat correct. Pour éviter cette stratégie, on peut interdire aux élèves de sortir toutes les perles. Les récipients proposés pour les petits calculs de volumes peuvent être choisis pour compliquer ces calculs (des tétraèdres au lieu de cubes).

Pour mieux travailler le problème de valeur exacte / valeur approchée, on peut ne pas mettre dans les bouteilles des comptes ronds de perles.

Pour l'équipe d'organisation de la finale, le plus fastidieux a été de préparer 24 petites bouteilles contenant autant de perles. Pourtant, il est préférable pour obtenir une meilleure estimation finale de proposer davantage de perles dans la bouteille.

Rallye Mathématique d'Auvergne

Présentation

Le Rallye s'adresse aux classes de 3^{e} et de 2^{nde} générale et technologique d'Auvergne. Ce concours concerne des classes entières ou des classes mixtes 3^{e}-2^{nde} dans le cadre d'une liaison collège/lycée. En 2018, 72 classes se sont inscrites pour environ 2 000 élèves.

Chaque classe a deux heures pour résoudre 6 à 8 exercices faisant appel à la logique, au raisonnement, à la géométrie et à l'informatique.

Pour chaque exercice, le jury évalue : l'exactitude de la réponse, l'argumentation ou le document informatique (programme, feuille de calcul, fichier LGD) et enfin la présentation.

La meilleure classe de chaque niveau dans chacun des quatre départements de l'académie est sélectionnée pour la finale.

En complément des épreuves lors de la qualification est organisé un concours d'affiche dont le thème correspond à celui de la semaine des mathématiques, le règlement étant fourni en décembre. L'affiche peut être l'œuvre d'une classe ou d'un élève. Une grande liberté est laissée aux participants et une collaboration avec le professeur d'Arts Plastiques peut être envisagée.

L'affiche lauréate sert de support pour l'édition du Rallye de l'année suivante.

Historique

Le premier Rallye a eu lieu en 1998. En 2017, un recueil de sujets a été publié sous le titre « 20 ans du Rallye Mathématique d'Auvergne ».

Déroulement

Les épreuves qualificatives ont lieu le mardi après-midi de la semaine des mathématiques (autour du 14 mars) dans les établissements des classes inscrites.

Les qualifications consistent à résoudre de 6 à 8 problèmes en deux heures par classe entière.

La finale se compose, en matinée, d'une course d'orientation sur le Complexe Scientifique des Cézeaux composée de 40 balises durant laquelle chaque groupe d'élèves doit trouver 8 balises et résoudre 8 énigmes (une par balise). Une conférence et des visites de laboratoires de recherche ont lieu l'après midi ainsi que la remise des prix suivie d'un moment convivial autour d'un goûter.

Partenaires

Inspection Pédagogique Régionale, IREM, APMEP, CNRS, Université Clermont Auvergne

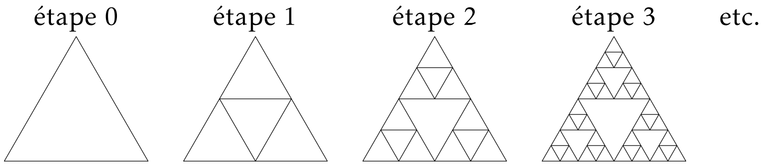
Contacts

🖂 IREM
Campus Universitaire des Cézeaux
3 place Vasarely - TSA 60026 - CS 60026
63178 AUBIERE CEDEX
☎+33 (0)4 73 40 70 98
@ irem@univ-bpclermont.fr

Les portes du musée de Sir Pinski

Énoncé

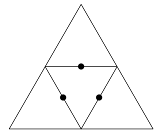
Un philanthrope anglais, Sir Pinsky, décide de construire un musée. Passionné de mathématiques, il décide d'établir le plan de l'édifice en n'utilisant que les notions de milieu et de triangle équilatéral. Plus précisément, à chaque étape de la construction, il prend les milieux des côtés des triangles « orientés vers le haut » afin de construire de nouveaux triangles, comme d'après les schémas ci-dessous :



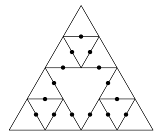
On s'intéresse au nombre de portes intérieures que comporte l'édifice. Les portes sont installées au milieu des murs de chaque pièce.

Une pièce doit ainsi pouvoir communiquer directement avec toutes les pièces voisines.

Par exemple, s'il s'arrêtait à la première étape, il y aurait 3 portes intérieures (voir schéma ci-contre) :



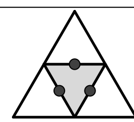
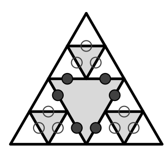
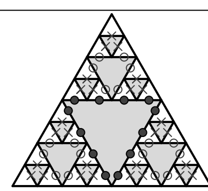
Mais s'il s'arrêtait à la deuxième étape, il y aurait 15 portes intérieures :



Combien de portes intérieures comportera l'édifice s'il s'arrête à la 7^e^ étape ?

Solution

On raisonne étape par étape (en utilisant des schémas pour les premières étapes).

étape		Type de triangles	Nombre de portes associées	Schéma
étape 1 :	1	grand triangle	3	
étape 2 :	1	grand triangle	6	
	3	triangles plus petits	3	
étape 3 :	1	grand triangle	12	
	3	triangles moyens	6	
	9	triangles plus petits	3	

On en déduit le mécanisme de création des pièces et des portes pour les cas plus complexes :

— il y a toujours trois fois plus de « nouveaux » triangles (plus petits) à chaque étape ;

— il y a toujours deux fois plus de portes à chaque étape pour chaque type de triangle (car on partage les murs en deux).

On peut terminer le tableau :

étape	Type de triangles		Nombre de portes associées
étape 4 :	1	grand triangle	24
	3	triangles plus petits	12
	9	triangles plus petits	6
	27	triangles plus petits	3
étape 5 :	1	grand triangle	48
	3	triangles plus petits	24
	9	triangles plus petits	12
	27	triangles plus petits	6
	81	triangles plus petits	3
étape 6 :	1	grand triangle	96
	3	triangles plus petits	48
	9	triangles plus petits	24
	27	triangles plus petits	12
	81	triangles plus petits	6
	243	triangles plus petits	3
étape 7 :	1	grand triangle	192
	3	triangles plus petits	96
	9	triangles plus petits	48
	27	triangles plus petits	24
	81	triangles plus petits	12
	243	triangles plus petits	6
	729	triangles plus petits	3

On en déduit le nombre de portes à la septième étape :
$192 \times 1 + 96 \times 3 + 48 \times 9 + 24 \times 27 + 12 \times 81 + 6 \times 243 + 3 \times 729 = \boxed{6\,177}$.

Analyse

Ce problème est une version un peu différente du fameux triangle de Sierpinski.

Comme souvent dans les problèmes de dénombrement, cet exercice niveau 3^{e}-2^{nde} est facilement abordable et est source de résolutions variées. Beaucoup d'élèves ont d'ailleurs réussi à le résoudre et à trouver la solution attendue.

Les compétences mathématiques mises en jeu sont, entre autres : la modélisation, l'observation et la compréhension d'un schéma de récurrence et la production éventuelle d'un algorithme.

D'une manière générale, cet exercice a bien inspiré les élèves qui ont présenté beaucoup de procédures et de présentations différentes pour le résoudre : explication par des phrases, tableaux, schémas de triangle, un seul grand calcul en ligne, utilisation de formule, etc.

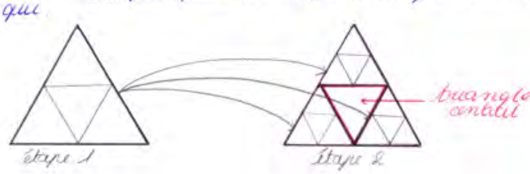
	A : Étape	B : nombre de portes du triangle central	C : nombre de portes au total
1	1	3	3
2	2	$B1 \times 2 = 6$	$C1 \times 3 + B2 = 15$
3	3	$B2 \times 2 = 12$	$C2 \times 3 + B3 = 57$
4	4	$B3 \times 2 = 24$	$C3 \times 3 + B4 = 195$
5	5	$B4 \times 2 = 48$	$C4 \times 3 + B5 = 633$
6	6	$B5 \times 2 = 96$	$C5 \times 3 + B6 = 1995$
7	7	$B6 \times 2 = 192$	$C6 \times 3 + B7 = 6\,177$

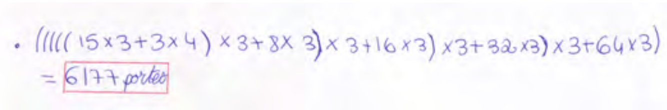
Colonne B : On calcule le nombre de portes du triangle central à chaque étape en multipliant le nombre de portes de ce même triangle à l'étape précédente par 2 car on s'aperçoit que ce nombre double à chaque étape (3 à l'étape 1, 6 à l'étape 2 et 12 à l'étape 3)

Colonne C : On ajoute au nombre trouvé à la colonne B, le nombre total de portes trouvé à l'étape précédente multiplié par 3 car 3 portes apparaissent là où il y en avait une seule précédemment.

La case C7 nous donne le résultat de l'étape 7 qui est 6 177.

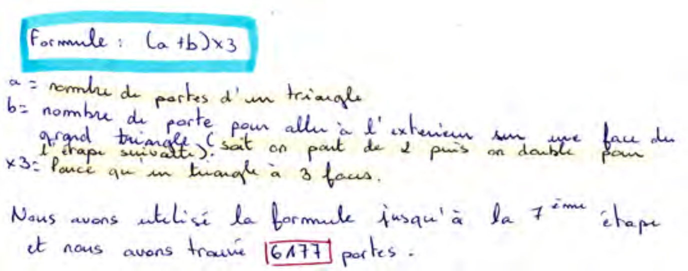
D'après les trois étapes schématisées sur le sujet, nous pouvons observer que chaque configuration (correspondant à une étape) se retrouve dans l'étape suivante trois fois à l'identique plus un autre triangle central, tel que





• $((((((15 \times 3 + 3 \times 4) \times 3 + 8 \times 3) \times 3 + 16 \times 3) \times 3 + 32 \times 3) \times 3 + 64 \times 3)$
$= \boxed{6177 \text{ portes}}$

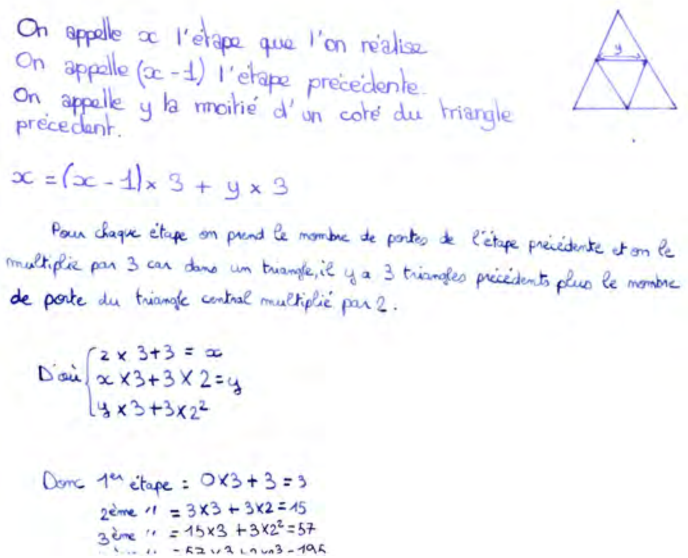
Après avoir compté les portes « à la main » (sans forcément aboutir au résultat), beaucoup ont essayé d'écrire une équation, une formule générale ou une expression littérale pour généraliser la procédure.



$\boxed{\text{Formule : } (a+b) \times 3}$

a = nombre de portes d'un triangle
b = nombre de porte pour aller à l'exterieur sur une face du grand triangle (soit on part de 2 puis on double pour l'étape suivante).
×3 = Parce qu'un triangle à 3 faces.

Nous avons utilisé la formule jusqu'à la 7ème étape et nous avons trouvé $\boxed{6177}$ portes.



On appelle x l'étape que l'on réalise
On appelle (x − 1) l'étape precedente
On appelle y la moitié d'un coté du triangle precedent.

$x = (x-1) \times 3 + y \times 3$

Pour chaque étape on prend le nombre de portes de l'étape précédente et on le multiplie par 3 car dans un triangle, il y a 3 triangles précédents plus le nombre de porte du triangle central multiplié par 2.

$$\text{D'où} \begin{cases} 2 \times 3 + 3 = x \\ x \times 3 + 3 \times 2 = y \\ y \times 3 + 3 \times 2^2 \end{cases}$$

Donc 1ère étape : $0 \times 3 + 3 = 3$
2ème " $= 3 \times 3 + 3 \times 2 = 15$
3ème " $= 15 \times 3 + 3 \times 2^2 = 57$

Certains ont également vu la possibilité, sans forcément réussir, de mettre en place un algorithme en utilisant des flèches, des lettres, etc.

Dans beaucoup de copies, pour rendre compte de leur démarche, l'utilisation de lettres leur est apparue utile pour rendre plus lisible l'identification des différentes étapes.

Travaux d'élèves

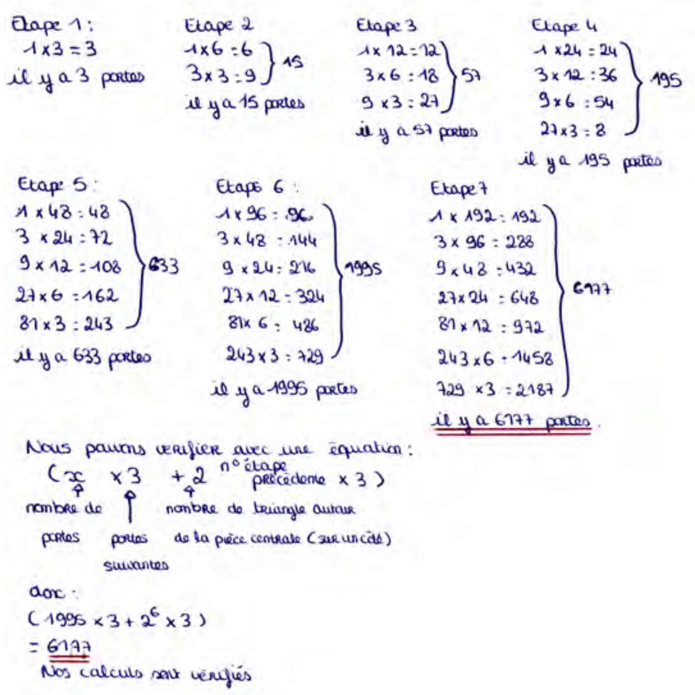
Le comptage à la main des portes pour les premières étapes a orienté certains élèves vers la formule générale, sans forcément la justifier, contrairement à d'autres qui ont accompagné leur formule d'explications.

Parmi toutes ces résolutions, deux stratégies principales :

► Première méthode

Observation de la structure fractale de l'objet avec la particularité de la pièce centrale.

Plus précisément, les élèves ont trouvé que le nombre de portes de la configuration de l'étape $n+1$ est égal à trois fois le nombre de portes de la configuration de l'étape n auquel on ajoute le nombre de portes de la grande pièce centrale dont le nombre est multiplié par deux à chaque étape.


Etape 1 :
1 x 3 = 3
il y a 3 portes

Etape 2
1 x 6 = 6
3 x 3 = 9 } 15
il y a 15 portes

Etape 3
1 x 12 = 12
3 x 6 = 18
9 x 3 = 27 } 57
il y a 57 portes

Etape 4
1 x 24 = 24
3 x 12 = 36
9 x 6 = 54
27 x 3 = 8 } 195
il y a 195 portes

Etape 5 :
1 x 48 = 48
3 x 24 = 72
9 x 12 = 108
27 x 6 = 162
81 x 3 = 243 } 633
il y a 633 portes

Etape 6 :
1 x 96 = 96
3 x 48 = 144
9 x 24 = 216
27 x 12 = 324
81 x 6 = 486
243 x 3 = 729 } 1995
il y a 1995 portes

Etape 7
1 x 192 = 192
3 x 96 = 288
9 x 48 = 432
27 x 24 = 648
81 x 12 = 972
243 x 6 = 1458
729 x 3 = 2187 } 6177
il y a 6177 portes.

Nous pouvons vérifier avec une équation :
$(x \times 3 + 2^{\text{n° étape précédente}} \times 3)$
nombre de portes ; portes suivantes ; nombre de triangle autour de la pièce centrale (sur un côté)

donc :
$(1995 \times 3 + 2^6 \times 3)$
$= 6177$
Nos calculs sont vérifiés

On a remarqué qu'à chaque fois que l'on passe d'une étape à l'autre, le triangle précédent est positionné 3 fois dans celui-ci, et qu'il y a également toujours un même grand triangle au milieu dont chaque nombre de portes par côté est multiplié par 2. Nous avons alors réalisé chaque étape jusqu'à la septième

Étape 4

$4 \times 2 = 8$
$8 \times 3 = 27$
$57 \times 3 = 171$
$171 + 27 = 195$

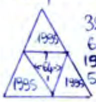
Étape 5

$8 \times 2 = 16$
$16 \times 3 = 48$
$195 \times 3 = 585$
$585 + 48 = 633$

Étape 6

$16 \times 2 = 32$
$32 \times 3 = 96$
$633 \times 3 = 1899$
$1899 + 96 = 1995$

Étape 7



$32 \times 2 = 64$
$64 \times 3 = 192$
$1995 \times 3 = 5985$
$5985 + 192 = 6177$

Conclusion :
L'édifice de la 7ème étape comporte donc 6177 portes intérieures

Il y a ensuite eu de nombreuses procédures légèrement différentes pour appréhender les étapes de calculs du nombre final de portes. Nous formalisons trois relations de réccurence qui se sont détachées :

$u_{n+1} = 3 \times u_n + 3 \times 2^n$
$u_{n+1} = 3(u_n + 2^n)$
$u_{n+1} = 3 \times u_n + v_n$, avec v_n telle que $v_{n+1} = v_n \times 2$

► **Deuxième méthode**

Les élèves ont établi qu'à chaque étape, le nombre de portes existantes était multiplié par deux (car chaque mur est divisé en deux), auquel il fallait ajouter le nombre de portes qui apparaissaient dans les nouveaux triangles formés. Ce qui peut être modélisé par la formule :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 \times u_n + 3^{n+1} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Nous supposons que cette équation permettra de calculer toutes les étapes : $2x + 3^y$
x = au nombre de portes de la dernière étape
exposant y = le chiffre de l'étape

Étape 1
$0 \times 2 + 3^1 = 3$
Ainsi l'étape 1 contient 3 portes intérieur

Étape 2
$3 \times 2 + 3^2 = 15$
Ainsi l'étape 2 contient 15 portes intérieur

On s'est rendu compte que pour trouver une étape, il faut multiplier le résultat de la précédente par deux et ajouter 3 à l'exposant de l'étape à laquelle nous sommes. Donc :

Étape 3 : $15 \times 2 + 3^3$ Pour vérifier l'étape 3, nous avons compté.

: $30 + 27$

: 57

► **Autres procédures**

Les élèves considèrent le nombre de triangles en fonction de leur taille et calculent le nombre de portes correspondant et ce, à chaque étape.

Les élèves calculent le nombre total de portes (sans tenir compte des exemples fournis) puis retranchent le nombre de portes donnant sur l'extérieur du bâtiment.

Prolongements possibles

En classe, on peut prolonger cet exercice en travaillant sur le calcul littéral, les puissances, l'utilisation d'un tableur ou d'un algorithme.

On peut par exemple facilement demander le nombre de portes à n'importe quelle étape.

On peut également, une fois le processus de construction du triangle de Sierpinski compris, revenir sur des questions plus basiques (quel est le nombre de triangles, quelle est l'aire ou quel est le périmètre des triangles orientés vers le bas, etc.).

D'après le site images.math.cnrs.fr : « En 2018 ouvrira Le grand musée égyptien du Caire [...]. Et nous y avons appris que les pharaons du Caire pourraient bientôt contempler le triangle de Sierpiski puisque les architectes du futur grand musée égyptien ont en effet conçu une façade imposante qui en reprend le motif principal. »

Vue d'artiste du futur musée

Image tirée du site web du cabinet d'architecte *heneghan peng architects*.

Deux-mille-dix-huit (Qualification 2018, niveau 2nde et 3^{e})

Énoncé

Benoît a décidé de ranger dans un tableau les nombres de la façon suivante :

1	2	3	6	9	14	19	…
	4	5	8	11	16	⋯	…
		7	10	13	⋯	⋯	…
			12	15	⋯	⋯	…
				17	⋯	⋯	…

dans la 1re colonne, il place le 1er nombre impair ;
dans la 2^{e} colonne, il place les 2 premiers nombres pairs ;
dans la 3^{e} colonne, il place les 3 nombres impairs suivants ;
dans la 4^{e} colonne, il place les 4 nombres pairs suivants ;
dans la 5^{e} colonne, il place les 5 nombres impairs suivants ;
etc.

Quels seront les nombres à droite et à gauche du nombre 2018 ?

Solution

Voici une solution accessible aux élèves de troisième et de seconde.

On rappelle pour commencer qu'on ajoute 2 pour passer d'un nombre pair au nombre pair suivant, de même pour un nombre impair et son suivant.

On remarque ensuite qu'il y a n nombres dans la colonne numéro n.

Il est alors facile, soit avec un tableur, soit à la main (c'est un peu plus fastidieux), de trouver de proche en proche les premiers nombres de toutes les colonnes, en s'arrêtant lorsque le premier nombre d'une colonne paire dépasse 2018.

On constate alors que 2018 est le 17^{e} nombre de la colonne numéro 64, qui a pour premier terme 1986 ($1986 + 16 \times 2 = 2018$).

Les nombres à gauche et à droite sont donc les 17es nombres des colonnes numéro 63 et 65, de premiers termes respectifs 1923 et 2049. En ajoutant 16×2 à ces nombres on obtient alors 1955 et 2081.

Travaux des élèves

Tous les groupes ont abordé l'exercice et même s'ils n'ont pas tous trouvé le résultat exact, ils ont su relever quelques propriétés du tableau.

Les élèves avaient à disposition un ordinateur, avec tableur et logiciel de programmation.

De nombreuses méthodes ont été élaborées pour trouver la réponse :

- tout écrire (ou presque) à la main,
- construire le tableau complet avec un tableur,
- utiliser un programme,
- observer les colonnes et conjecturer une relation entre elles,
- utiliser les formules des sommes de nombres pairs ou impairs successifs (méthode à priori non accessible aux élèves concernés).

Ils ont en général à peu près suivi la démarche que nous proposons en solution, soit à la main, soit au tableur et même un groupe avec Python.

Ceux qui ont fait un graphique propre ont eu le plus de réussite. Certains ont essayé d'expliquer uniquement par des phrases et ont vite eu des difficultés pour identifier les colonnes, les nombres, les écarts entre les nombres, etc.

L'extrait de copie suivant illustre les difficultés à décrire le travail réalisé.

Pour les numéros des colones paires il fallait enlever 2 chiffres de la somme du calcul du numéro de la colone terminant par 0. Enlever 4 chiffres du nombre de la colone terminant par 2, enlever 6 chiffes du numéro de la colone terminant par 4, enlever 8 chiffre du numéro de la celone terminant par 6 et ne pas enlever de chiffres lorsque le numéro de la colonc termine par 8 et du 1er nombre de la colone pour pouvoir trouver le dernier nombre de cet colone-ci.

► Programmation en Python

Un groupe a écrit deux programmes : le premier permet de connaître la colonne dans laquelle se trouve 2018 ainsi que les derniers nombres de chaque colonne, le second permet, en utilisant les résultats précédents, d'afficher les trois colonnes nécessaires pour trouver les nombres à droite et à gauche de 2018

Programme 1

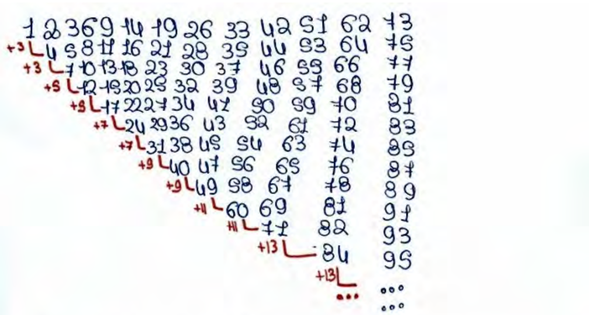
```
i=3
b=1
s=1
print (s,b)
while s<2048:
    for a in range (2):
        b=b+1
        s=s+i
        print (s,b)
    i=i+2
```

Programme 2

```
a=1921
b=1984
c=2047
while c<2177:
    a=a+2
    b=b+2
    c=c+2
    print (a,b,c)
```

► **Travail à la main**

Un exemple de travail « à la main », en cherchant ici le dernier terme de chaque colonne :



• On doit additionner les nombres impaires :
1+3+3+5+5+ ... + ... +63+63 = 2047.
On doit prendre le dernier nombre qui nous permet d'avoir le résultat le plus proche de 2018.
on prend 63 car il a un résultat plus proche de 2018 ; alors que si on avait choisi 61 le résultat serait trop éloigné. (1921 : si on avait choisi 61
2177 : si on avait choisi 65)

Donc le nombre à droite de 2018 est 2081 et le nombre à gauche est 1955.

1923	1986	2049
1925	1988	2051
1927	1990	2053
1929	1992	2055
1931	1994	2057
1933	1996	2059
1935	1998	2061
1937	2000	2063
1939	2002	2065
1941	2004	2067
1943	2006	2069
1945	2008	2071
1947	2010	2073
1949	2012	2075
1951	2014	2077
1953	2016	2079
1955	2018	2081
1957	2020	2083
...	...	...

Prolongement en classe

L’exercice semble un bon support pour :

- montrer l’intérêt de réfléchir à comment désigner ce dont on va parler (colonne, numéro de colonne, premier ou dernier nombre, ligne…) ;
- travailler sur une présentation simple des observations faites sur une suite de nombres ;
- remettre au clair le vocabulaire : nombre, chiffre, numéro ;
- attirer l’attention sur l’incontournable question des « bornes et intervalles » : pour obtenir le 17^{e} nombre de la colonne, il faut ajouter 16 fois 2 au premier nombre de la colonne.

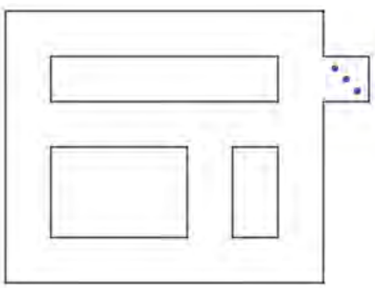
Il est aussi bon de faire remarquer que les différentes méthodes présentées reposent sur la possibilité de parcourir tous les entiers de 1 à 2018. Comment faire si l’on se pose la même question pour un nombre très grand ? Si le problème est posé à des élèves ayant plus de connaissances mathématiques, on peut utiliser la somme des nombres pairs pour trouver la colonne contenant le nombre cherché, ou même faire un raisonnement par récurrence pour la relation entre les premiers termes des colonnes successives, ce qui permet alors de résoudre le problème quel que soit le nombre donné.

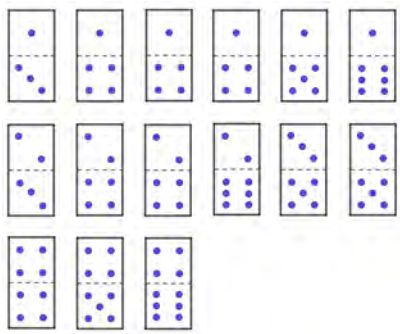
Dominos

L'exercice suivant était proposé à un des stands de la course d'orientation. Au bout de 10 minutes, l'équipe devait repartir vers la balise suivante.

Énoncé

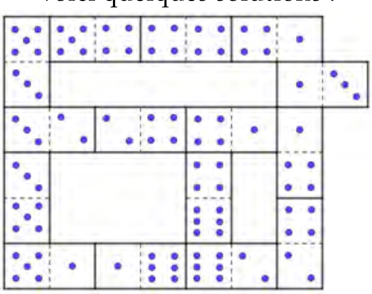
Utiliser les 15 pièces fournies pour compléter le circuit en respectant le principe du jeu de domino : deux pièces ne peuvent se raccorder que par le même nombre.
Il est obligatoire de positionner un 3 comme indiqué sur le circuit.

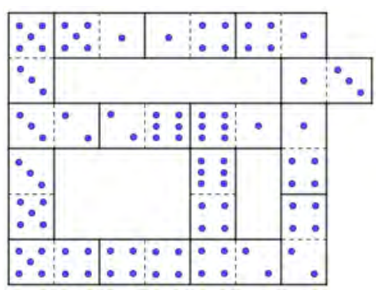


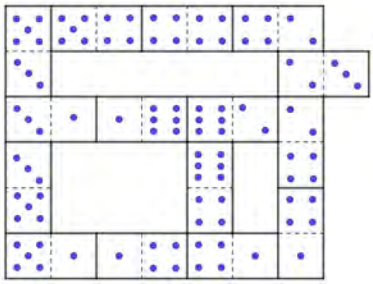


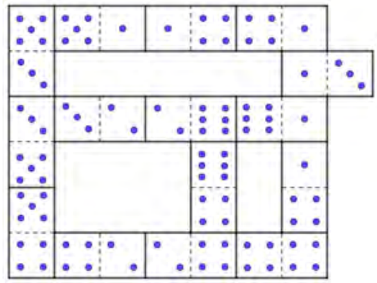
Solution

Voici quelques solutions :









Attendus

Le contexte (travail debout à un stand en plein air et en temps limité) n'est pas favorable à une longue étude théorique. L'exercice pouvait très bien être réalisé « à tâtons ».

Comme il y a 4 pièces portant un 3 et que l'un d'entre eux est utilisé, il en reste 3 à placer. Les 3 se trouvent donc à une intersection en T.

Il y a trois fois la valeur 6, le 6 est donc aussi à une intersection en T.

Il y a 9 fois (nombre impair) la valeur 4, le 4 est donc aussi à une intersection en T.

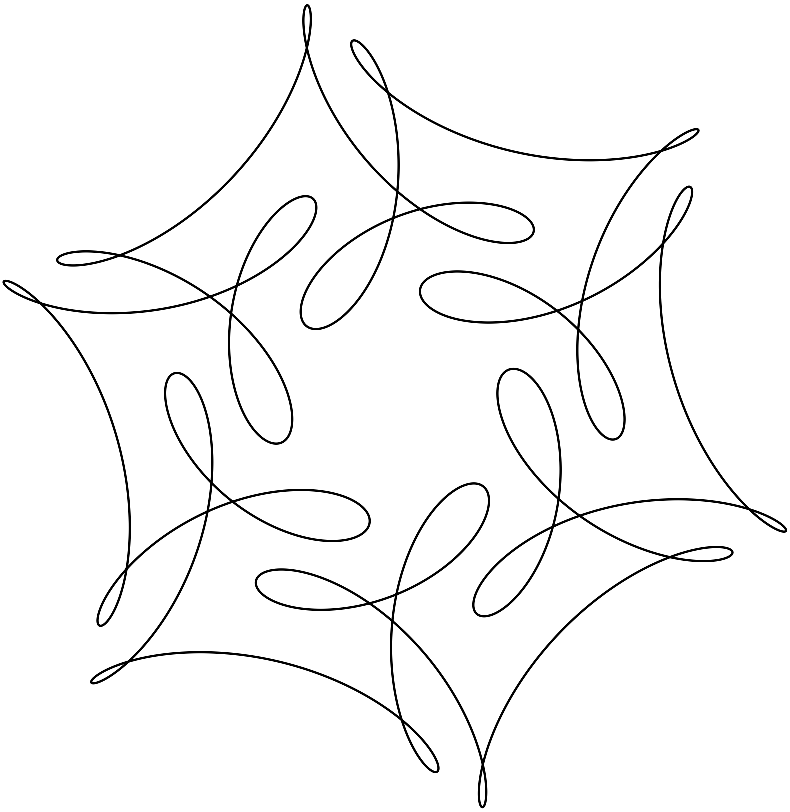
Avec ces contraintes et quelques essais, on trouve assez facilement au moins une solution.

Tous les groupes à qui cet exercice a été proposé se sont pris au jeu.

Lorsqu'une solution n'a pas été trouvée à tâtons très rapidement, en général un des élèves a remarqué au moins une contrainte sur 3 ou 6 et a guidé l'élève qui manipulait les dominos pour éliminer rapidement les configurations qui ne pouvaient pas aboutir.

La moitié des groupes a trouvé une solution en moins de 10 minutes.

Cette activité ne fait pas travailler une notion particulière des programmes de mathématiques. Par contre, elle met en jeu ce qu'on demande généralement à des élèves : observation, inventivité, méthode et persévérance.



$$\begin{cases} x(t) &= 200\cos(t) + 100\cos(7t) + 60\cos(-17t-90) \\ y(t) &= 200\sin(t) + 100\sin(7t) + 60\sin(-17t-90) \end{cases}$$

Rallye Mathématique des collèges - IREM de Lille

Présentation

Ce Rallye, organisé dans l'Académie de Lille depuis 1992, suscite l'intérêt des élèves et des enseignants. En 2018, 13 500 collégiens ont participé aux phases qualificatives.

Chaque équipe de quatre élèves de niveaux différents (6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}) doit résoudre 7 énigmes (numériques, géométriques, statistiques, algorithmiques ou logiques, dont une de communication) nécessitant la manipulation d'objets, chacune arbitrée par un enseignant, parent ou lycéen.

Déroulement

De janvier à mai, le matériel des énigmes des qualifications circule dans l'académie. Il est constitué d'énoncés, d'indications, de plateaux, d'objets à manipuler (pions, solides...) ainsi que de consignes d'arbitrage. Chaque collège participant aux qualifications présente une ou deux équipe·s à la finale, un samedi après-midi de juin, sur le campus Cité Scientifique de l'Université de Lille.

Objectifs

Les énigmes sont conçues pour permettre la mise en place d'analyses, de stratégies et la mobilisation de connaissances au sein d'une équipe d'élèves d'âges différents. Ceux-ci sont mis en situation de recherche mathématique par la manipulation d'objets dans un environnement différent de celui de la classe. Le travail en équipe oblige à verbaliser et à confronter différents raisonnements ou points de vue. Le regroupement inter-niveaux facilite la spontanéité. Les essais sont plus aisés quand il s'agit de bouger un pion tandis qu'un élève osera moins facilement écrire une réponse incertaine.

Ce Rallye promeut l'engagement des élèves, le travail en équipe, le décloisonnement des classes, la mutualisation des connaissances, l'investissement des équipes éducatives accueillant les qualifications ainsi que la participation des parents et d'anciens élèves en tant qu'arbitres.

Contact : IREM de Lille

✉ IREM de Lille, Bâtiment M1, Campus Cité Scientifique, Université de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

☎ +33 (0)3 20 43 41 81

@ rallye-irem@univ-lille.fr

rallye-irem.univ-lille.fr

I 8 Σ π (logique-numérique, 2016)

Contenu

► **Matériel**

- 1 énoncé ;
- 43 portions de disque « part de tarte » (5 « Fraises » ; 14 « Framboises » ; 5 « Myrtilles » ; 6 « Abricots » ; 8 « Chocolat » ; 5 « Matcha ») ;
- 4 plateaux « Assiette » et 6 plateaux « Tarte » ;
- 11 indications.

► **Énoncé**

Soline, Milo, Zacharie et Juan se retrouvent entre amis dans un salon de thé pour déguster des tartes. Vous devez retrouver la composition de l'assiette de chacun.
Une part de tarte est représentée par un seul pion.

► **Indications**

Les 11 fiches d'indications données aux élèves ne sont pas numérotées, certaines le sont ici afin d'y faire référence plus loin.

⑤ Soline goûte quatre tartes parmi les six proposées, dont celle aux framboises et celle au chocolat. Elle les savoure en quantités égales.

③ Milo mange 4 fois plus d'une tarte que d'une autre.

⑦ Zacharie mange moitié moins de tarte au matcha que Soline.

② Milo ne goûte aucune tarte aux fruits. Il ne se limite pas à un seul parfum. Il mange $\frac{2}{6}$ d'une des tartes dont il aime le parfum.

Le chocolat et le thé matcha ne sont pas des fruits.

④ Juan mange $\frac{2}{5}$ d'une des tartes.

Il reste les $\frac{3}{4}$ de la tarte aux fraises quand tous les amis se sont servis.

⑥ Juan mange de toutes les tartes aux fruits rouges et uniquement de celles-ci.

⑧ Juan déguste autant de tarte aux myrtilles que Soline.

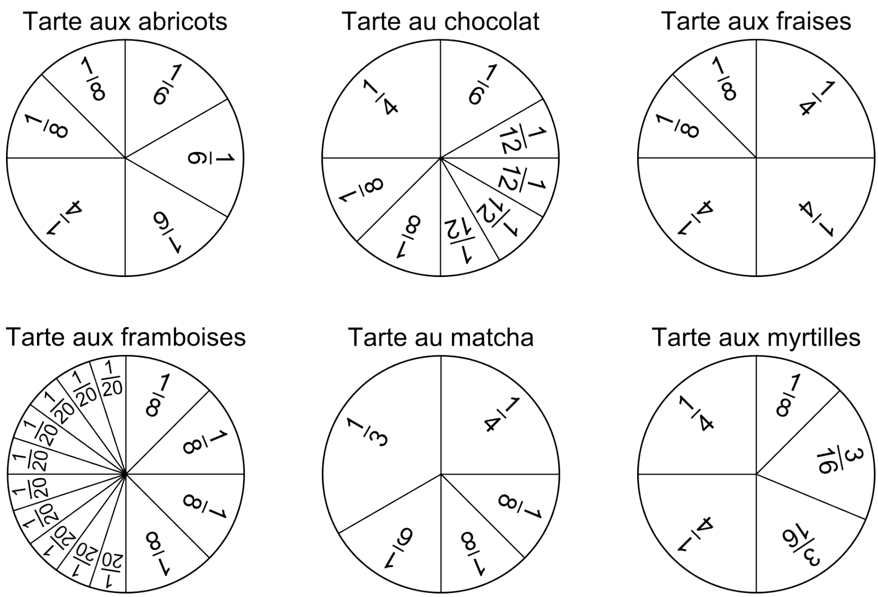
Les fruits rouges sont les fraises, les framboises et les myrtilles.

① Zacharie mange <u>une part</u> identique de chaque tarte. Son assiette contient l'équivalent de $\frac{3}{4}$ d'une tarte.

Indication orale donnée par l'arbitre aux équipes :

Aucune tarte n'est complètement répartie dans les assiettes.

► **Plateaux « Tarte » et parts de tarte**



Remarques : Sur les plateaux les différents parfums des tartes sont représentés par des couleurs différentes. Les portions de disque données correspondent aux parts dessinées sur chaque plateau et sont de la couleur associée au parfum.

► **Plateaux « Assiette »**

► **Solution**

	Matcha	Chocolat	Framboises	Myrtilles	Fraises	Abricots
Zacharie	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Soline	$\frac{1}{4}$	$\Sigma = \frac{1}{4}$	$\Sigma = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	×	×
Juan	×	×	$\Sigma = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	×
Milo	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	×	×	×	×

Pour les cases dans lesquelles se trouve une somme, il y a plusieurs possibilités pour obtenir la fraction de tarte indiquée.

— Pour obtenir $\frac{1}{4}$ de la tarte au chocolat dans l'assiette de Soline, on peut trouver $\frac{1}{4}$ ou $3 \times \frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

— Pour remplir la colonne « Framboises » on peut trouver
- $2 \times \frac{1}{8}$ dans l'assiette de Soline et $8 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan ;
- $2 \times \frac{1}{8}$ dans l'assiette de Soline et $2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan ;
- $5 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Soline et $2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan.

Analyse

► **Compétences**

— La fraction vue comme partage de grandeur (cycle 3).

— Résoudre un problème mettant en jeu 3 opérations tout en leur donnant du sens (cycle 3).

— Utiliser les fractions irréductibles, l'égalité de fractions (cycle 4).

► **Commentaires**

Dans notre rallye, une énigme estampillée « logique » ne fait pas forcément appel à des connaissances mathématiques mais nécessite toujours de croiser des indications pour parvenir à la solution.

Pour cette énigme de logique, l'objectif initial était d'effectuer du calcul fractionnaire en utilisant des pièces symbolisant des fractions de tartes. L'IREM fournit l'ensemble du matériel à utiliser, les élèves ne disposent pas de calculatrice et doivent donc soit calculer mentalement, soit manipuler. Les équipes étant constituées d'un élève de chaque niveau de la 6^e à la 3^e, tous les calculs nécessaires (sauf un) peuvent être réalisés uniquement par la manipulation des pièces. C'est d'ailleurs pour faciliter ce passage à la manipulation que la plupart des fractions ont pour numérateur 1.

L'indication ① est la seule permettant de remplir immédiatement une assiette. Elle n'a posé aucune difficulté : les élèves ont repéré que la pièce $\frac{1}{8}$ était la seule présente dans toutes les tartes et en juxtaposant 6 de ces pièces, ils ont pu vérifier que la somme équivaut à $3 \times \frac{1}{4}$ et est représentée sur le plateau « Tarte aux fraises ».

L'indication ② n'est pas auto-suffisante, il y a deux façons de la respecter. Les tartes au chocolat et au matcha ne comportent ni l'une ni l'autre 2 parts représentant chacune $\frac{1}{6}$, il faut donc trouver une autre manière d'obtenir la fraction $\frac{2}{6}$ (visible sur le plateau « Tarte aux abricots ») : en prenant soit $\frac{1}{3}$ de tarte au matcha, soit $4 \times \frac{1}{12}$ de tarte au chocolat. C'est grâce à l'indication ③ que le choix s'opère. Celle-ci fait chercher le quadruple ou le quart de $\frac{2}{6}$, le quadruple excédant l'unité (ici une tarte entière), c'est le quart qu'il faut choisir. Par manipulation des pièces « chocolat » et « matcha », on trouve que Milo mange $\frac{1}{3}$ de tarte au matcha et $\frac{1}{12}$ de tarte au chocolat.

La plus grosse difficulté est posée par l'indication ④, la fraction $\frac{1}{5}$ n'est pas présente parmi les pièces proposées, les élèves doivent penser à en changer l'écriture fractionnaire ou chercher à la visualiser sur une des tartes. La seule tarte permettant cette visualisation est la tarte aux framboises dont une moitié a été découpée en 10 parts représentant chacune $\frac{1}{20}$.

Il se peut aussi que le choix des pièces effectué pour une indication complique la suite de la résolution. Si une équipe a placé 5 pièces $\frac{1}{20}$ pour représenter $\frac{1}{4}$ de la tarte aux framboises dans l'assiette de Soline, elle ne pourra pas obtenir les $\frac{2}{5}$ de cette tarte pour l'assiette de Juan en n'utilisant que des pièces $\frac{1}{20}$, il faudra trouver une autre décomposition additive en juxtaposant des fractions différentes $\left(2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}\right)$.

En cas d'erreur ou de proposition incomplète de l'équipe à la fin du temps imparti, l'évaluation de ce type d'énigme consiste à vérifier quelles informations ont été respectées afin de valoriser les étapes de raisonnement. Par exemple, si une équipe a posé sur l'assiette de Soline quatre pièces issues de tartes différentes représentant chacune $\frac{1}{4}$ de tarte, une partie de l'indication ⑤ est vérifiée. La tâche de l'arbitre est donc complexe et il ne peut effectuer l'évaluation entre deux passages d'équipes. Afin de l'aider, nous lui fournissons une fiche d'aide à l'évaluation sur laquelle il recopie la proposition de l'équipe dans un tableau présenté comme le tableau « solution » et une fiche de correction par indication. Comme l'arbitre n'est pas nécessairement professeur de mathématiques, nous fournissons également un tableau contenant toutes les sommes de fractions possibles. La présentation du tableau des fiches « Aide à l'évaluation » et « Solution » a été pensée de façon à faciliter la correction par indication. Ainsi, dans les colonnes, on retrouve le matcha à côté du chocolat pour l'indication ②, la framboise à côté du chocolat pour l'indication ⑤, les fruits rouges regroupés pour l'indication ⑥ ; dans les lignes, on trouve Zacharie en 1er car l'indication ① est auto-suffisante, Soline juste en dessous pour l'indication ⑦ et Juan en 3e position pour l'indication ⑧.

Cette énigme peut être réinvestie en classe de 5e en guise d'introduction au calcul fractionnaire, la construction des pièces par les élèves permettant également de revoir l'utilisation du rapporteur.

Et rond, et rond petit macaron (algorithmique, 2017)

Contenu

► Matériel

- 1 énoncé ;
- 50 disques (8 noirs ; 7 orange ; 10 roses ; 5 violets ; 4 rouges ; 1 jaune ; 3 verts ; 4 bleus ; 8 gris) ;
- 3 plateaux « gâteau » ;
- 3 programmes.

► Énoncé

Les trois gâteaux d'anniversaire carrés de l'IREM sont à décorer avec des macarons colorés.
Vous devez poser au fur et à mesure les macarons dans l'ordre croissant des cases numérotées selon les instructions données par les programmes.
On note « nb.vides » le nombre de cases vides dans la ligne en cours.
On note « nb.remplies » le nombre de cases remplies dans la ligne en cours.
Les cases contiguës à une case donnée sont : la case du dessus, la case du dessous, la case de droite et la case de gauche.

Indications orales données par l'arbitre aux équipes :
Vous avez droit à deux propositions par programme.
Les gâteaux peuvent être complétés simultanément.

► Plateaux

Gâteau 1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Gâteau 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Gâteau 3

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

► Programmes

Sur les fiches données aux élèves, les disques sont de la couleur indiquée entre parenthèses, la couleur de l'instruction « boucle » ou « condition » et du cadre correspondant change pour chaque nouvelle instruction.

Programme du gâteau 1

Aller à la case 1

Répéter 2 fois :

poser un ● *(rouge)* aller à la case suivante poser un ● *(bleu)* aller à la case suivante

Répéter 2 fois :

si	nb.vides > nb.remplies
alors	poser un ● *(rouge)* aller à la case suivante
sinon	poser un ● *(bleu)* aller à la case suivante

si	nombre de ● *(bleu)* restants > nombre de ● *(rouge)* restants
alors	poser un ● *(rouge)* aller à la case suivante
sinon	poser un ● *(jaune)* aller à la case suivante

Répéter 2 fois :

si	nombre de ● *(rouge)* restants > nombre de ● *(bleu)* restants
alors	poser un ● *(rouge)* aller à la case suivante
sinon	poser un ● *(bleu)* aller à la case suivante

Programme du gâteau 2

Aller à la case 1

Répéter 3 fois :

si	nombre de ● *(violet)* restants $>$ nombre de ● *(vert)* restants
alors	poser un ● *(gris)* aller à la case suivante poser un ● *(violet)* aller à la case suivante
sinon	poser un ● *(vert)* aller à la case suivante poser un ● *(vert)* aller à la case suivante

Tant que nombre de ● *(gris)* restants $>$ nombre de ● *(violet)* restants :

poser un ● *(gris)*
aller à la case suivante

Répéter 4 fois :

si	nb.vides $\geqslant$ nb.remplies
alors	poser un ● *(violet)* aller à la case suivante poser un ● *(gris)* aller à la case suivante
sinon	poser un ● *(vert)* aller à la case suivante

Programme du gâteau 3

Aller à la case 1
Répéter 2 fois :

- Tant que nombre de ● *(rose)* restants $>$ nombre de ● *(noir)* restants :
  - poser un ● *(rose)*
  - aller à la case suivante
  - poser un ● *(orange)*
  - aller à la case suivante
- Répéter 4 fois :
  - si nombre de ● *(noir)* restants $>$ nombre de ● *(orange)* restants
  - alors
    - poser un ● *(noir)*
    - aller à la case suivante
  - sinon
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante
- Répéter 3 fois :
  - Tant qu'il n'y a pas de ● *(noir)* dans une case contiguë :
    - poser un ● *(noir)*
    - aller à la case suivante
  - si nombre de ● *(noir)* restants $= 0$
  - alors
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante
  - si nb.vides $>$ nb.remplies
  - alors
    - poser un ● *(orange)*
    - aller à la case suivante
  - sinon
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante

► **Solution**

B pour bleu, G pour gris, J pour jaune, N pour noir, O pour orange, R pour rouge, Rs pour rose, Ve pour vert, Vi pour violet.

Solution 1

R	B	R
B	R	B
J	B	R

Solution 2

G	Vi	G	Vi
Ve	Ve	G	G
G	Vi	G	Ve
Vi	G	Vi	G

Solution 3

Rs	O	Rs	O	N
N	N	Rs	N	Rs
O	O	Rs	O	Rs
O	N	N	N	Rs
N	Rs	O	Rs	Rs

Analyse

► **Compétences**

— Exécution d'un programme simple.

— Utilisation de séquences d'instructions.

— Utilisation de boucles itératives (répéter n fois) et conditionnelles (tant que ...).

— Utilisation d'instructions conditionnelles (« si ... alors ... » et « si ... alors ... sinon ... »).

► **Commentaires**

Cette énigme se range dans la catégorie « algorithmique ». Notre rallye a toujours régulièrement proposé ce type d'épreuve sous diverses formes : séries de déplacements à effectuer ou à déterminer, programme de calculs... mais suite à l'apparition de cette notion dans la dernière refonte des programmes, nous avons décidé d'inclure une énigme de ce type par session. Dans notre choix de mise en page des algorithmes, on retrouve les mâchoires des blocs de Scratch sous forme de cadres et l'indentation utilisée en Python.

L'objectif est ici de remplir des plateaux avec des jetons colorés en exécutant les algorithmes donnés. Les 3 plateaux sont indépendants, de difficulté croissante et utilisent des pions de couleurs différentes.

L'énoncé donne 3 définitions sur lesquelles toutes les équipes ont dû revenir lors de l'exécution : les élèves, étant pressés de rentrer dans l'activité, n'ont eu qu'une lecture superficielle de cet énoncé.

Deux stratégies ont dominé : faire les plateaux dans l'ordre à quatre ou se séparer en binômes pour faire les plateaux 1 et 2 puis se regrouper pour exécuter le programme 3. Dans tous les cas, le tri des pions par couleur puis par plateau a été effectué rapidement.

Le remplissage du 1^er^ plateau n'a posé aucune difficulté : même si les équipes ont majoritairement compté le nombre de cases vides ou remplies parmi l'ensemble des cases et non pas parmi celles de la ligne courante, cela ne change pas le résultat, ils ont donc continué confiants.

Le début du programme 2 a été exécuté facilement, les difficultés sont arrivées avec la condition « si nb.vides $\geqslant$ nb.remplies » :

— Les équipes ayant mal lu ou oublié les définitions données dans l'énoncé ont compté le nombre de cases vides et remplies sur le plateau et non pas sur la ligne courante. À ce stade, on dénombre 7 cases vides et 9 remplies sur le plateau. Elles ont donc posé le dernier jeton vert et se sont retrouvées bloquées pour la 2^e^ itération. Certaines, pensant avoir terminé, ont annoncé leur 1^re^ proposition à l'arbitre qui leur a indiqué qu'il y avait une erreur sans préciser laquelle. D'autres ont immédiatement relu les définitions. Dans tous les cas, toutes ont compris où était leur erreur et l'ont corrigée.

— La 2^e^ difficulté vient de l'inégalité large qui a été confondue avec une inégalité stricte, cela pose problème lors de la 4^e^ répétition. Quelques groupes n'ayant plus de vert à poser ont pensé avoir terminé.

Le plateau 3 a été abordé en dernier par toutes les équipes, celles qui s'étaient séparées en binômes pour travailler simultanément sur les deux premiers plateaux se sont rassemblées pour le dernier. Très peu d'équipes ont réussi à le compléter correctement dans le temps imparti.

— Les instructions sont plus complexes avec des boucles imbriquées. Beaucoup de groupes se sont perdus dans le compte des itérations et ont dû recommencer plusieurs fois. Ceux qui se sont répartis les rôles avec un lecteur, un compteur et des débatteurs sont allés plus loin que les autres.

— Le mot « contiguë » a dérouté les élèves, là encore ils ont dû relire l'énoncé avant de poursuivre l'activité.

— Les équipes ont aussi été déstabilisées par le fait de ne pas poser de pion quand, dès le 1^er^ tour, la condition « nombre de ● *(noir)* restants = 0 » n'était pas vérifiée. Les programmes précédents contenaient tous des instructions du type « si… alors… sinon… » alors qu'ici il s'agit uniquement d'un « si… alors… ». Le même problème s'est posé la 1^re^ fois que les élèves n'ont pas pu mettre de pions dans la boucle « Tant qu'il n'y a pas de ● *(noir)* dans une case contiguë ». Pour les autres occurrences, cela ne les a plus gênés.

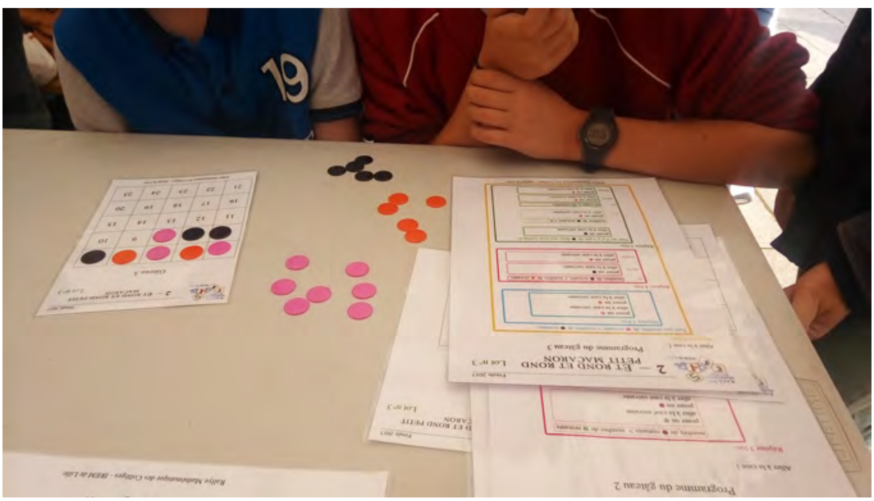
Lors de l'évaluation, les réponses partielles étaient prises en compte et chaque boucle correctement exécutée était valorisée.

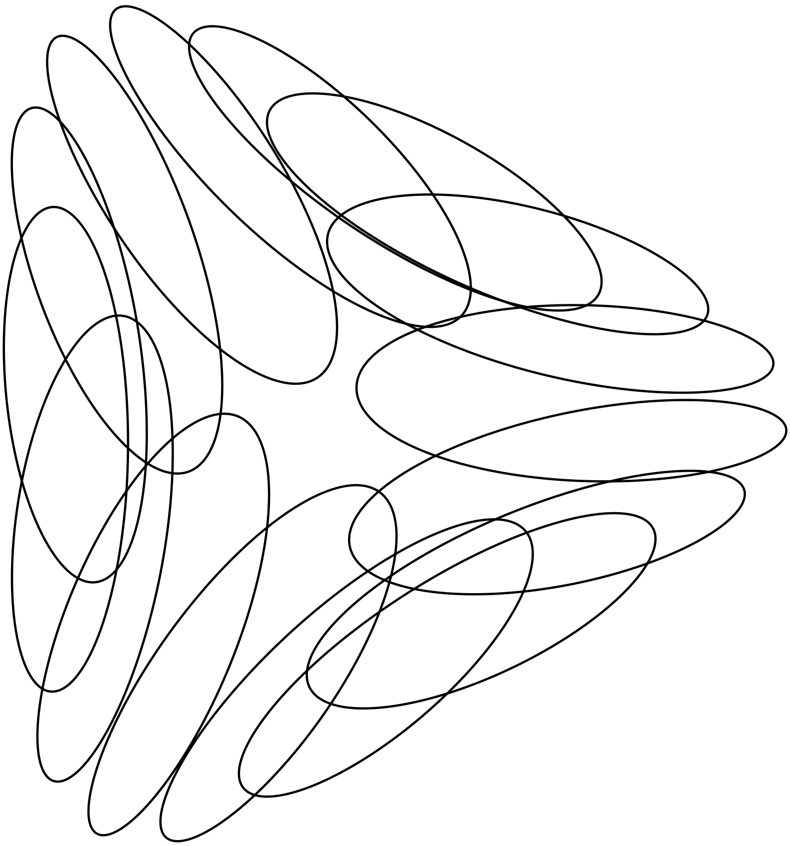
► **Prolongement**

L'épreuve peut être individualisée en donnant les plateaux vierges que chaque élève complète avec des feutres (dans ce cas il ne faut pas oublier d'indiquer le nombre de pions de chaque couleur à utiliser). Ils comparent ensuite leur production et proposent une réponse commune. Les élèves ont ainsi réfléchi individuellement à certaines commandes et doivent argumenter devant leurs camarades la compréhension qu'ils en ont (compétence *communiquer*).

On peut aussi proposer aux élèves de construire leur propre programme pour décorer un gâteau 4 × 4 avec certaines instructions imposées. Puis ils échangent leur programme avec celui d'un condisciple, l'exécutent, et comparent leur résultat à ce qui était attendu. Éventuellement, le binôme corrige les erreurs dans l'exécution ou même dans le programme lui-même.

Plus difficile, on peut donner un gâteau décoré et demander aux élèves de trouver un programme permettant de l'obtenir sachant que certaines instructions sont à utiliser.





$$\begin{cases} x(t) &= 14\cos(14t+30) - 25\cos(-15t+113) - 46\cos(t+33) \\ y(t) &= 14\sin(14t+30) - 25\sin(-15t+113) - 46\sin(t+33) \end{cases}$$

Rallye Mathématique d'Aquitaine - IREM d'Aquitaine

Présentation

Historique

Cette manifestation, placée sous la haute autorité de M. le Recteur depuis sa naissance en 1991, s'adresse à tous les élèves de 3^{e}, seconde générale et seconde professionnelle des départements de la Dordogne, de la Gironde, des Landes, du Lot et Garonne et des Pyrénées Atlantiques.

Elle ouvre les frontières :

— entre les élèves d'une même classe,

— entre l'enseignement général et l'enseignement professionnel.

Elle reçoit, depuis sa création, le soutien de l'Inspection Pédagogique Régionale et de l'Inspection Générale. Elle a la reconnaissance et l'appui des Conseils Départementaux.

Présentation

Les thèmes des problèmes choisis essayent de tenir compte des thèmes des semaines des mathématiques, ainsi en 2018 le thème était *Mathématiques et Mouvement*.

L'idée est de diversifier les problèmes, ceux qui font appel à de la logique de ceux qui font réellement appel à des notions mathématiques.

Des problèmes peuvent être réinvestis par les professeurs de mathématiques, notamment ceux qui font appel à des notions mathématiques des différents référentiels. Ils peuvent proposer ces problèmes en travail de groupes ou comme application d'une notion.

Modalités

L'épreuve, qui se déroule dans les établissements des élèves et qui dure 75 minutes, consiste en une palette de 12 problèmes originaux proposés à l'ensemble des classes qui participent :

— les problèmes ne rapportent pas tous le même nombre de points ;

— les élèves doivent mettre en place une stratégie de choix des problèmes traités puisqu'un problème faux fera perdre des points ;
— les classes devront proposer des solutions pour au moins sept problèmes parmi les douze. Parmi ces sept problèmes, elles devront choisir un joker qui double les points.

Les élèves d'une même classe s'organisent par groupes de trois ou quatre. Chaque groupe commence par rechercher un problème différent parmi les douze proposés. Au sein de chaque groupe, il y a un échange d'idées, de façon de faire (logique, tâtonnement, raisonnement mathématique). Des synthèses se font dans les groupes et entre les groupes : communication entre tous les élèves sur le choix des problèmes à remplir dans l'unique dossier réponse et sur le choix du joker.

Une rotation de professeurs est organisée sous couvert de l'Inspecteur d'Académie de chaque département pour effectuer la surveillance.

235 classes ont participé le lundi 12 mars 2018 à l'épreuve du Rallye, ce qui a représenté un total de 6 527 élèves. La répartition était la suivante : 135 classes de Collège, 79 classes de Lycée Généraux et Technologiques et 21 classes de LP.

Contacts :

✉ IREM d'Aquitaine
Site Lamartine
40 rue Lamartine
33400 TALENCE
@ irem.aquitaine@u-bordeaux.fr
@ rallyemath.33@orange.fr
www.rallye-math-aquitaine.com

S.O.S. Radar (Énigme 3 - sujet 2018)

Énoncé

En partant, Nelly, JP et Antho relèvent leur compteur kilométrique.

Nelly pourra observer le 1er palindrome sur son compteur au bout de 20 min. JP observera le sien au bout d'une heure et Antho, lui, l'observera au bout d'une heure et demie.
Qui roule en ville ? Sur une autoroute ? Sur un circuit ?

- **Notions abordées**
  Diviseurs d'un nombre.

- **Compétences sollicitées**
  Raisonner, calculer, contrôler.

Solution

Un palindrome est une suite de caractères (lettres, mots, chiffres. . .) que l'on peut lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite.

Exemple : « engagelejeuquejelegagne »

$$v = \frac{d}{t}$$

	Nelly	JP	Anthony
Compteur	149 976	14 494	130 939
1er palindrome	150 051	14 541	131 131
Distance d (en km)	75	47	192
Temps t (en h)	$\frac{1}{3}$	1	1,5
Vitesse v (en km/h)	225	47	128

Compte tenu des vitesses calculées, Nelly est sur un circuit, Anthony sur autoroute et JP en ville.

Les foulées d'Usain (Énigme 7 - sujet 2018)

Énoncé

Sur la piste d'athlétisme, Christophe a 30 foulées d'avance sur Usain. Or, 4 foulées de Christophe valent 3 foulées d'Usain en longueur, et pendant qu'Usain fait 9 foulées, Christophe en fait 10.
En combien de foulées Usain rattrapera-t-il Christophe ?

► **Notions abordées**
Proportionnalité, équations.

► **Compétences sollicitées**
Modéliser, calculer.

Solution

Usain va rattraper Christophe. Pour cela, il va effectuer k' foulées pendant que Christophe en fera k.

Cela signifie que, pour une longueur donnée, k' foulées d'Usain équivalent à $k+30$ foulées de Christophe.

Cela signifie que, pour un temps donné, k' foulées d'Usain équivalent à k foulées de Christophe.

D'où les deux tableaux de proportionnalité suivants :

Usain	k'	3
Christophe	$k+30$	4

Usain	k'	9
Christophe	k	10

D'où les deux équations suivantes : $3(k+30) = 4k'$ et $9k = 10k'$
donc $9k + 270 = 12k'$ et $9k = 10k'$
donc $10k' + 270 = 12k'$
donc $2k' = 270$
donc $k' = 135$.

Usain doit faire 135 foulées pour rattraper Christophe.

► **Autre solution**
On sait que 4 foulées de Christophe (f_C) valent 3 foulées d'Usain (f_U) soit $4 \times f_C = 3 \times f_U$.

D'où $9 \times f_U = 12 \times f_C$.

Quand Usain effectue 9 foulées ($9f_U = 12f_C$), Christophe en fait 10 ($10f_C$).

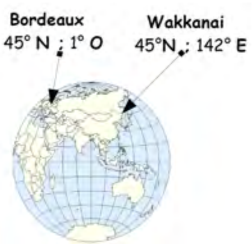
Après 9 foulées d'Usain, l'écart entre les deux coureurs est réduit de $2f_C$. Christophe avait 30 foulées d'avance. Pour réduire l'écart de $30f_C$, il suffit de répéter 15 fois une réduction de $2f_C$. Usain doit effectuer 15 fois 9 foulées.

$15 \times 9 = 135$

Usain le rattrape en 135 foulées.

Pigeon vole **(Énigme 9 - sujet 2018)**

Énoncé



Amélie est au Japon pour une année.
Elle est partie étudier la robotique dans le cadre d'un projet Erasmus...

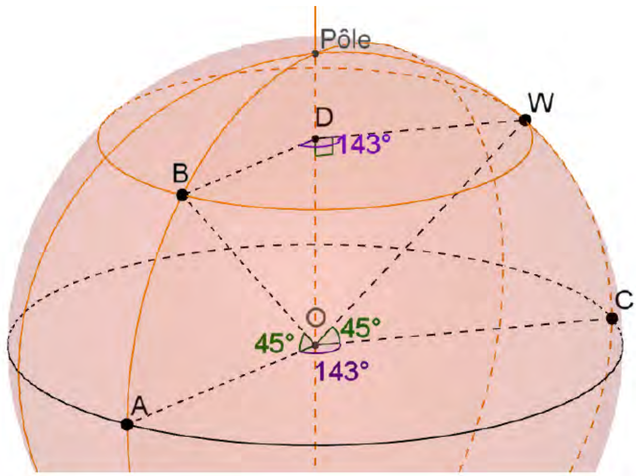
Elle décide de faire parvenir un message à sa sœur. Son fidèle pigeon Léon prend son envol de Wakkanai et garde la direction de l'Ouest jusqu'à Bordeaux. Léon arrive quelques semaines plus tard avec son message jalousement gardé.
Calculer la distance du périple de Léon.

► **Notions abordées**
Coordonnées sur une sphère, trigonométrie.

► **Compétences sollicitées**
Représenter, modéliser, calculer.

Solution

Bordeaux et Wakkanaï sont situés à 45°N, sur le même parallèle. La différence de longitude entre les deux villes est égale à 143°.



On sait que $OC = OW = 6\,380\,\text{km}$ et $\widehat{BDW} = 143°$.

On cherche la longueur de l'arc $\overset{\frown}{WB}$.

Déterminons d'abord la longueur du rayon du cercle de centre D passant par B et W.

Dans le triangle DOW, rectangle en D, on peut utiliser les relations trigonométriques :

$\sin(\widehat{DOW}) = \frac{DW}{OW}$

$DW = 6\,380 \times \sin(45°)$

$DW = 3\,190\sqrt{2}$

La longueur d'un arc de cercle de rayon r est proportionnelle à l'angle au centre.

	Angle au centre	Longueur de l'arc
Tour complet	360°	$2 \times \pi \times r$
arc $\overset{\frown}{WB}$	143°	L

D'où $L = mes(\overset{\frown}{WB}) = 2 \times \pi \times 3\,190\sqrt{2} \times \frac{143}{360}$.

$L \simeq 11\,259\,\text{km}$

Le périple de Léon le pigeon est d'environ $11\,259\,\text{km}$.

Course d'orientation (Énigme 1 - sujet 2017)

Énoncé

Voici un extrait de la carte d'orientation de Sébastien :

Dans la forêt, il court à 9 km/h et sur la route, il court deux fois plus vite. Aide-le en dessinant le chemin le plus rapide entre la balise 1 et la balise 2. (Précision : 1 mm)

- **Notions abordées**
  Vitesse, optimisation, démarche d'investigation, trigonométrie.

- **Compétences sollicitées**
  Raisonner, calculer.

Solution

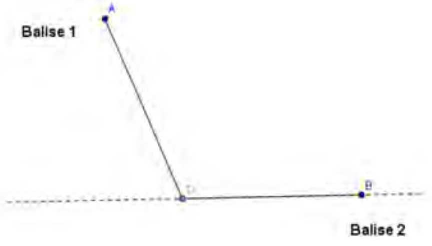
Dans la forêt il court la distance AD (en km) et la durée de son parcours (en h) est $t_1 = \frac{AD}{9}$.

Sur la route, il parcourt la distance DB en une durée $t_2 = \frac{DB}{18}$.

La durée du parcours est donc égale à : $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{9}(AD + \frac{1}{2}DB)$.

Le chemin le plus rapide correspond au point D qui minimise $AD + \frac{1}{2}DB$.

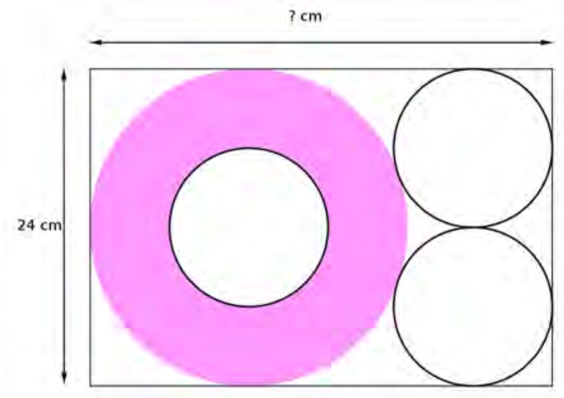
En effectuant plusieurs tracés, on peut trouver par dichotomie la position du point D au millimètre près.



Rouleaux de Printemps (Énigme 5 - sujet 2017)

Énoncé

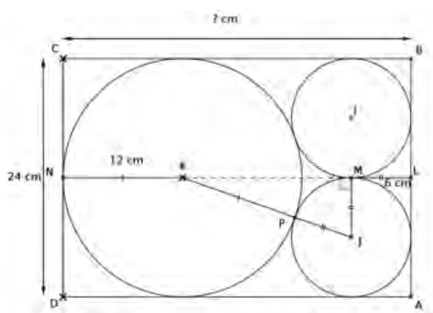
Les 2 rouleaux de PQ vides et le plein sont tangents entre eux, ainsi qu'à la boîte rectangulaire de largeur 24 cm.
Quelle est sa longueur ?



► **Notions abordées**
Cercles tangents, théorème de Pythagore.

► **Compétences sollicitées**
Représenter, raisonner, calculer.

Solution



Pour déterminer la longueur BC, il suffit de trouver la longueur MK.

Le cercle de centre K est tangent en P au cercle de centre J, donc les points K, P et J sont alignés et KJ = 18 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle KJM, rectangle en M :

$MK = \sqrt{18^2 - 6^2}$
$MK = \sqrt{288}$
$MK = 12\sqrt{2}$

d'où la longueur de ce rectangle est égale à $18 + 12\sqrt{2}$ cm.

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Présentation

Le Rallye Mathématique de Poitou-Charentes est une compétition en classes complètes. Depuis 2004, un thème (recherche documentaire) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le thème. Les élèves doivent donc réunir une documentation et préparer un dossier en fonction des questions posées et des pistes données. Ce dossier sera complété par les questions de l'épreuve finale. Voici, depuis 2004, les thèmes choisis : Sophie Germain, Marie Agnesi, Ératosthène, Alicia Boole-Stott, π, le nombre d'or, les numérations, la magie des maths, des outils pour tracer, les codes secrets, les puzzles, le temps, les pliages et, en 2017, nombres, formes et jeux.

La classe doit donc fournir un dossier sur le thème et le bulletin-réponse de la partie « problèmes ». Ceux-ci sont variés pour que chaque élève puisse participer et, à partir de la quatrième, l'un des problèmes est énoncé en trois langues étrangères. Toutes les épreuves du Rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

apmep.poitiers.free.fr/spip.php?rubrique8

Historique

- 1991 : Création du Rallye pour les 3^{e} et les 2nde.
- 2007 : Extension aux classes de 6^{e}, 5^{e} et 4^{e}.
- 2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.
- 2011 : Première cérémonie de remise des prix.
- 2013 : Passation des épreuves pendant la Semaine des Mathématiques.
- 2014 : Extension aux classes de 2nde Pro et proposition d'épreuves pour les CM.

Épreuves

— Classes de 2^{nde} : 2 heures pour traiter le thème et les 8 ou 9 problèmes.

— Classes de collèges et 2^{nde} Pro : 1 heure pour traiter le thème et les 4 ou 5 problèmes.

Compétition

— Épreuve d'entraînement envoyée à tous les établissements en décembre.

— Épreuve finale, pendant la Semaine des Mathématiques, concernant uniquement les classes inscrites.

Organisateur

Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Partenaires institutionnels

IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

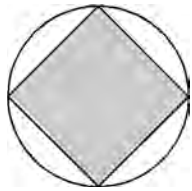
Contact

✉ APMEP
IREM de Poitiers
Bât. H3 - SP2MI Futuroscope
Bd. Marie et Pierre Curie
TSA 61 125
86073 POITIERS Cedex 9
☎ +33 (0)5 49 455 38 77 (IREM de Poitiers)
@ apmep.poitiers@free.fr

Carré encerclé (2016, niveau 5e)

Énoncé

Le rayon du cercle mesure 1 m.
Les quatre sommets du carré sont sur le cercle.
Quelle est l'aire du carré ?



Domaine

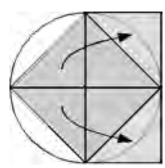
Géométrie

Niveau

À partir de la 6e.

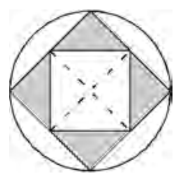
Solution

En traçant les deux diamètres d'extrémités les sommets du carré et en regroupant les morceaux gris foncé et gris clair, on s'aperçoit que l'aire du carré est équivalente à celle de deux carrés de 1 m de côté, donc à **2 m^2**.



ou bien

Le carré obtenu en joignant les milieux du carré encerclé a pour côté 1 m. Son aire de 1 m^2 est la moitié de celle du carré encerclé. Ce dernier a donc une aire de **2 m^2**.



Analyse

Dans un premier temps, on peut penser qu'il est nécessaire de calculer la longueur du côté du carré pour ensuite utiliser la formule de l'aire du carré (longueur du côté × longueur du côté).

Cet exercice a été proposé au niveau 5e car nous voulions faire fonctionner le concept d'aire, sans calcul et où le découpage s'avère astucieux. Nous voulions privilégier le découpage, solution souvent très pertinente et choisie par les élèves.

Les élèves sont ainsi incités à prendre l'initiative de tracer les deux diagonales et à obtenir quatre triangles rectangles isocèles qui, une fois assemblés judicieusement forment un rectangle de 1 m de large sur 2 m de long d'où la solution 2 m^2.

La deuxième solution non rencontrée, mais que nous avons proposée, est plus complexe d'un point de vue mathématique puisqu'elle repose sur le théorème de Varignon dans le cas particulier du carré.

Prolongement

On peut demander une solution sans découpage en utilisant le carré obtenu en joignant les milieux du carré encerclé ou encore demander un calcul numérique qui ferait intervenir l'utilisation du théorème de Pythagore.

Rugby (2016, niveau 2$^{\text{nde}}$ Pro)

Énoncé

Lors de la coupe du monde de rugby de 2015, 20 équipes se sont affrontées de la manière suivante : réparties en 4 poules de 5 équipes, chaque équipe a rencontré les 4 autres afin d'établir un classement. La suite de la compétition s'est déroulée entre les huit meilleures équipes issues des poules et a comporté trois tours à élimination directe : quarts de finale, demi-finales et finale.
Celle-ci met aux prises les vainqueurs des demi-finales, les perdants disputant la « petite finale » pour la 3$^{\text{e}}$ place de la compétition. Les quart-de-finalistes ne sont pas classés.

1. Combien de matches ont-ils été joués sur l'ensemble de la compétition ?
2. On se souvient de la victoire de la Nouvelle-Zélande contre la France en quart de finale avec un score sans appel de 62 à 13. Mais vous souvenez-vous du nombre d'essais transformés ? Pour vous aider à le retrouver, voici deux indices : la France n'a marqué qu'un seul essai, la Nouvelle-Zélande qu'une seule pénalité et son buteur a réussi plus des $\frac{3}{4}$ des transformations.

Rappel : une pénalité donne 3 points, un essai non transformé donne 5 points, un essai transformé donne 7 points.

Domaine

Arithmétique

Niveau

À partir de la 5^{e}.

Solution

1. Nombre de matches pour 1 poule de 5 équipes :

   on les nomme A – B – C – D – E. On fait l'inventaire sans compter deux fois le même match : A rencontre B, C, D et E ; B rencontre C, D et E ; C rencontre D et E ; et D rencontre E. Il y a donc 10 matches par poule. Pour les 4 poules, cela fait 40 matches.

   On ajoute ensuite les 4 quarts de finale, les 2 demi-finales, la « petite » finale et la finale. **Soit un total de 48 matches**.

2. — Pour la France : 13 = 5 (essai) + 8. Comme il n'y a eu qu'un seul essai et que 8 n'est pas un multiple de 3 (pénalité), il a été transformé. Donc un essai transformé (7) et deux pénalités (6).

   — Pour la Nouvelle-Zélande : 62 − 3 (pénalité) = 59.

   Les deux seules combinaisons possibles pour obtenir 59 avec une somme de 7 et de 5 sont :

   $2 \times 7 + 9 \times 5$ soit 2 essais transformés et 9 non transformés ;

   $7 \times 7 + 2 \times 5$ soit 7 essais transformés et 2 non transformés.

   Comme le buteur a réussi plus des $\frac{3}{4}$ des transformations, c'est la dernière solution qui convient.

   Donc **au total il y a eu 8 essais transformés** dans ce quart de finale de la coupe du monde de rugby.

Analyse

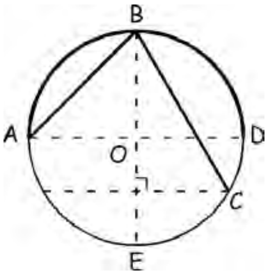
Un exercice sur un sujet d'actualité et concernant un centre d'intérêt des élèves a de grandes chances d'être lu et éventuellement résolu.

Cet exercice dans un premier temps demande de la logique pour trouver le nombre total de matches.

Ensuite la lecture du texte va amener les élèves vers la solution. Solution qu'ils connaissent s'ils ont vu le match.

Ready, steady, go ! (2016, niveau 3^e)

Énoncé



¡ A sus puestos, listos, ya !
Dos corredores parten de A. Alix da la “media vuelta” a la pista ABD, Bob describe los segmentos [AB] y después [BC].
C pertenece a la mediatriz de [OE] y los radios [OA], [OB], [OC] y [OD] miden 50 metros.
Llegan al mismo tiempo, Alix a D, Bob a C.
¿ Cuál de los dos va más rápido ?

Ready, steady, go !
Two runners start from A. Alix runs the "half-track" "ABD", Bob runs along the segment [AB], then [BC]. C belongs to the perpendicular bisector of [OE] and the radii [OA], [OB], [OC] and [OD] are 50 meters long.
They arrive at the same time : Alix at D while Bob at C.
Which one is the faster ?

Auf die Plätze, Fertig, Los !
Zwei Läufer starten von A. Alix macht die "halbe" Runde ABD, Bob legt die Segmente [AB] dann [BC] zurück.
C gehört zur Mittelsenkrechten von [OE] und die Radien [OA], [OB], [OC] und [OD] betragen 50 m.
Sie kommen gleichzeitig an, Alix bei D, Bob bei C.
Wer von beiden läuft schneller ?

Domaine

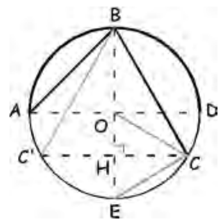
Géométrie.

Niveau

À partir de la 3e.

Solution

Traduction : À vos marques, prêts, partez !
Deux coureurs partent de A. Alix fait le « demi-tour » de piste ABD, Bob décrit les segments [AB] puis [BC]. C appartient à la médiatrice de [OE] et les rayons [OA], [OB], [OC] et [OD] mesurent 50 m.
Ils arrivent en même temps, Alix en D, Bob en C. Lequel des deux va le plus vite ?



Distance parcourue par chacun :

— Par Alix : $\frac{1}{2} \times 50 \times 2\pi = 50\pi$ soit environ 157,08 m

— Par Bob : AB = $\sqrt{50^2 + 50^2} = 50\sqrt{2}$ (propriété de Pythagore dans le triangle AOB).

Calcul de BC : (CC') est la médiatrice de [OE], donc EC = CO = OE et le triangle OCE est équilatéral. Les angles $\widehat{CEB}$ et $\widehat{CC'B}$ interceptent le même arc. Ils mesurent donc 60° et le triangle BCC' est équilatéral.

Donc BC = $\frac{2BH}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$.

Bob parcourt donc AB + BC = $50\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, soit environ 157,31 m.

Donc **c'est Bob qui est le plus rapide** car, à temps égal, il a parcouru la distance la plus longue (157,31 > 157,08).

Analyse

Un énoncé en trois langues (anglais, allemand et espagnol) est proposé à partir de la 4e. Ces énoncés sollicitent d'autres capacités des élèves.

Une fois traduit, l'exercice semble devenir un problème de calcul de vitesse : « lequel va le plus vite ? ». Mais si on lit l'énoncé plus attentivement, on note que les deux coureurs ont mis le même temps donc le problème devient un calcul de longueur de chemin parcouru.

Prolongement

Pour une classe de 2^{nde}, on peut proposer le texte suivant :

« On considère le cercle ci-contre de rayon r mètres. Deux coureurs partent de A. Alix fait le « demi-tour » de piste « ABD », Bob décrit les segments [AB] puis [BC]. C appartient à la médiatrice de [OE]. Ils arrivent en même temps, Alix en D, Bob en C. Lequel des deux va le plus vite ? ».

Ainsi la résolution met en œuvre du calcul littéral.

Le jeu électronique (2017, niveau 5e)

Énoncé

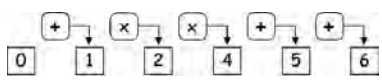
Ce petit jeu électronique est fort simple. Il s'agit d'atteindre un nombre entier, le nombre cible, donné par la machine de façon aléatoire, en utilisant un minimum de fois seulement deux boutons :

— la touche (+) augmente de 1 le score affiché à l'écran.

— la touche (×) double le score affiché à l'écran.

Quand débute la partie, le score du joueur est 0 et le nombre cible à atteindre s'affiche.

Si, par exemple, la cible est 6, le joueur peut taper successivement :



Il y a donc eu 5 pressions sur les touches. Mais il est possible de faire mieux avec la séquence suivante où il n'y a que 4 pressions des touches.

C'est la plus courte séquence possible.

Maintenant, saurez-vous atteindre le nombre cible 2017 en un nombre minimum de pressions des touches ?

Domaine

Arithmétique

Niveau

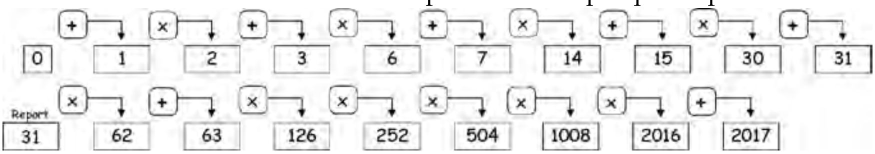
À partir de la 6e.

Solution

La stratégie est de partir de 2017 et de faire le maximum de divisions par 2 pour qu'il y ait le moins possible de pressions de touches.

2017 (-1) **2016** (÷2) **1008** (÷2) **504** (÷2) **252** (÷2) **126** (÷2) **63** (-1) **62** (÷2) **31** (-1) **30** (÷2) **15** (-1) **14** (÷2) **7** (-1) **6** (÷2) **3** (-1) **2** (÷2) **1** (-1).

Il suffit maintenant de faire les opérations réciproques à partir de 0.



Analyse

La forme ludique de cet énoncé peut être attractive et interpeller beaucoup d'élèves.

Bien sûr, on ne peut pas commencer par la touche « multiplication ». Une fois le 1 obtenu, on se rend vite compte en arrivant à 1024 que la stratégie de multiplier toujours par 2 est mauvaise. Mais cette tentative peut permettre de penser à la bonne stratégie qui consiste à considérer le problème réciproque : comment en partant de 2017 obtenir 0 et c'est là tout l'intérêt du problème. La plupart des réponses ont été obtenues par des essais.

Démontrer que la solution obtenue est la plus courte n'entrait pas dans l'objectif de cet exercice mais trouver moins de pressions de touche que son camarade peut devenir un enjeu amusant.

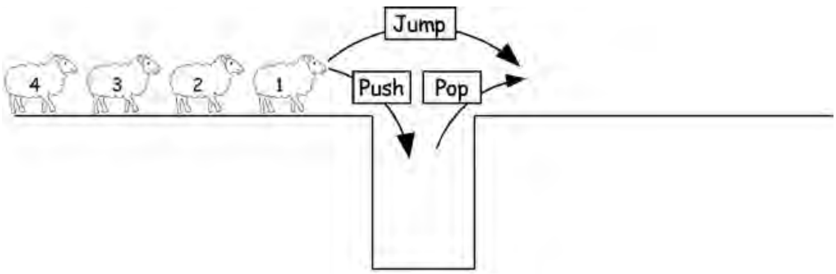
Prolongement

Écrire le calcul en une seule ligne peut faire travailler les priorités opératoires.

Saute-mouton (2017, niveau 6e)

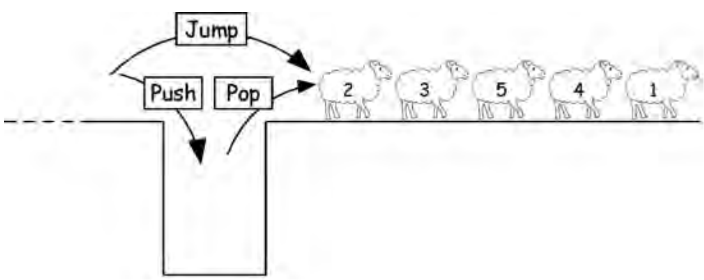
Énoncé

Au fur et à mesure que les moutons arrivent, un mécanisme permet soit de les faire passer de l'autre côté (Jump), soit de les faire descendre en les mettant les uns au dessus des autres (Push) et de les faire remonter en prenant celui de dessus et en les faisant passer de l'autre côté (Pop). Une fois passés, les moutons avancent pour laisser la place aux suivants.



1. Quel va être l'ordre des moutons de l'autre côté si le mécanisme a effectué successivement les opérations suivantes :
   Push - Jump - Push - Jump - Pop - Pop ?

2. Quelle est la plus petite suite d'opérations que le mécanisme a effectuée pour avoir obtenu l'ordre suivant ?



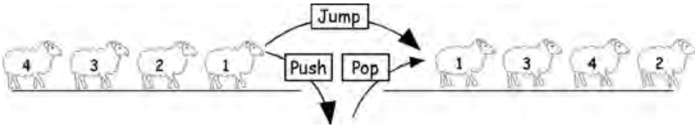
Domaine

Logique

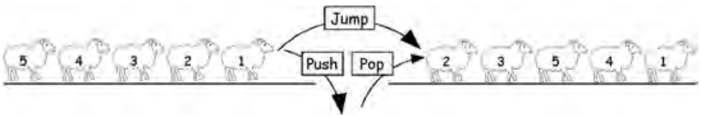
Niveau

À partir du cycle 2.

Solution

1. 

Push - Jump - Push - Jump - Popp - Pop
(1) (2) (3) (4) (3) (1)

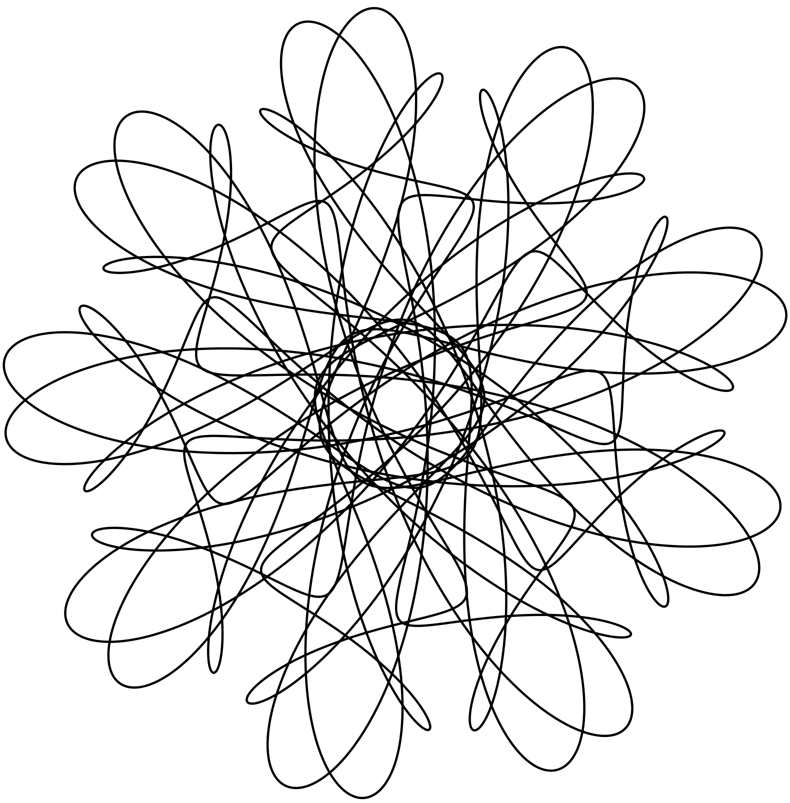
2. 

Jump - Push - Push - Jump - Jump - Popp - Pop
(1) (2) (3) (4) (5) (3) (2)

Analyse

Dans chaque épreuve de Rallye, nous essayons de proposer un exercice mettant en œuvre les capacités à comprendre un texte, à organiser une démarche et à écrire les résultats.

Ici, l'énoncé est simple mais sa résolution demande de la méthode et de l'organisation.



$$\begin{cases} x(t) &= -34\cos(43t+81)-70\cos(16t)-73\cos(-20t-132) \\ y(t) &= -34\sin(43t+81)-70\sin(16t)-73\sin(-20t-132) \end{cases}$$

Rallye mathématique de l'IREM Paris Nord

Présentation

Depuis 1998, l'IREM de Paris Nord organise un rallye mathématique qui est un concours pour une classe entière, soit de CM2 soit de 6^{e} soit deux groupes mixtes CM2/6^{e} pour l'Académie de Créteil. Ce rallye a pour objectifs d'inciter les enseignants à proposer des problèmes ouverts et ludiques à leurs élèves, à encourager la coopération entre élèves et à promouvoir la liaison école-collège.

En 2017, 250 classes ont participé. En 2018, les épreuves ont occupé 345 classes soit plus de 8 000 élèves dont la moitié en groupes mixtes. Quelques classes CM1/CM2 ont également participé nous incitant à étendre dès 2019 le rallye pour l'ensemble du cycle 3.

Le rallye étant un concours s'effectuant en classe entière, l'organisation des élèves prend une place prépondérante dans la réussite de l'épreuve. Un travail préparatoire est donc nécessaire afin que les élèves s'entendent sur une manière efficace de fonctionner ensemble. Il s'agit donc non seulement de faire vivre les mathématiques autrement mais aussi de développer l'entraide, l'action collective et les responsabilités de chacun.

Pour aider cette préparation, le groupe rallye a créé une nouvelle rubrique sur le site de l'IREM regroupant les 191 épreuves des archives du rallye classées par catégorie, par temps estimé pour les réaliser et par type de support. Ces épreuves sont accompagnées de leurs solutions et certaines sont analysées.

La préparation du rallye est également devenue un cadre privilégié de liaison école/collège et une formation de proximité est proposée depuis 2017 au Plan de Formation Académique de Créteil.

Organisation

Elle se fait en trois temps ponctués par trois gazettes.

1. Les inscriptions se font en ligne sur le site de l'IREM Paris-Nord et s'ouvrent chaque année à la fin du mois de septembre avec la parution d'une première « gazette » qui détaille les modalités de participation.

2. Pour aider la classe à la préparation du rallye, une sélection d'épreuves provenant d'autres rallyes mathématiques est proposée, comme entrainement, dans un nouveau numéro de la gazette paraissant au mois de décembre.

   Certains enseignants inscrivent chaque année leurs classes et intègrent le rallye dans leur pratique pédagogique. Ils préparent celles-ci en vue des épreuves en proposant régulièrement des problèmes ouverts et entrainent leurs élèves en travaillant sur les sujets des éditions précédentes. Un compte-rendu très détaillé, accessible en ligne, de Caroline Mathias sur le travail de sa classe durant l'année, illustre à merveille ce que l'on peut réaliser en classe en s'appuyant sur ce concours.

3. L'épreuve se déroule pendant la semaine des mathématiques. La dernière gazette contenant le corrigé est disponible ensuite très rapidement.

Chaque classe reçoit ensuite, entre mai et juin, un diplôme la classant dans sa catégorie.

Épreuves

Le rallye se déroule au mois de mars, pendant la semaine des mathématiques. Les classes ont une heure pour répondre aux dix épreuves proposées.

Contacts

Le rallye est conçu et organisé par des membres du groupe collège de l'IREM Paris Nord : Erwan Adam, Frédéric Clerc, Stéphan Petitjean et Salvatore Tummarello sous la direction de Sylviane Schwer, et la formation par Caroline Matthias.

Les informations concernant le rallye et les annales de toutes les éditions depuis 1998 sont disponibles sur le site internet de l'IREM Paris Nord.

www-irem.univ-paris13.fr

Pour tout renseignement supplémentaire :

@ irem@math.univ-paris13.fr

Remarques préliminaires

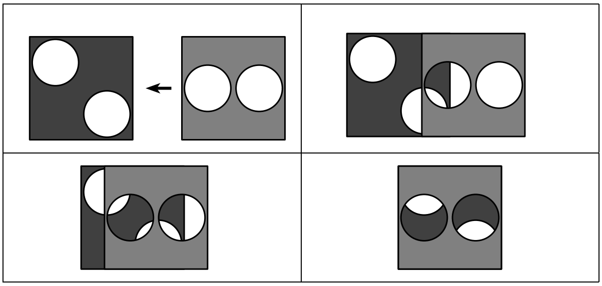
Les activités choisies pour le rallye sont des problèmes ouverts qui font la part belle aux manipulations, aux essais, aux raisonnements, aux échanges entre pairs et qui ont, si possible, une certaine esthétique. La pensée algorithmique est très présente. La variété, la difficulté des tâches et leur durée, l'obligation de ne rendre qu'une seule copie par classe nécessitent une organisation minutieuse de la classe, tout en permettant la participation de toutes et de tous : se regrouper par compétences complémentaires permet de faire de belles découvertes.

On retrouve naturellement ces activités dans les préparations aux rallyes suivants, mais aussi comme support de différentiation, dans les *défis* que les conseillers pédagogiques organisent dans les circonscriptions. Ces activités sont également très appréciées par le grand public et les élèves plus âgés sous la forme d'énigmes qui sont proposées sur le stand « Laga/IREM/ScienceOuverte » de Savante Banlieue organisée par Plaine Commune sur le campus de l'université Paris 13, lors de la semaine des sciences.

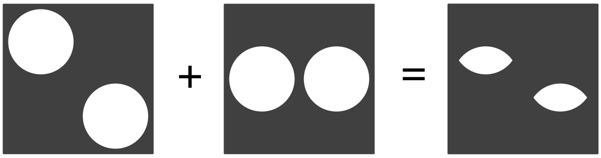
Épreuve 8 (rallye 2018)

Énoncé

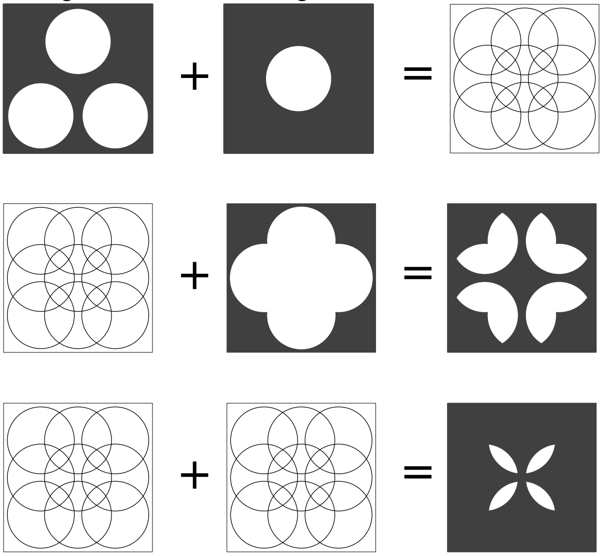
On dispose de cartes perforées que l'on peut superposer comme illustré ci-dessous :



Ce que l'on peut résumer comme ceci :

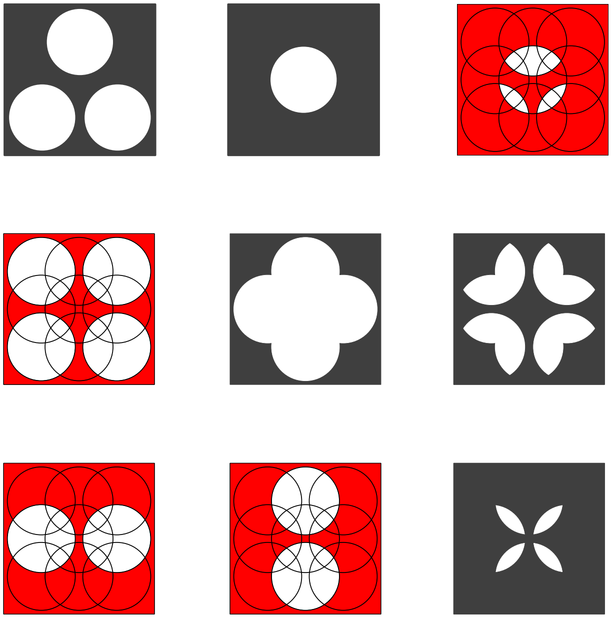


Complétez les égalités suivantes en grisant convenablement les cartes :



NB : Les cartes sont perforées avec un poinçon qui fait des trous circulaires.

Solution



Analyse

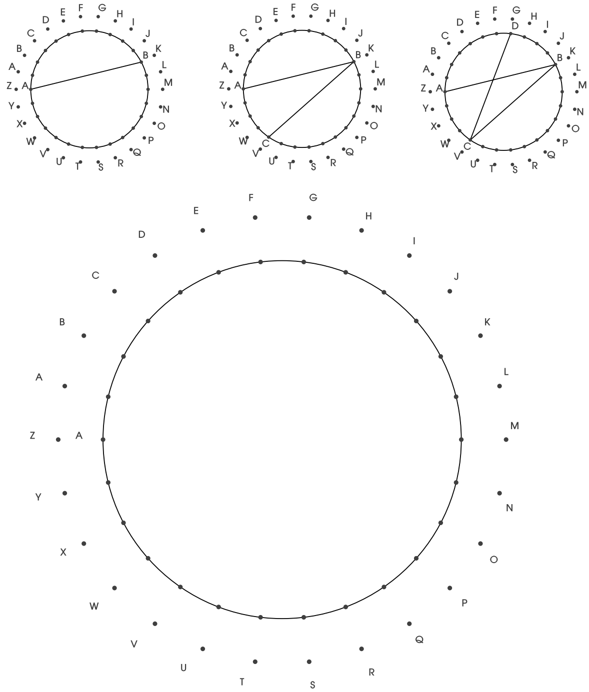
Cette épreuve a posé plus de difficultés que nous ne l'avions prévu, sans doute à cause d'une ambiguïté de la consigne originale qui omettait de préciser que les trous étaient circulaires, ce qui nous a valu quelques réponses triviales. Mais nous avons aussi reçu de nombreuses réponses aberrantes (45%), ce qui montre que les problèmes d'intersections peuvent être posés avec profit au cycle 3. Le problème mêlait en fait toutes les notions de théorie élémentaire des ensembles : l'intersection bien sûr, mais aussi la réunion et le complémentaire. En effet, la solution cherchée était l'intersection de deux réunions de disques et chaque carte perforée pouvait être vue comme le complémentaire dans un carré d'une réunion de disques. Sans entrer dans cette formalisation en cycle 3, on peut proposer ce problème pour faire travailler l'imagination préalable à l'abstraction : on demandait finalement de déplacer un objet par la pensée. Peut-être la construction et la manipulation préalable de véritables cartes perforées améliorerait-elle les performances des élèves dans la visualisation des intersections d'ensembles ? On peut espérer qu'un tel travail puisse avoir des effets positifs sur la compréhension de propositions logiques mêlant négation, conjonction et disjonction.

Épreuve 8 (rallye 2016)

Énoncé

On a retrouvé ce message ainsi que quelques mystérieux dessins.

IZE AXLAZAJP, VRPZE M'D VXBIERMGEZ EJRM !



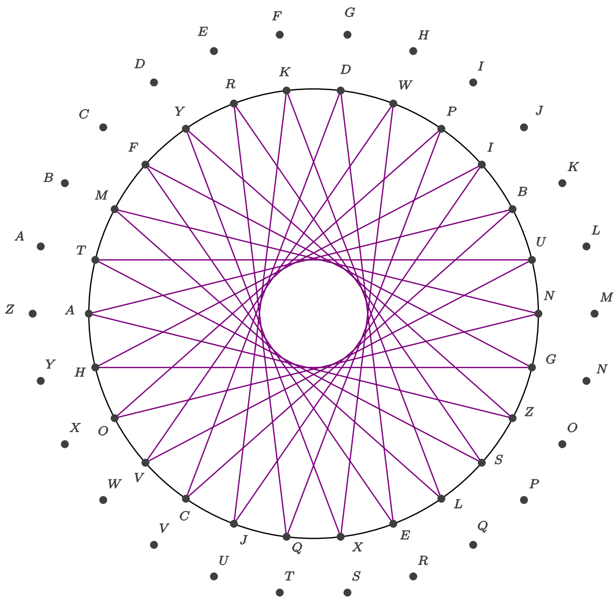
Décodez le message.

Solution

« PAR TOUTATIS, CESAR N'Y COMPRENDRA RIEN ! »

Analyse

Dans cette épreuve, il fallait deviner que les premiers dessins étaient le début d'une suite à continuer pour obtenir une correspondance entre les lettres de l'alphabet. L'algorithme était assez simple : il fallait relier le dernier point atteint au onzième point rencontré en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et écrire les lettres de l'alphabet dans l'ordre. On obtenait ce dessin :



Certains groupes ont hésité, dans leur décompte de points, à compter ceux qui étaient déjà atteints par un segment : cette hésitation était légitime mais cette méthode ne donnait rien ici.

Le code à trouver était un code affine, c'est-à-dire une généralisation du code employé par César qui consistait à opérer un simple décalage sur les lettres de l'alphabet. Plus précisément, l'application de chiffrement était

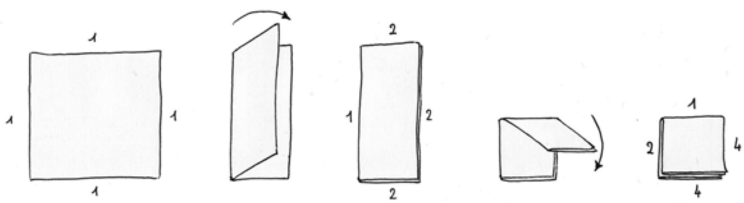
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 11x-1 \end{array}\right.$$

La pauvreté de la consigne encourageait les recherches tous azimuts. C'est d'ailleurs souvent une piste intéressante à explorer que de débarrasser les problèmes de leur consigne, quand c'est possible : l'activité qui consiste à se poser des questions n'est-elle pas éminemment mathématique ?

Épreuve 2 (rallye 2016)

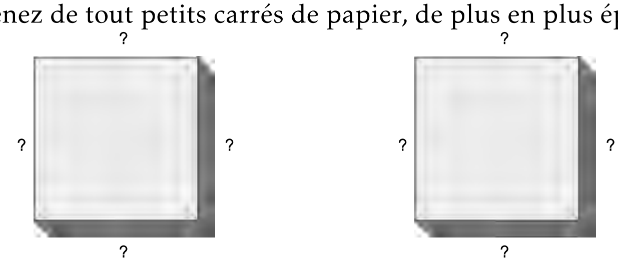
Énoncé

Prenez un carré de papier et pliez-le en quatre une première fois, comme sur l'illustration :



Vous pouvez voir que les côtés du petit carré obtenu ne présentent pas tous le même nombre de bords de papier. Recommencez l'opération une deuxième fois : sans tourner le carré obtenu, pliez-le encore en quatre de la même façon, en rabattant la partie gauche vers la droite puis la partie haute vers le bas.

Si vous recommencez l'opération une troisième puis une quatrième fois, vous obtenez de tout petits carrés de papier, de plus en plus épais !



Combien de bords comportent les côtés du tout petit carré obtenu à la fin de la troisième étape ? À la fin de la quatrième étape ?

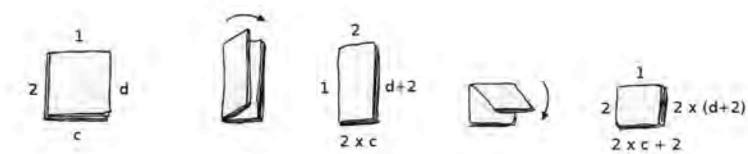
Solution

Analyse

Pour résoudre ce problème, le pliage des premières étapes était évidemment un aide, mais il était illusoire d'aller ainsi jusqu'à la quatrième étape. Il fallait alors trouver un moyen de *calculer* les nombres de bords de la troisième puis de la quatrième étape, en réalisant les pliages *mentalement*.

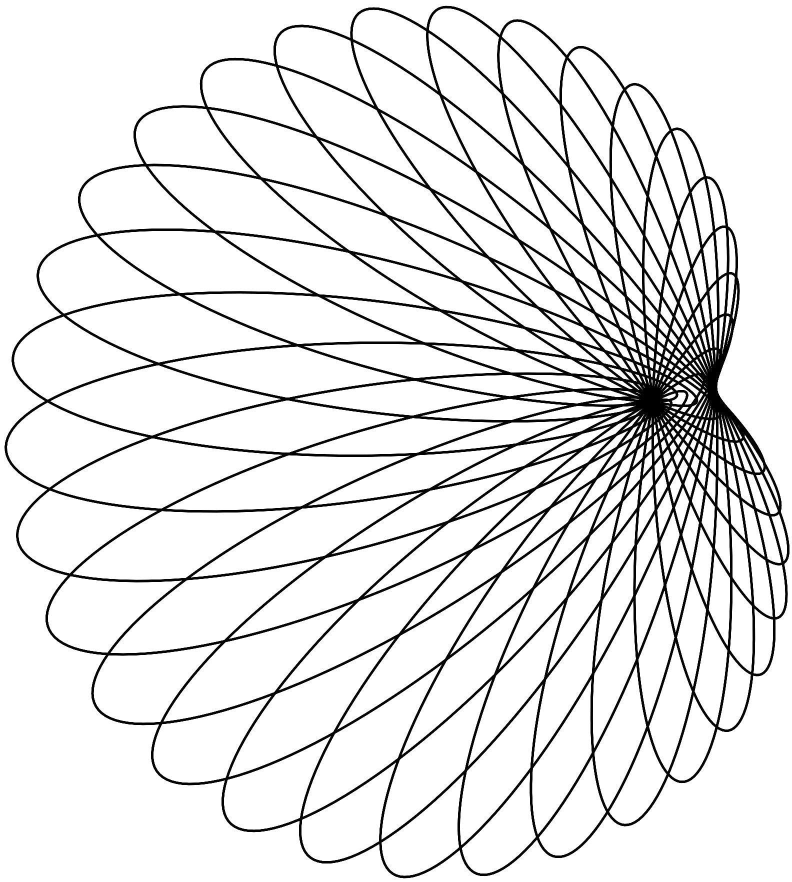
Un premier constat a été très largement fait par les élèves : les deux premiers côtés du carré comportent toujours 1 et 2 bords respectivement. Restent deux nombres à trouver.

Le schéma suivant résume les raisonnements qui ont pu être faits. Nous avons utilisé deux variables c et d :



On avait ainsi un moyen de déterminer de proche en proche les nombres de bords à chaque étape.

Ce problème est une excellente occasion de parler de priorités de calcul : les deux expressions qui apparaissent ne diffèrent que par les parenthèses. Il peut en outre être une motivation pour introduire des variables à partir de la sixième et, pour les plus grands, de rencontrer deux exemples de suites arithmético-géométriques.



$$\begin{cases} x(t) &= 100\cos(-50t) - 100\cos(-8t+101) + 82\cos(42t-169) \\ y(t) &= 100\sin(-50t) - 100\sin(-8t+101) + 82\sin(42t-169) \end{cases}$$

Rallye mathématique des écoles de Bourgogne & Franche-Comté

Présentation

Créé à l'initiative de l'OCCE (Office Central de la Coopération à l'École) de Côte-d'Or, de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Dijon et de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) Bourgogne, le projet voit le jour en Côte-d'Or en 2011-2012.

Année test : 30 classes (environ 750 élèves) de cycle 3 (CE2, CM1, CM2) participent. La DSDEN de Côte-d'Or, avec le groupe départemental maths, en est le partenaire (jusqu'en 2015).

Progressivement, le rallye s'ouvre au cycle 2, aux grandes sections, à l'ASH, aux 6^{e} (dans le cadre de liaisons CM2-6^{e}). Il s'étend aussi à d'autres départements de Bourgogne et, cette année, à la Franche-Comté. En 2018, 705 classes, soit environ 15 000 élèves, ont participé.

Les partenaires actuels sont les OCCE de Côte-d'Or, Saône-et-Loire, Yonne, Doubs, Jura, Haute-Saône et Territoire de Belfort, l'APMEP de Bourgogne, l'IREM de Dijon.

Objectifs du projet

Permettre aux élèves d'aborder la résolution de problèmes sous forme coopérative : manipuler, dialoguer, réfléchir ensemble, argumenter pour valider une solution commune à la classe.

Calendrier

1^{re} étape : pendant une semaine fin janvier.

2^{e} étape : pendant la semaine des Mathématiques, mi-mars.

Les enseignants choisissent le moment de la semaine pour la passation des épreuves. Ils envoient les réponses des classes dès le début de la semaine suivante. Les solutions sont alors publiées.

Il n'y a pas de classement, pas de récompenses, ce n'est pas une compétition. Chaque classe reçoit un diplôme de participation, chaque élève son diplôme individuel.

Modalités de travail

À chaque étape, 15 exercices sont répartis sur les 7 niveaux (un ou plusieurs sont communs à deux, voire trois niveaux). Chaque classe résout les 3 ou 4 exercices de son niveau.

Les énoncés couvrent tous les domaines d'apprentissage en mathématiques et s'inscrivent dans les programmes de l'école maternelle, élémentaire ou 6e. Les problèmes de chaque niveau sont à résoudre en une heure ; le travail de groupe est à privilégier. Pour chaque problème, les élèves de la classe ont à trouver un accord sur la solution qui sera renvoyée ; un travail de mise en commun, postérieur ou pas au temps de la résolution, est indispensable.

Lors des liaisons maternelle-élémentaire ou école-collège, il est possible de faire des équipes mixtes GS-CP ou CM2-6e.

La brochure

Au cours du troisième trimestre, la brochure de l'année est éditée, reprenant tous les exercices, analysant les problèmes abordés, les réponses apportées et donnant des pistes pédagogiques et des prolongements possibles. Ces brochures sont en téléchargement libre :

www.occe.coop/~ad21/Rallyemaths.html

Contact

✉ OCCE21, 1 rue Bernard Courtois, 21000 Dijon
☎ 03 80 45 50 46
@ ad21@occe.coop
irem.u-bourgogne.fr/rallyes-mathematiques/ecoles.html

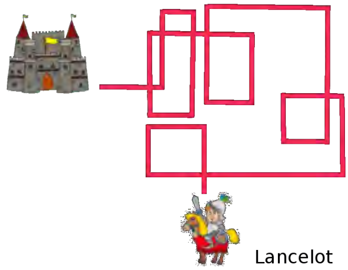
Chevalier, prends garde !

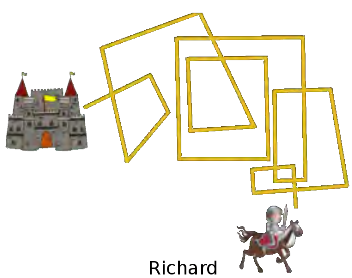
L'énoncé suivant a été donné sur 3 pages pour faciliter la lecture des jeunes enfants.

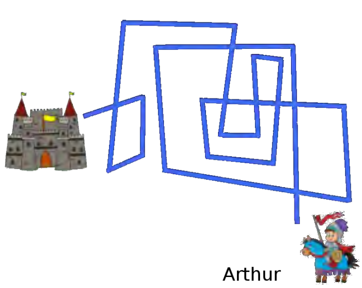
Énoncé

Une sorcière a jeté un sort sur le pays de la princesse au bois dormant. Pour se déplacer, il faut aller tout droit ou tourner à gauche. Si on tourne à droite, on se change en grenouille.

Quel est le chevalier qui va atteindre la princesse ?



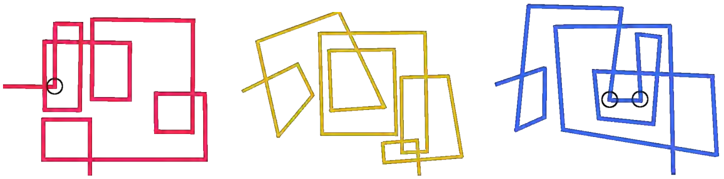




Solution

Le chevalier qui arrive jusqu'à la princesse est **Richard**.

Justification



Cet exercice est prévu pour le niveau GS-CP.

Il met en œuvre des compétences en topologie (orientation) et gestion de données. Même si l'enseignant ne doit pas intervenir lors des passations, dans les classes de maternelle ou de cours préparatoire, il lit l'énoncé.

Il est proposé une version papier, et une version pour le TNI (tableau numérique interactif), programmée avec le logiciel « ActivInspire ».

La perception de l'exercice par les enfants n'est pas la même s'ils ont le papier en main ou si l'exercice est projeté sur un écran. L'écran est fixe et vertical, alors que le papier peut être orienté pour rester dans le sens de la marche.

Dans les deux cas, il peut être nécessaire d'avoir un objet orienté et avec la gauche marquée, à déplacer sur le trajet. Dans certaines classes, l'enseignant a même dû tracer les parcours au sol. Il est important de faire vivre concrètement aux enfants des activités topologiques dans la salle de motricité, dans la cour, dans la classe, etc. pour se les approprier corporellement avant de les intégrer mentalement.

Pour information, le taux de réussite a été de 81%.

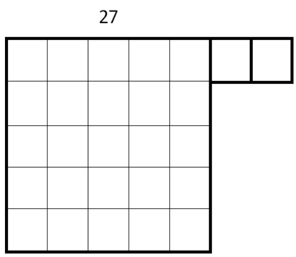
Carrément chocolat !

Énoncé

Chouky fabrique des carrés avec des petits carrés de chocolat.

Avec ses carrés, il se rend compte qu'il peut représenter tous les nombres. Par exemple, il représente le nombre 15 avec quatre carrés (un carré de côté 3 + un carré de côté 2 + un carré de côté 1 + un carré de côté 1) :

Voici aussi 27 représenté :



Ainsi, 27 est représenté sous la forme d'une somme de carrés : un carré de côté 5 + un carré de côté 1 + un carré de côté 1.
Représentez 2018 **avec le moins possible de carrés. Avec quels carrés avez-vous représenté** 2018 **?**

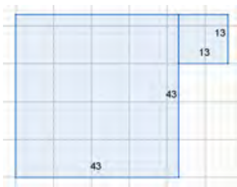
Solution

Avec le moins possible de carrés, 2 018 est représenté sous la forme de la somme des carrés de côtés : 43 et 13 (on utilise deux carrés).

Il existe d'autres décompositions utilisant davantage de carrés, comme par exemple avec trois carrés de côtés : 44; 9 et 1 ou encore, avec trois carrés de côtés : 43; 12 et 5.

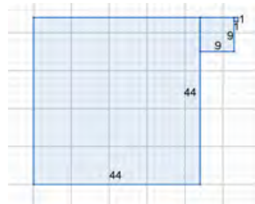
Il existe encore de nombreuses autres façons de représenter 2 018 sous la forme d'une somme de carrés.

Justification



$(43 \times 43) + (13 \times 13)$

$(43 \times 43) + (12 \times 12) + (5 \times 5)$



$(44 \times 44) + (9 \times 9) + (1 \times 1)$

Lorsqu'on cherche (par tâtonnements au niveau CM2 ou 6e, calculatrice autorisée), le plus grand carré contenu dans 2018 (ici 44 car $44 \times 44 = 1936$ et $45 \times 45 = 2025$), on ne trouve pas la décomposition permettant de représenter 2018 sous la forme d'une somme de carrés, avec le moins possible de carrés.

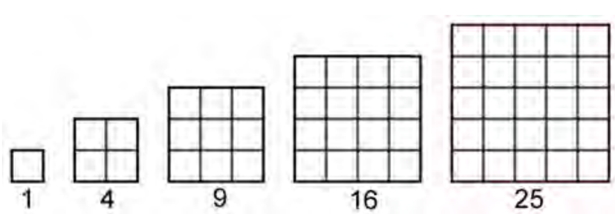
On aurait pu représenter 2018 avec deux-mille-dix-huit carrés de côté 1. C'est la décomposition utilisant le plus de carrés. Cette forme n'a pas été donnée par les classes ayant répondu à cet exercice.

Par contre, nous avons trouvé parmi les réponses proposées : cent-vingt-six carrés de côté 4 et deux carrés de côté 1 (soit cent-vingt-huit carrés utilisés) ; ou quatre-vingts carrés de côté 5, un carré de côté 3, deux carrés de côté 2 et un carré de côté 1 (soit quatre-vingt-quatre carrés utilisés).

Autres activités possibles ou prolongements

Le mathématicien Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) a démontré en 1770, que *tout nombre entier positif peut s'exprimer sous la forme d'une somme de quatre nombres carrés*.

Les nombres carrés (parfois appelés tétragones ou quarrés) apparaissent dans des textes dès l'antiquité (par exemple dans un livre manuscrit de Nicomaque de Gérase, mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100 à Alexandrie). Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un produit où les deux facteurs sont égaux. Par exemple 9 est un nombre carré car $9 = 3 \times 3$. On peut les représenter avec des petits carrés pour former un carré (comme Chouky l'a fait avec des petits carrés de chocolat au début de l'énoncé)...



Les premiers nombres carrés sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1 024, 1 089, 1 156, 1 225, 1 296, 1 369, 1 444, 1 521, 1 600, 1 681, 1 764, 1 849, 1 936, 2 025, 2 116...

Vous pouvez décomposer en somme de carrés tous les nombres que vous voulez, il suffira d'avoir au maximum quatre nombres carrés ; comme cela, vous aurez vérifié, sur quelques nombres, que Lagrange a raison.

Voici, par exemple, une écriture des trente premiers nombres entiers positifs sous la forme de sommes de carrés, avec au maximum quatre carrés :

$1 = (1\times1)$	$2 = (1\times1)+(1\times1)$
$3 = (1\times1)+(1\times1)+(1\times1)$	$4 = (2\times2)$
$5 = (2\times2)+(1\times1)$	$6 = (2\times2)+(1\times1)+(1\times1)$
$7 = (2\times2)+(1\times1)+(1\times1)+(1\times1)$	$8 = (2\times2)+(2\times2)$
$9 = (3\times3)$	$10 = (3\times3)+(1\times1)$
$11 = (3\times3)+(1\times1)+(1\times1)$	$12 = (2\times2)+(2\times2)+(2\times2)$
$13 = (3\times3)+(2\times2)$	$14 = (3\times3)+(2\times2)+(1\times1)$
$15 = (3\times3)+(2\times2)+(1\times1)+(1\times1)$	$16 = (4\times4)$
$17 = (4\times4)+(1\times1)$	$18 = (3\times3)+(3\times3)$
$19 = (3\times3)+(3\times3)+(1\times1)$	$20 = (4\times4)+(2\times2)$
$21 = (4\times4)+(2\times2)+(1\times1)$	$22 = (3\times3)+(3\times3)+(2\times2)$
$23 = (3\times3)+(3\times3)+(2\times2)+(1\times1)$	$24 = (4\times4)+(2\times2)+(2\times2)$
$25 = (5\times5)$	$26 = (5\times5)+(1\times1)$
$27 = (3\times3)+(3\times3)+(3\times3)$	$28 = (3\times3)+(3\times3)+(3\times3)+(1\times1)$
$29 = (5\times5)+(2\times2)$	$30 = (5\times5)+(2\times2)+(1\times1)$

Analyse des résultats

Sur les 64 classes de CM2 et 6e de Côte-d'Or (nous n'avons malheureusement pas pu dépouiller les réponses des six autres départements), 6 classes n'ont rien répondu (soit 9% des classes ayant participé).

Sur les 58 réponses, 7 étaient fausses (soit 12% des réponses).

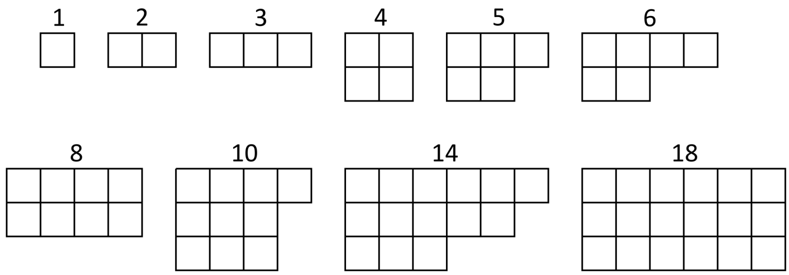
Sur les 51 réponses ayant une décomposition exacte de 2 018, seules 2 étaient avec le moins possible de carrés (soit 4% des réponses donnant un calcul exact), et 46 ont donné la solution avec des carrés de côtés 44, 9, et 1 (soit 90% des réponses donnant un calcul exact).

Lors de nos premières réunions du groupe rallye des écoles, nous cherchions, pour des CM2-6e, un exercice de géométrie et calcul. Nous avons choisi de faire découvrir une propriété concernant des sommes de carrés. Pourquoi pas celle de Lagrange ?

Recherche

Ceci est le tout premier essai d'énoncé.

Voici des nombres représentés sous forme de carrés ou de sommes de carrés :



Pour dessiner les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 14 et 18, on a utilisé chaque fois un nombre minimum de carrés. Les nombres représentés avec le plus grand nombre de carrés sont 3, 6 et 14 (pour lesquels on a utilisé trois carrés)

1. Dessinez 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20 sous forme de carrés ou de sommes de carrés (en utilisant chaque fois un nombre minimum de carrés).
2. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec un seul carré ?
3. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec deux carrés ?
4. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec trois carrés ?
5. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec quatre carrés ?
6. Y a-t-il des nombres dessinés avec plus de quatre carrés ?

Question facultative : si vous continuez de dessiner les nombres entiers avec des sommes de carrés, combien de carrés sont nécessaires au maximum pour chaque nombre ?

Cet énoncé complet étant évidemment trop long, nous l'avons modifié, édulcoré, illustré. Nous avons voulu utiliser un langage le plus simple possible. Et la propriété de Lagrange a disparu de l'énoncé ! On la fait réapparaître dans la brochure éditée en 2018.

Mais on s'est un peu détournés de notre intention de départ et un exercice de géométrie est peu resté en géométrie mais s'est transformé en exercice de calcul.

Tournoi Mathématique du Limousin

Présentation

Historique

Le tournoi a été créé en 1987 par une équipe de professeurs soutenue par :

- la régionale de Limoges de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public),
- le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,
- l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Limoges,
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'académie de Limoges.

Compétition

► **Nombre de participants**

Environ 4 000 élèves de collèges et 2 000 élèves de lycées (y compris les lycées professionnels).

► **Niveaux d'études**

Classes de quatrième pour les collégiens, toutes classes de lycées.

► **Type d'épreuves proposées**

Une seule épreuve, de deux heures pour les quatrièmes et les lycées professionnels, de trois heures pour les lycéens ; l'épreuve est composée de 4 problèmes à résoudre par équipes de deux.

► **Fréquence**

Chaque année à la fin du mois de janvier ; la remise des prix se déroule devant un public nombreux au mois de mai.

Liste des principaux partenaires

Conseil Régional de Nouvelle Aquitaine, Fondation Partenariale de l'Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, ÉSPÉ de l'Académie de Limoges, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Comité International des Jeux Mathématiques, Calculatrices CASIO, Calculatrices TEXAS INSTRUMENTS, Association Limousine des Sports Aériens.

Contacts : IREM de Limoges

🖂 123 avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex
☎ +33 (0)5 55 45 72 49
🖷 +33 (0)5 55 45 73 20
@ irem@unilim.fr
🌐 www.irem.unilim.fr

Divers

Trois brochures éditées aux PULIM permettent une utilisation des sujets en classe.

Organisation d'une après-midi « Mathématiques pour tous », à la BFM (bibliothèque) de Limoges, avec présentation de jeux mathématiques issus de sujets du Tournoi qui ont été transformés en activités mathématiques ludiques pour écoliers, collégiens, lycéens ou grand public.

Jeu de cubes (2017, niveau : 4e)

Énoncé

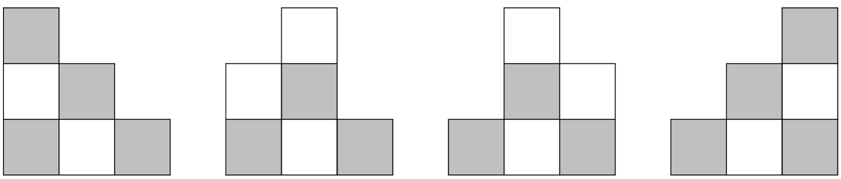
On forme un empilement de cubes à n étages en respectant les règles suivantes :

— en bas on aligne n cubes côte à côte ;

— on surmonte chaque rangée d'une rangée possédant un cube de moins, ces cubes étant côte à côte, chaque cube étant placé exactement sur un cube de la rangée en dessous ;

— enfin, on colorie en gris un cube sur deux, comme sur un damier, en commençant par un cube gris en bas à gauche

Voici par exemple les quatre empilements possibles pour n=3. On remarque qu'il y a 3 ou 4 cubes gris.



1. Dessinez sur une feuille quadrillée tous les empilements possibles pour $n = 4$.

   Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de cubes gris ?

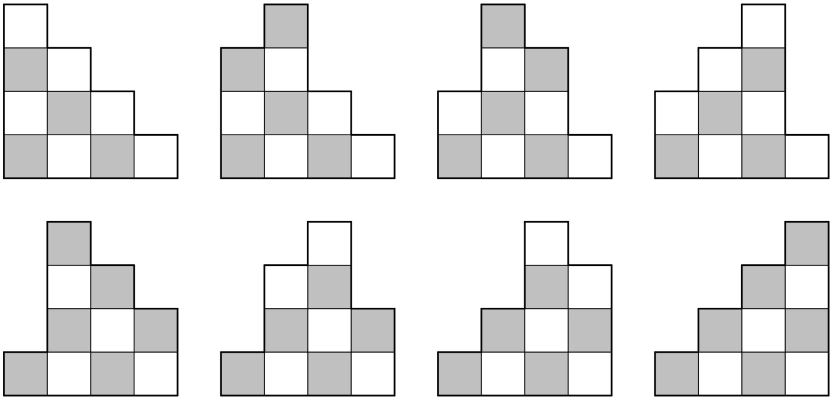
   Même question avec $n = 6$.

2. Pour $n = 4$, combien de configurations ont le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?

   Pour quels entiers inférieurs à 10 existe-t-il des configurations avec le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?

Solution

1. Pour $n = 4$, il y a 4, 5 ou 6 cubes gris.



   Pour $n = 6$, on obtient 9 cubes gris si on place les cubes le plus à gauche possible, 12 cubes gris si on les place le plus à droite possible. En les plaçant différemment on peut aussi obtenir 10 cubes gris et 11 cubes gris.

2. Pour $n = 4$, il y a 10 cubes au total. Les configurations qui ont le même nombre de cubes gris que de cubes blancs sont donc les configurations qui ont 5 cubes gris. Il y en a 4.

   Une configuration avec le même nombre de cubes gris et de cubes blancs ne peut exister que si le nombre total de cubes est pair. Ce nombre total prenant comme valeurs 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, et 45 quand n varie de 1 à 9, cela n'est possible que pour $n = 3$ (6 cubes au total), $n = 4$ (10 cubes au total), $n = 7$ (28 cubes au total) et $n = 8$ (36 cubes au total).

   On vérifie que pour $n = 7$ et $n = 8$ il existe bien une configuration avec le même nombre de cubes gris et de cubes blancs.

On peut généraliser à un empilement ayant n cubes à la base. Pour chaque rangée ayant un nombre pair de cubes il y a autant de cubes gris que de blancs. Pour chaque rangée ayant un nombre impair de cubes il y a un cube gris en plus ou bien un en moins : il ne peut donc y avoir le même nombre de cubes gris que de cubes blancs que s'il y a un nombre pair de rangées ayant un nombre impair de cubes, c'est-à-dire si n est de la forme $4k - 1$ ou $4k$.

Commentaires

C'est un exercice de dénombrement abordable par tous. La première question n'est pas difficile pour $n = 4$ en dessinant toutes les possibilités. Pour $n = 6$, on ne doit pas dessiner toutes les possibilités (il y en a 32) mais seulement placer les cubes pour avoir le maximum (ou bien le minimum) de cubes gris.

Pour la seconde question il faut observer qu'un nombre pair pour le nombre total de cubes est nécessaire puis calculer ce nombre total pour les différentes valeurs de n.

L'exercice a été assez bien réussi. Même si la règle de disposition des cubes est un peu compliquée, l'exemple fourni montre bien ce que l'on attend. Les questions sont assez simples et cela ressemble à un jeu (de cubes !).

Bien divisibles (2018, niveau : 4e [questions 1 à 3] et lycéens)

Énoncé

1. Un entier N s'écrit avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre.

   Déterminer N sachant que pour $k = 2$ et $k = 3$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k.
2. Existe-t-il un entier N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que, pour chaque entier k de 2 à 4, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?
3. Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que, pour chaque entier k de 2 à 6, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?
4. Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que, pour chaque entier k de 2 à 8, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Solution

1. L'entier formé par les 2 premiers chiffres de N étant divisible par 2, son chiffre des unités est pair et ne peut donc être que 2. Il reste deux possibilités : N = 123 et N = 321.

   Elles conviennent puisque ces deux nombres sont divisibles par 3.

2. Pour la même raison que précédemment le deuxième chiffre de N doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Puisque N doit être divisible par 4 son chiffre des unités doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Il y a quatre possibilités à examiner pour N : 1 234 et 3 214 ne conviennent pas car ils ne sont pas divisibles par 4 ; 1 432 et 3 412 ne conviennent pas non plus car l'entier formé par les 3 premiers chiffres n'est pas divisible par 3. Il n'y a donc pas de solution.

3. Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième et sixième chiffres de N doivent être pairs. Le cinquième chiffre est nécessairement 5 car un entier divisible par 5 a son chiffre des unités égal à 0 ou 5, 0 étant exclu ici.

   Il y a donc deux possibilités : N = 1P3 P5P ou N = 3P1 P5P, les P représentant chacun un chiffre pair (2, 4 ou 6).

   L'entier formé par les 3 premiers chiffres de N devant être multiple de 3, la somme des trois premiers chiffres doit être divisible par 3 : le deuxième chiffre de N est donc un 2.

   Comme 1 234 et 3 214 ne sont pas divisibles par 4, le quatrième chiffre de N est donc un 6.

   Les deux entiers N = 123 654 et N = 321 654 conviennent puisqu'ils sont divisibles par 6.

4. Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième, sixième et huitième chiffres de N doivent être pairs et le cinquième chiffre est nécessairement 5.

   La somme des six premiers chiffres de N doit être divisible par 3 ; comme la somme des chiffres de 1 à 8 vaut 36 qui est un multiple de 3, la somme des deux derniers chiffres de N doit être multiple de 3. N devant être divisible par 8 et comme 200 est divisible par 8, le nombre formé par les deux derniers chiffres de N doit aussi être divisible par 8 : c'est donc un multiple de 24 et la seule possibilité est 72. Il y a donc deux cas à étudier : N = 1P 3P5 P72 et N = 3P 1P5 P72, chaque P représentant un chiffre pair (4, 6, 8).

   La somme des trois premiers chiffres doit être multiple de 3 donc le second chiffre est un 8.

   Le nombre formé par les quatre premiers chiffres doit être multiple de 4 donc le quatrième chiffre est un 6.

Le sixième chiffre est alors un 4. Comme 1 836 547 n'est pas divisible par 7 (après calcul) alors que 3 816 547 l'est, il y a une unique solution : N = 38 165 472.

Commentaires

Ce sujet ne demande que des connaissances élémentaires sur la divisibilité par 2, 3, 4 et 5.

La première question est très facile, la seconde aussi si on comprend que la réponse à la question peut être négative.

Les deux dernières questions demandent de la méthode pour placer d'abord le chiffre 5 puis envisager les différents cas pour placer les chiffres impairs.

L'exercice a été assez bien réussi même si les justifications n'ont pas toujours été fournies.

Seule la dernière question a été plus rarement résolue, bien que l'aide de la calculatrice facilite les calculs. On peut d'ailleurs écrire un programme qui teste toutes les permutations des entiers de 1 à 8 : il n'y en a que 8! = 40 320, c'est donc faisable par une calculatrice.

On peut prolonger l'exercice en montrant qu'il n'y a pas de solution pour les entiers de 1 à 5 ainsi que pour les entiers de 1 à 7, mais qu'il y a une unique solution pour les entiers de 1 à 9 : N = 381 654 729.

Tableaux symétriques (2018, niveau : lycéens)

Énoncé

On veut former un tableau à n lignes et n colonnes, symétrique par rapport à sa première diagonale (celle qui débute en haut à gauche), de première ligne composée des nombres 1, 2, ..., n dans cet ordre, les autres lignes étant des permutations de la première ligne.
Par exemple les permutations de (1 ; 2 ; 3) sont (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 1 ; 3), (2 ; 3 ; 1), (3 ; 1 ; 2) et (3 ; 2 ; 1).

1. Montrez qu'il y a une seule possibilité pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Trouvez toutes les possibilités pour $n = 4$.
3. Parmi les cas précédents, dans quels cas la première diagonale est-elle une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$?
4. Généralisation : montrez que si n est impair la première diagonale est toujours une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$ alors que si n est pair la première diagonale n'est jamais une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$.

Solution

1. Pour $n = 2$, le seul tableau est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour n=3, on a déjà par symétrie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$. Puisqu'il y a symétrie par rapport à la première diagonale, chaque colonne est une permutation de la première colonne. Par conséquent la seconde ligne est nécessairement $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il y a donc une unique solution : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 1[er] cas (avec la symétrie) : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$. On complète ensuite la seconde ligne (et la seconde colonne) par $\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ d'où deux tableaux $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2ᵉ cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & & \\ 4 & 1 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3ᵉ cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & & \\ 4 & 3 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Il y a donc quatre tableaux convenables.

3. La première diagonale est une permutation de la première ligne dans un seul des tableaux précédents, celui obtenu pour $n = 3$.
4. Chaque entier k, compris entre 1 et n, apparaît n fois dans le tableau. Par symétrie il apparaît un nombre pair de fois en dehors de la première diagonale.
   - Si n est impair, chaque entier k apparaît un nombre impair de fois sur la première diagonale, donc au moins une fois, ce qui entraîne que chaque entier k apparaît exactement une fois sur la première diagonale qui est bien une permutation de la première ligne.
   - Si n est pair, chaque entier k apparaît un nombre pair de fois sur la première diagonale qui n'est donc pas une permutation de la première ligne.

Commentaires

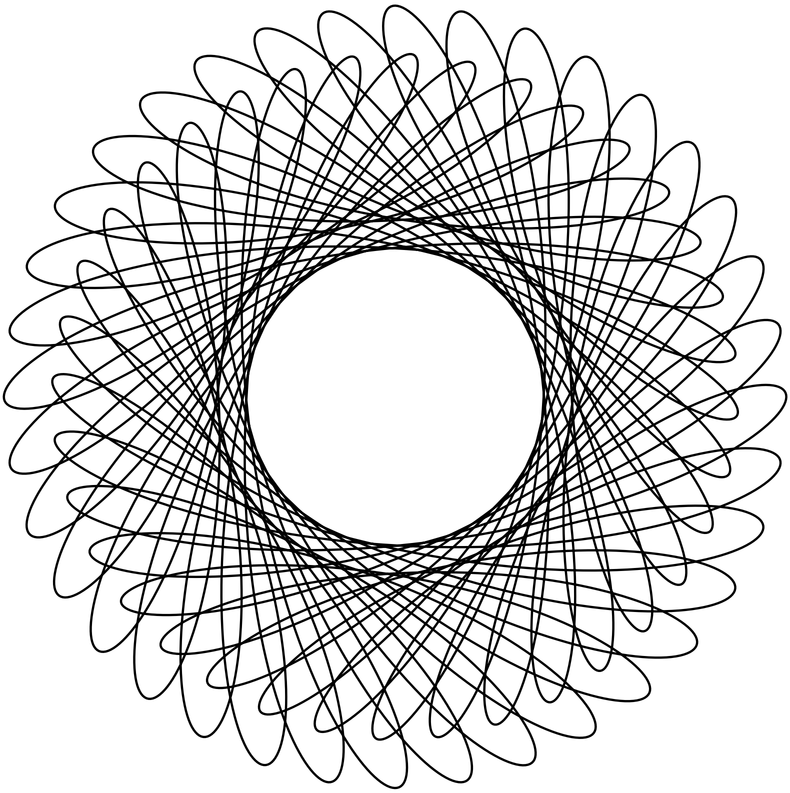
Il y a une difficulté au départ pour bien comprendre que par la symétrie du tableau, chaque ligne et chaque colonne est une permutation des entiers de 1 à n.

Une fois que c'est compris, le remplissage du tableau demande simplement de la rigueur pour ne pas oublier de cas.

La dernière question est un théorème mathématique dont la démonstration est très simple si on observe que la symétrie du tableau entraîne que le nombre d'occurrences en dehors de la diagonale de chaque entier est un entier pair.

Les réponses ont été trouvées pour la majorité même si les justifications n'ont pas été fournies en général.

Seule la dernière question n'a été résolue que par les meilleurs.



$$\begin{cases} x(t) &= -67\cos(43t+28) - 70\cos(7t) - 73\cos(-29t-132) \\ y(t) &= -67\sin(43t+28) - 70\sin(7t) - 73\sin(-29t-132) \end{cases}$$

Rallye dynamique et virtuel (RDV) - IREM de Caen-Normandie

Présentation

Ce rallye met en concurrence des classes de 3^{e} et de 2^{nde} de l'académie de Caen. Il consiste pour les élèves, lors d'une épreuve unique de 90 minutes, à résoudre le plus grand nombre possible de problèmes qu'ils découvrent au fur et à mesure de l'épreuve en franchissant une à une un certain nombre d'étapes (il y en a 6 dans la formule actuelle). À chaque étape, la résolution d'une énigme donne le code d'accès à l'étape suivante.

Les classes ont accès aux énoncés des problèmes grâce à une application autonome nommée « rdv.. » (rdv18 pour l'année 2018 par exemple) qui doit être copiée sur les postes utilisés par les élèves le jour du rallye et qui ne nécessite pas l'accès à Internet. Seul un poste utilisé par le professeur responsable doit être connecté au site du rallye pour la transmission des réponses obtenues par la classe en cours de jeu.

Historique

- Avril 2004 : mise en place de la 1^{re} édition du RDV.
- Entre 2004 et 2013, le programme rdv utilisé par les élèves pour avoir connaissance des problèmes, a été conçu sous la forme de pages pdf protégées par mots de passe.
- À partir de l'édition 2014, le rdv est un fichier exécutable au format « flash », format conçu pour faire de l'interactivité mais aussi de l'animation. C'est cette dimension que nous avons voulu intégrer. Ainsi, la compréhension de certaines des énigmes est parfois basée non seulement sur un texte mais aussi sur l'observation d'une image animée. Ce sont des énigmes d'une autre nature qui peuvent ainsi être proposées.

Compétition

► **Niveaux concernés**

3^{e} et 2^{nde}. En moyenne 60 à 70 classes participantes par édition.

► **Inscriptions à l'épreuve**
Gratuite (entre janvier et mars).

► **Jour de l'épreuve**
En général un vendredi au mois d'avril.

► **Durée de l'épreuve**
1 h 30 min

Soutiens pour l'organisation

IREM de Caen-Normandie ; Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques ; Rectorat de Caen (action culturelle).

Partenaires

CASIO ; TANGENTE ; APMEP.

Constitution de l'équipe du rallye en 2018

— Gérald Giangrande : professeur en lycée

— Jérôme Huet : professeur en collège

— Thierry Mercier : professeur en lycée

Conception et mise en forme des énigmes : tous les membres de l'équipe.

Réalisation de l'application « rdv » au format flash depuis l'édition 2014 : Thierry Mercier.

Contact

@ rdvmath-caen@laposte.net
irem.crdp.ac-caen.fr/rallye/debut.php

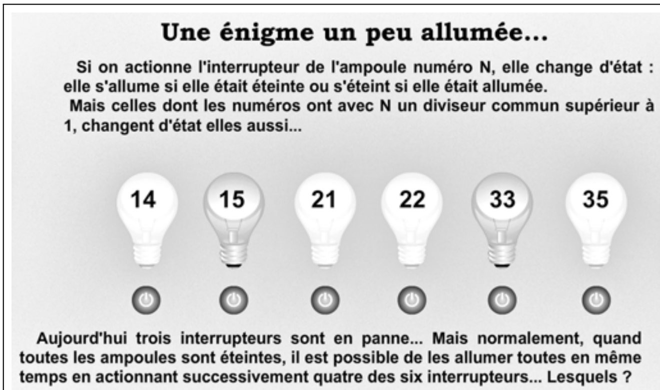
Une énigme un peu allumée (énigme 2 de l'édition 2018)

Énoncé

(copie d'écran du RDV18)

Commentaire

Quand les élèves découvrent cette énigme, ils peuvent seulement cliquer sur les interrupteurs situés en dessous des ampoules 14, 15 et 21 et visualiser ainsi l'effet obtenu. Par exemple en cliquant sur le 1er interrupteur, on constate ceci :



(copie d'écran du RDV18)

Si on clique une 2e fois sur ce même interrupteur, les ampoules 14, 21, 22 et 35 s'éteignent, mais si, au lieu de cliquer à nouveau sur ce 1er interrupteur, on clique sur le 2e (ampoule 15), alors les ampoules 21 et 35 s'éteignent, tandis que s'allument les ampoules 15 et 33... Le fait de ne pas pouvoir cliquer sur les trois derniers interrupteurs était motivé par notre volonté d'éviter que les élèves n'obtiennent par hasard une solution du problème par une série de clics aléatoires, et de susciter une véritable démarche mathématique en les amenant à réfléchir sur ce qui se passerait si les interrupteurs étaient opérationnels...

Pourquoi cette énigme ?

Cette énigme en lien avec les nombres entiers repose en fait sur peu de connaissances en arithmétique même si elle permet de mobiliser la notion de diviseurs d'un entier. Dans l'énoncé nous avons d'ailleurs préféré ne pas utiliser le vocable d'entiers premiers (ou non) entre eux pour que cela ne soit pas un obstacle à la recherche dans le contexte ludique du rallye. Il s'agissait surtout ici de mettre en valeur des qualités d'organisation, d'ingéniosité et d'imagination pour venir à bout de l'apparente complexité de cette énigme.

Aide proposée lors du rallye

Une aide facultative était proposée aux élèves pour cette énigme. Si l'aide était prise, il en coûtait une pénalité de -2 pts pour la classe mais cela pouvait être utile en cas de blocage.

L'aide proposée suggère de visualiser la situation sous la forme du tableau à double-entrée ci-dessous.

Elle précise que les croix sur la ligne de l'interrupteur 14, signifient qu'actionner cet interrupteur change l'état des ampoules 14, 21, 22 et 35. Elle invite les élèves à compléter les lignes suivantes.

Elle fait également remarquer que pour passer d'« éteinte » à « allumée », une ampoule doit changer d'état un nombre impair de fois.

Ampoule / Interrupteur	14	15	21	22	33	35
14	X		X	X		X
15						
21						
22						
33						
35						

Une fois le tableau complété, on obtient ce qui suit.

On peut ensuite raisonner à l'aide de ce tableau en s'appuyant sur l'information que 4 interrupteurs doivent être actionnés successivement pour allumer toutes les ampoules (soit 2 interrupteurs non actionnés).
Par exemple, si on considère l'ampoule 22, deux cas se présentent :

Ampoule / Interrupteur	14	15	21	22	33	35
14	x		x	x		x
15		x	x		x	x
21	x	x	x		x	x
22	x			x	x	
33		x	x	x	x	
35	x	x	x			x

1. Elle change d'état une seule fois en actionnant l'un des interrupteurs n$^{\text{os}}$ 14, 22 ou 33. Les trois autres interrupteurs actionnés étant ceux des ampoules 15, 21 et 35 qui sont sans effet sur cette ampoule 22.
2. Elle change d'état trois fois en actionnant les interrupteurs 14, 22 et 33 et l'un des autres interrupteurs actionnés est choisi parmi les n$^{\text{os}}$ 15, 21 et 35.

En raisonnant ainsi on peut vite obtenir une solution au problème. En effet, dans le cas 1, on se rend compte que si l'interrupteur choisi parmi les n$^{\text{os}}$ 14, 22 et 33 est le n$^{\text{o}}$ 22, alors toutes les ampoules autres que la n$^{\text{o}}$ 22, changent d'état 3 fois, et finissent donc par être allumées. Ce qui donne la série 15-21-22-35.

On peut sans doute arriver à cette solution de beaucoup d'autres façons. Un examen plus approfondi montre que c'est la seule solution.

Prolongements

On peut envisager de poser le problème de façon plus ouverte, sans donner par avance d'information sur le nombre d'interrupteurs à actionner. Cela exige *a priori* de disposer de plus de temps pour la recherche d'une solution. Le temps de l'épreuve étant relativement limité, nous avions donc choisi de fournir cette information. Cependant, le problème peut très bien être résolu sans elle. Avec le tableau ci-dessus, on peut arriver rapidement à la conclusion que les ampoules ne peuvent pas toutes s'allumer en actionnant un seul interrupteur, ou seulement deux. Nous vous laissons le soin d'examiner la situation en actionnant trois interrupteurs.

Si l'on s'affranchit de la contrainte de se situer au niveau 3$^{\text{e}}$ ou 2$^{\text{nde}}$, on peut aussi envisager une formalisation du problème utilisant d'autres objets mathématiques.

Il y en a plusieurs. En voici une qui consiste à considérer la liste des états des ampoules comme une matrice ligne où les coefficients sont égaux en valeur absolue aux numéros des ampoules et de signe négatif ou positif selon que l'ampoule est éteinte ou allumée.

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} -14 & 15 & 21 & -22 & 33 & 35 \end{pmatrix}$ traduit le fait que les deux ampoules 14 et 22 sont éteintes et les autres allumées.

Quant aux interrupteurs, ils peuvent être assimilés à des matrices carrées diagonales d'ordre 6 dont les coefficients diagonaux sont égaux à -1 ou à 1 selon qu'ils changent l'état d'une ampoule ou pas.

Notons, par exemple, Int(14) la matrice associée à l'interrupteur n° 14, on a

$$\mathrm{Int}(14) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On la notera $\mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

L'action d'un interrupteur se traduit par la multiplication de la matrice ligne traduisant l'état des ampoules, par la matrice diagonale associée à l'interrupteur.

Ainsi, si on considère la matrice $\begin{pmatrix} -14 & -15 & -21 & -22 & -33 & -35 \end{pmatrix}$ (ampoules toutes éteintes), l'action de l'interrupteur n° 14 se traduit par le produit

$\begin{pmatrix} -14 & -15 & -21 & -22 & -33 & -35 \end{pmatrix} \times \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

égal à $\begin{pmatrix} -14\times -1 & -15\times 1 & -21\times -1 & -22\times -1 & -33\times 1 & -35\times -1 \end{pmatrix}$

soit à $\begin{pmatrix} 14 & -15 & 21 & 22 & -33 & 35 \end{pmatrix}$.

De cette façon, nous avons donc :

$\mathrm{Int}(14) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(15) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(21) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(22) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(33) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(35) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

L'action successive de plusieurs interrupteurs peut alors se traduire par une succession de produits par ces matrices « interrupteurs ». Ces matrices étant diagonales, elles commutent (cela met en évidence que l'on peut actionner les interrupteurs dans un ordre quelconque).

Notons que chacune des matrices « interrupteurs » est l'inverse d'elle-même (actionner deux fois un même interrupteur revient à ne rien faire). Par exemple : $\mathrm{Int}(14) \times \mathrm{Int}(14) = I_6 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

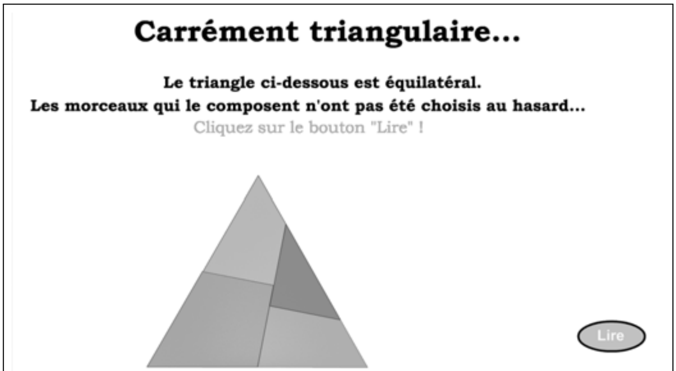
De cette façon, on peut vérifier que si l'on actionne successivement les 4 interrupteurs n^os 15, 21, 22 et 35 cela se traduit par le produit suivant $\mathrm{Int}(15) \times \mathrm{Int}(21) \times \mathrm{Int}(22) \times \mathrm{Int}(35) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Ce qui a bien pour effet de changer l'état de toutes les ampoules.

Nous espérons que cette traduction matricielle, par le nouvel éclairage qu'elle apporte à ce problème, constituera pour certains lecteurs une source d'inspiration !

Carrément triangulaire… (bonus 1 de l'édition 2017)

Énoncé



(copie d'écran du RDV17)

Les élèves cliquent sur le bouton « lire », la figure s'anime, les 4 pièces pivotent et on obtient l'écran suivant.

Carrément triangulaire...

Nous voici maintenant avec un carré...
Sachant que le périmètre du triangle équilatéral est de 1800 mm, quel est le périmètre de ce carré ? (Arrondir au mm).

Début

La réponse à transmettre est le périmètre du carré en mm, arrondi au millimètre (attention, il faut être très précis !).

(copies d'écran du RDV17)

Les élèves peuvent revenir autant de fois que nécessaire à la figure du départ à l'aide du bouton « début ». L'énoncé demande une valeur arrondie au millimètre. Comme il s'agit d'un bonus, les élèves devront être précis car ils n'ont droit qu'à une réponse sur le serveur, sans possibilité de vérification.

Pourquoi cette énigme ?

Ce problème de découpage d'un triangle équilatéral en carré est classique. Il a été proposé par le mathématicien britannique Henry Dudeney dans son ouvrage « The Canterbury puzzles ». Il existe beaucoup d'autres problèmes d'assemblages et de découpages où l'on peut travailler sur les périmètres et les aires. On pense notamment aux tangrams. Il s'agit ici de deux polygones réguliers très simples, et les élèves sont parfois surpris de constater que le périmètre du carré est plus petit que celui du triangle équilatéral. Le professeur de mathématiques connaît ce résultat que l'on peut voir comme une conséquence des inégalités iso-périmétriques.

La démarche de résolution est intéressante car elle nécessite plusieurs étapes.

- On commence par déterminer la longueur d'un côté c du triangle. $c = 1800 \div 3 = 600$ mm.
- L'aire des deux figures étant la même, il faut déterminer l'aire du triangle équilatéral à partir de ses propriétés. Plusieurs outils sont possibles : la trigonométrie (angles de 60°), le théorème de Pythagore (le pied d'une hauteur coupe la base en son milieu)...

  On trouve $h = \frac{\sqrt{3}\times 600}{2} = 300\sqrt{3}$ mm.

L'aire du triangle équilatéral est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{600\times 300\sqrt{3}}{2} = 90\ 000\sqrt{3}\ \text{mm}^2.$$

— Cette aire est également l'aire du carré dont on peut maintenant déterminer la longueur du côté en utilisant la racine carrée du résultat précédent :

$$\sqrt{90\ 000\sqrt{3}} = 300\sqrt[4]{3}\ \text{mm}.$$

— Il reste à multiplier par 4 pour obtenir le périmètre demandé,

$$\mathcal{A} = 1200\sqrt[4]{3}\ \text{mm} \backsimeq 1\ 579\ \text{mm}.$$

Quelques remarques

On le voit, ce problème est riche et utilise de nombreux outils des mathématiques du collège et du lycée : notions d'aire, de périmètre, propriétés du triangle équilatéral, trigonométrie, théorème de Pythagore, racine carrée, gestion des valeurs exactes et des arrondis...

Aucune étape n'est très difficile, mais pour un élève qui serait seul, le problème est imposant. D'autant plus que, comme il s'agit d'un bonus, les élèves ne disposent pas d'aide et il est impossible de tester la solution avant de l'envoyer. Le travail en équipe est donc ici primordial pour avancer dans les étapes de résolution et pour valider les résultats.

Une des difficultés pour les élèves de collège notamment est de gérer correctement les valeurs arrondies. Beaucoup d'élèves travaillent avec des valeurs arrondies et le risque d'avoir, au bout de quelques étapes, une réponse trop éloignée de celle attendue est réel. En particulier lors du passage $\sqrt{90\ 000\sqrt{3}} = 300\sqrt[4]{3}$. Les élèves ne connaissent pas forcément la racine quatrième et écrivent au mieux $300\sqrt{\sqrt{3}}$ ce qui est très bien. Dans la création de notre énigme nous avions testé plusieurs stratégies d'élèves et le choix de la valeur « 1 800 mm » pour le périmètre avait été fait dans ce sens. Nous nous étions également donné la possibilité de valider à posteriori des réponses suffisamment proches de 1 579 mm.

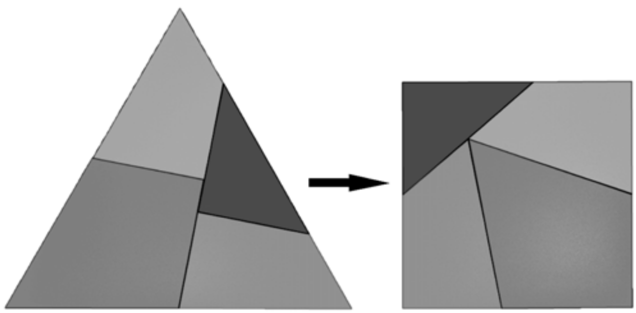
Prolongements en classe

Cette énigme est une jolie tâche complexe que l'on peut donner en 3$^{\text{e}}$ ou en 2$^{\text{nde}}$. Mais on peut aussi utiliser ce type de découpage pour travailler la notion d'aire et de périmètre dès la 6$^{\text{e}}$. Voici l'exemple d'un devoir maison de 6$^{\text{e}}$ proposé en fin d'année.

Voici comment transformer un triangle équilatéral en carré en 3 coups de ciseaux.

— Construis un triangle équilatéral ABC de 10 cm de côté.
— Place le point D et le point E sur le segment [BC] de sorte que la longueur BD mesure $\frac{1}{4}$ de la la longueur BC. La longueur BE mesure $\frac{3}{4}$ de la la longueur BC.
— Place le point F au milieu de [AB] et place le point G au milieu de [AC].
— Trace le segment [DG].
— La perpendiculaire à (DG) passant par F coupe [DG] en H. Trace [FH].
— La perpendiculaire à (DG) passant par E coupe [DG] en I. Trace [EI].

1. Trace une première fois cette figure sur ta copie en laissant les traits de construction et les lettres.



2. Reproduis une seconde fois cette figure sur une feuille de papier blanc. Découpe le triangle et ses quatre pièces, puis reconstitue le carré comme ci-dessus. Colle-le sur la copie. Tu peux le colorier comme tu veux.
3. Compare le périmètre du carré et celui du triangle équilatéral.
4. Compare les aires des deux figures.

Ici encore le travail est très riche même si les objectifs sont différents de l'énigme du rallye. Le problème ainsi posé aborde plusieurs compétences des programmes du cycle 3 :

— reconnaître, représenter, reproduire des figures (ici à partir d'un programme de construction) ;

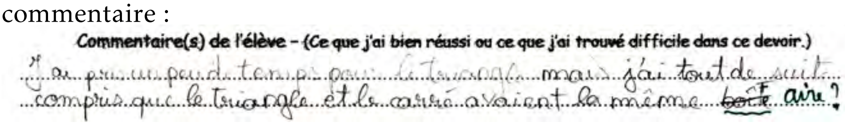
— utiliser et représenter des fractions simples (ici les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$) ;

— comparer, mesurer, estimer des périmètres et des aires ;

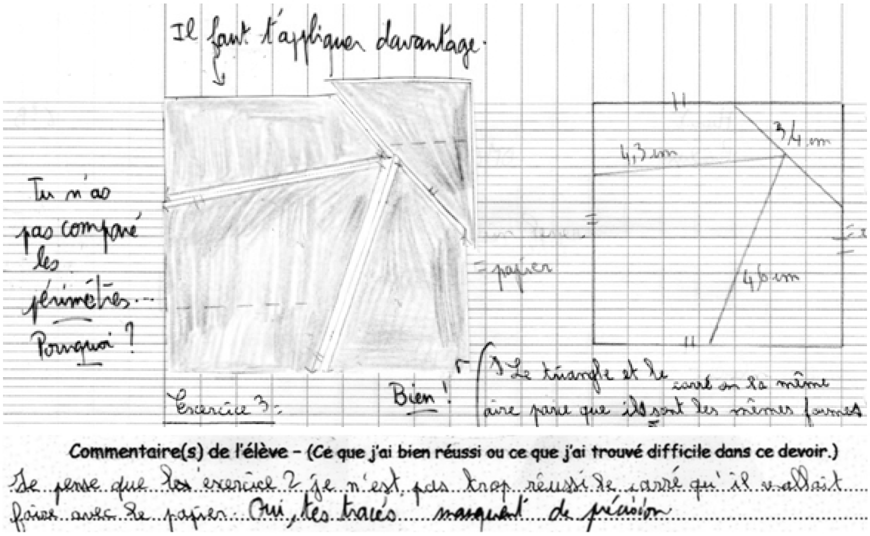
— s'engager dans une démarche, manipuler, raisonner.

Il est intéressant de montrer aux élèves que deux figures peuvent avoir la même aire et des périmètres différents. La manipulation des différents polygones qui composent le triangle n'est pas aussi simple qu'on le pense pour des 6e. Cette dimension kinesthésique de l'activité est importante dans la compréhension de l'invariance de l'aire pour certains élèves plus en difficulté. Enfin la consigne « comparer les aires » montre que l'on n'attend pas forcément des calculs. Voici par exemple deux copies de 6e avec leur commentaire sur l'exercice réalisé :

Ici l'élève a bien compris que les aires étaient les mêmes… mais ses parents lui ont conseillé de le vérifier par le calcul. Bien sûr cette élève a trouvé deux valeurs différentes. Cela ne l'a pas perturbée si on en croit son commentaire :



Voici ce que donne cet exercice pour une élève plus en difficulté en géométrie avec un commentaire lucide :



L'élève a bien vu que les aires étaient égales mais n'a pas comparé les périmètres. Pensait-elle qu'il y avait aussi égalité des périmètres ? A-t-elle été gênée par sa figure trop imprécise pour effectuer des mesures ?

À noter que, pour simplifier le travail des 6e, l'énoncé propose de découper le segment [BC] à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Ce découpage a l'avantage d'être simple à réaliser… mais qui a le défaut de n'être pas tout à fait exact. En effet si on note c la longueur du côté du triangle équilatéral, nous avons vu dans la résolution du problème initial que la longueur du côté du carré obtenu après découpage et assemblage sera $\frac{c\sqrt[4]{3}}{2} \simeq 0,658c$.

Dans le découpage des 6es la longueur du côté du carré correspond à la longueur GD avec les notations de l'énoncé. Or si on calcule GD, par exemple en utilisant la trigonométrie dans le triangle GDC, on observe que $\mathrm{GD} = \frac{c\sqrt{7}}{4} \simeq 0,661c$. La différence reste faible et imperceptible pour les élèves. Et elle n'enlève pas l'intérêt du problème.

Pour aller plus loin

Vous pouvez retrouver le découpage de Dudeney avec de nombreux autres problèmes et casse-tête sur le site www.gutenberg.org . Il s'agit du problème 26 du livre « The Canterbury puzzles ». Les solutions sont à la fin de l'ouvrage qui date de 1907 et qui vaut le coup d'œil pour ses illustrations, l'originalité et la variété des problèmes présentés.

Vous trouverez une version animée du puzzle de Dudeney dans l'application rdv17 (proposée en téléchargement sur le site de notre rallye). Thèrèse Eveillau en propose une aussi sur son site « Les mathématiques magiques » ainsi qu'un programme de construction et une démonstration du résultat.

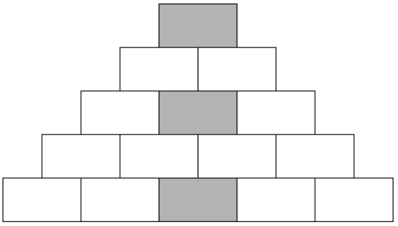
Enfin, si vous souhaitez creuser ce sujet, Jean-Pierre Friedelmeyer de l'IREM de Strasbourg a écrit un article [1] très intéressant sur des découpages en 3 coups de ciseaux. Il généralise le découpage de Dudeney à des triangles quelconques en détaillant des procédures de construction.

The mystery of the pyramid (bonus 5 de l'édition 2018)

Énoncé

Ce bonus est le premier que nous proposons dont l'énoncé est en anglais :

Each box of the pyramid must contain a number between 1 and 9, respecting two conditions :
You cannot use the same number twice on the same row.
On each row, the average of two numbers in two adjacent boxes can be seen in the box just above them.
What are the numbers in the three central coloured boxes ?



Answer to be sent : The product of the numbers in the three coloured boxes.

Commentaires

Il nous a semblé intéressant de proposer un énoncé en anglais dans l'objectif affiché du rallye de faire participer les élèves au sein du groupe classe. Ainsi les élèves ayant des compétences en anglais peuvent les mettre en avant à cette occasion. D'autre part, il nous a semblé original d'utiliser une telle pyramide reposant sur la notion de moyenne et ne contenant que des chiffres. Il est étonnant aussi de constater que certaines cases se voient imposées leur contenu.

1. Voir le bulletin de l'APMEP n°469 à la rubrique : « Dans nos classes ».

Résolution·s

Une fois l'étape de la traduction passée, les élèves peuvent procéder à des essais. Peut-être certaines classes ont résolu ce bonus simplement en essayant de compléter les cases sans réelle stratégie. Néanmoins, les élèves doivent être certains de la réponse qu'ils proposent car l'application du rallye ne permet pas de la tester.

On s'aperçoit vite que le fait de mettre côte à côte un nombre pair et un nombre impair n'est pas possible car alors la moyenne qui doit apparaître dans la case du dessus n'est pas un nombre entier (en effet la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair).

On en conclut que dans une même ligne on ne doit avoir que des chiffres pairs ou que des chiffres impairs.

Or en considérant qu'il n'y ne peut pas y avoir deux fois le même chiffre dans une ligne donnée et qu'il n'y a que 4 chiffres pairs entre 1 et 9, on en conclut que la ligne du bas ne peut contenir que tous les impairs. Il reste à déterminer dans quel ordre.

Si on les place dans l'ordre croissant (1, 3, 5, 7, 9) ou décroissant (9, 7, 5, 3, 1) la pyramide se complète alors sans problème en effectuant les moyennes pour compléter les lignes supérieures. Les trois cases grisées contiennent toutes le chiffre 5.

5
4 6
3 5 7
2 4 6 8
1 3 5 7 9

D'autre part, on notera la symétrie géométrique de la figure qu'il est intéressant de rapprocher du fait que la moyenne de 2 cases symétriques est toujours égale à 5. On peut alors penser qu'une case se trouvant sur l'axe de symétrie, qui est donc sa propre symétrique, prend une valeur telle que la moyenne de cette valeur avec elle-même soit égale à 5 ; ce ne peut être que 5.

La solution est donc $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Unicité

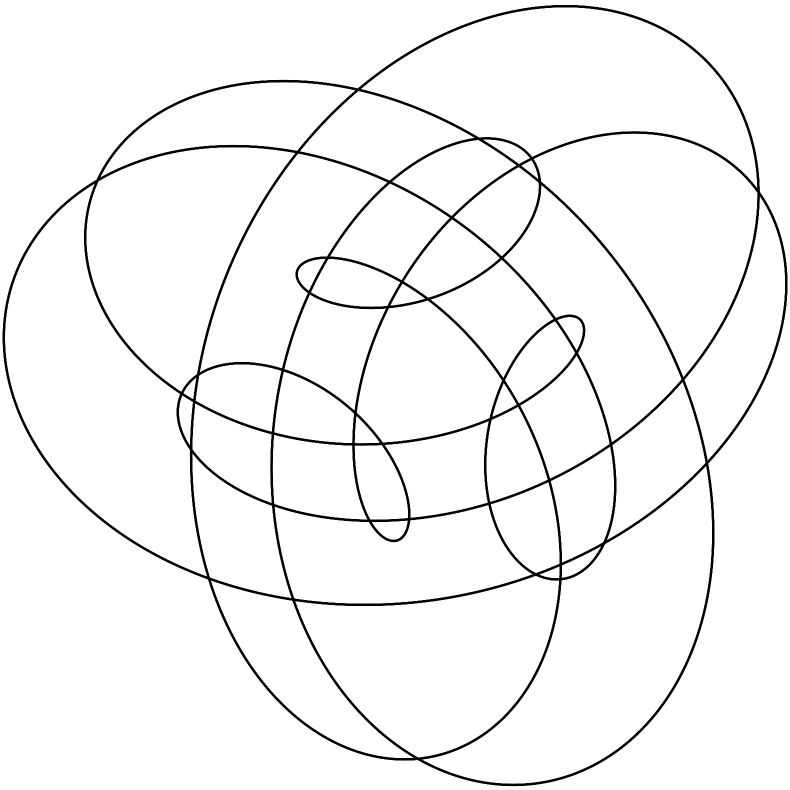
Pour les élèves, trouver une solution suffit ; pour nous, organisateurs du rallye, il est fondamental de les trouver toutes.

La pyramide présentant un axe de symétrie, à chaque solution de remplissage correspond une situation symétrique (par exemple la première ligne peut être composée des chiffres impairs dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant de façon symétrique). C'est pour cette raison que les seules cases invariantes sont celles situées sur cet axe de symétrie.

Considérons alors le fait que la moyenne entre deux nombres distincts (c'est le cas pour chaque ligne) est un nombre strictement compris entre ces deux là. On en conclut donc que les chiffres de la deuxième ligne en partant du bas sont strictement compris entre 1 et 9. Ce qui exclut 1 et 9 ; la deuxième ligne est donc constituée des chiffres de 2 à 8.

À l'aide du même principe, la troisième ligne est constituée des chiffres de 3 à 7 ; la quatrième des chiffres de 4 à 6 ; et la cinquième du seul chiffre 5. Nous avons donc complété la ligne du haut sans avoir déterminé précisément le contenu des cases des lignes précédentes. On peut alors « redescendre » la pyramide de proche en proche avec un seul choix consistant à mettre 4 et 6 dans cet ordre ou dans l'ordre inverse pour la quatrième ligne. Choix qui génère soit le remplissage trouvé plus haut, soit son symétrique.

Ce remplissage est donc unique à la symétrie près.



$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -44\cos(10t)+50\cos(16t)+30\cos(-8t-90) \\ y(t) & = & -44\sin(10t)+50\sin(16t)+30\sin(-8t-90) \end{array}\right.$$

Rallye Maths IREM 95

Présentation

Motivations

Du point de vue des apprentissages, les intentions de ce Rallye sont :

- de confronter les élèves à des problèmes de recherche pour lesquels différents types de démarches sont possibles qui favorisent l'initiative, l'imagination et l'autonomie ;
- de placer les élèves dans un contexte inhabituel qui valorise le travail en équipe, qui les implique dans un esprit de coopération et non de rivalité ;
- de leur faire élaborer des procédures de résolutions personnelles ;
- de favoriser une démarche scientifique : émettre des hypothèses, élaborer une démarche de résolution, vérifier, échanger des procédures, argumenter...
- d'utiliser, enrichir le langage spécifique aux mathématiques (vocabulaire, schémas, graphiques...) ;
- de lire en mathématiques en s'adaptant à la diversité des formes d'énoncés de problèmes ;
- de prendre conscience de ses connaissances même si celles-ci sont modestes ;
- d'écrire en mathématiques : des écrits pour chercher ; des écrits destinés à être communiqués ; des écrits pour argumenter.

Du point de vue pédagogique, l'organisation du Rallye permet aux enseignants de :

- proposer en classe des situations de recherche de problèmes ouverts avec un regard plus aigu sur les procédures (le rendu des productions d'élèves doit expliciter la manière dont les élèves sont arrivés au résultat mais aussi la façon dont le débat a amené à choisir la production finale) ;
- proposer un accompagnement du Rallye pour échanger sur les sujets, les modalités de mise en place en classe, les réactions d'élèves, les prolongements du Rallye dans la vie de la classe ou de l'école.

Historique

2011 – 2012 : animations sur la circonscription de Sarcelles Sud pour organiser un Rallye Maths Cycle 2 (Grande section – CP – CE1).

2012-2013 : ouverture du Rallye Maths au département du Val d'Oise en intégrant des classes de cycle 3 et de l'ASH (Clis et Segpa) ; 1re année du Rallye Maths IREM 95 (101 classes ont participé).

2013-2014 : ouverture aux moyennes sections de maternelle. Les classes pouvant participer sont donc en maternelle : les moyennes et grandes sections, en élémentaire : les classes de CP au CM2, les CLIS ; ainsi que les classes de SEGPA, IME, ITEP (avec 35 classes participantes pour ces dernières) ; création des journées de jeux et activités mathématiques.

2014-2015 : ouverture aux classes de 6e pour que le Rallye Maths puisse être un support à la liaison CM2-6e.

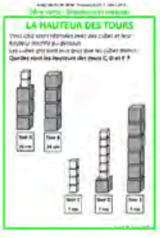
Épreuves

► Quatre domaines de recherche

Nombres et calculs (problèmes sur les quantités en maternelle), géométrie (plane et dans l'espace), grandeurs et mesures, logique.

► Niveaux de difficultés

Quatre pour le cycle 1 et cinq pour les cycles 2 et 3 (le dernier niveau de cycle 3 visant particulièrement la liaison CM2-6e), le choix est laissé à l'enseignant.




► Modalités

Temps court de recherche individuel éventuel.

Recherche par petits groupes :

— les élèves en même temps, le même jour sur le même problème ;

— les groupes de recherche sont hétérogènes afin de favoriser les échanges et la recherche.

Mise en commun :

— chaque groupe doit avoir un temps de parole lui permettant d'expliquer sa démarche ;

— la mise en commun doit permettre un temps d'échange à partir des productions (grands formats). Elle doit également inclure un temps de négociation et de décision (vote) pour choisir la production finale de la classe. Il peut y avoir des mises en commun intermédiaires de façon à ne pas rester « sec » sur un problème.

► **Matériel nécessaire**

Les élèves peuvent utiliser, à leur demande, tous les documents et matériels disponibles dans la classe mais ils ne doivent recevoir aucune aide mathématique de l'enseignant ou de tout autre adulte (voir le document en ligne sur le site « malle au trésor »).

► **Une seule réponse par classe pour chacun des quatre domaines**

Suite à un échange, les élèves doivent choisir la réponse à envoyer. La classe doit justifier son choix. Ce n'est donc pas l'enseignant qui choisit la réponse de la classe. Chaque réponse choisie par la classe doit impérativement être accompagnée d'un argumentaire qui peut se présenter sous diverses formes (dictée à l'adulte, photos etc.). L'argumentaire doit suffire à expliciter la démarche.

Compétition

Le rallye mathématique se déroule en trois étapes :

— **entraînements** : des épreuves d'entraînement sont à disposition dans la banque de données sur le blog. Un entraînement sur deux semaines consécutives est conseillé afin de mettre les élèves dans les conditions du Rallye. Le choix des énigmes est fait par les enseignants : 4 épreuves, une par domaine à travailler.

— **épreuves** : 4 problèmes à résoudre en deux semaines, la classe envoie un coupon réponse par problème (un par domaine : un de « nombres et calcul », un de « logique », un de « géométrie »et un de « grandeurs et mesures » (sur deux semaines dont la semaine des Mathématiques)).

— **Des journées de jeux mathématiques** sont ensuite organisées par certaines circonscriptions ou par le groupe Rallye Maths 95 en fin d'année pour les classes ayant participé.

Partenaires

DSDEN 95, ACSDAECS, Secours populaire 95

Contact

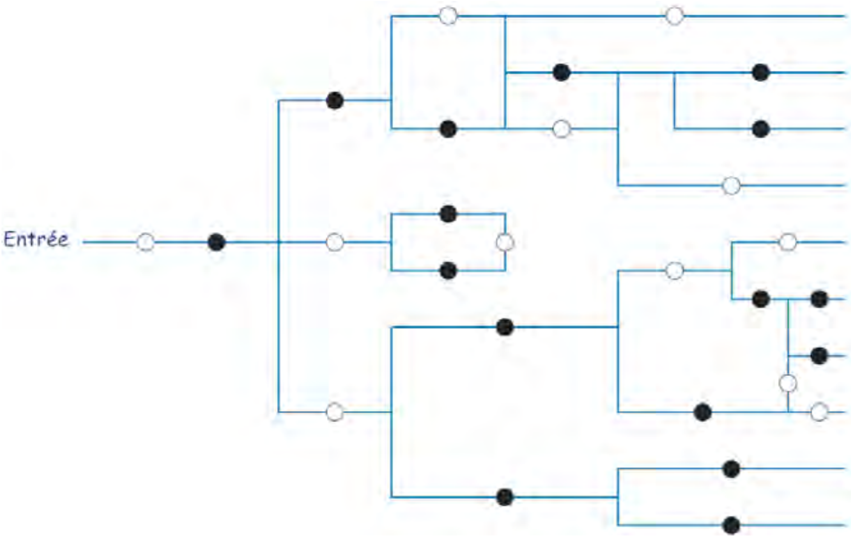
✉ Rallye Maths Irem 95, Inspection de Sarcelles Sud, 148 avenue de la division Leclerc, 95200 Sarcelles
@ Agnès Batton : agnes.batton@u-cergy.fr
@ Monique Figarol : monique.figarol@ac-versailles.fr
blog.ac-versailles.fr/rallyemathssarcellessud/index.php

Laissez-nous sortir !

(épreuves Cycle III 2015-2016, série arc-en-ciel - Logique)

Énoncé

Dans ce réseau de couloirs, toutes les portes sont automatiques.
Impossible de les ouvrir manuellement !
Au départ, toutes les portes marquées d'un rond blanc sont ouvertes et toutes celles marquées d'un rond noir sont fermées.
Chaque fois que l'on passe une porte ouverte, toutes les portes ouvertes se referment aussitôt et toutes les portes fermées s'ouvrent.



Réussirez-vous à sortir ?
Dessinez deux chemins possibles.

Analyse

- ► **Niveau scolaire**

  Cycle 3

- ► **Domaine mathématique**

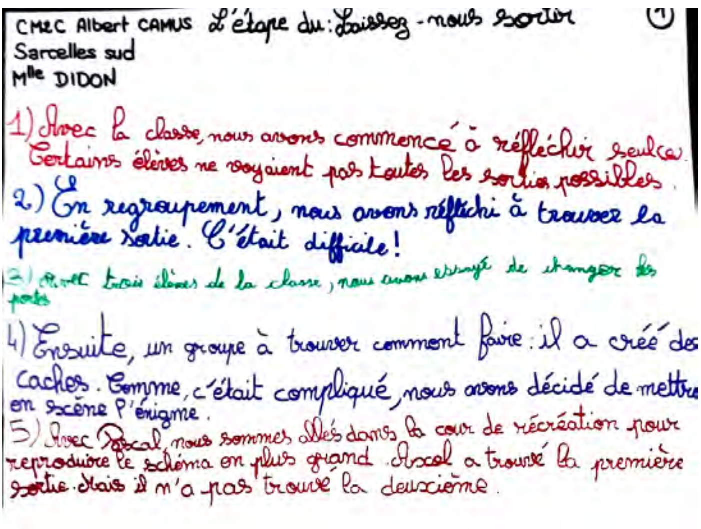
  Logique

- ► **Analyse de tâche : compétences et procédures attendues**

Les solutions sont multiples et les procédures variées pour résoudre ce problème qui nécessite une grande organisation des informations au fur et à mesure de l'avancée dans la résolution de l'exercice. C'est une des difficultés et un des intérêts de cet énoncé.

- ► **Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants**

Description par la classe sous forme d'une rapide narration de recherche des différentes étapes de la résolution avec description partielle des procédures.


CMEC Albert CAMUS L'étape du : Laissez-nous sortir (1)
Sarcelles sud
Mlle DIDON

1) Avec la classe, nous avons commencé à réfléchir seul(e). Certains élèves ne voyaient pas toutes les sorties possibles.

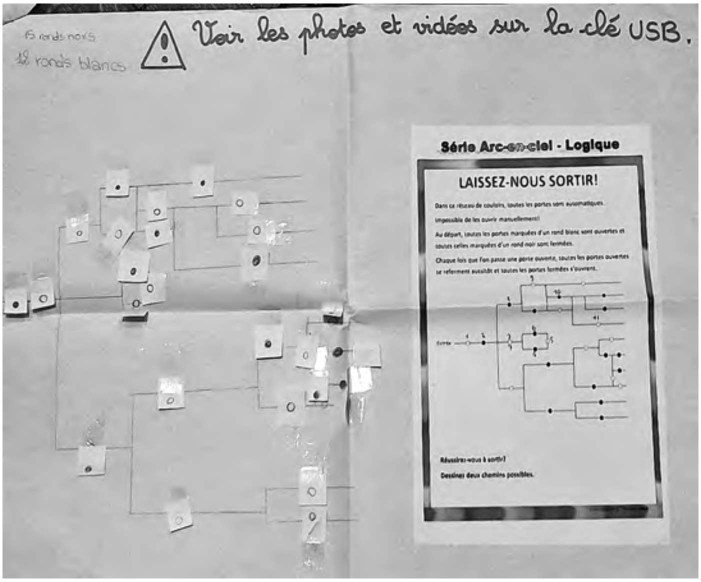
2) En regroupement, nous avons réfléchi à trouver la première sortie. C'était difficile !

3) Avec trois élèves de la classe, nous avons essayé de changer les portes

4) Ensuite, un groupe à trouver comment faire : il a créé des caches. Comme, c'était compliqué, nous avons décidé de mettre en scène l'énigme.

5) Avec Pascal, nous sommes allés dans la cour de récréation pour reproduire le schéma en plus grand. Pascal a trouvé la première sortie. Mais il n'a pas trouvé la deuxième.

Dans le micro-espace (espace de la feuille) les élèves ont reproduit le labyrinthe et ont construit un système de caches recto-verso permettant de changer au fur et à mesure les couleurs des portes comme demandé dans l'énoncé.



Pour trouver d'autres solutions ou pour permettre de mieux concevoir le problème, le labyrinthe a été déplacé dans le méso-espace (espace de la cour), retracé à grande échelle à main levée et les élèves avec deux papiers (un vert : ouverte, un rouge : fermée) se sont placés aux différents noeuds permettant visuellement à un autre élève de parcourir les différents chemins testés.

La visite du zoo

(épreuves Cycle II 2015-2016, série rouge - Nombres et calculs)

Énoncé

Au zoo, Zoé voit dans un enclos des girafes et des autruches.
Il compte vingt-quatre pattes en tout.
Combien y a-t-il de girafes et d'autruches dans cet enclos ?
Trouvez au moins trois solutions différentes.

Source : d'après gdm-62.etab.ac-lille.fr/Enigmathic

Analyse

► **Niveau scolaire**

Épreuve prévue pour des élèves de cycle 2 (niveau rouge donc parmi les deux niveaux les plus difficiles)

► **Domaine mathématique**

Nombres et calculs

► **Analyse de tâche : compétences et procédures attendues**

Les élèves doivent trouver le nombre d'animaux en ne connaissant que le nombre de pattes, ce qui représente un vrai problème pour eux. Il est effectivement difficile pour les élèves de se permettre de démarrer en faisant des hypothèses sur des nombres possibles et de vérifier ensuite la véracité de ces hypothèses. En outre le problème a plusieurs solutions ; cette pluralité de solutions peut être difficile à accepter pour certains élèves.

Procédures possibles :

— travailler par essai-ajustement directement à partir des nombres en faisant différentes sommes de multiples de 4 (pour les girafes) et de multiples de 2 (pour les autruches) jusqu'à trouver 24 ;

— décomposer 24 en sommes de 4 (ou multiples de 4) et de 2 (ou multiples de 2) ;

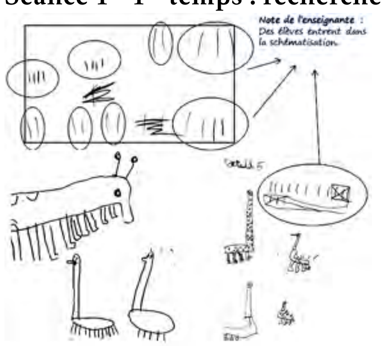
— travailler par essai-ajustements en dessinant des représentations des deux espèces (groupes de 4 tirets pour les quadrupèdes et groupes de 2 tirets pour les bipèdes) et en faisant les sommes intermédiaires jusqu'à trouver le bon nombre.

Ce problème est à mettre en relation avec le problème des poules et des lapins de l'IREM de Montpellier [1] .

► **Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants**

Dans une école de Sarcelles, deux PE ont choisi de prendre le Rallye Maths, et cette énigme en particulier, comme moyen de construire une liaison inter-cycle maternelle-élémentaire avec leurs deux classes, une de GS (classe de Naïma) et l'autre de CP (classe de Prisca). Elles relatent dans les diapositives suivantes les différentes étapes du travail de leurs élèves (en termes de séquençage, de modalités mais également en termes de réflexion mathématiques).

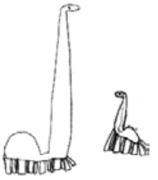
Séance 1 - 1er temps : recherche individuelle



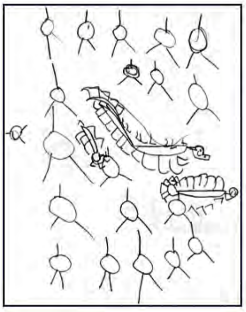
1. cii.sesamath.net/mathadoc/narration/res_Poules.PDF

Séance 1 - 2e temps : bilan collectif

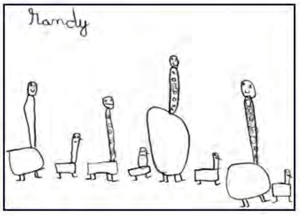
« - J'ai réussi, j'ai fait 24 pattes.
- Non, une girafe ça a 4 pattes !
- Moi j'ai réussi, j'ai fait une girafe avec 4 pattes et une autruche avec 2 pattes.
- Ça fait 6 pattes ! C'est pas réussi.
- Il en faut encore, il en faut beaucoup !
- On peut faire des traits pour aller plus vite. »

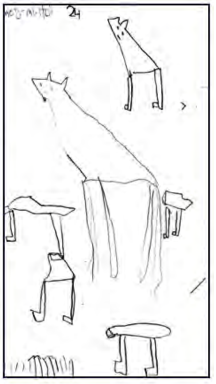


Séance 1 - 3e temps : recherche individuelle bis

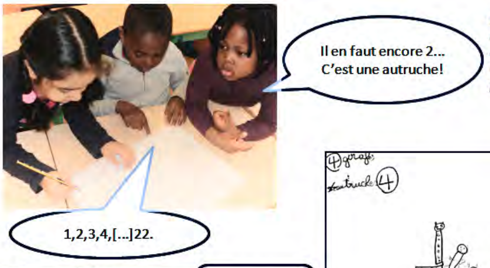


Note de l'enseignante : les élèves vont comparer leur solution lorsqu'ils pensent en avoir trouvée une.

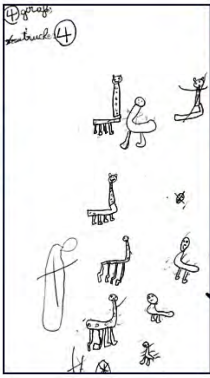


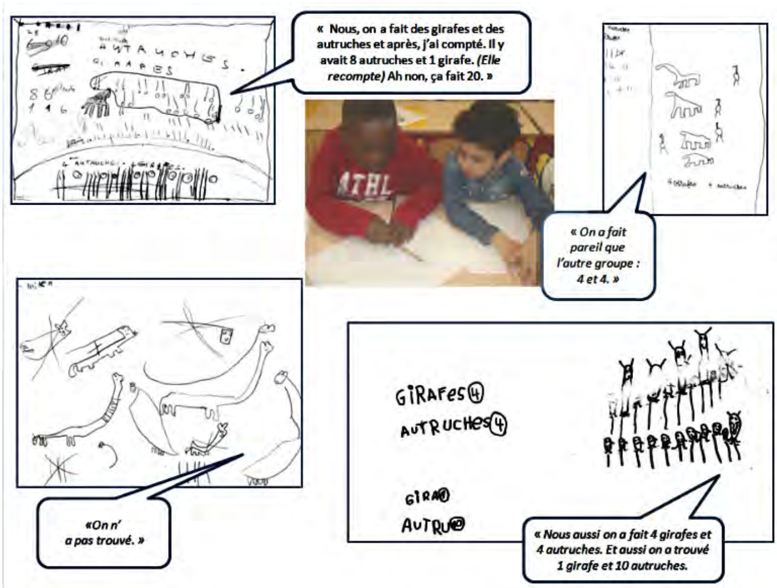


Séance 2 - 1er temps : reformulation du problème et recherche en petits groupes



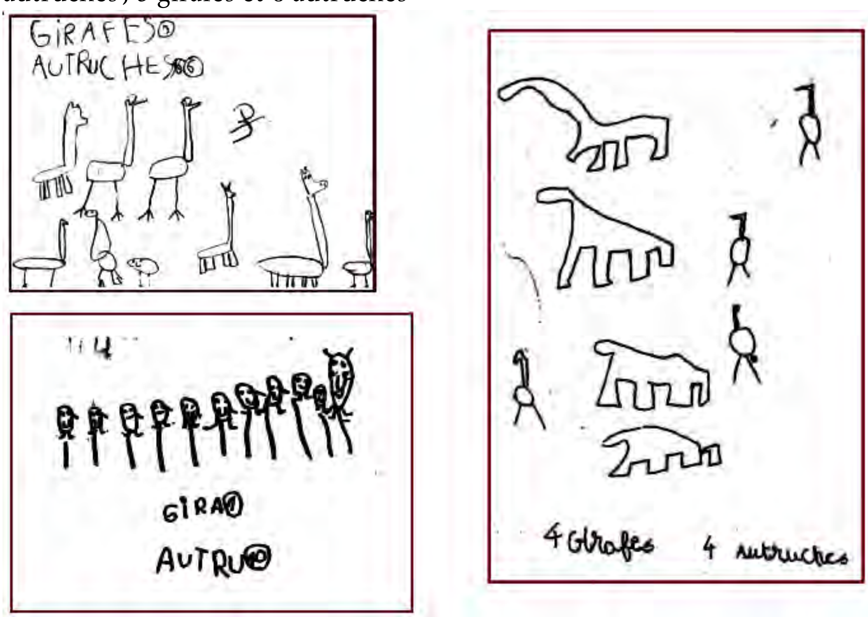
Note de l'enseignante : En groupe, ceux qui n'avaient pas compris l'enjeu du problème se sentent plus concernés et entrent dans le « recomptage » des pattes pour réussir.





Séance 2 - 2e temps : la mise en commun

Voici les trois solutions choisies : 4 girafes et 4 autruches ; 1 girafe et 10 autruches ; 3 girafes et 6 autruches

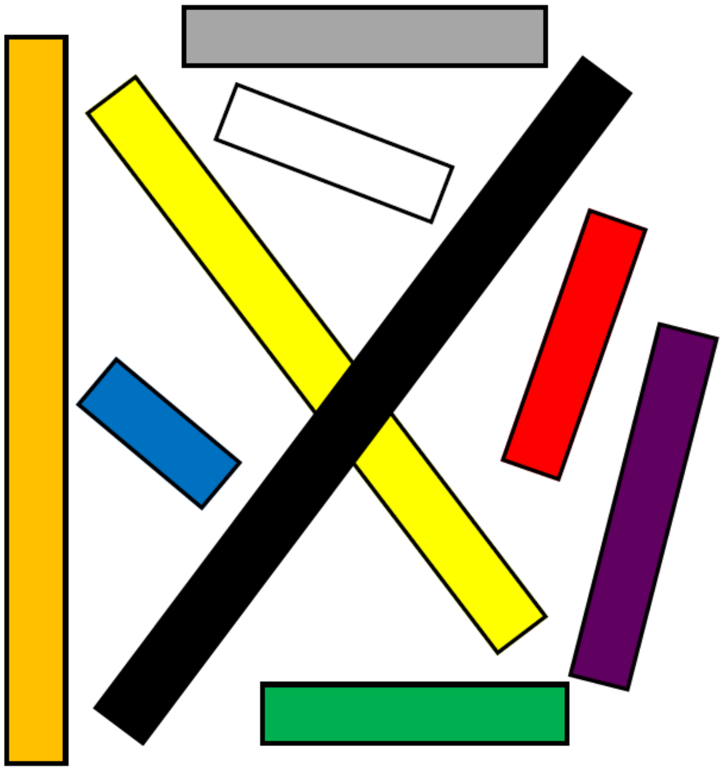


Les bandes de papier

(épreuves maternelle 2013-2014, étape 2 série bleue - Grandeurs)

Énoncé

« Voici des bandes de papier de couleurs différentes. Saurez-vous trouver la plus courte, la plus longue et les bandes de même longueur ? »



La bande la plus courte est la bande ....
La bande la plus longue est la bande ....
Les bandes de la même longueur sont ....
Comment avez-vous trouvé ? ....
....

MATÉRIEL ET REMARQUES :

A proximité : ficelle, raphia, bandes de papier ordinaire, crayon, paire de ciseaux...
Envoyer la fiche remplie.

Solution

La bande la plus courte est la bande bleue.
La bande la plus longue est la bande noire.
Les bandes violette et grise sont de même longueur.

Analyse

► **Niveau scolaire**
Maternelle

► **Domaine mathématique**
Grandeurs

► **Analyse de tâche : compétences et procédures attendues**

Il s'agit d'un exercice de comparaison de longueurs. Il permet de mettre en œuvre des procédures de comparaison non numériques comme des comparaisons directes ou indirectes à l'aide de languettes intermédiaires, ou d'utilisation d'étalons internes à la classe.

► **Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants**

Dictée à l'adulte :

D'abord, on a vu tout de suite que
la bande bleue était la plus petite.
Après on a pris une bande de papier
et on a mesuré toutes les bandes même la
bleue. On a pris le feutre bleu pour mesurer
et on a fait un trait bleu sur la bande.
On a mis la bande (blanche) à côté de la bande bleue.
Et on a fait pareil pour toutes les autres
bandes. On a fait des traits avec chaque
couleur.
On a vu que la bande bleue c'était
la plus petite (courte) et que la noire,
c'était la plus grande (longue).
Après, on a vu que la grise et la
violette c'était pareil. Elles sont « moyennes »
toutes les deux...

L'enseignant décrit les différente procédures utilisées et la chronologie de leur apparition au fur et à mesure que la difficulté de résolution croissait :

— estimation (à l'œil) : « on a vu tout de suite » ;

— comparaison par repérage des différentes longueurs sur une même bandelette témoin.

Autre classe de GS :

> **Observations sur le temps de recherche collective :**
> Les élèves ont été répartis en petits groupes de trois.
> Ils ont décrit ce qu'ils voyaient sur la feuille et ont émis des hypothèses sur les consignes. Tous ont bien repéré les bandes de couleurs différentes ainsi que des tailles différentes.
> Après la lecture de l'énoncé du problème, les élèves ont de suite répondu instinctivement à la première affirmation.
> D'après eux, la bande la plus courte est la bande bleue car elle est la plus « petite » et ils justifient cela en disant « ça se voit ».

Description de l'évolution des procédures et de l'utilisation du matériel à disposition :

— estimation « ça se voit » quand les écarts sont importants et se voient ;

> Pour compléter la deuxième affirmation, là les avis ont été partagés, tous n'étaient pas d'accord. Certains groupes ont répondu « c'est la noire, c'est sûr », « ça se voit ». D'autres groupes ont pensé que c'était la bande jaune, d'autres la bande orange en hésitant avec la bande noire. C'est à ce moment que les élèves ont décidé d'utiliser le matériel mis à leur disposition et qu'il fallait comparer les longueurs pour le savoir. Un seul groupe a pensé qu'il y avait deux bandes jaunes.

— quand les différences sont moins importantes, besoin de changer de procédure

> Prendre des repères avec la ficelle a été compliqué pour la plupart des groupes car la ficelle ondulait. Les crayons étaient soient trop grands, soit trop petits par rapport aux bandes et les élèves n'arrivaient pas à garder la marque de la mesure sur le crayon. Les bandes de papier ont pratiquement toujours été utilisées. Par contre les stratégies ont été très différentes : certains ont posé une bande mobile sur chaque bande représentée et ils ont découpé avec des ciseaux approximativement pour avoir à peu près la même longueur (certains ont déchiré) puis d'autres ont fait une trace avec le crayon noir sur la bande blanche pour prendre les mesures et seulement après ont découpé la bande au niveau de la marque du trait.

— description du matériel utilisé (ficelle, crayons, bandes de papier découpées) et des différentes procédures observées :

construction de bandes étalons mobiles représentant les bandes de la feuille ;

utilisation d'une bande intermédiaire pour repérer les différentes longueurs et les comparer.

Journées des jeux mathématiques

En fin d'année, les élèves sont invités à venir participer à des ateliers de jeux ou d'activités mathématiques. Ils sont pris en charge par des collègues enseignants (de primaire ou de l'ESPE), des étudiants en master enseignement, des personnels de centre de loisirs ou des bénévoles.

Article extrait de « Vivre à Jouy » de juillet-août 2016

Rallye mathématique

le vendredi 27 mai,
au centre de loisirs des Rougeux.

Des énigmes mathématiques pour se creuser les méninges

Plusieurs écoles de la ville ont participé le 27 mai dernier à l'édition du Rallye mathématique. Les élèves se sont confrontés à des problèmes de recherche à travers des jeux de logique et des ateliers. Une journée dédiée à la science, qui s'est déroulée à l'accueil de loisirs des Rougeux mis à disposition pour l'occasion.

Douze classes des écoles de la Côte-des-Carrières, des Éguérets, des Jouannes et du Vast ont pris part au Rallye mathématique qui s'est tenu pour la première fois dans l'ouest du Val-d'Oise. Le vendredi 27 mai, journée de clôture de ce rallye, les élèves se sont exercés aux mathématiques en dehors de leurs cahiers. Ils ont manipulé les chiffres et les formes géométriques, joué à des jeux de logique et se sont même initiés à la programmation et à la robotique. « *C'est un projet ambitieux qui a mobilisé les compétences de tous : conseillers pédagogiques, animateurs, et les enfants bien sûr qui ont pu se révéler autrement que dans les apprentissages traditionnels* », explique David Piovano, coordinateur au Service enfance de la commune. À cette occasion, 10 animateurs de la ville ont été formés à l'utilisation des jeux de société. Un partenariat engagé entre l'Éducation nationale et les équipes périscolaires pour répondre à l'objectif du PEDT (projet éducatif territorial) : la réussite éducative des enfants.

Association Science Ouverte - Seine-Saint-Denis

Présentation

L'Association Science Ouverte est née d'un travail de terrain entrepris depuis le début des années 90 en Seine-Saint-Denis.

Objectif : ouvrir les jeunes aux sciences et les sciences aux jeunes, ainsi qu'aux citoyens de tous âges. Les violences de novembre 2005 ont amenée à préciser les buts de ce travail : lutter contre un sentiment d'enfermement et d'impuissance trop présent sur le territoire qui entretient le cercle vicieux d'une certaine ghettoïsation.

Les activités touchent aujourd'hui plus de 10 000 participants par an dont 2 500 sur des activités longues (50 000 heures d'activités individuelles). Les mathématiques y jouent un rôle central mais pas exclusif. Sous des formes très diverses, ces activités concourent à créer en Seine-Saint-Denis une structure visible et efficace, capable de susciter des vocations scientifiques et d'aider les jeunes qui s'y engagent. 95% des jeunes qui sont suivis plusieurs années par l'association poursuivent ensuite des études longues (bac +5), parfois même très brillantes.

Le stage Science Ouverte à Paris 13

Ce stage annuel a connu sa première édition en juin 2010. Il se déroule pour l'essentiel dans les locaux de l'Université Paris 13 à Bobigny. Il s'adresse à 35 élèves de fin de seconde de toute la Seine-Saint-Denis, au moment où les cours s'achèvent pour eux : la seconde quinzaine de juin. Indépendamment de son intérêt intrinsèque, il vise à créer un vivier d'élèves partageant leur passion lors des stages, et qui se retrouveront lors de diverses activités durant toute leur scolarité en lycée, voire dans le supérieur.

Il propose dans ce but des activités variées, préparées et encadrées par des chercheurs : des cours-TDs de mathématiques, des ateliers de recherche également en mathématiques, des conférences-débats, des visites, un speed-meeting sur les métiers scientifiques, un grand jeu, des activités sportives (importantes pour créer du lien dès le départ entre les participants), et une remise de diplôme par le président de l'Université Paris 13, suivie d'un buffet convivial... et apprécié !

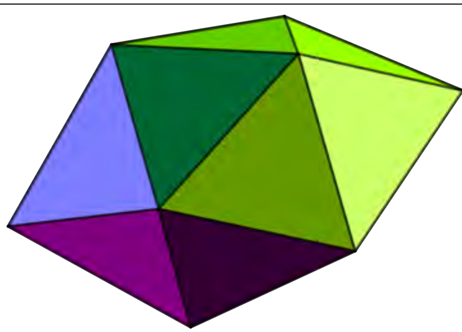
Selon les années, nous revoyons ensuite entre la moitié et les deux tiers de chaque promotion. Certains font plus de dix autres stages d'une semaine durant leur scolarité, avec parfois des résultats étonnants (entrée à l'X ou dans une ENS), et en tout cas des études longues. Parmi les bénévoles, une demi-douzaine a participé ou participe au Conseil d'Administration de l'association.

Contacts

@ contact@scienceouverte.fr
www.scienceouverte.fr

Nous présenterons ici un sujet proposé à la recherche de groupes lors d'un stage Science Ouverte à Paris 13.

Combien de faces pour les deltaèdres convexes ?



Un deltaèdre est un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Si vous essayez d'en construire avec les pièces de plastique assemblables type « Polydron » fournies, vous constaterez vite que le nombre de faces n'est pas quelconque : certains nombres n'apparaissent pas. Vous constaterez également que pour un même nombre de faces, le nombre de figures possibles augmente très vite... à condition d'accepter des formes non convexes (haricots, étoiles...). Mais si l'on exige la convexité, on finit par bloquer. Pourquoi ?
Et, finalement, quels sont tous les deltaèdres convexes possibles ?

Commentaire

Il ne s'agit pas ici d'un sujet non résolu. Cependant il autorise une vraie recherche de la part des élèves, avec des découvertes empiriques qu'il convient ensuite de justifier. Nous avons eu l'occasion de l'expérimenter aussi dans le cadre d'un atelier MATh.en.JEANS à l'année et de faire travailler dessus des collégiens. Il est bon que les élèves connaissent, par des activités antérieures, la formule d'Euler pour les polyèdres « sans trou » ; sinon, il faudra leur faire découvrir ; mais leur en faire trouver une démonstration correcte constituerait une nouvelle activité.

Rappelons cette formule : pour un polyèdre de genre 0, c'est-à-dire déformable continûment en une sphère, elle lie le nombre de sommets (s), de faces (f) et d'arêtes (a) :

$$s - a + f = 2$$

Éléments constatés

Souvent, les élèves commencent par assembler des deltaèdres avec un grand nombre de faces et ont d'ailleurs du mal à compter ces dernières, sans parler des arêtes ou des sommets. Un défaut assez courant dans le montage des polyèdres est d'assembler les pièces à plat, ce qui élimine toute courbure, une notion qui n'est pas du tout intuitive pour eux.

Néanmoins, au bout de peu de temps, ils constatent que le nombre de faces d'un deltaèdre est toujours pair. Reste à savoir pourquoi. Le raisonnement est compréhensible dès le collège : chaque face possède trois côtés, et pour faire une arête il faut deux côtés. Le nombre de côtés est donc nécessairement pair, ce qui ne serait pas le cas si le nombre de faces était impair car le produit de ce nombre par 3 serait impair. Tour cela se prêtera à un travail de rédaction et de présentation intéressant en vue de la restitution du travail.

En comptant sommets, arêtes et faces, les élèves constatent que si deux deltaèdres ont le même nombre de faces, alors ils ont le même nombre d'arêtes et le même nombre de sommets. De plus, les sommets augmentent de 1 en 1, les faces de 2 en 2 et les arêtes de 3 en 3.

Appelons s, a et f les nombres de sommets, d'arêtes et de faces.

On a selon la formule d'Euler : $s - a + f = 2$ (E).

Mais on vient de le voir, chaque face a 3 côtés et il faut deux côtés pour faire une arête.

Donc $a = \frac{3\times f}{2}$; le nombre d'arêtes est bien déterminé par le nombre de faces, et une augmentation de 2 du nombre de faces engendre une augmentation de 3 du nombre d'arêtes.

En reportant dans l'équation (E), il vient :

$$s - \frac{3\times f}{2} + f = 2$$

d'où

$$s = 2 + \frac{f}{2}.$$

Et l'on voit cette fois que le nombre de sommets augmente de 1 à chaque tour !

Une figure non plane possède nécessairement au moins quatre points. Donc le deltaèdre avec le plus petit nombre de sommets (et donc de faces) est le tétraèdre. Et l'on en déduit toutes les autres possibilités en termes de valeurs pour s, a et f.

Le bricolage permet alors de dénombrer les deltaèdres : un seul à 4 faces, un seul à 6 faces, deux à 8 faces, cinq à 10 faces ; mais l'un de ces derniers a, en fait, des faces coplanaires formant trois losanges, on ne peut vraiment parler de deltaèdre dans ce cas.

Montrer que ces deltaèdres existent bien n'a rien de facile ; on peut signaler la question et en faire comprendre la pertinence : les pièces en plastique pourraient être trompeuses. Nous n'avons pas testé avec les élèves un travail sur ce sujet, sauf sur des cas très particuliers.

De la même façon, montrer qu'il en existe une infinité peut sembler évident, mais pas si simple à justifier vraiment. On peut cependant penser à empiler des octaèdres réguliers (qui ont des faces parallèles) deux à deux en supprimant la face d'adjacence. On obtient ainsi un deltaèdre avec un nombre de faces aussi grand qu'on veut.

Problème de convexité

On supposera que la convexité d'un polyèdre a bien été définie : si deux points sont situés à l'intérieur ou sur sa surface, alors c'est le cas également de tous les points du segment qui les joint.

On constate qu'il n'existe que huit deltaèdres convexes, avec des nombres de faces égaux à 4 ; 6 ; 8 ; 10 ;12 ; 14 ; 16 et 20. C'est une constatation expérimentale. Les trouver et les construire tous va prendre une petite demi-heure à un groupe d'élèves.

Les huit deltaèdres convexes, réalisés avec des triangles de terre cuite.

Plusieurs questions se posent : pourquoi s'arrête-t-on à 20, et pourquoi 18 est-il absent de la liste ? Et d'ailleurs l'est-il ? Pourquoi n'y a-t-il qu'un seul deltaèdre pour chaque valeur permise ?

La première de ces questions est liée à la notion de courbure. Il est aisé de faire constater, là encore de façon tout à fait expérimentale, que si l'on assemble en un sommet plus de cinq triangles équilatéraux, il est impossible d'obtenir une « pointe ». On obtient soit quelque chose de plat, pour six triangles (se déformant si l'on veut avec creux et bosses mais pas en forme de pointe), soit au-delà quelque chose qui rappelle vaguement une chips ou une selle de cheval.

Il s'agit là d'une propriété tout à fait générale : prenons deux dessous de tarte circulaire. On retranche un secteur circulaire à l'un, on recolle pour obtenir un « chapeau chinois », autrement dit un cône, impossible à aplatir sans le déchirer. Mais si on ajoute au second dessous de tarte la pièce retirée au premier, en l'insérant dans un rayon alors on obtient une forme de chips, impossible à aplatir sans faire de plis.

À gauche une chapeau chinois et à droite une chips.

Le chapeau chinois a une courbure positive concentrée en son sommet, la chips a une courbure négative concentrée au même point. À condition de ne pas contenir le sommet, un morceau de la forme réalisée peut être mise à plat sans le déchirer ni le plier. Par exemple en s'appuyant localement sur une surface plane (un coin de table...). La courbure est partout nulle, sauf au sommet.

Expliquer comment la convexité, définie comme plus haut, est liée à la forme « en pointe » (courbure positive) et non « en chips » (courbure négative) des sommets nous entrainerait trop loin du sujet, et ce n'est pas une question que se posent spontanément les élèves.

Par contre, cela permet d'expliquer pourquoi le nombre de faces des deltaèdres convexes se limite à 20.

Appelons degré le nombre de faces (ou d'arêtes) autour d'un sommet. On vient de voir que tous les degrés des sommets d'un deltaèdre convexe doivent être inférieurs ou égaux à cinq.

Pour f faces, nous avons $2+\frac{f}{2}$ sommets. Mais avec f faces nous avons

$3f$ sommets de triangles que nous assemblons au plus par 5, donc au moins $3 \times \frac{f}{5}$ sommets.

Ce qui nous donne

$$\frac{f}{2} + 2 \geqslant 3 \times \frac{f}{5}$$

et en résolvant cette inéquation,

$$f \leqslant 20.$$

Par conséquent un deltaèdre convexe ne peut avoir plus de 20 faces.

Pour 20 faces, bien sûr, tous les sommets sont de degré 5, il y en a 12, et 30 arêtes. C'est l'icosaèdre, l'un des cinq polyèdres réguliers qu'on peut construire aisément avec les pièces de plastique et dont l'existence se démontre de plusieurs façons.

Qu'en est-il des autres deltaèdres convexes ?

Montrons simplement qu'il ne peut pas exister de deltaèdre convexe possédant 18 faces.

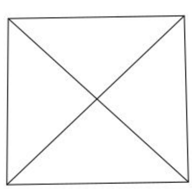
Pour 18 faces, la formule d'Euler ne nous laisse pas le choix et il y a 11 sommets et 27 arêtes.

La somme des 11 degrés est égales à deux fois le nombre d'arêtes, et aussi à trois fois le nombre de faces : c'est 54.

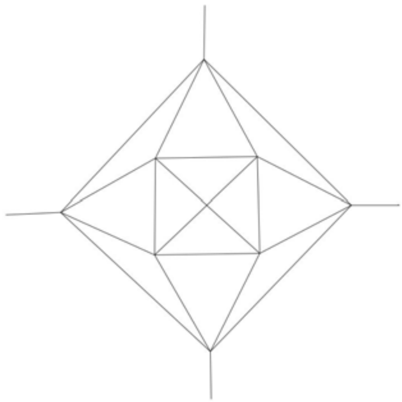
Tous les degrés doivent être compris, au sens large, entre 3 et 5. Pour faire une somme égale à 54, il nous faut donc 10 sommets de degré 5 et un de degré 4. Le fait que cette possibilité soit unique va nous simplifier la vie.

Nous allons schématiser la construction de ce deltaèdre à l'aide d'un graphique plan respectant strictement la disposition des faces, arêtes et sommets, les uns par rapport aux autres. Les constructions effectives correspondant aux deux étapes évoquées sont présentées également en photo ci-après.

On commence par assembler le sommet de degré 4 : 4 faces triangulaires ayant un sommet commun. Les quatre autres sommets sont pour l'instant incomplets (2 faces et 3 arêtes chacun).



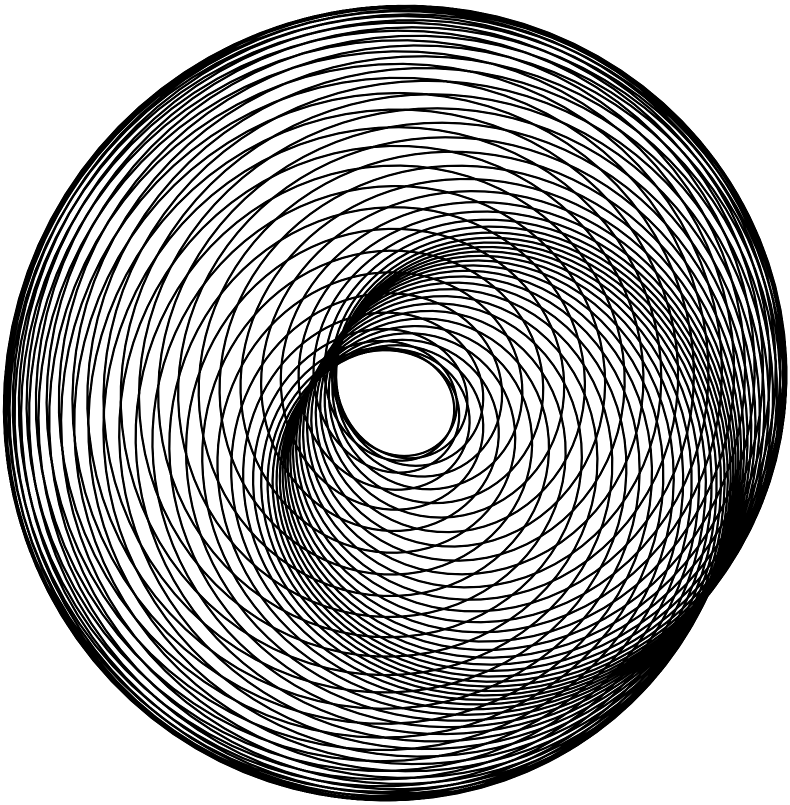
Tous les sommets doivent maintenant être de degré 5. Il manque 2 arêtes et trois faces sur chacun des quatre sommets précédents. On les ajoute, ce qui donne la figure suivante sur laquelle on a aussi porté la cinquième arête des quatre sommets incomplets.



Il nous manque deux sommets, six faces et trois arêtes. Cependant, les faces étant triangulaires, nous n'avons pas d'autre possibilité que de faire se joindre les quatre arêtes ayant une extrémité libre. Ce qui clôt notre tétraèdre avec 16 faces et deux sommets de degré 4 (il s'agit du deltaèdre convexe de 16 faces).

Il n'est donc pas possible de construire un deltaèdre convexe de 18 faces.

Des raisonnements du même type permettraient sans doute de montrer l'unicité des deltaèdres convexes pour les autres valeurs de f. Mais le nombre de graphes à examiner devient vite bien plus grand parce que le nombre de sommes possibles pour obtenir la bonne somme de degrés est plus élevé.



$$\begin{cases} x(t) &= -68\cos(47t+107)+100\cos(70t+147)+21\cos(94t+180) \\ y(t) &= -68\sin(47t+107)+100\sin(70t+147)+21\sin(94t+180) \end{cases}$$

Coupe Euromath-Casio

Présentation

La Coupe Euromath des régions est une compétition mathématique par équipes unique au monde, dont la finale est un spectacle se déroulant sur une scène devant un public.

La première phase qui conduit à un classement des équipes est une phase d'épreuves de type « rallye ». Cette phase comporte des épreuves sur table, des épreuves individuelles (de type Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques) et des épreuves collectives plus variées (comprenant notamment des jeux de grille de type World Puzzle Championship), ainsi qu'un tournoi dans un jeu de stratégie rapide.

Le spectacle sur scène fait intervenir des joueurs de toutes les équipes, tirés au sort pour chaque épreuve.

Les énigmes sont retransmises sur écran. Des exemples simples sont proposés aux spectateurs, qui suivent la résolution en direct.

Élaborées par les membres du jury de la Fédération Française des Jeux Mathématiques et du CIJM, les épreuves sur scène s'adressent à un ou plusieurs équipiers (voire des équipes complètes) et comprennent

— des jeux de grilles,

— des jeux de culture scientifique,

— des puzzles,

— des épreuves d'estimation,

— des jeux de stratégie,

— des épreuves de tri.

Historique

Juin 2000 : création de la Coupe Euromath dans le cadre du 1er Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques organisé début juin Place Saint-Sulpice à Paris à l'occasion de l'année mondiale des mathématiques.

Mai 2018 : dix-neuvième édition d'Euromath.

En 19 ans, la Coupe Euromath a vu la participation d'équipes d'Allemagne, d'Alsace, de Belgique, du Danemark, d'Ile-de-France, d'Italie, du

Limousin, du Luxembourg, de Midi-Pyrénées, de Normandie, du Poitou-Charentes, de Rhône- Alpes, de Suisse, de Tunisie et d'Ukraine.

Compétition

Fin mai ou début juin, dans le cadre du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques. Les équipes sont sélectionnées par des compétitions mathématiques, adhérentes ou non du CIJM.

Épreuves

La compétition se déroule par équipe et comporte des épreuves individuelles et des épreuves collectives. Chaque équipe comprend un élève de l'école élémentaire, un collégien de 6^e ou 5^e, un collégien de 4^e ou 3^e, un lycéen, un étudiant et un adulte, plus un capitaine (non joueur).

Spectacle

Il se déroule sur scène, devant un public. Des images retransmises sur écran permettent au public de lire les règles des jeux et de suivre en direct la résolutions des énigmes.

Partenaires

Calculatrices Casio, Éditions POLE

Contacts

CIJM www.cijm.org

FFJM @ ffjm@wanadoo.fr

Le flocon de von Koch

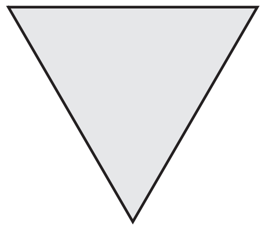
Le flocon de von Koch est une fractale inventée par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870 - 1924).

Pour cette épreuve, les joueurs disposaient d'une calculatrice.

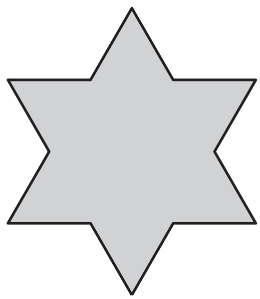
Énoncé

► **Épreuve proposée aux joueurs 1 et 2 (un élève de cours moyen et un élève de 6e ou 5e)**

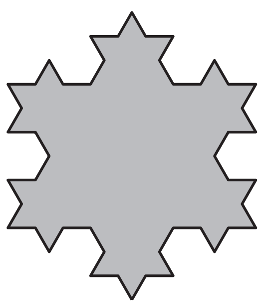
La figure de départ (étape 0) est un triangle équilatéral. Elle possède 3 côtés.



Pour construire l'étape 1, on divise chaque côté du triangle en trois segments de même longueur et on construit sur chaque segment médian, vers l'extérieur, un triangle équilatéral de côté trois fois plus petit. La figure obtenue possède 12 côtés.



Pour construire l'étape 2, on divise à nouveau chacun des côtés de la figure 1 en trois segments de même longueur et on construit extérieurement sur chaque segment médian un triangle équilatéral de côté trois fois plus petit. La nouvelle figure obtenue possède 48 côtés.



1. Combien de côtés possédera la figure de l'étape 3 construite à partir de la figure 2 selon le même procédé ?

► **Épreuve proposée aux joueurs 3 et 4 (un élève de 4e ou 3e et un lycéen)**

2. Si le triangle équilatéral de l'étape 0 a un côté mesurant 9 cm, quel sera le périmètre de la figure de l'étape 4 ?

► **Épreuve proposée aux joueurs 5 et 6 (un étudiant et un adulte)**

3. Si on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la figure 0, quelle sera l'aire de la figure n° 5 ? Vers quelle limite tend l'aire du flocon lorsqu'on construit les étapes successives ?

Analyse

► **Domaines de compétences**

Les notions mathématiques mises en jeu dans ce problème sont :

— suites arithmétiques

— suites géométriques

► **Procédures attendues**

1. Remarquer que lorsqu'on passe d'une étape à la suivante, chaque côté de la figure de départ donne naissance à quatre côtés. Le nombre de côtés est donc multiplié par 4 d'une étape à la suivante.
2. Remarquer que lorsqu'on passe d'une étape à la suivante, chaque nouveau côté a une longueur égale au tiers de celle du côté de l'étape précédente. Le périmètre est donc multiplié par $\frac{4}{3}$.
   Ceci peut se représenter dans un tableau :

	Nombre de côtés	Longueur d'un côté	Périmètre	
Étape 0	3	9 cm	27 cm	
				$\times\frac{4}{3}$
Étape 1	12	3 cm	36 cm	
				$\times\frac{4}{3}$
Étape 2	48	1 cm	48 cm	
				$\times\frac{4}{3}$
Étape 3	192	$\frac{1}{3}$ cm	64 cm	
				$\times\frac{4}{3}$
Étape 4	768	$\frac{1}{9}$ cm	85,33... cm	

3. Lorsqu'on passe de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute une aire égale à $\left(\frac{4}{9}\right)^n \times \frac{\mathcal{A}}{3}$.

	Nombre de côtés	Aire	
Étape 0	3	$\mathcal{A} = \mathcal{A}$	$+\frac{4^0}{9^0\times 3}\mathcal{A}$
Étape 1	3×4	$\mathcal{A}\times\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\mathcal{A}$	$+\frac{4^1}{9^1\times 3}\mathcal{A}$
Étape 2	3×4^2	$\mathcal{A}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}\right) = \frac{40}{27}\mathcal{A}$	$+\frac{4^2}{9^2\times 3}\mathcal{A}$
Étape 3	3×4^3	$\mathcal{A}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}\right) = \frac{376}{243}\mathcal{A}$	$+\frac{4^3}{9^3\times 3}\mathcal{A}$
Étape 4	3×4^4	$\mathcal{A}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}+\frac{64}{2187}\right) = \frac{3448}{2187}\mathcal{A}$	

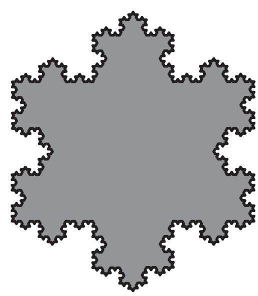
L'aire de la figure de l'étape 5 sera donc égale à

$$\frac{\mathcal{A}}{3}\times\left(4+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\frac{64}{729}+\frac{256}{6561}+\frac{1024}{59049}\right) \text{ soit } \mathcal{A}\times\frac{282616}{177147}$$

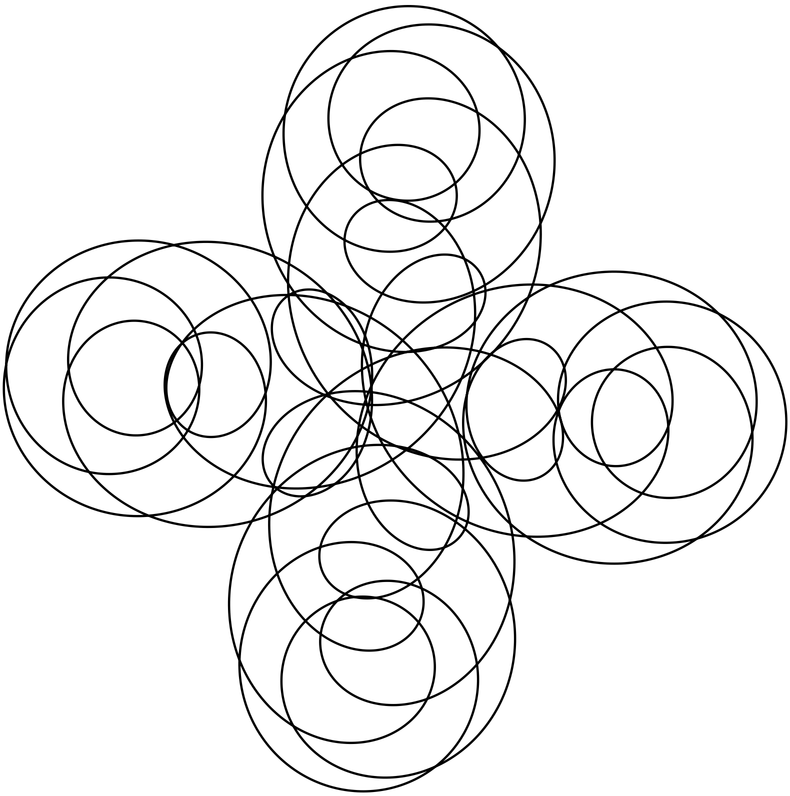
égale environ à $1,5954\mathcal{A}$.
Lorsqu'on construit les étapes successives, l'aire du flocon tend vers

$$\mathcal{A}+\frac{\mathcal{A}}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 1,6\mathcal{A}.$$

Étape 3



Étape 4



$$\begin{cases} x(t) &= 14\cos(27t+30)-25\cos(-2t+113)-18\cos(6t-88) \\ y(t) &= 14\sin(27t+30)-25\sin(-2t+113)-18\sin(6t-88) \end{cases}$$

Jeux2Maths

Présentation du groupe

- **Nom du groupe** : Jeux2Maths
- **Structure de rattachement** : IREM de Caen.
- **Public visé** : élèves des cycles 3, 4 et lycée.
- **Types d'activités** : création de jeux
- **Contact** : Philippe LANGLOIS
- **courriel** : philippe.langlois@ac-caen.fr
- **Site internet** : jeux2maths.fr/

Depuis sa naissance en 2000, le groupe « Jeux2Maths » de l'IREM de Caen a créé une vingtaine de jeux abordant différentes notions mathématiques du collège et du lycée. Plus qu'une parenthèse ludique, nos jeux sont conçus pour s'intégrer dans nos séquences d'apprentissage comme ressort pédagogique motivant la majorité des élèves. Ils peuvent servir à aborder de nouvelles notions (**les Vectominos** pour apprendre à additionner des vecteurs), manipuler des notions en cours d'acquisition (**le Relatron** pour s'entraîner aux opérations sur les nombres relatifs) ou encore approfondir des acquis antérieurs (**le Kelpolygoness** pour travailler sur les propriétés des polygones).

Nos créations se veulent de type « jeux de société » nécessitant un matériel spécifique (cartes, dés, pions, plateaux, etc.) ; l'objectif est de proposer aux élèves une activité dont le but est différent de ceux auxquels ils sont habitués comme répondre à une question ou résoudre un problème mathématique. Ici, il s'agit plutôt d'utiliser des outils mathématiques à des fins qui ne le sont pas : être le premier à poser son pion sur telle case, à ne plus avoir de cartes en main, etc., la motivation est alors plus sociale que scolaire puisqu'elle met en jeu un challenge, que ce soit avec d'autres (envie de gagner la partie) ou avec soi-même (envie de se dépasser, de faire mieux).

Dans notre conception des jeux, l'élève doit être confronté à des choix, même dans les jeux comportant du hasard. Chaque « coup » joué faisant fonctionner le savoir visé, le jeu a alors une fonction d'appropriation, d'entraînement ou d'exercice, sans phénomène d'usure. Chaque partie étant différente, l'intérêt des élèves reste intact. La même tâche, sur un exercice scolaire, serait bien rébarbative et découragerait les plus téméraires !

Notre travail est publié sur notre site jeux2maths.fr. Pour chacun des jeux sont proposés :

— la règle destinée aux enseignants ;

— les fichiers nécessaires à la réalisation des éléments du jeu ;

— les feuilles de marque ;

— une démonstration sous forme d'animation « flash ».

Les documents du site sont mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 3.0 France.

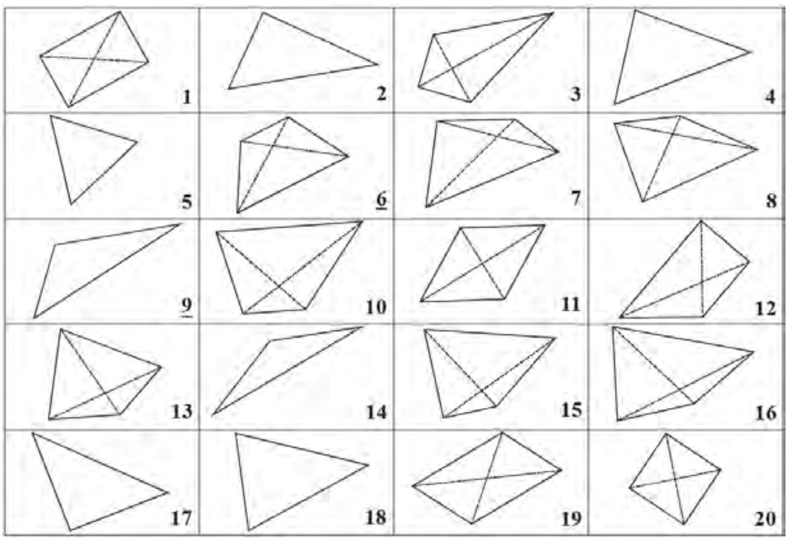
Notre expérience riche d'une vingtaine d'années de pratique nous convainc, sans en avoir la preuve formelle, que le jeu a des effets non négligeables sur l'apprentissage. Par exemple, une allusion faite au jeu au cours de la séquence peut déclencher une correction de procédures erronées chez les élèves. Cela nous incite à penser que les jeux deviennent des activités de référence propres à modéliser ou mémoriser plus efficacement des processus mathématiques.

Nous ne prônons pas « le jeu à tout prix », mais une utilisation parcimonieuse et ciblée sur des notions qui posent problème ou pour lesquelles un entraînement est nécessaire. L'apprentissage ne saurait être exclusivement ludique et nécessite des phases de travail strictement scolaire. Le jeu est l'occasion de faire des maths sans s'en rendre compte et, en imposant une certaine répétitivité, a la faculté de faire fonctionner des outils mathématiques dans le but d'en améliorer la maîtrise. Si de surcroît, il offre une efficacité plus grande qu'une activité classique, nous aurions tort d'en priver nos élèves.

Bons JEUX2MATHS !

1er jeu : Le Kelpolygoness

- ► **Niveau** : cycle 3
- ► **Domaine mathématique** : étude des triangles et des quadrilatères
- ► **Type de jeu** : 2 × 20 cartes basé sur le principe du jeu « Qui est-ce ? »
- ► **Matériel** : 24 cartes
- ► **Nombre de joueurs** : 2 ou 2 équipes de 2
- ► **But du jeu** : deviner en un maximum de 5 questions la carte choisie par l'équipe adverse.



Règle

— 2 joueurs (ou équipes).

— But : trouver la carte cachée choisie par l'adversaire en cinq questions au plus.

— L'adversaire choisit une carte qu'il garde secrète.

— Le joueur pose une question (sans mesure, ni numéro de carte) à laquelle l'adversaire ne peut répondre que par oui ou par non.
Si après sa question, il propose un numéro de carte, la partie s'arrête, sinon il poursuit en posant une nouvelle question.

Compétences mises en jeu

— Savoir analyser les propriétés d'une figure.

— Être capable de mobiliser un vocabulaire précis et technique.

— Savoir utiliser les instruments de géométrie pour mesurer, comparer des grandeurs (longueurs, angles).

Place de la séance dans la séquence d'apprentissage

Au début de la séquence, cela permet de faire un diagnostic des connaissances des élèves : de leur niveau de vocabulaire et de leurs savoirs quant à la nature des différents polygones.

Procédures attendues

— Utilisation des instruments pour l'analyse des figures.

— Stratégie de choix des questions.

Procédures recueillies

Les feuilles de marques comportant les questions posées, les réponses données, la carte proposée et la carte choisie.

Les résultats étaient-ils attendus ?

Ce jeu est testé dans nos classes depuis de nombreuses années. Nous disposons donc d'une vision assez précise sur le niveau de langage et la pertinence des questions (et aussi des réponses).

Les deux exemples qui suivent montrent assez bien la pauvreté du vocabulaire mathématique et le manque de logique dans l'enchaînement des questions.

QUESTION	REPONSE
Est-ce que la figure est un triangle	NON
Est-ce que la figure à trois côté	Non
Est-ce que c'est une piramide	Oui
Est-ce que elle à 4 sommets	Non
CARTE PROPOSEE : N° 16	CARTE A TROUVER : N° 16

QUESTION	REPONSE
Y a-t-il 4 côté	NON
Y a-t-il 3 côté	Oui
Y a-t-il un angle droit	non
triangle alongé	non
triangle grand	non
CARTE PROPOSEE : N° 5	CARTE A TROUVER : N° 5

Le jeu nous permet aussi de constater l'hétérogénéité des élèves quant à leur niveau de vocabulaire. L'exemple ci-après montre un groupe assez pertinent dans le choix des questions.

QUESTION	REPONSE
Est-ce que c'est un triangle ?	non
Est-ce que des cotés sont parallèles ?	oui
Est-ce qu'il y a des angles droits ?	non
Est-ce qu'il y a un angle droit à l'intersection des diagonales ?	non
Est-ce que les côtes parallèles sont égaux ?	non
CARTE PROPOSEE : N° 6	CARTE A TROUVER : N° 6

Synthèse

La synthèse est faite à partir d'extraits choisis de feuilles de jeu distribués aux élèves et vidéo-projetés.

L'intention est :

— de faire analyser aux élèves leurs productions,

— de les faire évoluer vers un vocabulaire précis et adéquat,

— de les faire réfléchir sur le choix des questions et l'ordre dans lequel les poser,

— de lister ce que peuvent être les « propriétés d'un polygone ».

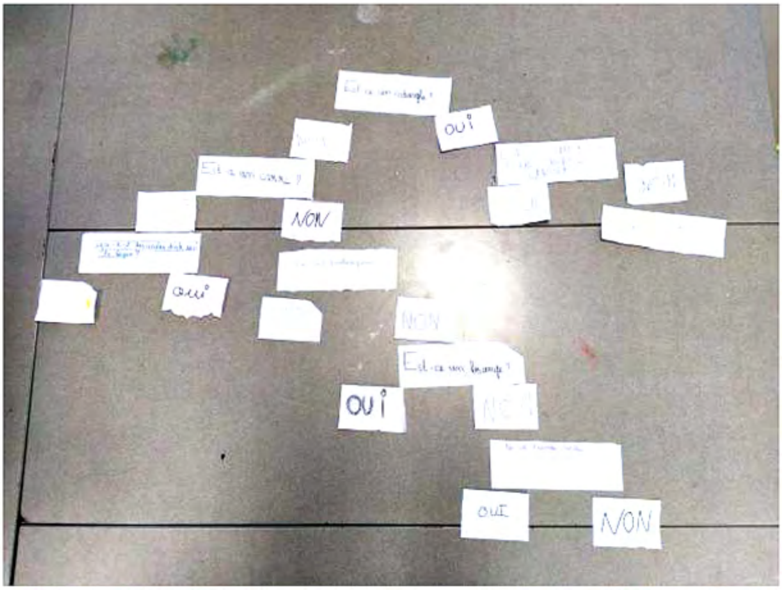
Prolongements

Nos jeux sont des activités pédagogiques à part entière et s'intègrent donc dans la séquence d'apprentissage. Pour prolonger « l'effet jeu » nous proposons aux élèves des activités qui utilisent soit le ressort du jeu, soit le matériel du jeu dans des activités plus classiques.

Dans le cas du kelpolygoness, ce sont les cartes que nous réutilisons.

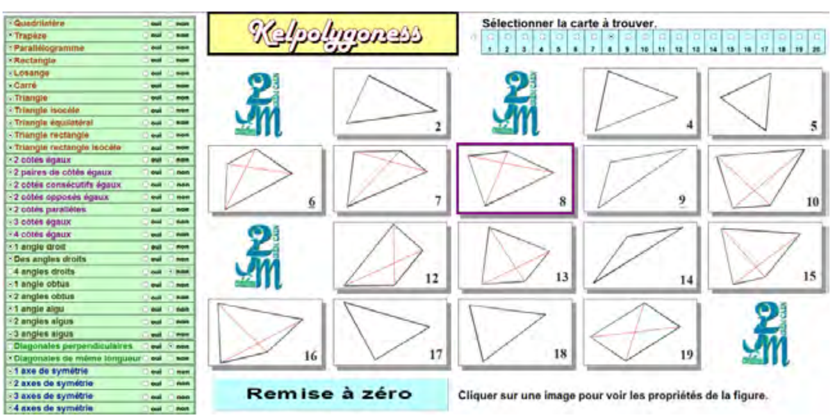
— Une carte est choisie, la trouver en un minimum de questions.

— Réaliser un arbre de tri des 20 cartes en utilisant au maximum 5 questions (photo suivante).

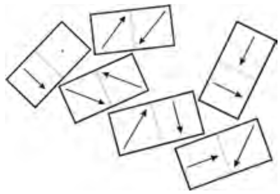


- Deux cartes sont choisies, quelles sont les questions permettant de les différencier ?
- Quel est l'ensemble des cartes répondant à une propriété donnée ?

Pour une synthèse rapide et efficace de ce type d'activité en classe, nous avons développé un outil avec OpenOffice Calc (téléchargeable sur le site), permettant de visualiser toutes les cartes correspondant à la réponse à une question posée. Cet outil nous permet également de commencer à travailler la classification des polygones.



2^{e} jeu : Les Vectominos



- **Niveau** : lycée (2$^{\text{nde}}$)
- **Domaine mathématique** : vecteurs
- **Compétence** : addition (soustraction)
- **Type de jeu** : dominos
- **Matériel** : 30 tuiles
- **Nombre de joueurs** : 2 à 4
- **But du jeu** : être le premier à poser tous ses Vectominos

Problématique

Si l'approche graphique utilisée dans l'apprentissage des vecteurs facilite la compréhension du concept, elle induit aussi une part de confusion : la représentation par un « segment orienté » et l'utilisation de la notation de type n'aident pas l'élève à « détacher » le vecteur de sa position de représentation.

Ainsi, la notion de position constitue-t-elle un obstacle dans l'étude géométrique des vecteurs et de leurs sommes en particulier.

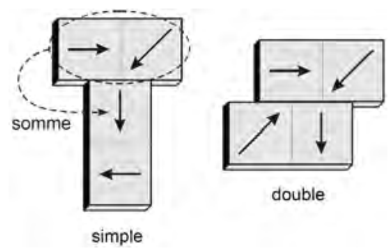
C'est à partir de ce constat qu'est né ce jeu de sommes de vecteurs dont la règle va obliger l'élève à surmonter cet obstacle.

Présentation

Un Vectomino est un domino dont une face contient la représentation de deux vecteurs.

Évidemment, on peut appliquer comme règle de juxtaposition celles des dominos classiques, c'est-à-dire l'identité. Cela donne un jeu de spatialisation très simple mais très formateur. Il est aussi possible d'augmenter la difficulté par juxtaposition de vecteurs opposés.

Mais notre objectif est d'additionner des vecteurs et, plus précisément, d'additionner les deux vecteurs représentés sur un Vectomino, la somme étant elle-même représentée sur un autre Vectomino.



Plusieurs « assemblages » sont alors possibles mais celui qui s'est imposé, notamment par la puissance de réflexion qu'il induit, est la « juxtaposition décalée » dont les deux seuls types d'assemblage sont dessinés ci-contre.

La première juxtaposition permise est dite « simple » car elle fait apparaître une seule somme.

La deuxième est appelée « double » pour les deux sommes qu'elle représente (mais oui, regardez bien).

Dans cette dernière configuration, avoir deux sommes est obligatoire, sinon l'assemblage est illicite.

Pour la règle complète, consultez le site, vous y trouverez également une démonstration.

Intérêt pédagogique

► Intérêt du support

- La représentation géométrique de chaque vecteur n'est pas « figée » sur le papier, il n'y a pas de « point d'ancrage » (dixit un élève) ;
- les vecteurs sont « manipulables », d'où un travail formateur sur les notions de direction et de sens ;
- les sommes se font soit mentalement, soit sur une feuille de papier annexe (fortement conseillé, voire à imposer tant le réflexe de la feuille d'essai est rarement acquis), ce qui incite l'élève à ne plus considérer les « positions des vecteurs ».

► Intérêt de la règle

- Savoir trouver la somme de deux vecteurs connus ;
- savoir trouver deux vecteurs dont la somme est connue ;
- savoir trouver la différence de deux vecteurs connus (addition « à trou ») ;
- le niveau de difficulté de l'activité est décidé tout naturellement par chaque élève en cours de jeu grâce au principe des combinaisons simples et doubles ;
- ce même principe permet de faire des groupes hétérogènes ;
- le jeu « dissimule » un entraînement répétitif qui devient alors très efficace.

Déroulement en classe

► 1re séance

Après avoir formé des groupes de 2 à 4 joueurs et distribué les Vectominos, l'enseignant précise qu'il va falloir trouver la règle du jeu avant de pouvoir y jouer. Pour cela, il présente au tableau le déroulement d'un début de partie préparée à l'avance (ne présentant que des liaisons simples de type « u et v correspondant à w » et « w correspondant à u et v »), puis lance et anime le débat.

Il est possible de présenter cela comme un test de logique, il n'est donc pas nécessaire d'avoir abordé précédemment la somme des vecteurs, ni même la notion de vecteur d'ailleurs ! Mais dans ce cas, il sera peut être utile de guider la recherche vers des déplacements de type nord, ou sud-est, etc.

Le fonctionnement de base admis (principe de liaison simple), le professeur précise qu'au cours du jeu chaque partie devra être consciencieusement notée (dessinée) sur une feuille à petits carreaux par un joueur du groupe ou un arbitre (non joueur) et qu'en fin de séance, ces comptes-rendus seront ramassés. On peut aussi photographier les différentes parties et les imprimer pour les comptes-rendus.

Au cours de l'activité, l'enseignant pourra intervenir à son gré sur les compléments de règle qui dynamisent l'activité : notion de combinaison double et comptage des points. La notion de liaison double intervient souvent en cours de séance lorsqu'un groupe se demande la règle à suivre devant l'apparition d'une configuration en « double T » (non imbriquée).

► **2e séance**

Au cours suivant, après photocopie, les comptes-rendus corrigés sont distribués à chaque élève et les parties sont commentées au vidéoprojecteur.

Ceci fait, les « parties sérieuses » peuvent commencer ! Elles seront elles aussi notées sur feuille quadrillée, ou photographiées, puis corrigées : cela constitue ainsi une intéressante pré-évaluation (sans notation évidemment !).

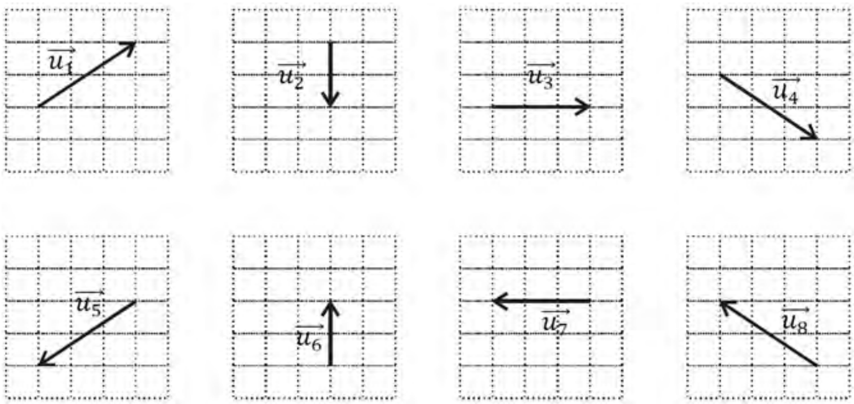
► **Remarques**

Si l'on souhaite gagner du temps sur la recherche du fonctionnement du jeu, il est possible de la demander comme exercice de devoir à la maison ! Ce temps de recherche personnelle pourra ainsi permettre à l'élève de s'approprier la situation. Signalons enfin la formule magique à utiliser, plus tard, pour débloquer un élève qui travaille sur un exercice lié à l'addition de vecteurs, dites-lui : « pense aux Vectominos ! ».

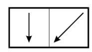
Prolongements

► **Activité**

Écrire toutes les sommes possibles utilisant les vecteurs suivants. Exemple : $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_3}$.

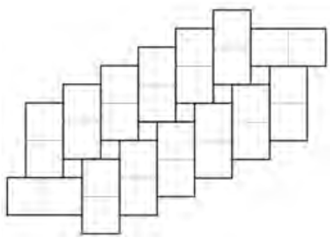


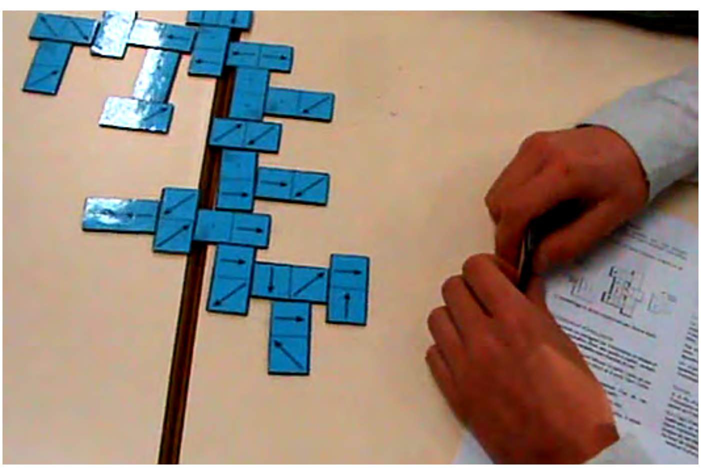
► **Problème 1**

a. Pourquoi n'existe-t-il pas de Vectomino comme celui-ci ? 

b. Sachant que chaque Vectomino est unique, dessiner sur une feuille à petits carreaux toutes les pièces du jeu.

► **Problème 2**
Compléter !





Rallye des maths fantastiques, Paris

Présentation

Partenaires

Le rallye des maths fantastiques est organisé par le groupe « Les maths fantastiques » de l'IREM de Paris, en lien avec les laboratoires de mathématiques et les UMR des universités Paris Diderot et Sorbonne Université ainsi que du CNRS (IMJ-PRG, LDAR, LJLL, LPSM).

Fonctionnement

Ce rallye a lieu chaque année à Paris en octobre, à l'occasion de la fête de la science. Il est présenté sous la forme de trois stands, proposés à l'université Paris Diderot à des classes de collégiens à partir de la 3^{e} et lycéens (un créneau de 2h pour une classe divisée en trois groupes, chaque tiers de classe tournant sur chaque stand, encadré par deux animateurs). Le même rallye est également proposé ensuite pendant une journée au grand public, sur le campus de Jussieu. Chaque stand est décliné en trois niveaux : le plus facile pour les plus jeunes, correspondant à peu près aux élèves de cycle 2 et 3, un niveau intermédiaire pour les collégiens, lycéens et grand public, ainsi qu'un niveau expert pour des personnes ayant fait des études supérieures de mathématiques.

Ces stands sont conçus chaque année de manière collective par des mathématiciens de Sorbonne Université et Paris Diderot (choix des thématiques et rédaction des questions, choix et fabrication du matériel, tests, organisation…). Les stands sont toujours prévus de telle sorte que les participants aient des manipulations à faire, avec du matériel, et travaillent accompagnés par des animateurs. Les organisateurs ont la volonté d'essayer de présenter les activités d'une manière ludique. Ce rallye ne présente aucun aspect compétitif.

Contacts

www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/rallye

Site web du rallye contenant les sujets et explications des années précédentes, le matériel à imprimer quand c'est possible, la procédure d'inscription d'une classe.

@ diffusion@math.univ-paris-diderot.fr

Stands décrits dans la suite

Nous présentons ici un niveau de chaque stand d'octobre 2017 :

— la version la plus simple du stand « Des carreaux pas carrés » (largement inspiré par des travaux de Maths à Modeler (Grenoble) et de l'IREM de Grenoble [1]),

— la version intermédiaire du stand « C'est vite plié ! »,

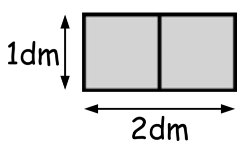
— la version expert du stand « Des maths en des tresses ». La plus grande partie de la version expert de ce stand est toutefois accessible dès le collège, jusqu'aux deux dernières questions.

Les deux autres versions de chaque stand sont disponibles sur le site web du rallye, ainsi que le matériel à imprimer.

Des carreaux pas carrés (année 2017, école élémentaire)

Énoncé

Pour carreler ma maison, j'ai à ma disposition des carreaux de ciment de taille 1×2 (toutes les mesures sont données ici en décimètres).

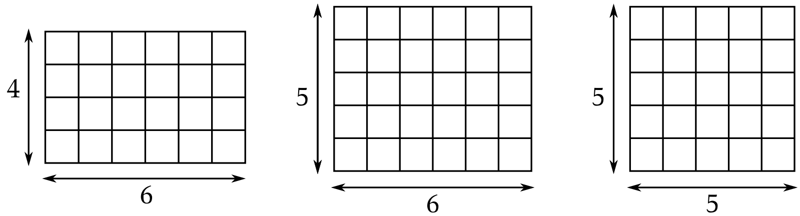


J'espère ne pas avoir à les couper, au risque d'en casser certains ! Heureusement, mes pièces sont toutes des rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers de décimètres. Vais-je pouvoir laisser ma scie au placard ?

1. www.irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

Étape n° 1 : les chambres

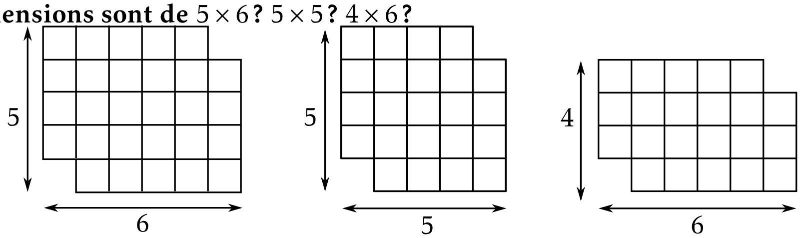
1) Puis-je carreler sans couper de carreaux des chambres rectangulaires dont les dimensions sont les suivantes : 4×6 **?** 5×6 **?** 5×5 **?**



Étape n° 2 : la cuisine

Le plan de la cuisine est un petit peu plus compliqué à cause des tuyaux d'arrivée et d'évacuation d'eau de l'évier et du lave-vaisselle. Ces tuyaux sont encastrés dans deux colonnes carrées de taille 1×1 placées dans deux angles opposés de la cuisine.

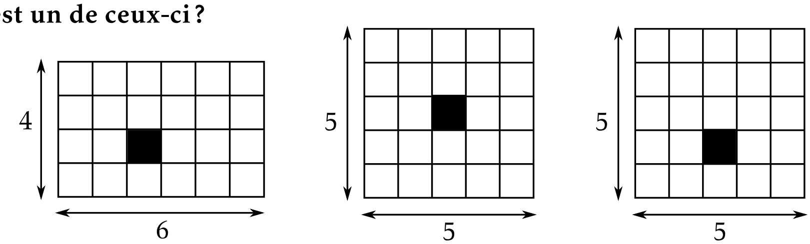
2) Puis-je carreler ma cuisine sans couper de carreaux si ses dimensions sont de 5×6 **?** 5×5 **?** 4×6 **?**



Étape n° 3 : le séjour

Le séjour quant à lui est rectangulaire, mais contient un pilier à base carrée de taille 1×1.

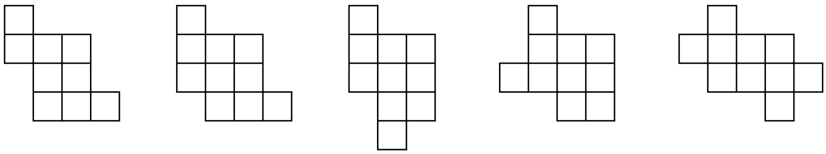
3) Puis-je carreler mon salon sans couper de carreaux si son plan est un de ceux-ci ?



Étape n° 4 : les couloirs

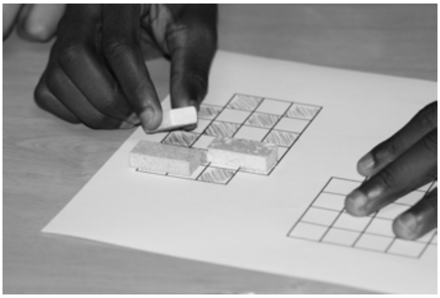
Les couloirs sont quant à eux plus biscornus...

4) Puis-je carreler sans couper de carreaux les couloirs dont les plans sont les suivants ?



Solution et analyse

Matériel fourni : des carreaux de carrelage au bon format à placer sur les « pièces à carreler » imprimées sur des feuilles. On peut bien sûr remplacer le carrelage par des rectangles en papier.



Notions abordées : parité, imparité, calculs d'aires, repérage dans le plan, démonstration, conditions nécessaires et conditions suffisantes.

Les versions plus difficiles de ce stand proposaient de généraliser les résultats à des pièces de tailles $n \times m$ quelconques, dont on enlevait un carré quelconque etc.

Étape n°1 : les rectangles

1) On peut carreler les pièces de taille 4×6 et 5×6, il est facile d'exhiber un pavage. Dans le premier cas on peut, par exemple, mettre tous les dominos (c'est-à-dire les carreaux de taille 1×2) horizontaux car 6 est pair, i.e. divisible par 2, ou tous verticaux car 4 est pair. Dans le deuxième cas, on peut les mettre tous horizontaux (toujours car 6 est pair) mais on ne peut pas les mettre tous verticaux. Cette question ne pose généralement aucun

souci, permet à chacun de comprendre le problème étudié, et de voir que plusieurs solutions différentes sont possibles.

On ne peut pas carreler la pièce de taille 5×5 sans couper de carreaux. Cependant, il faut bien comprendre que ne pas y arriver en tâtonnant n'est pas une preuve du fait que le pavage est impossible, ça veut juste dire qu'on n'y est pas arrivé, peut-être parce qu'on s'y est mal pris. On est donc amené à énoncer une *condition nécessaire* pour pouvoir paver la pièce par des carreaux de taille 1×2 : puisque chaque domino recouvre une aire de 2 unités (ici des décimètres carrés), toute surface pavée par des dominos doit avoir une aire divisible par 2, i.e. une aire paire. Or $5 \times 5 = 25$ est impair, donc la pièce de taille 5×5 ne peut pas être pavée.

Généralement, certains élèves pensent d'eux-mêmes à cette condition de parité. Certains disent « on peut carreler ce rectangle parce que son nombre de cases est pair » (ce qui est vrai, par ailleurs), en pensant que c'est équivalent à l'énoncé réciproque précédemment démontré.

Il peut être intéressant d'insister sur le fait que trouver une solution pour carreler une pièce donnée permet de démontrer que c'est possible, mais que ne pas en trouver n'est pas une preuve de l'impossibilité. On peut également poser la question pour un rectangle de grandes dimensions, comme 2468×1345 (parce que l'on vit dans un château) pour faire sentir les limites du raisonnement précédent en testant et pour motiver l'intérêt à savoir traiter le cas général.

La *condition nécessaire* pour que le rectangle de taille $n \times m$ soit pavable par des dominos que son aire $n \times m$ soit paire est également une condition suffisante. Pour cela supposons par exemple que m est pair. Alors chaque ligne de largeur m et de hauteur 1 peut être recouverte par $m/2$ dominos. Il suffit de paver chaque ligne l'une après l'autre pour obtenir un pavage du rectangle tout entier.

Si on le souhaite, on peut réfléchir à des reformulations de la condition, en regardant dans quel cas un produit d'entiers est pair.

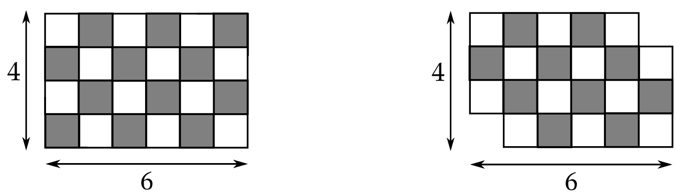
Étape n°2 : les rectangles dont on a enlevé 2 coins opposés

2) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle dont on a enlevé deux coins opposés s'il est de dimension 5×6 (voir plus loin pour une méthode générale de pavage) mais on n'arrive pas à paver ceux de taille 5×5 ni 4×6.

Nous pouvons ré-utiliser la condition nécéssaire énoncée à l'étape 1 pour conclure qu'il est effectivement impossible de réaliser un pavage par des dominos dans le cas d'un rectangle de taille 5×5 dont on a enlevé les coins : en effet, cette surface a une aire de $25 - 2 = 23$ unités, ce qui n'est pas divisible par 2. Cependant, cet argument ne permet pas de conclure dans le cas du rectangle de taille 4×6, car l'aire de la surface à paver est de 22 unités.

Il faut donc une nouvelle idée, pour introduire une nouvelle condition nécessaire : introduire un coloriage en gris et blanc des cases, en damier. C'est une idée qui n'émerge pas forcément naturellement, ne pas hésiter à suggérer de représenter un échiquier. Dans ce coloriage, toutes les cases voisines d'une case blanche sont grises, et vice et versa. Un domino recouvre deux cases voisines, donc automatiquement une case blanche et une case grise. Une *deuxième condition nécessaire* pour qu'une forme soit pavable par des dominos est que le nombre de cases blanches soit égal au nombre de cases grises.

Reprenons l'exemple du rectangle de taille 4×6. Colorions ses cases avant d'enlever les coins. Avant qu'on n'enlève les coins du rectangle, on constate que celui-ci contient 12 cases blanches et 12 cases grises - il est pavable par des dominos, rappelons-le. Cependant lorsqu'on enlève deux coins opposés, on enlève deux cases de même couleur - deux cases grises sur la figure. Ainsi la surface obtenue n'est plus pavable par des dominos car elle contient 12 cases blanches et seulement 10 cases grises.



Étape n°3 : les rectangles dont on a enlevé une case

3) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle 5×5 dont on a enlevé la case du milieu, mais pas les deux autres.

La première condition nécessaire que nous avons donnée porte sur le nombre de cases : un rectangle de taille $n \times m$ dont on a enlevé une case a une aire de $n \times m - 1$ unités, donc une condition nécessaire pour pouvoir paver cette forme avec des dominos est que $n \times m$ soit impair, c'est à dire n et m impairs. Ceci exclut qu'on puisse paver le rectangle 4×6 dont on a enlevé une case, où qu'elle soit située.

La deuxième condition nécessaire porte sur la couleur des cases. Colorions les cases du rectangle $n \times m$ avant d'en enlever une case, en coloriant par exemple en gris la case en bas à gauche. Puisque n et m sont impairs, la case en haut à gauche du rectangle est également grise, et le rectangle contient une case grise de plus que de cases blanches. Pour qu'on puisse paver notre forme avec des dominos, il faut donc nécessairement que la case qu'on retire soit grise. Cela démontre que le dernier rectangle 5×5 n'est pas pavable.

Étape n°4 : des formes bizarres

4) La première forme a une aire de 9 unités, donc ne satisfait pas la première condition nécessaire pour être pavée. Toutes les formes suivantes ont une aire de 10 unités et satisfont la première condition nécessaire.

Lorsqu'on colorie les cases en blanc et gris en damier, on voit que la deuxième forme n'a pas le même nombre de cases blanches que de cases grises, donc elle ne satisfait pas la deuxième condition nécessaire pour être pavable par des dominos. Les trois formes suivantes satisfont cette condition.

En tâtonnant on arrive à paver les troisième et quatrième formes par des dominos.

En revanche, la cinquième forme ne peut pas être pavée par des dominos, bien qu'elle satisfasse les deux conditions nécessaires déjà évoquées. Il s'agit bien de conditions nécessaires, mais pas de conditions suffisantes ! On peut se convaincre de l'impossibilité du pavage en regardant ce qu'il se passe dans le coin en haut à gauche : si la case tout en haut est pavée, alors la case juste en-dessous est elle aussi recouverte par le même carreau de carrelage, ce qui laisse la case la plus à gauche complètement isolée et donc impossible à paver.

Si l'on souhaite raccourcir cette activité, il est intéressant de garder cette dernière question et sauter plutôt celle des cuisines ou du séjour, parce que l'on y découvre que les conditions nécessaires trouvées précédemment ne sont pas suffisantes, alors qu'elles l'étaient ; cela pourrait laisser croire à tort que c'est vrai dans le cas général.

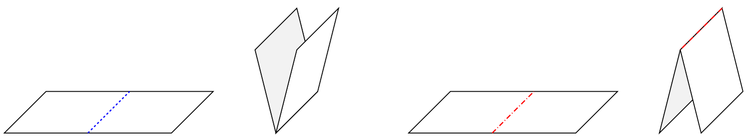
C'est vite plié ! (année 2017, collège-lycée, grand public)

Énoncé

Vous ouvrez un plan et vous voulez ensuite le replier. Nous allons chercher un moyen d'y parvenir du premier coup, sans tâtonner...

Le problème du dépliage

Un modèle d'origami indique où faire les plis sur sa feuille de papier et dans quel ordre. Un trait marquant l'endroit d'un pli peut être plié de deux façons, que l'on appelle « pli vallée » et « pli montagne » :



Pli vallée Pli montagne

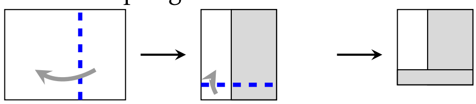
Nous marquons avec le symbole - - - - - en bleu les plis vallée, et avec le symbole - · - · - · en rouge les plis montagne.

1. **Regardez les trois notices pour réaliser des pliages. Votre but : essayer de deviner où seront les plis marqués sur la feuille une fois entièrement dépliée ! Dessinez-les en bleu (pour les plis vallée) et rouge (pour les plis montagne).**

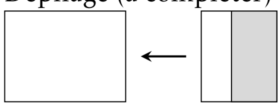
Sur les schémas, la feuille présentée est blanche au recto, grise au verso.

(a) Premier origami

Notice de pliage :

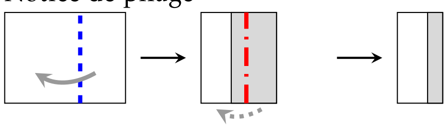


Dépliage (à compléter) :

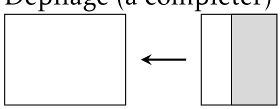


(b) Deuxième origami

Notice de pliage

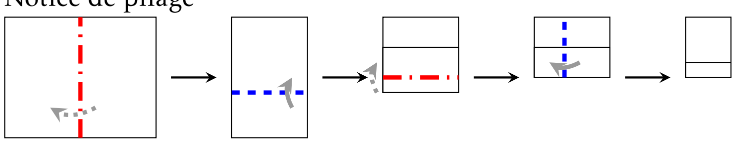


Dépliage (à compléter) :

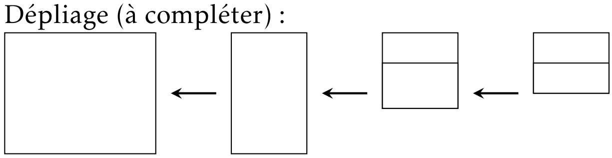


(c) Troisième origami, plus difficile !

Notice de pliage



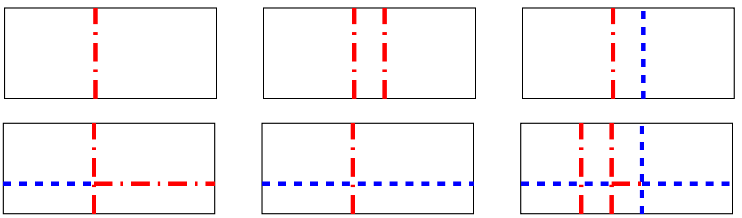
Dépliage (à compléter) :



Le problème du pliage

Voici le problème que nous nous posons maintenant : on a des marques de plis sur notre carte routière. Peut-on toujours la replier en les respectant ? Y a-t-il une méthode pour savoir dans quel ordre faire les plis ?

2. **Parmi les pliages suivants, lesquels sont réalisables et lesquels ne le sont pas ?**



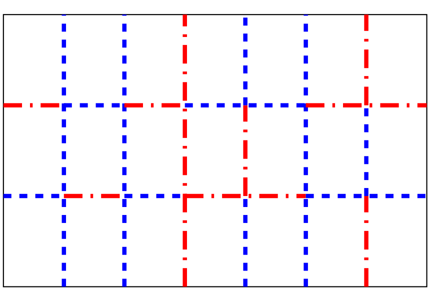
3. **Le premier pli effectué a toujours une caractéristique particulière, laquelle ?**

4. **Peut-il aussi y avoir d'autres plis monochromes dans la même direction (horizontale/verticale) que ce premier pli ? Dans l'autre direction ?**

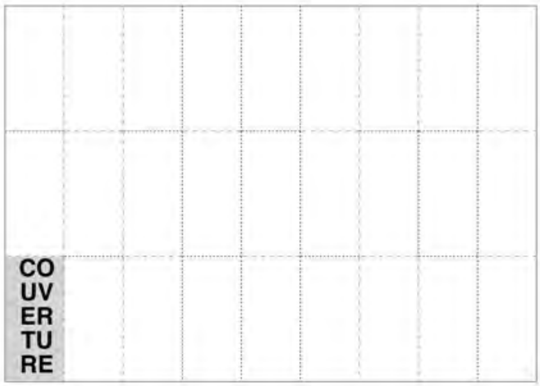
5. **Pouvez-vous expliquer pourquoi l'on doit nécessairement plier dès le début tous les plis monochromes ?**

6. **À quelle condition peut-on plier un pli monochrome ?**

7. **En déduire un algorithme pour replier une carte, et l'essayer pour replier la carte suivante, ou une des autres fournies :**



8. **La dernière carte a en plus une couverture, qui doit se retrouver sur le dessus à la fin, quand elle est repliée. Arrivez-vous à la replier correctement ?**



Solution et analyse

Matériel fourni : différents modèles de « cartes routières », c'est-à-dire de canevas à plis orthogonaux, à essayer de replier. Les plis sont marqués de chaque côté de la feuille (vallée d'un côté, montagne de l'autre et réciproquement), pour être visibles à chaque étape du pliage.
Notions abordées : symétries, mise en place d'un algorithme, raisonnement.

Quelques précisions sur les règles autorisées pour le pliage :

— on ne déplie pas des plis déjà pliés,

— à chaque nouveau pli, on plie l'intégralité du pliage précédent (on ne soulève pas juste une épaisseur de feuille),

— on plie à plat.

Le problème du dépliage

1. Encourager quand c'est possible à essayer de faire l'exercice en imaginant le pliage dans sa tête. Si c'est trop difficile (et pour les plus jeunes), réaliser vraiment les pliages avec une feuille de brouillon et voir ce qui se passe quand on les déplie.

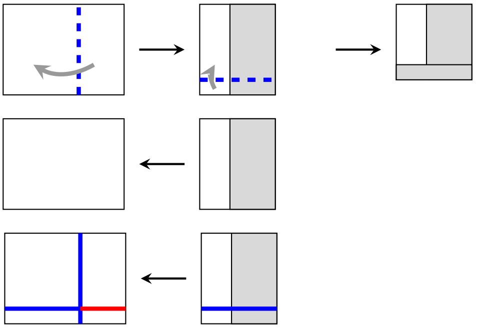
Souvent, après quelques pliages effectués et les marques de plis simplement recopiées, les élèves comprennent mieux comment savoir (sans faire le pliage) où les marques apparaîtront.

(a) Premier origami

Notice de pliage :

Dépliage (à compléter) :

Réponse :

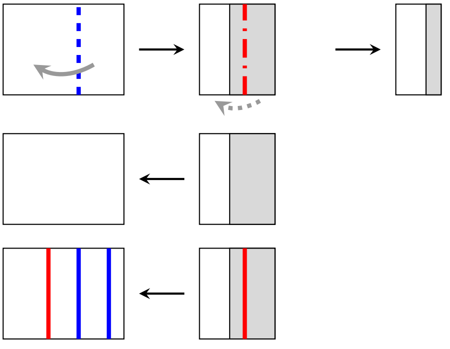


(b) Deuxième origami

Notice de pliage :

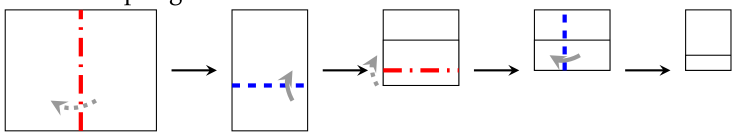
Dépliage (à compléter) :

Réponse :

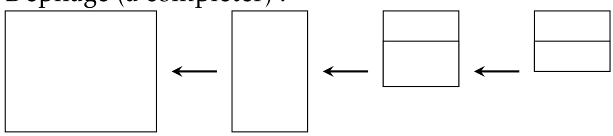


(c) Troisième origami, plus difficile !

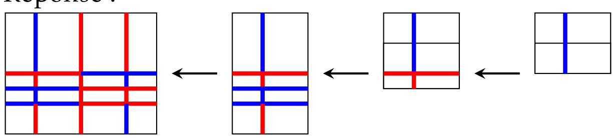
Notice de pliage



Dépliage (à compléter) :



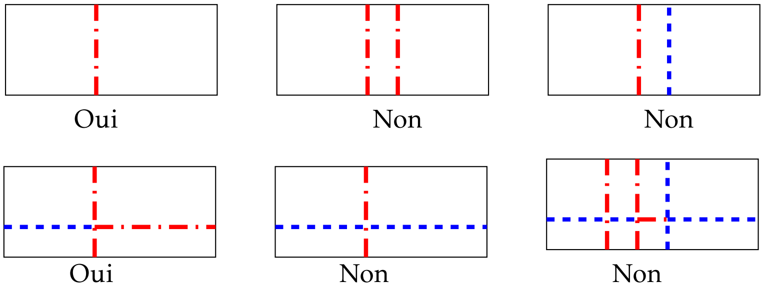
Réponse :



Il faut comprendre que chaque nouveau pli effectué donnera lieu à un pli « miroir » par rapport à chacun des plis déjà faits précédemment (où « miroir » signifie symétrique avec changement de couleur).

Le problème du pliage

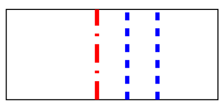
2.



Il est important de comprendre cette étape avant de passer à la suite, par exemple que le canevas au milieu de la première ligne n'est pas réalisable : on n'est pas autorisé à ouvrir un pli déjà fait avant d'en faire un nouveau et on ne peut pas non plus plier la feuille à 90° seulement.

3. Le premier pli effectué est toujours monochrome.

4. Il peut aussi y avoir d'autres plis monochromes dans la même direction (horizontale/verticale) que le premier pli, par exemple :



Par contre, il ne peut pas y en avoir dans les deux directions : une fois qu'on a effectué un pli dans le sens vertical, un pli fait par la suite horizontalement aura une partie vallée et une partie montagne. De même, si on commence par faire un pli horizontal, les plis faits ensuite verticalement ne peuvent être monochromes.

5. On doit nécessairement plier dès le début tous les plis monochromes : dès qu'on fait un pli orthogonalement à un pli déjà fait, il donne lieu à au moins une marque vallée et une marque montagne, de part et d'autre du pli précédent.

6. On peut plier un pli monochrome si et seulement si c'est un axe de symétrie « miroir » pour les autres plis sur la feuilles.

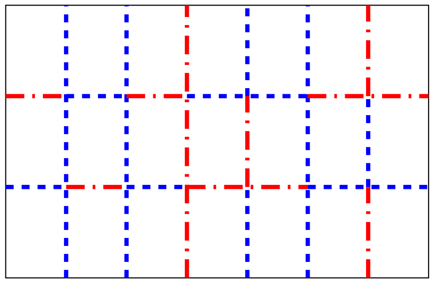
7. L'algorithme est le suivant.

Étape 1. Repérer les plis monochromes. (Ils sont tous dans le même sens)

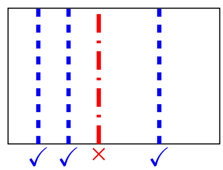
Étape 2. Plier les plis monochromes qui sont axes de symétrie « miroir ». (L'ordre ne compte pas : quand on en plie un, on peut imaginer que le plus petit côté plié est ensuite collé à l'autre ; on peut l'oublier pour la suite.) S'il reste des plis qui ne sont pas axes de symétrie, donc pas pliables, c'est que le pliage n'était pas possible !

Étape 3. On recommence avec les nouveaux plis monochromes (dans l'autre direction), etc.

Sur l'exemple suivant cela donne :

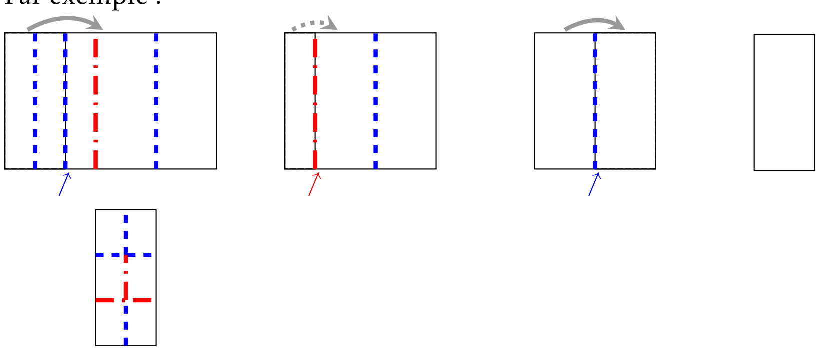


Les plis monochromes sont :

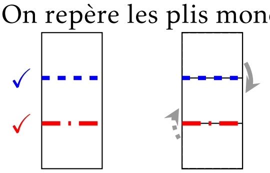


Ceux marqués ✓ sont axes de « symétrie », celui marqué × ne l'est pas. On peut commencer par plier ceux marqués d'un ✓ (dans l'ordre que l'on veut). On peut plier le rouge dès qu'on a plié le deuxième pli bleu en partant de la gauche.

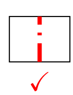
Par exemple :



On repère les plis monochromes, on les plie :



Il ne reste plus qu'à plier le dernier pli :



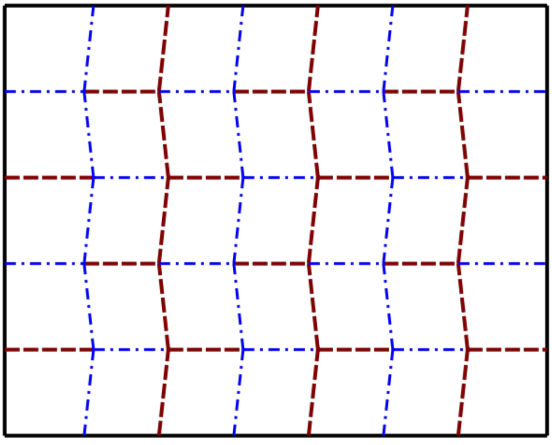
Remarque : plusieurs façons différentes de replier la carte sont parfois possibles (selon l'ordre dans lequel on plie les différents plis monochromes). Avoir le choix gêne parfois certains.

8. Cas de la couverture qui doit se retrouver sur le dessus à la fin du pliage : il ne faut jamais la faire disparaître à l'intérieur du pliage (comme on ne défait pas de plis déjà faits, elle ne pourrait plus réapparaître). Pour cela, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on plie les plis monochromes à l'étape 2 de l'algorithme (et faire attention aux plis vallée !).

Commentaires

— L'algorithme décrit permet de savoir si un canevas est pliable ou non, ainsi que de le plier dans le cas favorable. Dans des origamis plats plus complexes (avec des plis non nécessairement orthogonaux), on peut donner des conditions locales nécessaires et suffisantes pour qu'un canevas soit pliable, mais le problème global est beaucoup plus délicat (il est NP difficile).

— Il existe une très jolie façon de replier une carte routière (les plis ne sont pas orthogonaux), qui permet que la carte se replie automatiquement quand on saisit deux coins opposés ! On l'appelle pliage de Miura (ou miura-ori), du nom de son inventeur Koryo Miura, un astrophysicien japonais.



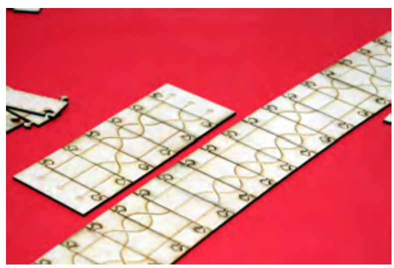
Ce pliage a des applications pratiques : en médecine (stents), pour les panneaux solaires de satellites spatiaux…

Des maths en des tresses (année 2017, post-bac)

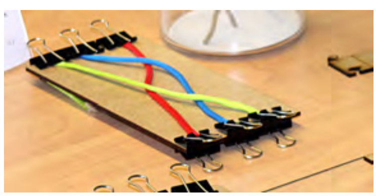
Énoncé

En tressant des brins de laine, on peut faire des bracelets. Nous vous invitons à découvrir comment les mathématiciens, en jouant avec cette idée de brins enlacés, ont inventé le *groupe des tresses*...

Nous allons jouer avec des cartes représentant des sortes de tresses. Sur chaque carte, on a dessiné trois brins, dont deux qui se croisent. En plaçant plusieurs cartes les unes sous les autres, on obtient des dessins de tresses de plus en plus compliquées. Ces dessins modélisent une tresse constituée de trois cordelettes souples qui sont attachées à leurs extrémités.

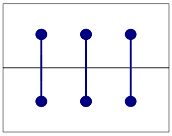


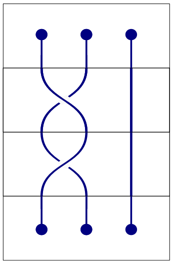
1. **Observez la tresse en cordelettes et représentez-la avec des cartes, en essayant d'utiliser le moins de cartes possible.**



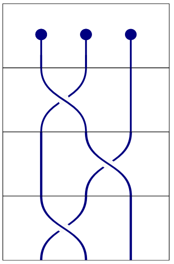
Vous avez le droit de déplacer les brins si ça vous arrange (sans détacher les extrémités). **Pouvez-vous trouver une deuxième succession de cartes qui représente la même tresse ?**

2. La tresse la moins intéressante est celle qui est dénouée. On peut la représenter de plusieurs façons, par exemple ainsi :





À la question précédente vous avez représenté une tresse qui, elle, est nouée. **Sauriez-vous la dénouer en lui ajoutant de nouvelles cartes ?**

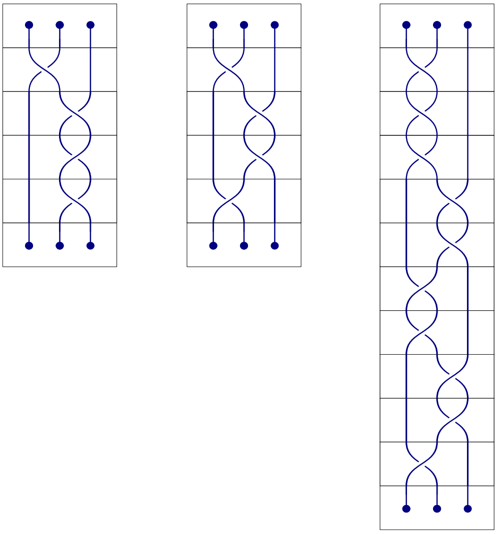


?

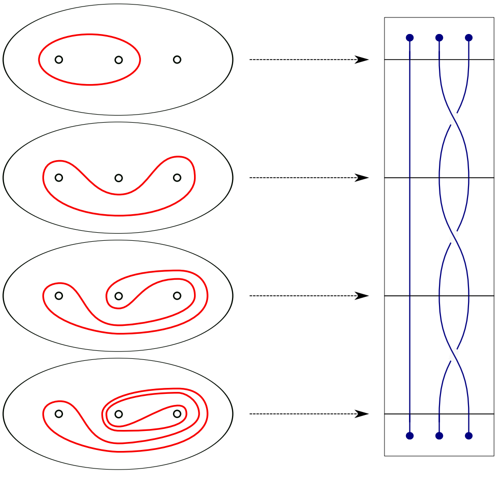
Sauriez-vous dénouer n'importe quelle tresse en lui ajoutant de nouvelles cartes ?

Lorsqu'on place deux tresses l'une sous l'autre, on obtient une nouvelle tresse ; cette opération s'appelle « multiplier des tresses ». N'importe quelle tresse peut être dénouée en ajoutant des cartes, autrement dit en la « multipliant » par une autre tresse qu'on appelle son inverse (ou son miroir). Les mathématiciens résument ces propriétés en disant que les tresses forment un *groupe*.

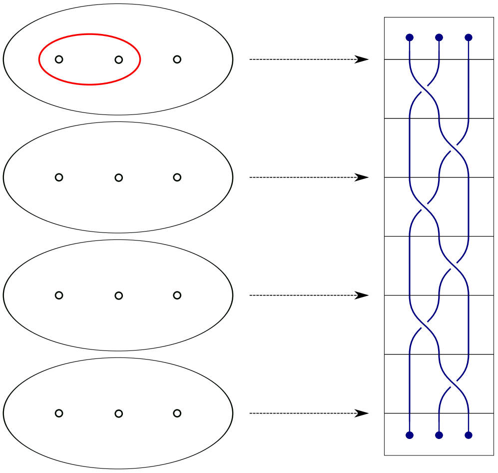
3. Un problème fondamental consiste à savoir reconnaître une tresse dénouée.
Les tresses suivantes sont-elles nouées ou dénouées ? Pouvez-vous donner un argument convaincant ?

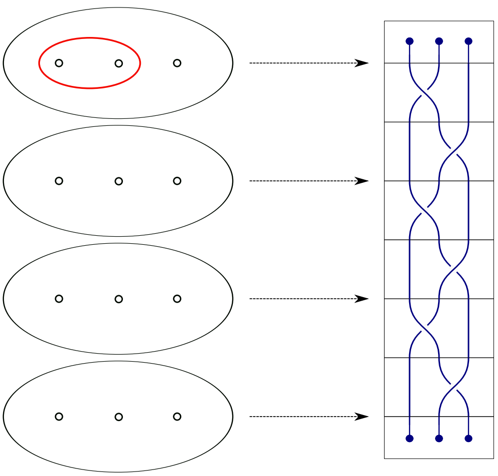


4. Parmi les tresses nouées, certaines sont nouées de façon particulièrement compliquée... Pour mesurer la complexité d'une tresse, on peut jouer au jeu suivant. On répète la même tresse plusieurs fois de suite, on place un élastique autour de deux des brins près des extrémités du haut, et on le fait glisser le long de la tresse. Voici un exemple avec trois fois la même carte : à gauche, on a représenté l'élastique vu du dessus, avec une coupe des trois brins.



Dans chacun des deux exemples qui suivent on a représenté trois fois la même tresse de deux cartes. **Pouvez-vous dessiner les déformations successives de l'élastique ?**



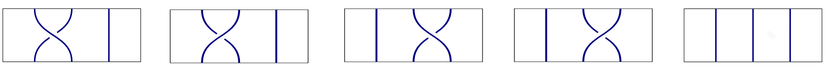


Dans ce dernier exemple, on constate que la longueur de l'élastique augmente de façon exponentielle lorsqu'on le fait glisser le long de copies successives de la tresse. En fait, avec cette tresse, c'est ce qui arrive à tout élastique qui est placé autour de deux de ses brins. Ce phénomène caractérise les tresses dites « pseudo-Anosov », ce sont celles que les mathématiciens considèrent comme les plus compliquées.

Comme application, on peut penser aux petits batteurs électriques que vous avez (peut-être) chez vous. Si les deux fouets de votre batteur tournaient dans le même sens, alors ils mélangeraient votre mousse au chocolat comme dans le premier exemple ! Heureusement, vous pouvez observer qu'ils tournent dans le sens opposé. La photo ci-contre montre des bonbons chinois faits sur le même modèle !

5. Une question courante en théorie des groupes est de savoir si deux éléments d'un groupe *commutent* : si on multiplie le premier avec le deuxième, est-ce qu'on obtient le même résultat que si l'on multiplie le deuxième avec le premier (*attention à l'ordre !*).
Essayez avec les cinq cartes qui vous sont proposées : lesquelles commutent entre elles ?

a A b B e

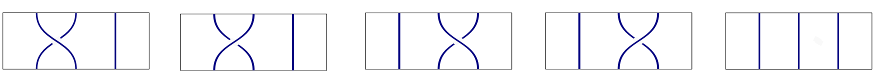


6. La tresse dénouée commute évidemment avec tout le monde. **Pouvez-vous trouver une autre tresse avec cette propriété ?** (*Indice : pensez à ce qu'il se passe si on fait faire un « tour complet » aux cordelettes attachées à la planche...*).

Solution et analyse

Pour les notations des cartes tresses, on utilise celles introduites à la fin de la fiche de questions :

a A b B e



1. La tresse en cordelette est *aba*. Cette tresse peu aussi s'écrire par exemple *aBbbaAa*, pour avoir en tête un exemple un peu idiot. Avec le même nombre de cartes, on peut l'écrire *bab* (c'est la célèbre « relation de tresse », *aba* = *bab*). C'est assez facile à voir en utilisant la tresse en cordelettes : on peut tirer un peu sur les brins pour que tel croisement de brins ait lieu avant ou après tel autre.

2. La tresse présentée est aba. Il y a deux solutions « optimales », c'est-à-dire deux inverses avec le nombre minimal de cartes :

— ABA est un inverse. Cela répond aussi à la question suivante : la recette c'est de prendre la tresse donnée et de mettre à la suite tous les inverses de chacune des cartes qui apparaissent, dans l'ordre inverse. Cela revient à multiplier la tresse par son image dans un miroir.

— BAB est aussi un inverse, voir la relation de tresse $aba = bab$ donnée précédemment.

3.

— La première tresse est nouée : elle permute les points de départ et d'arrivée.

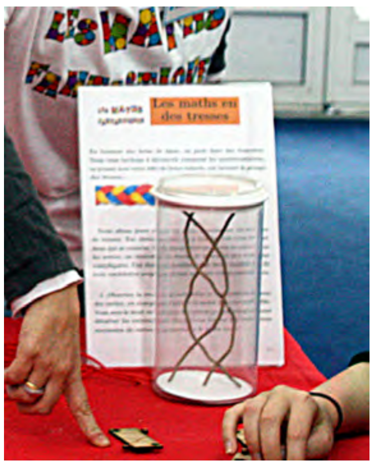
— La deuxième est également nouée, mais l'argument précédent n'est plus valable. Pour prouver que cette tresse est nouée, on peut remarquer que le deuxième brin n'est enlacé avec aucun des deux autres, mais les brins 1 et 3 sont enlacés. Formellement, la tresse s'écrit ab^2A, c'est un élément conjugué à b^2, donc il « suffit » de voir que b^2 n'est pas trivial. Encore plus formellement, on peut définir un morphisme du groupe des tresses vers $\mathbb{Z}$ en associant à un mot en a, b, a^{-1}, b^{-1} le nombre total algébrique de lettres (la somme des exposants). Cette formule est bien définie sur le groupe des tresses, parce que les mots qui sont identifiés (comme aba et bab) ont le même nombre algébrique de lettres (ici 3). Ce morphisme vaut 2 pour la tresse ab^2A, ce qui montre qu'elle n'est pas triviale. L'interprétation géométrique de ce morphisme est qu'il compte le nombre d'enlacements total des paires de brins (l'unité étant le demi-tour). La dernière tresse est dans le noyau de ce morphisme, ce qui rend le problème plus ardu.

— La troisième tresse est aussi nouée, mais ce n'est pas facile à montrer. Et c'est bien la seule réponse qui est attendue des participants : c'est une question difficile ! Pour se convaincre que la tresse est effectivement nouée, on pourrait réaliser la tresse avec des vrais brins (il y a des plaquettes avec des brins à disposition sur le stand) et essayer de passer les doigts entre les brins comme pour les peigner. Néanmoins pour une tresse assez longue, on se rend compte que si on n'y arrive pas c'est peut être juste parce que les brins se sont un peu emmêlés les uns aux autres...

  Pour satisfaire votre curiosité, voici quand même deux pistes de justifications. Un moyen de prouver à moitié que cette tresse est nouée est de remarquer que cette tresse est $a^3b^2A^2B^2A$ conjuguée à $a^2b^2A^2B^2$, qui est le commutateur de $[a^2, b^2]$. La tresse est donc triviale ssi a^2 et b^2 commutent. Si c'était le cas, on aurait un sous-groupe abélien d'indice fini du groupe de tresses et cela n'existe pas, mais ça n'est pas évident !

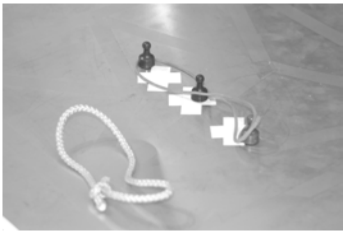
Un autre moyen est d'admettre la propriété dynamique suivante : une tresse est triviale si elle agit trivialement sur « tous les élastiques » (en fait il y a équivalence). Ce qu'on veut dire par là, c'est que si on passe un élastique, disons autour des deux premiers brins, et qu'on le « suit » le long de la tresse (voir la question 4 des versions orange et bleue du stand), il doit ressortir comme il était si la tresse est triviale. On vous laisse vérifier ici que ce n'est pas le cas !

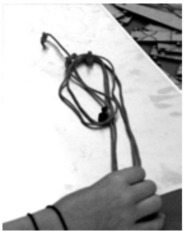
4. Dans cette question, il faut avoir une vision « verticale » de la tresse : une tresse dans un bocal était présente sur le stand pour cela et l'on pouvait sortir la tresse de son bocal pour montrer aux participants avec un bout de ficelle à quel endroit l'élastique serait positionné en haut de la tresse.



Il n'est pas toujours facile d'arriver à se représenter de tête la déformation de l'élastique. On pourra suggérer aux participants de dessiner l'élastique après mouvement élémentaire de la carte si ça les aide, et/ou de représenter directement l'élastique sur le dessin de la tresse à droite de la feuille de réponse.

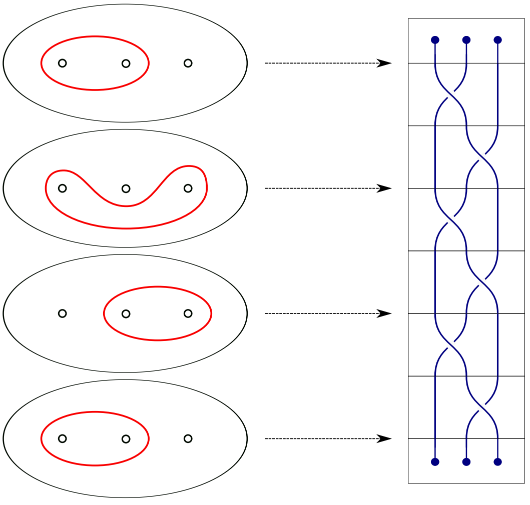
Il est également possible de faire la manipulation suivante. Des plaques métalliques étaient fournies sur le stand, avec des aimants et des ficelles fermées, de deux longueurs différentes. Les aimants représentent les brins vus du dessus. Trois croix apparaissent sur chaque plaque métallique, correspondant aux positions canoniques des trois brins vus du dessus. On peut « tresser » ces brins en déplaçant les aimants à la surface de la plaque (sans les soulever).



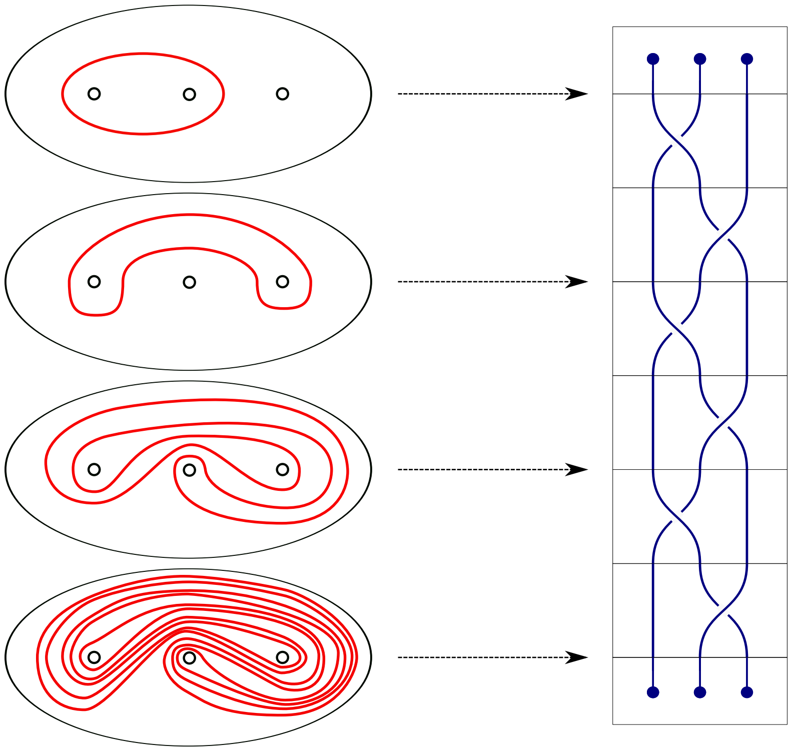


Les ficelles représentent les élastiques. Pour la première tresse présentée, utiliser les petites ficelles de petite longueur suffit. On constate que le mouvement de tressage qu'on effectue sur les brins déforme très peu l'« élastique » que représente la ficelle. Pour le deuxième tressage, il est vite évident quand on fait un essai que la ficelle doit être plus longue, sinon le mouvement est bloqué. Prendre alors une très longue ficelle, et commencer à tresser. On peut s'arrêter après chaque mouvement de tressage pour répartir la longueur de la ficelle plus uniformément autour des aimants, et dessiner sur sa feuille la position de l'« élastique ». Il faut toute la longueur de la ficelle pour arriver au bout des 3 itérations de la tresse. Peu importe si les participants n'obtiennent pas le dessin précis représentant la position de l'élastique au bout de ces 3 itérations, le but est qu'ils soient convaincus que l'élastique s'est alors considérablement allongé.

Voilà ce qu'on obtient pour la première tresse.



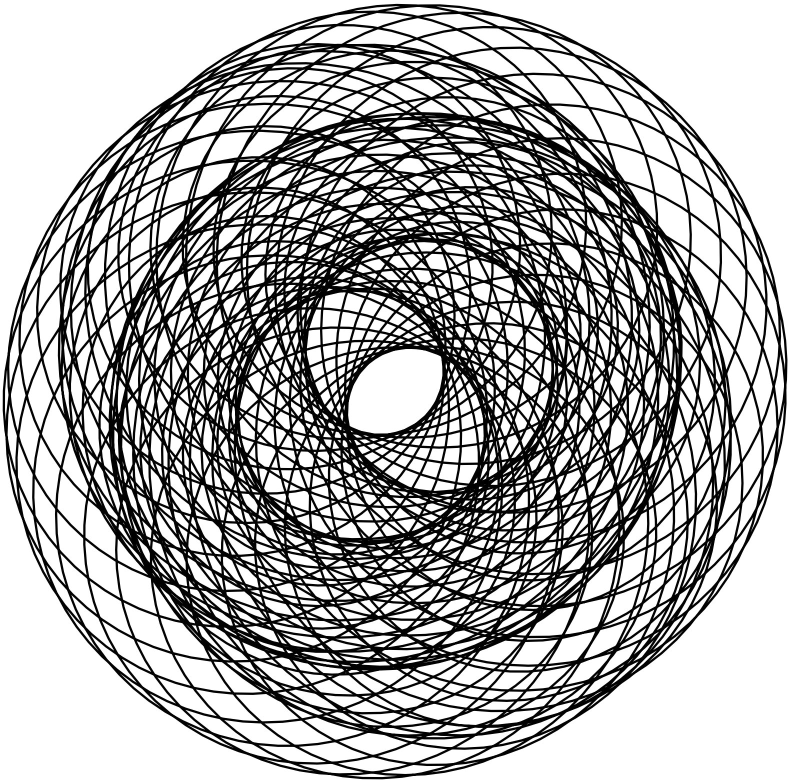
Et pour la deuxième, c'est un peu plus compliqué...



5. La tresse triviale e commute avec tout le monde. Sinon, parmi les 4 autres cartes, chacune commute avec elle-même et avec son inverse, et c'est tout ! Pour montrer par exemple que $ab \neq ba$, on peut se servir du fait qu'elles n'induisent pas la même permutation sur leurs extrémités.

6. Pour développer l'indication, imaginer qu'on prend la tresse triviale en cordelette, et qu'on fait faire une rotation de 360 degrés au plan où sont fixées les extrémités inférieures. La tresse obtenue est alors non triviale (les brins sont enlacés), c'est la tresse $ababab$. Pourquoi commute-t-elle avec tout le monde ? On peut le vérifier à la main à coup de « relation de tresse » $aba = bab$, mais c'est fastidieux. On peut aussi s'imaginer n'importe quelle tresse placée au-dessus, qu'on ferait glisser le long des brins ; elle finirait en dessous sans avoir changé !

Remarque : c'est essentiellement la seule tresse à avoir cette propriété, dans le sens où le centre du groupe de tresse est (librement) engendré par cette dernière, mais c'est autrement plus difficile...



$$\begin{cases} x(t) &= 48\cos(-16t+31)+26\cos(17t+141)-90\cos(-83t+33) \\ y(t) &= 48\sin(-16t+31)+26\sin(17t+141)-90\sin(-83t+33) \end{cases}$$

Rallye Mathématique Transalpin

Présentation

L'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) existe depuis 1996 et organise depuis lors chaque année les épreuves du rallye éponyme « Rallye Mathématique Transalpin » (RMT). Créé au départ par les animateurs historiques François Jaquet et Lucia Grugnetti, avec des sections issues de deux pays : Suisse et Italie, (d'où son appellation. . .), vite rejoints en 1997 par une section en France. L'ARMT regroupe maintenant 20 sections de 5 pays (une en Belgique, une au Luxembourg, 3 en France, une en Suisse romande, 14 en Italie). Au total, lors de l'édition 2017 du RMT, ce sont 6 193 classes, soit plus de 120 000 élèves, qui ont participé aux épreuves.

Ce que propose le RMT

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) propose une confrontation entre classes, des niveaux 3 (CE2) à 10 (seconde) de la scolarité obligatoire (élèves de 8 à 15 ans) en deux épreuves de janvier à mars plus une finale en mai ou juin, regroupant les classes d'une même région ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves. Ces épreuves consistent en une résolution de problèmes ouverts communs à toutes les classes, lesquelles doivent donner une seule réponse par problème. Chaque épreuve est composée de 5 à 7 problèmes par niveau, à résoudre en 50 minutes. Les problèmes sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle sorte que chaque élève puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul élève, aussi rapide soit-il. Il n'y a pas que « réponse juste » qui compte, les copies sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies.

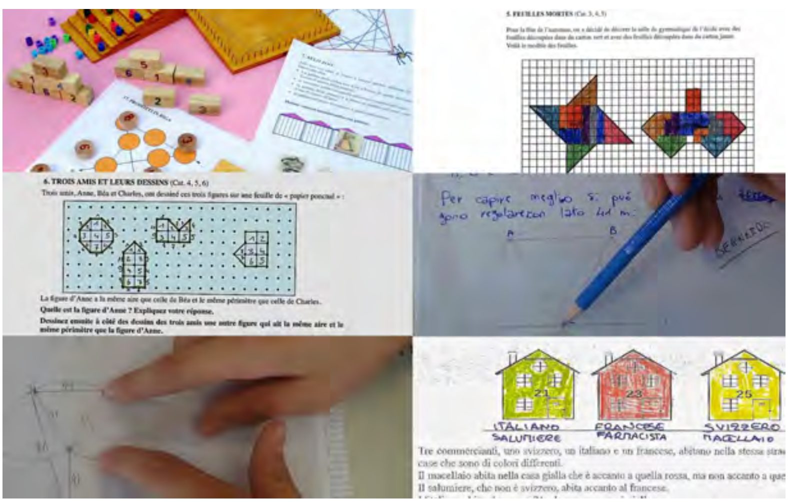
Les problèmes sont originaux et leur préparation se fait en coopération entre les différentes sections. Les traductions (en français, italien, allemand) sont rigoureusement comparées. La correction des copies est organisée localement avec l'aide de professeurs bénévoles, selon des critères déterminés lors de l'élaboration des problèmes, en fonction d'une analyse *a priori* sur la tâche demandée aux élèves. Des analyses *a posteriori* sont menées par des équipes de recherches en didactique.

La « philosophie » du RMT

Pour en savoir plus sur les objectifs du RMT concernant l'enseignement des mathématiques en général et la recherche en didactique plus particulièrement, on peut se reporter directement au site international de l'association [1] ; de même sur les conceptions qui sous-tendent « l'entreprise collaborative RMT » [2].

Sur ce même site, sont également disponibles les actes des Rencontres Internationales de l'ARMT organisées chaque année depuis plus de 20 ans. En effet, ces journées d'études internationales permettent aux animateurs des différentes sections de se rencontrer pour organiser l'élaboration des problèmes, conduire des analyses *a priori* ou *a posteriori*, déterminer les orientations du RMT et les exploitations didactiques de ses problèmes. L'ARMT bénéficie d'un appui scientifique, plusieurs animateurs appartenant à des institutions de recherche en didactique des mathématiques dans leurs pays respectifs.

Les exemples de problèmes proposés ci-après sont tirés de la première épreuve du 23e RMT (2015). Ils sont issus de la Banque des Problèmes de l'ARMT, base de données collaborative comportant maintenant environ 1 200 fiches, accessibles en ligne par mots-clés, domaines, concepts... On peut voir sa présentation et télécharger des problèmes sur :
www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-fr.html .



1. www.armtint.org/comite-de-gestion/association-rallye-mathematique-transalpin
2. www.armtint.org/presentation-du-rallye/conceptions-pedagogique-et-didactique

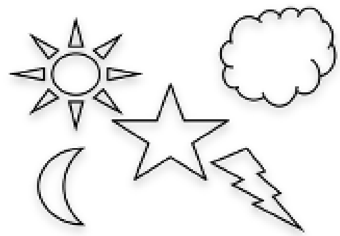
Les cadres (Rallye : 23.I.05 ; catégories : 3, 4, 5)

Résumé

Reconstituer un alignement de cinq objets selon des informations de voisinage et de positions relatives.

Énoncé

Clara a accroché cinq cadres l'un à côté de l'autre sur le mur au-dessus de son lit.
Dans l'un il y a un soleil, dans un autre un nuage, dans un autre une lune, dans un autre un éclair et dans un autre encore, une étoile.
Lorsqu'elle regarde les cinq cadres, Clara voit que :



- la lune n'est pas à côté de l'étoile ni à côté du nuage ;
- il y a deux cadres entre celui du soleil et celui de l'étoile ;
- le nuage est à côté de l'étoile, à droite ;
- l'éclair est à côté de la lune.

Dessinez les images dans les cadres dans le bon ordre (ou écrivez le nom des images dans leur cadre).
Expliquez comment vous avez trouvé leur position.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que les cinq figures données doivent être disposées dans les cinq cadres en respectant une liste de contraintes.
- Lire les contraintes et se rendre compte qu'aucune d'entre elles, seule, ne permet de trouver la position d'une figure et qu'il sera nécessaire de tenir compte de plusieurs d'entre elles simultanément.
- Organiser la recherche, par essais et vérifications ou par hypothèses

et éliminations successives.

— Par exemple, à partir de la deuxième consigne, il y a quatre configurations possibles du soleil et de l'étoile : (soleil, ..., ..., étoile, ...) ou (étoile, ..., ..., soleil, ...) ou (..., soleil, ..., ..., étoile) ou (..., étoile, ..., ..., soleil).
— La troisième consigne selon laquelle le nuage est à droite de l'étoile réduit les configurations possibles à trois : (soleil, ..., ..., étoile, nuage) ou (étoile, nuage , ..., soleil, ...) ou (..., étoile, nuage, ..., soleil).
— La première consigne sur la position de la lune exclut une autre configuration, il n'en reste que deux : (soleil, ... , ... , étoile, nuage) ou (étoile, nuage , ... , soleil, ...).
— La quatrième consigne sur l'éclair et la lune conduit à l'unique possibilité : (soleil, lune, éclair, étoile, nuage).

Mots-clés

Logique, voisinage, gauche, droite, position, positions relatives, déduction, hypothèse.

Résultats

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. de classes**	**Moy.**
Cat. 3	109 (23%)	28 (6%)	84 (18%)	145 (31%)	106 (22%)	472	2.24
Cat. 4	71 (12%)	18 (3%)	121 (20%)	206 (34%)	185 (31%)	601	2.69
Cat. 5	37 (6%)	4 (1%)	121 (21%)	234 (41%)	178 (31%)	574	2.89
Total	217 (13%)	50 (3%)	326 (20%)	585 (36%)	469 (28%)	1 647	2.63

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

— 4 points : la solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec une explication dans laquelle figurent au moins deux relations logiques du genre « l'étoile ne peut pas être à gauche parce que ... », « puisqu'il y a deux cadres entre le soleil et l'étoile, ceux-ci ne peuvent pas être au milieu », OU en donnant l'ordre d'utilisation des indices OU solution correcte avec mise en évidence de la vérification des consignes.

- 3 points : la solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec des explications qui se limitent à des commentaires généraux du genre « on a essayé beaucoup de possibilités », « on a suivi les consignes »...
- 2 points : la solution « symétrique » (nuage, étoile, éclair, lune, soleil) due à la confusion gauche/droite OU dessin correct sans explications.
- 1 point : réponse avec une interversion de deux cadres.
- 0 point : incompréhension du problème.

Le problème est « bien réussi » par près des deux tiers des groupes.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Dans cette variante d'un ancien problème **À la ménagerie** [3], la consigne *le nuage est à côté de l'étoile, à droite*, a sensiblement facilité la tâche de résolution. La consigne d'origine correspondrait à *le nuage est à droite de l'étoile, ils sont l'un à côté de l'autre*.

En interprétant la nouvelle consigne *comme le nuage est à droite*, la solution est immédiate : le nuage à droite, puis l'étoile, deux cadres et le soleil à gauche, etc.

Pour aller plus loin

La seule réponse correcte, c'est-à-dire la position des animaux dans leur cage ou un dessin ou une liste ordonnée, ne permet évidemment pas de savoir comment l'élève a procédé, ni s'il a trouvé la solution au hasard. Il est donc nécessaire d'aller plus loin et de demander une explication. Pour de jeunes élèves, il est très difficile d'expliquer par écrit ce qu'ils ont fait pour trouver. Ils se contentent en général de recopier les consignes, ce qui leur fournit une vérification. C'est lors d'un débat que peuvent apparaître les différentes phases des raisonnements suivis. Et le débat doit être la plupart du temps stimulé par des questions de l'enseignant, du genre : « Quel est l'animal que vous avez pu placer en premier ? », « Pourquoi celui-ci ne pourrait-il pas être là ? », « Êtes-vous certains qu'il n'y a qu'une seule solution ? », etc.

Comme développements, il existe de nombreux problèmes analogues, de disposition, de sériations dans l'espace et dans le temps qui permettent aux élèves de se familiariser avec les inventaires exhaustifs et les éliminations successives.

Ces problèmes ne sont toutefois pas toujours faciles à créer et nécessitent un patient travail d'analyse préalable pour le choix des contraintes, afin qu'elles autorisent au moins une solution et qu'elles ne soient pas redondantes (qu'elles soient toutes nécessaires).

3. www.projet-ermitage.org/ARMT/result-fiche2.php?fiche=td39-fr&flag=0&lang-req=fr

Il y a aussi des difficultés, dans les problèmes où la gauche et la droite interviennent, liées aux positions relatives de l'enfant qui résout le problème et des objets ou êtres vivants à disposer. Dans l'exemple de **À la ménagerie** la phrase « Vous êtes devant cinq cages, alignées les unes à côté des autres » est essentielle pour définir la droite et la gauche, du point de vue de l'observateur et non de celui des animaux qui le regardent.

Le ruban (Rallyes : 23.I.08 ; catégories : 5, 6)

Résumé

Décomposer 140 en une somme de quatre termes dont deux sont égaux, un troisième vaut 15 de plus que les premiers et le quatrième 10 de plus que le troisième.

Énoncé

Anne-Lise coupe un ruban de 140 cm de longueur en quatres parties pour emballer des cadeaux.

— Les première et deuxième parties sont de même longueur.

— La troisième partie mesure 15 cm de plus que la deuxième.

— La quatrième partie mesure 10 cm de plus que la troisième.

Quelle est la longueur de chaque partie du ruban découpé ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

— Trier les informations de l'énoncé et retenir celles qui seront utiles pour répondre à la question : les relations entre les quatre parties et la longueur totale.

— Se rendre compte qu'il s'agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (140), dont les quatre termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d'entre eux.

En travaillant par essais, les vérifications conduisent rapidement à une organisation et à la découverte de la solution : choix d'une valeur pour les deux petits, addition de 10 et de 15 pour les suivants, calcul de la somme et comparaison avec 140.

En tenant compte des augmentations de 15 et 25 (ou 15 et $15+10$ ou 40), une méthode déductive permet de déterminer les nombres : par soustraction de 40 à partir de 140, la somme des quatre petits nombres est 100 puis, chacun d'eux est 25 ; et on détermine ainsi les quatre longueurs : 25, 25, 40 et 50, en cm.

Mots-clés

Nombres naturels, addition, somme, double, décomposition.

Résultats

Points attribués, sur 1 621 classes de 21 sections :

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. classes**	**Moy.**
Cat. 5	110 (19%)	56 (10%)	92 (16%)	166 (29%)	150 (26%)	574	2.33
Cat. 6	201 (19%)	144 (14%)	129 (12%)	226 (22%)	347 (33%)	1 047	2.36
Total	311 (19%)	200 (12%)	221 (14%)	392 (24%)	497 (31%)	1 621	2.35

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

- 4 points : réponse correcte et complète (25 cm, 25 cm, 40 cm, 50 cm) avec explications précises et complètes mentionnant explicitement toutes les données.
- 3 points : réponse correcte et complète mais avec explications peu claires ou insuffisamment explicites, ou seulement une vérification.
- 2 points : réponse correcte sans explications OU une seule erreur de calcul, avec explications et procédure cohérente.
- 1 point : début de recherche mais compréhension erronée des conditions (par exemple attribution de 15 de plus à la troisième partie et 10 de plus que les premières pour la quatrième, ce qui conduirait à 28,75 ; 28,75 ; 43,75 ; 38,75).
- 0 point : incompréhension du problème.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Parmi les réponses correctes (environ les deux tiers, auxquelles ont été attribués de 2 à 4 points) la grande majorité fait état d'une procédure par essais, en général deux ou trois. Parfois les élèves n'ont écrit qu'une vérification à partir de 25 pour les deux petits nombres.

La démarche déductive consistant à retirer les augmentations de 15 et 25 de la longueur totale puis à diviser par 4 apparaît très rarement (dans deux copies sur les 100 examinées, de la section de Suisse romande). La division de 140 par 4, qui donne 35 est plus fréquente (10% des copies). Deux cas se présentent alors.

Dans le premier, les élèves soustraient 10 de 35 et obtiennent 25 et constatent que « ça marche » ; ils semblent s'être rendu compte que le « 35 » est une « moyenne » et qu'il faut retrancher quelque chose pour déterminer la longueur des petites parties.

Dans le second, 35 est pris comme longueur des petites parties, les autres sont augmentées de 10 puis de 15, la somme donne 180, qui vaut 40 de plus que 180 et, après une division par 4 de l'excès de 40, les quatre parties sont réduites de 10.

Parmi les erreurs (environ 30 % des copies) la plus fréquente est d'additionner les deux augmentations de 10 et de 15, sans se rendre compte qu'il faudrait additionner 10 et $(10+15)$ et de retrancher cette somme de 140, pour obtenir 115. Le résultat est ensuite divisé par 2 et la réponse est (57,5 ; 57,5 ; 10 et 15) dont la somme est effectivement 140.

On relève de nombreux dessins du ruban ou de segments juxtaposés, qui ne peuvent constituer des soutiens à la démarche de résolution.

Pour aller plus loin

L'exploitation de ce problème en classe devrait conduire à une réflexion collective sur les deux types de procédures : les essais ou la démarche déductive.

Pour cette version du problème, les essais conduisent très facilement à la solution. 25, étant le quart de 100, est une première approximation très plausible puisque les quatre bandes de 25 donnent déjà 100 et qu'on s'approcha ainsi de 140 avec les augmentations. Ces essais sont donc une démarche plus facile et économique que la démarche déductive. Si on veut favoriser cette dernière, il faut agir sur la variable « longueur du ruban » en choisissant un nombre moins évident, conduisant par exemple à des nombres décimaux pour les longueurs des parties.

Si on choisit les mêmes augmentations et 250 cm pour la longueur du ruban…

Grille de nombres (Rallye : 23.I.13 ; catégories : 6, 7, 8, 9, 10)

Résumé

Découvrir les régularités d'une grille de nombres à partir d'un fragment qui en représente les cinq premières lignes et les 11 premières colonnes, se rendre compte éventuellement qu'il s'agit de la table de multiplication et compléter quatre autres fragments rectangulaires (photos) de six à douze cases.

Énoncé

En explorant un château abandonné, Zoé et ses amis ont trouvé le dessin d'une grille occupant entièrement un mur d'un ancien cachot.
L'humidité et les années ont effacé une grande partie des nombres écrits dans les cases de cette grille, mais ceux qui restent montrent que le prisonnier qui a dessiné la grille suivait des règles bien précises pour passer d'un nombre au suivant, dans chaque ligne et dans chaque colonne.
Zoé a pris deux photos des parties A et B du mur comme sur cette figure :

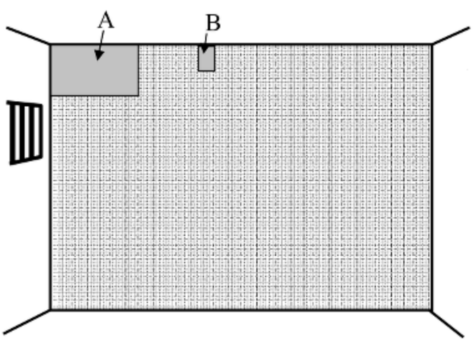


Photo A : le haut du mur à gauche, les cinq premières lignes et les onze premières colonnes

1	2	3			6				10	11
			8	10	12				20	22
3	6	9	12					27	30	33
		12	16	20			32	36	40	
	10			25	30	35	40			55

Photo B : 6 cases, avec 111 sur la 3e ligne

	111

Puis elle a encore pris trois autres photos, d'autres parties du mur :

Photo C

187	198
204	

Photo D

209				285

Photo E

110			
			192

Écrivez les nombres qui manquent dans les quatre photos B, C, D et E.
Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

— Constater d'après la photo A, incomplète, que chaque ligne et chaque colonne de la grille de nombres est constituée d'une suite « très régulière » de nombres.

— Compléter les cases vides par écrit (ou mentalement) pour mieux percevoir les régularités des suites et les liens entre cases, lignes et colonnes : reconnaître des suites de multiples, des « livrets », des progressions arithmétiques, leur ordre... pour éventuellement y reconnaître la table de multiplication et que chaque case contient le produit de deux nombres qui sont les numéros de sa ligne et de sa colonne.

— Aborder ensuite chaque photo incomplète en fonction des propriétés reconnues lors de l'examen de la photo A :

— Pour la photo B, l'indication que 111 se situe sur la troisième ligne signifie qu'il s'agit du troisième multiple de la 37^{e} colonne ($3 \times ? = 111$ ou $111 \div 3 = 37$) et que la colonne précédente est celle des multiples de 36.

— Pour la photo C, $198 - 187 = 11$ et $204 - 187 = 17$, déterminent la 11^{e} ligne et la 17e colonne.

— Pour la photo D, 209 et 285 sont des multiples d'un même nombre, leur différence $285 - 209 = 76$ vaut quatre fois ce nombre : 19 ($76 \div 4$). Les deux nombres se situent donc sur la 19^{e} ligne.

$209 = 19 \times 11$ se situe dans la 11^{e} colonne, $285 = 19 \times 15$ se situe dans la 15^{e} colonne.

— Pour la photo E, on peut par exemple considérer les diviseurs de 110 (1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 11 ; 22 ; 55 ; 110) et savoir que ce nombre peut se trouver dans les lignes ou colonnes 1 et 110, 2 et 55, 5 et 22 ou 10 et 11, puis après quelques essais trouver 5 pour la colonne et 22 pour la ligne qui correspondent à la colonne 8 et à la ligne 24 pour 192.

Il y a évidemment d'autres manières de trouver les nombres manquants de chaque tableau, en cherchant les diviseurs des nombres connus, en prolongeant les progressions arithmétiques case par case, par hypothèses et vérifications… en mobilisant les savoirs liés aux multiples, diviseurs, addition et soustraction en liaison avec la multiplication. Remplir ensuite les quatre tableaux :

36	37
72	74
108	111

B

187	198
204	216
221	234

C

198	216	234	252	270
209	228	247	266	286

D

110	132	154	176
116	138	161	184
120	144	168	192

E

Note : Il y a ici une très légère entorse à la rigueur mathématique car on pourrait théoriquement trouver d'autres fonctions que celles de la table de multiplication, correspondant aux nombres donnés dans la grille, mais très difficiles à définir.

Mots-clés

Nombres naturels, addition, progression arithmétique, raison, multiplication, multiple, diviseur, table de multiplication, ligne, colonne, produit.

Résultats

Points attribués, sur 2 918 classes de 21 sections : 23.I.13

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. classes**	**Moy.**
Cat. 6	679 (65%)	194 (19%)	106 (10%)	45 (4%)	23 (2%)	1 047	0.6
Cat. 7	405 (44%)	171 (18%)	139 (15%)	128 (14%)	82 (9%)	925	1.26
Cat. 8	163 (25%)	106 (16%)	128 (20%)	126 (20%)	120 (19%)	643	1.9
Cat. 9	27 (17%)	8 (6%)	33 (21%)	33 (21%)	57 (36%)	159	2.53
Cat. 10	20 (14%)	9 (6%)	23 (16%)	22 (15%)	70 (49%)	144	2.78
Total	1294 (44%)	489 (17%)	429 (15%)	354 (12%)	352 (12%)	2 918	1.31

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

— 4 points : les quatre photos complétées correctement, avec quelques explications (reconnaître la « table de multiplication », suites de multiples, essais et erreurs pour la photo E. . .), on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo.

— 3 points : les quatre photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo) OU trois photos complétées correctement avec quelques explications.

— 2 points : trois photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo) OU deux photos complétées correctement avec quelques explications.

— 1 point : une seule photo complétée correctement.

— 0 point : incompréhension du problème.

Le tableau ci-dessus fait état de très grandes difficultés en catégorie 6 avec deux tiers d'« incompréhension du problème » et d'une progression très sensible en catégories 7 et 8 pour arriver aux quatre photos complétées correctement par plus de la moitié des groupes des catégories 8 et 9.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Un problème comme « Grille de nombres », nécessite un examen détaillé des réponses et une analyse des résultats photo par photo pour pouvoir comprendre les obstacles que les élèves ont rencontrés.

Pour aller plus loin

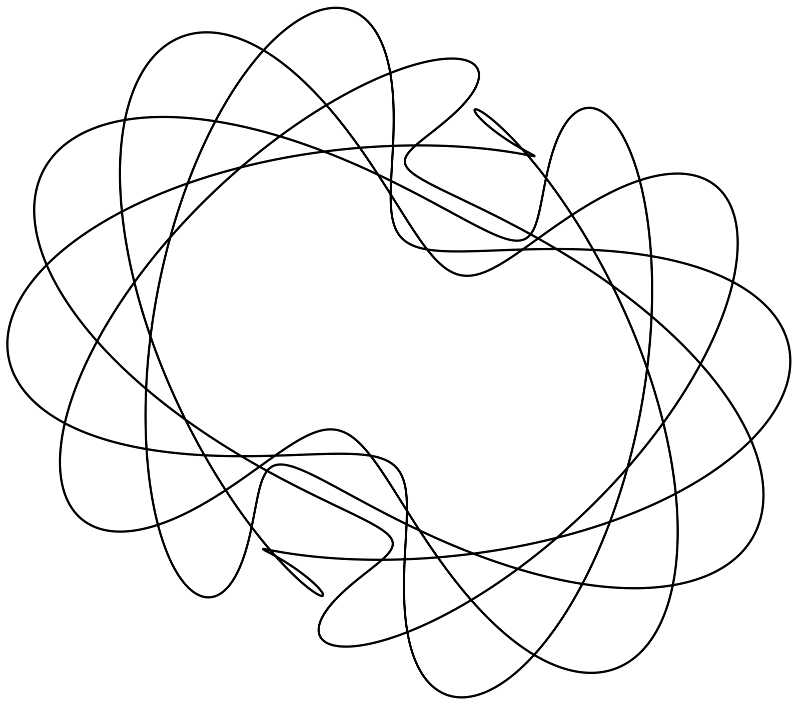
Les différents types d'obstacles que les élèves rencontrent dans la perception de la table de multiplication ont plusieurs origines.

Institutionnellement et socialement, la table de multiplication est une référence, liée à une tradition de valorisation des connaissances mémorisées, au même titre que l'étaient les exceptions grammaticales, la récitation des capitales de pays. . . Pouvoir donner immédiatement la réponse à la question « Combien font sept fois huit ? » a été longtemps (et l'est encore) considéré comme être bon en mathématiques. L'enfant le sait car il reçoit de sa famille et de ses proches des jugements à propos de ce type de compétence.

L'école a aussi longtemps insisté sur la mémorisation des « livrets » en y consacrant un temps important de l'apprentissage des mathématiques. Cet objectif est toujours dans les programmes scolaires, reculé progressivement des toutes premières années d'école primaire pour l'échelonner de la troisième à la cinquième année.

D'un point de vue notionnel, « les livrets » n'étaient ni des suites de couples de nombres, ni des suites d'égalités, mais seulement la récitation orale et scandée de groupes de cinq mots : deux fois un (font) deux ; deux fois deux (font) quatre ; deux fois trois (font) six ; ... Les deux premiers mots de chaque groupe étant le numéro du livret et le « fois », le troisième variant dans l'ordre de un à neuf (ou dix, douze, selon les époques et les pays).

Les réformes de l'enseignement des mathématiques de ces dernières années ont évidemment fait évoluer les « livrets » traditionnels et la manière de les présenter. On parle de « table » mais tout en la liant à un nombre « la table du 2 », on insiste moins sur la récitation orale et on utilise souvent les suites d'égalités, mais toujours avec un des facteurs constant et l'autre variant dans l'ordre, le travail de mémorisation prend des allures plus ludiques.



$$\begin{cases} x(t) &= 15\cos(15t+15)+14\cos(-11t+61)-46\cos(5t+33) \\ y(t) &= 15\sin(15t+15)+14\sin(-11t+61)-46\sin(5t+33) \end{cases}$$

Les Rallyes en Ville du CIJM

Présentation

Depuis une première expérience à Paris en l'année 2000, le CIJM organise dans quelques villes de France des rallyes d'inspiration mathématique.

L'ambition est de faire découvrir au public, grand et petit, que les mathématiques sont partout présentes, qu'il suffit d'affûter un peu son regard, de réveiller sa curiosité et de retrouver quelques souvenirs d'école pour s'amuser à voir autrement son environnement. Les objets que l'on croise, les noms des rues que l'on parcourt, les expositions qui nous sont proposées sont autant d'occasions de se divertir tout en pratiquant des mathématiques.

Mais il est difficile de satisfaire tous les participants ! Trop long, trop court, trop simple, trop difficile, trop de math, pas assez de math etc.

Dans le même esprit, La Chasse au Trésor parvient à offrir une vision rajeunie et beaucoup plus vaste de ces challenges.

Trois exemples très différents sont présentés ici, auxquels aurait pu s'ajouter le livret « Des Maths au Panthéon ! », une commande pour guider les jeunes visiteurs de la nef à la crypte dans ce grand monument parisien.

La Quête de πrate, la Chasse au Trésor Mathématique

La Chasse au Trésor est un grand jeu proposé par le CIJM et ses partenaires, qui se déroule sur internet et nécessite la recherche de certaines énigmes sur le terrain dans plus de cinquante villes en France, en Belgique et en Suisse.

► **Historique**

La Chasse au Trésor a connu six éditions dans une première formule entre 2009 et 2014. Elle se déroulait alors en octobre lors de la Fête de la Science. Après trois ans d'absence, une nouvelle édition du jeu a eu lieu en 2018 à l'occasion de la Semaine des Mathématiques.

► **Public**

Avec des énigmes se déclinant sur plusieurs niveaux progressifs, ce jeu s'adresse à un public très varié, allant des élèves de primaire, jusqu'aux étudiants post-bac en maths en passant par le grand public.

► **Règlement**

Le jeu étant essentiellement coopératif et créatif, l'une des caractéristiques de la Chasse au Trésor est qu'il n'y a pas de règlement restrictif. Les participants sont libres de mener le jeu comme bon leur semble, l'essentiel étant de passer un bon moment autour d'énigmes de mathématiques. On a vu par exemple de nombreux joueurs s'entraider sur des forums et pages Facebook ; certains ont également utilisé divers programmes informatiques pour résoudre les énigmes les plus dures.

► **Partenaires**

De nombreuses associations membres et partenaires du CIJM ont contribué à mettre en place des énigmes dans plus de cinquante villes en France, Belgique et Suisse. Parmi eux, on peut citer entre autres la Maison des Maths de Belgique, la MMI de Lyon, Maths en scène, Science Ouverte, Fermat Science, Plaisir Maths, le Kangourou des mathématiques ou encore la compagnie Terraquée.

Rallye Mathématique de Paris

Ce Rallye est l'un des « événements » du Salon Culture et Jeux Mathématiques qui se tient à Paris chaque année depuis l'année 2000, année mondiale des mathématiques. Il a donc lieu une fois par an, fin mai pendant le Salon.

► **Compétition**

Le Rallye Mathématique de Paris est organisé par le CIJM pour faire découvrir par la résolution d'énigmes des lieux parisiens liés aux sciences mathématiques et à leur histoire.

► **Public**

Ce rallye s'adresse à tout public, de tout niveau d'études mais certaines questions requièrent un niveau lycée. En moyenne 140 à 180 personnes y participent ; le règlement précise qu'on ne peut accepter plus de 50 équipes de 4 personnes.

► **Règlement**

Le règlement a été revu en 2014 : une durée de deux heures, l'inscription doit être faite sur le stand Rallye du Salon et l'équipe commence quand elle le souhaite.

► **Partenaires**

Le Rallye est soutenu par le magazine Tangente et, bien sûr, par le CIJM. Les autres partenaires changent chaque année en fonction des lieux visités.

► **Contact**
@ mjanvier@cijm.org
🌐 www.cijm.org/salon/concours-salon

Rallye Mathématique du Mans

► **Historique**

Ce rallye est l'une des activités proposées aux visiteurs du Festival des Jeux de l'Esprit qui se déroule au Mans pendant un week-end de mars. Il existe depuis décembre 2010.

► **Compétition**

Le Rallye Mathématique du Mans est organisé par le CIJM, sur le modèle du Rallye Mathématique de Paris ; il a pour ambition de faire parcourir pendant deux heures quelques artères de la ville en découvrant des lieux et des activités à connotation mathématique et, plus largement, scientifique.

► **Nombre de participants**

Ce nombre varie chaque année en fonction des conditions météorologiques et de lieux visités. En général, entre 12 et 20 équipes de 2 à 4 personnes. Ce rallye s'adresse à tout public.

► **Liste des partenaires**

Le rallye est mis en place en accord avec la ville du Mans, à l'origine du Festival des Jeux de l'Esprit. Depuis 2016, l'association COFJE a été créée pour gérer le Festival qui reste toujours soutenu par la ville. Selon les années, les lieux de passage peuvent être des musées classiques (Musée de la Reine Bérengère, Musée de Tessé, Carré Plantagenet), des lieux d'activités scientifiques ou techniques (Musée Vert, Usine des Eaux, Centre aquatique Les Atlantides) qui nous ouvrent leurs portes ; ou encore des libraires, des antiquaires, des commerces qui acceptent d'exposer des objets et sujets mathématiques. Tous deviennent ainsi nos partenaires le temps d'un Rallye.

► **Contact : CIJM**
🖂 CIJM, IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie- 75005 Paris
@ mjanvier@cijm.org
🌐 www.festivaljeuxesprit.fr

La chasse au trésor 2018

Sujet

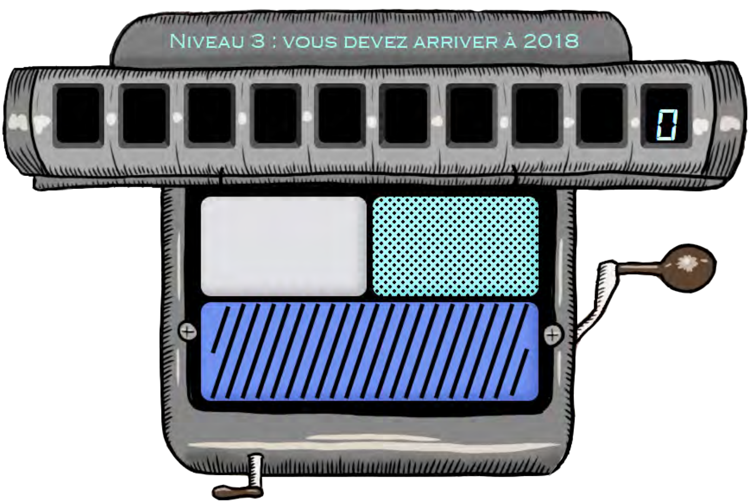
Les énigmes interactives de la Chasse au Trésor se caractérisent par le fait qu'il n'y a pas d'énoncé précis, les participant·e·s doivent, par essais et tâtonnements, comprendre le fonctionnement du jeu.

C'est le cas de l'énigme de la vieille calculatrice.

Les joueurs se trouvent face à une calculatrice avec un certain nombre de boutons et doivent lui faire afficher un nombre précis. Au départ, ils ne savent pas quelles opérations effectuent ces boutons, mais doivent le découvrir eux-mêmes en les testant.
Ce jeu se déclinait sur dix niveaux différents, nous allons en étudier deux en particulier :

— Au niveau 3, les joueurs découvraient trois boutons faisant respectivement les opérations $+1$, $\times 2$ et remise à zéro. Ils devaient afficher le résultat 2 018.

— Au niveau 7, les joueurs avaient quatre boutons : $+1$, -1, inversion des chiffres (1 234 devient 4 321) et remise à zéro. L'objectif était ici fixé à un 1 000 000 000.



Pistes de recherches et résultats

Pour chacun de ces jeux il y a plusieurs façons d'arriver au résultat, mais certaines sont plus élégantes et rapides que d'autres. Pour le premier, il était possible pour un joueur obstiné de cliquer 2018 fois sur le bouton +1 pour gagner. En revanche, impossible d'user de la même stratégie pour atteindre un milliard, il était donc là nécessaire de faire preuve d'astuce.

Étudions d'abord le premier sujet. Il est évident que le bouton ×2 va permettre de s'approcher plus rapidement du résultat voulu. En commençant par +1, puis en enchaînant les ×2, on égraine la suite des puissances de 2 qui va passer par 1 024, puis 2 048. Comme il n'est pas possible de faire décroître le résultat, les joueurs n'ont d'autre choix, une fois rendus à 2 048 que de repartir à zéro.

On se rend toutefois compte que 2 048 n'est pas très loin au-dessus de 2 018. On peut donc imaginer qu'en affichant un nombre qui est un peu en dessous d'une petite puissance de 2, puis en la multipliant plusieurs fois par 2 on puisse s'approcher du résultat. En essayant avec 15, 31 ou 63 qui sont respectivement une unité en dessous de 16, 32 et 64, on s'approche de plus en plus de 2 018. On trouve que $63 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2\,016$. Et on conclut facilement avec $+1 + 1$. On a donc la méthode suivante qui se fait en un temps raisonnable :

1. aller jusqu'à 32 par des ×2 ;
2. faire +31 avec des +1 ;
3. faire des ×2 jusqu'à 2 016 ;
4. conclure par deux +1.

Cette méthode est trouvable sans problème par des élèves de primaire ou de collège en prenant le temps de tâtonner. Il y a cependant plus rapide, et cela peut être l'objet d'un défi supplémentaire que d'essayer d'atteindre 2 018 en un minimum de coups.

Une autre idée qui peut alors venir est d'essayer de prendre le problème à l'envers. Comment obtenir 0 à partir d'une calculatrice qui affiche 2018 et ne sait faire que −1 et ÷2 ? On peut alors constater qu'à chaque étape :

— si le nombre affiché est pair, on se rapproche plus de 0 en faisant ÷2 que −1 ;

— si le nombre affiché est impair, on est obligé de faire −1 sans quoi le résultat ne sera plus un nombre entier et il ne sera plus possible de revenir sur un nombre entier avec uniquement ces deux opérations.

En utilisant cette règle, on suit le chemin suivant :
$2\,018 \to 1\,009 \to 1\,008 \to 504 \to 252 \to 126 \to 63 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

On a bien là le chemin le plus court en 17 coups. Il suffit de refaire ce chemin à l'envers pour résoudre l'énigme.

Notez que cette méthode est intimement liée à l'écriture en binaire des nombres. Le nombre 2018 en binaire s'écrit 11111100010, or, faire ×2 en binaire, c'est écrire un zéro à la fin du nombre (comme pour faire ×10 en décimal). Le chemin suivit revient donc à faire dix fois ×2 pour à chaque fois rajouter un zéro et décaler les autres chiffres vers la gauche et éventuellement faire +1 quand un 1 apparaît à cette position dans l'écriture binaire de 2018. Cette méthode permet donc, d'un coup d'œil, d'atteindre n'importe quel nombre avec un minimum de coups, pourvu qu'on sache l'écrire en binaire.

En base 10, le problème équivalent serait d'afficher un nombre sur une calculatrice capable de faire ×10 et +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9. Pour obtenir 2018 on suivrait alors le chemin suivant :

$0 \to 2 \to 20 \to 200 \to 201 \to 2010 \to 2018$

Venons-en maintenant à l'autre calculatrice, celle qui fait +1, −1 et renverse les chiffres. Pour atteindre un milliard, il est essentiel de trouver une méthode permettant d'atteindre rapidement des grands nombres. Essayons déjà par exemple d'atteindre 100 le plus rapidement possible. Au début, on constate qu'on ne peut pas faire autre chose pour accroître le nombre que des +1.

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12$

Arrivé à 12, on voit qu'on pourrait gagner du temps en passant directement à 21 grâce à l'inversion. Mais quitte à utiliser cette méthode, on se dit qu'il est plus efficace d'aller à 19 pour sauter directement à 91.

$12 \to 13 \to 14 \to 15 \to 16 \to 17 \to 19 \to 91$

On est alors à quelques +1 du 100. Tentons maintenant d'atteindre 1 000. On pourrait tenter la même technique en allant à 109 pour sauter à 901, mais le nombre de clics restant à faire jusqu'à 1 000 est encore grand et ce sera encore pire quand on voudra ensuite passer à 10 000, 100 000 et ainsi de suite. Il faut trouver autre chose permettant de bondir directement à un nombre commençant par 99. C'est à ce moment qu'il faut être un peu astucieux pour trouver le chemin suivant :

$100 \to 101 \to 102 \to 201 \to 200 \to 199 \to 991.$

Et l'on est plus qu'à 9 clics de 1 000. Cette méthode est très jolie et très satisfaisante à découvrir par soi-même. D'autant que l'on constate alors qu'elle est toujours efficace pour passer de n'importe quelle puissance de 10 à la suivante en quinze clics.

$1\,000 \to 1\,001 \to 1\,002 \to 2\,001 \to 2\,000 \to 1\,999 \to 9\,991 \to \ldots \to 10\,000$

En répétant cet algorithme, on atteint rapidement le milliard. Cela peut prendre un certain temps de tâtonnements et d'essais avant que cette idée ne surgisse. Mais cette méthode provoque à coup sûr un sentiment de jubilation chez les élèves au moment où ils finissent par la trouver.

Commentaire

En 2018, plus de 5 000 joueurs ont créé un compte pour participer à la Chasse au Trésor. Comme il n'était pas nécessaire de créer un compte pour jouer aux premiers niveaux des énigmes, il est difficile d'estimer le nombre total de personnes ayant tenté ce jeu, mais la Chasse au Trésor a connu un pic de connexions de 11 000 joueurs en une heure, ce qui laisse présager que ce nombre se compte en quelques dizaines de milliers.

Pour ce qui est des joueurs ayant un compte, 2 027 ont tenté l'énigme de la calculatrice et les effectifs de réussite par niveau ont été les suivants :

- niveau 1 : 344 ;
- niveau 2 : 261 ;
- niveau 3 : 503 ;
- niveau 4 : 7 ;
- niveau 5 : 94 ;
- niveau 6 : 222 ;
- niveau 7 : 259 ;
- niveau 8 : 104 ;
- niveau 9 : 14 ;
- niveau 10 : 219.

Ces effectifs décrivent les derniers niveaux atteints, c'est-à-dire que les joueurs ayant atteint le niveau n ont également dû réussir tous les niveaux inférieurs à n. On peut donc dire que 219 joueurs ont réussi tous les niveaux de cette énigme.

Rallye Mathématique de Paris 2017

Salon Culture et Jeux Mathématiques

Sujet

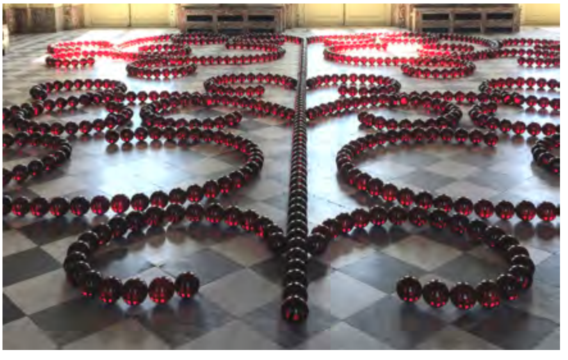
En accord avec le thème du 18e salon, Mathématiques et Langages, ce Rallye 2017 conduisait les participants à la rencontre d'expressions littéraires, poétiques, artistiques... considérées souvent comme non mathématiques.

Notre ambition était, comme chaque année, de faire découvrir que, pourtant, les mathématiques ne sont jamais loin.

Tout au long de la route qui menait les équipes vers la Seine, des vitrines proposaient des énigmes sur des textes de Jose Luis Borges, de l'Oulipo ou d'Eugène Guillevic... Il s'agissait de découvrir la langue des signes ou l'écriture Braille ou même de voir une véritable machine Enigma.

Sur le Quai de Conti, La Monnaie de Paris proposait pour le 40e anniversaire du musée Pompidou, une exposition d'art contemporain, « *À pied d'Oeuvre(s)* ». Les équipes étaient alors invitées à entrer pour admirer quelques installations et répondre aux questions où se rencontraient le langage des arts et le langage des sciences.

Prenons une œuvre pour exemple : « Allégorie ». Cette œuvre de James Lee Byars nous émerveille dès l'entrée de la grande salle Guillaume Dupré : 1 000 boules de verre rouge installées en volutes symétriques. Comme 1 000 bulles de savons qui se seraient posées là ! Pour l'artiste « la sphère interroge tout... ». Interrogeons-nous !



Interrogeons le physicien : « Imaginons voir 1 000 bulles de savon. Pourquoi des boules, pourquoi des sphères ? La bulle est une membrane faite du mélange eau/savon. Elle enferme un certain volume d'air et sa surface est le siège d'une tension dont l'intensité augmente en proportion de sa surface : plus la surface est grande, plus l'énergie nécessaire à la position d'équilibre (qu'elle n'éclate pas) est grande. La bulle va donc adopter la forme la plus économique, celle qui, pour un volume donné, offre une surface minimale : la sphère. »
Comparons par exemple la surface d'un cube et celle d'une sphère de même volume : 1 cm^3.
S_{cube} = … cm^2 et $S_{sphère}$ =… cm^2

Réponse : $S_{cube} = 6$ cm^2 et $S_{sphère} \simeq 4{,}836$ cm^2

Interrogeons l'astronome : « En raison de la gravité, à partir d'une certaine masse et donc d'une certaine taille (rayon $\simeq$ 500 km) les planétoïdes se « roulent en boules » et deviennent des planètes. Ainsi sur Terre les montagnes ne peuvent excéder une trentaine de kilomètres pour ne pas s'effondrer. Principe d'équilibre encore. »
Citez un objet du Système solaire trop peu massif pour prendre cette forme de boule.

Réponse : un astéroïde, une comète...

La réponse du mathématicien pourra commencer par une définition : « La sphère, ensemble de tous les points de l'espace équidistants d'un même point appelé centre. Ce qui fait de la sphère l'objet mathématique parfait, symbole d'équilibre depuis l'Antiquité : Platon dit de la sphère que c'est la figure la plus semblable à elle-même ; elle a le maximum de symétries, toute rotation la ramène sur elle-même. Ce qui a permis d'élaborer des formules utilisables pour n'importe quelle sphère, n'importe quelle boule. »
Supposant que chacune des petites boules rouges qui composent cette œuvre a un diamètre de 12 cm, quel volume de verre (en dm^3) est devant nous ?

Réponse : $288\,\pi$ dm^3 $\simeq 904{,}78$ dm^3

Que serait cette œuvre pour, peut-être... le jardinier ? « Et si c'était un arbre ! Le tronc, les branches principales en prise directe sur le tronc, les branches secondaires issues des branches principales. Seul le tronc est rectiligne ; les branches sont des volutes, des spirales. »
L'équilibre de l'œuvre est encore accentué par sa symétrie.
Combien présente-t-elle d'axes de symétrie ?

Réponse : 1 axe de symétrie

L'examen des branches secondaires montre que c'est l'élément récurrent ; 21 boules (mais parfois 20) et le même dessin pour des spirales identiques.
Combien de fois cet élément est-il présent dans l'œuvre ?

Commentaire

Les réponses à ces questions étaient simples et les concurrents ont donné des résultats satisfaisants. Il suffisait de connaître quelques formules ou de les retrouver, un collégien pouvait répondre. Mais ce qui est moins courant est de s'appuyer sur une œuvre d'art contemporain et de changer le regard pour s'interroger, comme l'artiste le suggérait lui-même.

Les retombées en classe ? Sans doute s'agit-il de donner l'idée d'élargir le regard, de se reposer un peu de l'étude classique des volumes ou des aires, de ne pas hésiter à sortir l'élève de la classe pour des travaux pluri-disciplinaires.

Rallye Mathématique de Paris 2018

En 2018, le thème du salon était Mathématiques et Mouvement. Un lieu dans Paris semblait particulièrement indiqué pour illustrer ce sujet : le Musée des Arts et Métiers.

La totalité du rallye se déroulait dans ce magnifique musée, riche de témoignages de l'évolution des techniques.

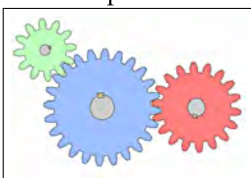
Sujet

Intéressons-nous ici au passage dans la salle consacrée à la mécanique en prenant connaissance d'un extrait du carnet de route donné aux équipes.

Définie dans l'*Encyclopédie de Diderot et d'Alembert* comme « la partie des mathématiques qui considère le mouvement et les forces motrices, leur histoire, leurs lois et leurs effets dans les machines », la mécanique occupe une place primordiale dans ce musée.
Les engrenages théorisés par les modèles de Théodore Olivier, trouvent leur application dans tous les domaines de la mécanique : les horloges, les transports, les machines-outils qu'on voit se développer dans les usines, les ateliers et les manufactures, mais aussi dans des œuvres d'exception comme les automates ou les horloges de précision.
Une triple expérience est proposée au milieu de la salle pour vous familiariser avec les engrenages.
Elle vous aide à répondre à la question suivante.
Étant donné deux roues dentées, R_1 avec d_1 dents et R_2 avec d_2 dents, l'une entraînant l'autre, si R_1 fait n_1 tours quand R_2 fait n_2 tours, quelle relation lie les quatre nombres d_1 , d_2 , n_1 , n_2 ?

Réponse : $\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}$

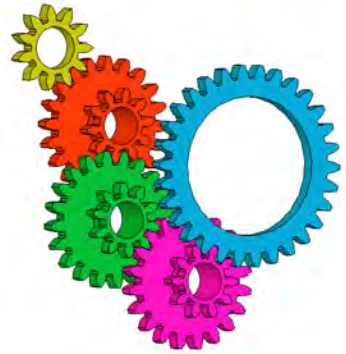
Vous pouvez alors résoudre les questions suivantes :



1. Ces trois roues sont coplanaires. Si la roue rose (celle de droite) fait un tour dans le sens trigonométrique, combien de tours fait la roue verte (celle de gauche) et dans quel sens ?

Réponse : 1,5 tour dans le sens trigonométrique

2. Si la roue bleue (celle de droite) fait 22 tours dans le sens trigonométrique, combien de tours fait la roue jaune (celle de gauche) ? Dans quel sens ?
N.B. : Les 5 roues sont non-coplanaires et les engrenages doubles sur une même roue sont solidaires.



Réponse : 480 tours dans le sens trigonométrique

Les engrenages servent à transmettre du mouvement et, si besoin, le transformer ou modifier la vitesse de rotation. Dans les années 1840, Théodore Olivier a conçu pour son enseignement des modèles d'engrenages en bois exposés ici et dont la réalisation a été confiée à l'un des ouvriers les plus habiles du Conservatoire.
NB : L'observation de trois magnifiques engrenages de bois (n° 3, n° 5 et n° 9) et le dénombrement (parfois difficile) des dents de leurs roues permettaient d'appliquer les résultats précédents.
Autre passage incontournable quand on évoque le mouvement : les transports.

Ainsi l'étonnant *Grand Bi Rudge* : la roue avant a un rayon de 75 cm, la roue arrière 18 cm.
Combien de tours de pédales faut-il faire pour parcourir 1 km ?

Réponse : 213 tours de pédales

Ou encore *le vélocipède de Clément Ader*
La roue avant a un rayon de 62 cm, la roue arrière de 35 cm.
N.B. : on observe que les pédales sont fixées sur le moyeu de la roue avant.
Quelle distance parcourt-on en un tour de pédales ?

Réponse : 3,9 m

Commentaire

Pour la petite équipe qui a préparé ce rallye aux Arts et Métiers, la difficulté a été de faire un choix parmi toutes ces œuvres qui témoignent à la fois d'artisanat, d'art, de techniques et d'histoire. Il y a des maths partout ! Jusqu'à l'escalier d'honneur décoré d'un splendide entrelacs de marbre.

Ce fut, dès sa création, un lieu d'enseignement, de grands mathématiciens y ont laissé leurs noms.

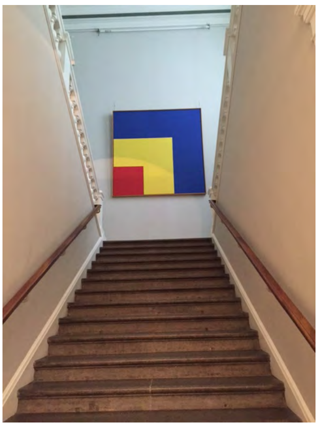
Pour certains participants, c'était l'occasion d'une première visite, alors que d'autres croyaient bien connaître ce musée. Tous ont manifesté leur envie d'y revenir.

Rallye Mathématique du Mans

Festival des Jeux de l'Esprit

Sujet 2016

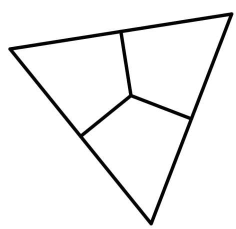
L'accueil des conservateurs de musées est excellent. Il en fut ainsi pour l'‘exposition « Rouge, Jaune, Bleu », d'art moderne au musée de Tessé où les équipes pouvaient entrer sur simple présentation d'un badge.



Dans le haut du grand escalier observez l'œuvre titrée « Red, Yellow, Blue ».
Qui en est l'auteur ? Quelle fraction du tableau est de couleur bleue ?

Solution : Ellsworth Kelly.
Le bleu est en haut et à droite, cette partie représente $\frac{5}{9}$ du tableau.

A votre tour de tremper vos pinceaux dans l'œuvre « Peinture » de Jean-Pierre Raynaud pour répondre au petit problème suivant :
On dispose de ces pots de peinture bleue, jaune et rouge pour peindre chacune des trois parties de ce triangle. (Plusieurs quadrilatères peuvent être de la même couleur.)
Combien y a-t-il de façons différentes de réaliser cette peinture ?



Solution : 11 façons différentes

Même accueil de la part des commerçants, ravis d'offrir une petite place en vitrine pour afficher une énigme.

Pedro, l'éminent négociant en vin de la cité Plantagenêt, doit livrer du vin du Bordelais et de l'hypocras d'Auvergne aux échevins de la cité qui organisent un banquet de 450 convives pour une visite royale.
Hélas, ceux-ci ne connaissent que le quartaut ou le demi-queue de Vouvray pour les grandes quantités et les chauveaux et les chopines pour les petites. Il est prévu que chaque invité aura droit à 1 chauveau d'hypocras et 2 chopines de Bordeaux.
Combien de demi-queue de vin de Bordeaux et de quartaut d'hypocras devra commander Pedro ?

Solution : un tableau de correspondances indispensable pour effectuer les calculs était placé dans la vitrine.

Sujet 2017

► **Utiliser les créations des jardiniers**

Le long de l'escalier des Ponts Neufs, le jardin Ronsard (près du jardin Jacques Pelletier du Mans) est fait d'un assemblage de massifs de buis (photo A, massifs 2017)
Combien de triangles sont matérialisés par les étroites allées de sable ?

Solution : 32

► **Trouver une destination en résolvant une énigme**

Juliette dit à Jules : « J'ai un nombre de trois chiffres. Si je lui ajoute 3, la somme de ses chiffres est trois fois plus petite que celle du nombre de départ »
Quel était le nombre de départ de Juliette ? S'il y a plusieurs réponses les donner toutes.

3 solutions : 108, 117 et 207

► **Conduire les équipes vers des musées, des expositions**

On note J le plus petit nombre de Juliette + 1. Au n° J dans la Grande rue, un petit musée racontait des histoires de cordes vibrantes.
Quel est son nom ?

Solution : Histoire de mandolines

Dans ses vitrines des panneaux vous feront découvrir un mathématicien et physicien sarthois méconnu qui, lui aussi, fit vibrer des cordes il y a trois siècles.
Quel est son nom ? Où est-il né ?

Solution : Joseph Sauveur, né à La Flèche

Sujet 2018

Une promenade de deux heures entraînait les équipes autour des Jacobins où était installé le Festival des Jeux. D'abord dans le Parc de Tessé tout proche, ils devaient se rendre jusqu'au Jardin des Plantes en empruntant des rues nommées en l'honneur de scientifiques sarthois plus ou moins célèbres : Thomas Cauvin, Claude Chappe, Amédée Bollée et ses cadrans solaires en bronze, Pierre Belon, etc. Occasions de résoudre quelques énigmes sur l'œuvre de ces « grands hommes ».

Dans le Parc de Tessé, observez attentivement l'installation du plasticien Jean Bernard Métais. Il s'agit d'un sablier géant dont on peut recharger la chambre supérieure. Une partie du sable qui se trouvait dans cette chambre supérieure a été libérée par des petits orifices. Le sablier est arrêté.

Voir : www.youtube.com/watch?v=3hnwX1idcQc

©Ville du Mans

Le bas du sablier tel qu'il était lors du rallye.

En tombant sur le sol, le sable a formé des tas qui ont une forme géométrique bien particulière. **Quelle est cette forme ?**

Solution : un cône

Donnez le nombre approximatif des orifices qui ont été ouverts (puis fermés).

Solution : il fallait observer et tenter de dénombrer les cônes.
Ce n'était pas si simple !

De plus, tous ces tas sont semblables (même angle de base). Ils n'ont pas tous la même hauteur, car certains orifices ont été (volontairement) fermés à des moments différents. Évidemment, plus le sable s'est écoulé longtemps, plus le tas est haut. Un orifice a été ouvert pendant 8 heures, le tas obtenu mesure 20 cm de hauteur. **Combien de temps faudrait-il laisser cet orifice ouvert pour obtenir un tas de 40 cm ?**

Solution : 64 h ou 2 jours et 16 h.
Si les longueurs sont multipliées par k,
les volumes sont multipliées par k^3

Si cet orifice est resté ouvert pendant 72 jours, quelle est la hauteur du tas ?

Solution : 120 cm

Pourrait-on vider la chambre supérieure en laissant les orifices ouverts ? Pourquoi ?

Solution : Non. Le sable s'arrête de couler quand,
à l'intérieur, l'angle de pente est atteint.

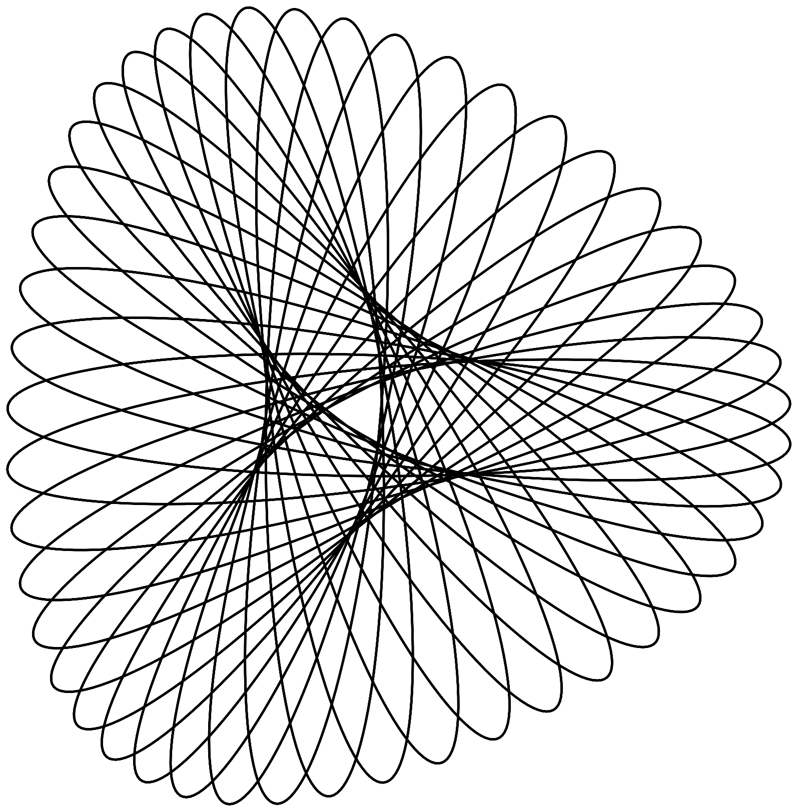
Commentaires

Cette œuvre a divisé les promeneurs dans le Jardin de Tessé au moment de son installation, comme en témoignent les propos recueillis sur la vidéo.

Elle a attiré leurs regards par sa présence incongrue au centre du jardin public. L'artiste s'était entouré de conseils scientifiques au moment de l'installation mais il s'agissait surtout d'une réflexion sur le temps qui s'écoule comme le sable s'écoule ici.

Les promeneurs se sont habitués, au risque de ne plus le voir...

Notre ambition en posant cette énigme était de redonner une présence à cette installation puis, en la regardant autrement, faire un peu de mathématiques.



$$\begin{cases} x(t) &= -70\cos(-46t+180) - 16\cos(-2t+101) + 94\cos(48t+33) \\ y(t) &= -70\sin(-46t+180) - 16\sin(-2t+101) + 94\sin(48t+33) \end{cases}$$

Concours Calcul mental Mathador

Présentation

La 1$^{\text{re}}$ édition s'est déroulée pendant l'année scolaire 2011/2012.

Le principe a été conçu par une équipe de Canopé Besançon pilotée par Christel Renaud et Eric Trouillot, le créateur du jeu Mathador.

La 8$^{\text{e}}$ édition se déroule cette année 2018/2019.

Compétition

Le concours Mathador est géré par le réseau Canopé. Il s'adresse aux classes du CE1 au CM2 en primaire, à toutes les classes du collège de la 6$^{\text{e}}$ à la 3$^{\text{e}}$ et aux classes de SEGPA et d'EREA. Les cinq premières éditions ont concerné l'académie de Franche-Comté. Depuis 2016, le concours est national.

De 40 classes participantes pour la 1$^{\text{re}}$ édition, 250 la 5$^{\text{e}}$ année, on est passé à 1300 classes en 2017/2018 soit 32 000 élèves. L'inscription se fait en ligne sur le site Mathador puis Canopé. Il faut s'abonner à la formule Classe qui inclut plusieurs services dont l'accès au concours Mathador. L'inscription est possible à tout moment pendant l'année scolaire, mais la période idéale est septembre-octobre. Novembre-décembre est une période d'entraînement. Le concours commence en janvier.

Principe de l'épreuve

Il y a 5 catégories : CE1 ; CE2 ; Cycle 3 (CM1-CM2-6$^{\text{e}}$) ; Cycle 4 (5$^{\text{e}}$-4$^{\text{e}}$-3$^{\text{e}}$) et SEGPA-EREA.

L'épreuve s'adresse à tous les élèves de la classe.

Chaque semaine, pendant 16 semaines, de janvier jusqu'en mai, une épreuve de type Mathador est proposée à tous les élèves de la classe.

L'enseignant obtient l'épreuve en ligne sur le site du concours de Canopé. Elle est disponible chaque lundi matin.

L'enseignant choisit le moment qu'il veut dans la semaine pour faire passer l'épreuve qui dure 4 minutes. Chaque élève dispose d'une feuille réponse sur laquelle il doit écrire ses opérations.

L'enseignant doit saisir les résultats de sa classe, sur le site du concours avant le dimanche soir. C'est la moyenne de points de la classe qui détermine le classement. Cette moyenne est calculée automatiquement sur le site dès la saisie des résultats de tous les élèves de la classe. Le site propose également toute une panoplie de statistiques individuelles et collectives qui en font un véritable instrument de mesure du suivi de la classe en calcul mental.

Canopé effectue chaque semaine la mise à jour des classements des 5 catégories pendant toute la durée du concours.

Un palmarès est établi à l'issue du concours dans chacune des 5 catégories. Il suffit d'avoir participé à au moins 10 épreuves pour être dans le classement. Si plus de 10 épreuves ont été réalisées par une classe, les 10 meilleures moyennes sont retenues. En cas d'absence (sortie scolaire, voyage, absence...), il y a possibilité de demander sur le site une dérogation et de réaliser l'épreuve la semaine suivante.

Contenu de l'épreuve

En 4 minutes, chaque élève essaye de fabriquer le nombre-cible en combinant tout ou partie des 5 nombres dont il dispose avec les 4 opérations. Chacun des 5 nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les calculs ne doivent contenir que des nombres positifs.

L'élève écrit ses opérations sur une fiche. Il essaye d'obtenir le maximum de points pour sa solution.

Le système de points est le suivant :

- Dès que le nombre-cible est atteint, 5 points.
- Puis les opérations utilisées rapportent d'autres points :

  une addition : 1 point,
  une multiplication : 1 point,
  une soustraction : 2 points,
  une division : 3 points,
  le coup Mathador : 13 points.
- 0 point si aucune solution n'est proposée ou s'il y a des erreurs dans les calculs.

Le coup Mathador est réalisé lorsque le nombre-cible est fabriqué en utilisant les 5 nombres et chacune des 4 opérations utilisée une fois, soit une addition, une soustraction, une multiplication et une division.

À l'issue des 4 minutes, les élèves peuvent compter et écrire leur total de points sur leur fiche. Possibilité aussi de faire échanger les fiches entre voisins et corriger son voisin. L'enseignant vérifie ou corrige lui-même ensuite. Puis il doit saisir en ligne les calculs sur la plate-forme du site du concours. Environ 15 min pour une classe.

La catégorie CE1, nouvelle en 2018, aura un système de points adaptés de façon à être en cohérence avec les apprentissages opératoires de CE1 :

— addition : 1 point,
— soustraction : 2 points,
— multiplication : 3 points,
— division : 2 points,
— il n'y a pas de coup Mathador mais un bonus de 3 points pour l'utilisation des 5 nombres dans la solution.

Prolongements de ce concours

Lors du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques de Paris, un tournoi de Calcul Mental Mathador est proposé au public depuis 2015. Cinq défis Mathador sont proposés aux participants. Le total des points réalisés lors de ces cinq défis permet d'établir un classement Jeune (jusqu'à 13 ans) et un classement Adulte.

Contact : Canopé académie de Besançon

🖂 5 Rue des Fusillés - BP 1153 - 25003 Besançon Cedex
☎ 03 81 25 02 50
🖷 03 67 10 10 03
@ christel.renaud@ac-besancon.fr

Deux exemples de situation proposée aux classes et intérêts pédagogiques

Intérêts pédagogiques

L'idée de base est de proposer un outil aux enseignants pour pratiquer le calcul mental dans la régularité, la répétition de situations variées avec une touche de jeu et de plaisir. La dimension défi est également présente.

Associé avec un travail régulier et plus classique de calcul mental automatisé et de calcul mental réfléchi sur l'ensemble de l'année scolaire, ce concours permet d'entretenir et de mettre en application les connaissances apprises.

Ce principe de calcul mental à l'envers avec la recherche d'un nombre-cible est une clé dans la construction du sens du nombre et des opérations. L'élève est acteur : par les choix de nombres et d'opérations qu'il doit effectuer, il travaille le sens.

Une attention particulière est portée dans le choix des tirages du concours. Chaque tirage doit permettre de fabriquer le nombre-cible avec une grande diversité de solutions. Il y a toujours des solutions simples en deux calculs et au moins un coup Mathador. De cette façon, tous les élèves, ceux en difficulté et les très bons, peuvent y trouver leur compte. Un élève dont la relation aux nombres et aux opérations est encore fragile, cherchera à trouver le nombre-cible, le plus simplement possible, c'est déjà un bel objectif. Par contre, un élève aux connaissances solides cherchera à obtenir le maximum de points avec des soustractions et des divisions et éventuellement le coup Mathador.

La règle, avec les points attribués aux opérations, incite à complexifier sa solution pour avoir le maximum de points. Ce système de points incite à utiliser les deux opérations contraires, que l'on a tendance à mentalement moins utiliser. Cela implique un travail implicite sur le sens des nombres et des opérations ainsi que sur les ordres de grandeur.

Le principe de recherche d'un nombre-cible est ludique pour la plupart des élèves. Il contribue à créer une image attractive et positive du calcul mental et du calcul.

Le principe du calcul mental à l'envers n'est pas naturel. C'est la régularité et la répétition de situations qui permettront d'installer cette gymnastique des neurones. De façon à le rendre plus familier pour les élèves, ne pas hésiter à proposer en parallèle des tirages du concours des entrainements supplémentaires.

1er exemple

Nombre-cible : 54
Nombres pour calculer : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 11

$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{11}$ $\boxed{54}$

Évidemment la 1ère décomposition qui devrait venir à l'esprit est un 6×9.

Et il s'avère assez facilement faisable avec :

$11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$; solution à 8 points.

Un conseil à donner aux élèves pour bien gérer les 4 minutes : chercher au tout début une solution simple puis éventuellement la complexifier. Ce principe s'applique bien sur cet exemple, le 6 étant donné dans les 5 nombres, comment fabriquer différemment le 9 avant d'effectuer ce 9×6 ?

Différentes possibilités pour complexifier, $11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$ qui rapporte 8 points.

— 1re possibilité :
  $4 - 2 = 2$ puis $11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$; solution à 10 points.
— 2e possibilité :
  $4 \div 2 = 2$ puis $11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$; solution à 11 points.
— 3e possibilité :
  $8 - 4 = 4$ puis $4 - 2 = 2$ puis $11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$; solution à 12 points.
— 4e possibilité :
  $8 - 4 = 4$ puis $4 \div 2 = 2$ puis $11 - 2 = 9$ et $9 \times 6 = 54$; solution à 13 points.

Ces cinq solutions basées sur la complexification dans la fabrication du 9 mettent bien en évidence le travail sur le sens des opérations. Il y a en action dans cet exercice mental toute la richesse pédagogique du travail de la décomposition des nombres qui fait intervenir le sens des opérations, le sens des nombres avec en permanence la présence en arrière-plan des ordres de grandeur.

Pour compléter cette recherche de 54, il y avait aussi dans les solutions simples deux solutions basées sur une approche par tâtonnement.

D'abord 4×11 puis $44+8$ et $52+2$, solution à 8 points . Mais aussi, 6×11 puis $66 - 8$ et $58 - 4$, solution plus intéressante à 10 points.

Enfin, un coup Mathador (18 points) : $8 \div 2 = 4$ puis $4 + 11 = 15$ puis $15 \times 4 = 60$ et $60 - 6 = 54$.

2^e exemple

Nombre-cible 77
Nombres pour calculer : 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 11

$\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{11}\quad \boxed{77}$

L'unique décomposition multiplicative de 77 est 7×11.

- 1^{re} possibilité :
  $3 + 4 = 7$ puis 7×11 ; solution à 7 points.
- 2^e possibilité :
  $5 - 3 = 2$ puis $9 - 2 = 7$ et 7×11 ; solution à 10 points.
- 3^e possibilité :
  $3 + 4 = 7$ puis $5 + 9 = 14$ puis $14 - 7 = 7$ et 7×11 ; solution à 10 points.
- 4^e possibilité :
  $9 \div 3 = 3$ puis $3 + 4 = 7$ et 7×11 ; solution à 10 points.
- 5^e possibilité :
  $5 - 3 = 2$ puis $9 + 2 = 11$ puis $11 - 4 = 7$ et 7×11 ; solution à 11 points.
- 6^e possibilité :
  $5 - 3 = 2$ puis $4 - 2 = 2$ puis $9 - 2 = 7$ et 7×11 ; solution à 12 points.
- 7^e possibilité :
  $5 - 4 = 1$ puis $3 - 1 = 2$ puis $9 - 2 = 7$ et 7×11 ; solution à 12 points.
- Et enfin le coup Mathador, encore sur le principe enrichi de 7×11 :
  $5 + 3 = 8$ puis $8 \div 4 = 2$ puis $9 - 2 = 7$ et 7×11 ; coup Mathador à 18 points.

Dans ces huit décompositions enrichies de 7×11, et la liste n'est pas exhaustive, on retrouve toute la richesse pédagogique du travail sur la décomposition des nombres qui fait intervenir le sens des opérations, le sens des nombres avec la présence en arrière-plan des ordres de grandeur, le tout avec des tests et du tâtonnement.

Le concours, avec ses tirages hebdomadaires, apporte la régularité et la répétition qui sont indispensables à de nombreux élèves pour construire une relation solide aux nombres et aux opérations et installer progressivement des automatismes.

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Présentation

Activités de l'ATSM

L'ATSM organise annuellement des Journées Nationales, des colloques et des rencontres au profit de ses adhérents, parmi lesquels des instituteurs et des enseignants de mathématiques dans les deux cycles (collège et lycée).

C'est à travers ses différentes activités de formation des enseignants et des jeunes que, depuis sa création en 1968, l'ATSM contribue avec enthousiasme à la promotion de l'enseignement et à la diffusion de la culture mathématique dans notre pays.

Au niveau des relations avec les associations similaires, il est à signaler un renforcement de notre coopération principalement avec le Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM), la Fédération Française des Jeux Mathématiques (FFJM) et l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP).

Publications

- Revue Miftah el Hissab : bulletin de liaison et d'information à l'intention des adhérents.
- Revue Omar El Khayam : revue spéciale à l'intention des élèves de l'École de base et du Secondaire.
- Livres d'analyse, d'algèbre, de géométrie et d'arithmétique à l'intention des enseignants et des étudiants.
- Actes des colloques sur l'Histoire des Mathématiques Maghrébines.

Contact : Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (ATSM)

🖂 B.P 286 Le Bardo 2000. Tunisie
☎ & 🖷 : (+216) 71 588 198
Président de l'A.T.S.M. : Taoufik Charrada
☎ (+216) 98 446 946
@ tawfik.charrada@gmail.com

Thème : Activités sur les pourcentages

Fiche technique

Ce thème, inspiré de l'ouvrage *Statistiques MÉFIEZ-VOUS !* de Nicolas Gauvrit, a été présenté lors des Journées Nationales 2013 de l'ATSM par un collègue de l'APMEP. Revisitées, ces activités ont été proposées aux élèves des classes secondaires de 1re, 2e et 3e années qui participent à des clubs de mathématiques, à travers les différentes Régionales.

► **Objectifs**

— Permettre aux animateurs de clubs et aux organisateurs de compétition mathématiques une meilleure utilisation de la notion de pourcentages.

— Rapprocher et donner du sens aux calculs de pourcentages chez les jeunes apprenants.

— Permettre des prolongements à divers niveaux.

— Préparer les jeunes aux différentes compétitions ludiques.

► **Domaines mathématiques**

Arithmétique, fractions, pourcentages, ordre.

Activité 1 (Élémentaire)

► **Énoncé**

Le prix d'un article augmente de 10%, puis baisse de 10 %. Est-il revenu au prix de départ ?

► **Solution**

Réponse : non.
Augmentation : $x+\frac{10}{100}x=1,10x$.
Diminution : $1,10x-\frac{10}{100}\times 1,10x=0,99x$.

Activité 2 (Élémentaire)

► **Énoncé**

Le prix d'un article augmente de 10 %, puis augmente de nouveau de 10 %. De combien a-t-il augmenté ?

► **Solution**

1re augmentation : $x + \frac{10}{100}x = 1,1x$.
2e augmentation : $1,1x + \frac{10}{100} \times 1,1x = 1,1 \times 1,1x = 1,1^2 x = 1,21x$.
Réponse : 21%.

Activité 3 (Est-ce correct ?)

► **Énoncé**

La dette de Sami, qui avait augmenté de 15 % l'an passé, n'a augmenté cette année que de 14 %. Peut-on se féliciter de sa gestion exemplaire ?

► **Solution**

Le déficit équivaut au besoin de financement et se traduit par le montant des emprunts nouveaux.

Commentaire A : Le déficit a diminué, l'augmentation de la dette (15 % l'an dernier) est réduite à 14 % cette année.

Commentaire B : Le déficit a augmenté, de 15 000 dinars l'an passé, il dépassera cette année 16 000 dinars.

Lequel des deux commentaires est correct ?

Dans le commentaire A : l'augmentation de la dette est réduite de 15 % à 14 %. Le déficit a bien décru, mais en pourcentage de la dette.

Le commentaire A n'est pas faux (sans informations supplémentaires).

Dans le commentaire B : La dette de départ était de 100 000 dinars. Un an plus tard, elle passe à 115 000 dinars ($100\,000 \times 1,15 = 115\,000$). Elle a donc augmenté de 15 000 dinars.

Deux ans plus tard, elle est de $115\,000 \times 1,14$ dinars soit 131 100 dinars. Elle a donc augmenté de 16 100 dinars.

Le commentaire B est correct.

Activité 4 (Confusion entre pourcentage et points)

► **Énoncé**

Au niveau national, le pourcentage d'élèves choisissant la spécialité Mathématiques parmi les élèves de série scientifique passe de 41 % en 1995 à 29 % en 2004, soit une diminution de 12 % en 9 ans.

► **Commentaire**

Soit une diminution de 12 points en 9 ans ! $(41 - 29 = 12)$
Soit une diminution de pourcentage : $41 - \frac{x}{100} \times 41 = 29 \Leftrightarrow x = 29{,}27$ %.
Qu'est-ce qui est plus pertinent ?

► **Exemple**

Si le nombre d'élèves est le même en 1995 et en 2004, parmi les 100 élèves en 1995, 41 choisissent la spécialité Mathématiques et parmi les 100 élèves en 2004, 29 choisissent cette spécialité. Il y a une diminution de 29,27 %.

Si le nombre d'élèves n'est plus le même, parmi les 100 élèves en 1995, 41 % choisissent la spécialité Mathématiques, soit 41 élèves et parmi les 200 élèves en 2004, 29 % la choisissent, soit 58 élèves. Il y a une augmentation de 41,46 % !

Quand y a-t-il égalité ?

100 élèves en 1995, 41 % choisissent la spécialité maths, soit 41 élèves. x élèves en 2004, 29 % choisissent la spécialité maths, soit $\frac{29}{100}x$.

$\frac{29}{100}x = 41 \Leftrightarrow x = \frac{4100}{29} \simeq 141$ élèves

Activité 5 (Élections)

► **Énoncé**

On lit dans les journaux : « Les Tunisiens ont voté à 55,68 % pour le candidat BCE. » Soit 1,731 529 millions de voix. Qu'en penser ?

► **Commentaires**

Population	Inscrits	Participants	Suffrages exprimés
11,4	4,877 253	3,579 257	3,109 768

Nombre de voix pour le candidat BCE : 1,731529
Pourcentage de la population ayant voté BCE : $\frac{1{,}731\,529}{11{,}4} \simeq 15{,}18$ %.
Pourcentage des inscrits ayant voté BCE : $\frac{1{,}731\,529}{4{,}877\,253} \simeq 35{,}5$ %.
Pourcentage des participants ayant voté BCE : $\frac{1{,}731\,529}{3{,}579\,257} \simeq 48{,}37$ %.
Pourcentage des suffrages exprimés ayant voté BCE : $\frac{1{,}731\,529}{3{,}109\,768} \simeq 55{,}68$ %.

Activité 6 (Expliquer ce désaccord)

► **Énoncé**

Une entreprise accorde à son personnel une prime de 50 dinars par mois et une augmentation de 2 %. Un cadre qui gagnait 900 dinars par mois s'attendait donc à toucher 969 dinars le mois suivant. Or, il constate que son nouveau salaire n'est que de 968 dinars !

► **Commentaire**

Point de vue du personnel :

1. Salaire avec prime : $900 + 50 = 950$ dinars ;
2. Augmentation de 2 % : $950 \times 1,02 = 969$ dinars.

Point de vue de l'entreprise :

1. Augmentation de 2 % : $900 \times 1,02 = 918$ dinars ;
2. Salaire avec prime : $918 + 50 = 968$ dinars.

Activité 7 (Publicité)

► **Énoncé**

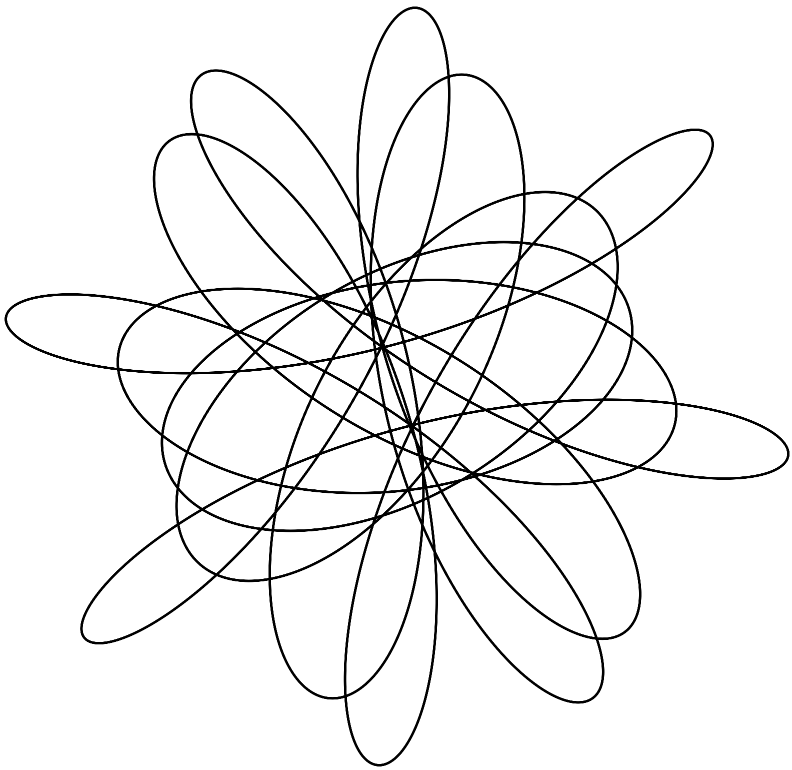
Voici une publicité. Que laisse-t-elle penser ?

► **Commentaire**

A première vue : 2 pour le prix d'un, soit 50 % de réduction !

En fait, nous voyons les deux nombres 2 et 1, sans faire attention à « EN BON D'ACHAT ».

En réalité , il faut donc acheter 2 produits pour en avoir un troisième gratuit, soit 33,33 % de réduction !



$$\begin{cases} x(t) &= -44\cos(10t) + 79\cos(14t + 88) + 100\cos(-22t - 169) \\ y(t) &= -44\sin(10t) + 79\sin(14t + 88) + 100\sin(-22t - 169) \end{cases}$$

L’Olympiade Mathématique Belge

Présentation

Historique et présentation

L’Olympiade Mathématique Belge (OMB) est née en 1976 et est organisée annuellement par la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d’expression française (SBPMef). Depuis 2004, elle compte entre 25 000 et 28 000 participants provenant d’environ 350 écoles de l’enseignement secondaire belge francophone et luxembourgeois. En 2017, pour sa quarantième édition, la barre des 750 000 participations a été franchie. Au regard d’une population de cinq millions d’habitants, il ne fait aucun doute que l’OMB rencontre un très grand succès.

Depuis 1996, trois catégories de participants existent : la catégorie miNi pour le premier degré de l’enseignement secondaire (12-14 ans), la catégorie miDi pour le second degré (14-16 ans) et la catégorie maXi pour le troisième degré (16-18 ans).

L’organisation de la compétition nécessite un énorme bénévolat. On estime à plus d’un millier le nombre de professeurs de mathématiques participant à la surveillance et à la correction de l’épreuve. Cette épreuve a lieu le mercredi après-midi, demi-jour de congé dans l’enseignement belge.

La première partie, les éliminatoires, se déroulent le second mercredi de janvier suivant les congés de Noël et Nouvel An. Elles se déroulent dans les écoles des participants et sont corrigées par les professeurs de ces écoles. Elles sont constituées de 30 questions parmi lesquelles 22 sont à choix multiples (une bonne réponse parmi cinq) et 8 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999.

Dans chacune des dix zones géographiques où la compétition a lieu, 12% des participants environ ont accès à la demi-finale. Celle-ci est organisée par les secrétaires régionaux dans dix universités ou écoles de ces régions au mois de février ou mars, selon les dates du congé de Carnaval. Les questionnaires sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 15 sont à choix multiples (une bonne réponse parmi cinq) et 15 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999. Les secrétaires régionaux envoient les résultats des participants au secrétaire national en vue de la sélection pour l’épreuve finale.

La finale a lieu peu après le congé de Pâques à l’université de Namur et regroupe entre 110 et 115 participants. Elle est surveillée et corrigée par les membres du jury national. Elle est constituée de quatre ou cinq questions ouvertes dont les réponses sont à justifier en détail.

Enfin, au mois de mai, a lieu, alternativement dans les universités de Bruxelles, Liège, Louvain-la-Neuve, Mons et Namur, la proclamation des résultats des trois catégories et la remise des prix offerts par la SBPMef ainsi que divers mécènes. Le prix Willy Vanhamme pour la réponse la plus élégante à un des problèmes de la finale y est offert. Les identités des participants francophones de l'équipe belge pour l'olympiade internationale y sont aussi annoncées.

Le jury national est constitué d'une vingtaine de membres. Ils sont enseignants, inspecteurs et conseillers pédagogiques de tous les réseaux de l'enseignement secondaire ou des Hautes Écoles ou Universités belges et luxembourgeoises. Ce jury compose les questionnaires de toutes les étapes de la compétition. Les membres du jury effectuent, chaque année, bénévolement, plusieurs dizaines d'heures de travail pour le bon déroulement de la compétition.

Motivation et coordonnées

L'OMB poursuit le triple but d'intéresser les élèves aux mathématiques par le biais d'une compétition passionnante, de mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation scolaire et de fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Les exercices de l'OMB sont libres de droits à condition de mentionner qu'ils proviennent de cette compétition. Plusieurs manuels belges de mathématiques puisent d'ailleurs dans cette réserve d'exercices.

Tous les quatre ans, la SBPMef publie un recueil des questions de quatre olympiades. Le dernier (2011-2014) constitué par Pascal Dupont et Michel Sebille ainsi que le suivant à partir du mois de septembre sont disponibles auprès de la SBPMef.

Contact : SBPMef

✉ Campus de l'UMons, bâtiment 4; Avenue Maistriau 19;
7000 Mons; Belgique
☎ +3265373304
www.sbpm.be (SBPMef)
omb.sbpm.be (OMB)

Problème 4 (finale maXi 2018)

Énoncé

Les nombres entiers de 0 à 2018 sont écrits au tableau. Un élève choisit à son gré deux d'entre eux, les efface et les remplace par un seul nombre égal à :

- leur somme s'ils sont tous deux pairs ;
- l'opposé de leur somme s'ils sont tous deux impairs ;
- le nombre impair moins le nombre pair s'ils sont de parités différentes.

L'opération est répétée jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre au tableau.

a) Donner un exemple de résultat final qu'il est possible d'obtenir.

b) Combien de résultats différents peuvent être obtenus, selon l'ordre dans lequel les nombres sont pris en compte ? Quels sont ces résultats ?

Solution

Cette solution est due au participant Simon Lemal qui a reçu le prix Willy Vanhamme récompensant la solution la plus élégante de la compétition toutes catégories confondues.

Soit A un ensemble de nombres entiers. On définit la fonction

$$f(A) = \sum_{x \in A} (-1)^x x.$$

Montrons que les opérations décrites dans l'énoncé, modifiant A en A' ne modifient pas $f(A)$.

Cas 1 : y et z sont pairs et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{y+z\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{y+z}(y+z) = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Cas 2 : y et z sont impairs et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{-y-z)\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{y+z}(-y-z) = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Cas 3 : y est pair et z est impair et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{z-y\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{z-y}(z-y) = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Ainsi, si on part d'un ensemble A, à la fin, le résultat r vérifie $f(A) = (-1)^r r$. Dès lors, $f(A)$ et r sont de même parité, $r = (-1)^{f(A)} f(A)$ et le résultat est unique.
Si $A = \{0;1;2;\ldots;2018\}$,

$$f(A) = \sum_{x=0}^{2018} (-1)^x x = 1009.$$

Le seul résultat possible est donc -1009.

Analyse du problème

Tout d'abord, ce qui frappe dans cette solution, c'est qu'on résout la seconde sous-question avant la première, mais absolument pas comme cas particulier de la deuxième. La plupart des participants avaient évidemment résolu la première sous-question d'abord. Voici une manière de procéder.

En associant les couples $(0;2018), (1;2017), (2;2016), \ldots, (1008;1010)$, on obtient 505 nombres 2018, 504 nombres -2018 et un nombre 1009 auquel on n'a pas touché.
En associant des nombres pairs, quel que soit l'ordre, on les additionne. En faisant cela ici, il nous reste alors un nombre 2018 et un nombre 1009. En les combinant, on obtient alors -1009.

Alors que le jury pensait cette sous-question assez aisée pour débuter, seule une moitié des participants est parvenue à y répondre correctement. Un premier type d'erreur est une distraction. Les nombres sont en quantité impaire et il reste donc 1009 quand on les associe en paires comme ci-dessus. Un second consiste en une explication incomplète ; on associe des nombres 2018 et -2018 pour faire des zéros, mais on oublie de dire que ces 504 nombres égaux à zéro ne modifient pas le résultat final. Enfin certains comptages étaient simplement erronés par la méthode ou par une faute de calcul élémentaire.

Les deux correcteurs avaient le même avis sur la seconde partie ; elle était très difficile à noter. Les six résolutions complètes, à d'éventuelles fautes mineures près, étaient toutes différentes. Les autres finalistes avaient des morceaux de solutions. Les correcteurs voyaient parfaitement comment les compléter, mais comment donner une note à un morceau de solution ? Les participants ne concevaient évidemment pas comment aller plus loin sinon ils l'auraient écrit. Comment dès lors dire que tel morceau de la solution (a) vaut $\frac{6}{20}$ tandis que tel morceau de la solution (b) vaut $\frac{8}{20}$? C'était sans nul doute le cas d'une question ou un autre choix de correcteurs aurait pu donner d'autres résultats. Cela dit, c'est souvent le cas des questions vraiment intéressantes.

Pour finir, cette question est sans doute un bel exemple de problème incitant à créer un invariant. Dans les entrainements aux olympiades internationales, la notion d'invariant est souvent présentée comme permettant de résoudre plus facilement (ou moins difficilement) un problème apparemment ardu. Le jury de l'OMB était satisfait d'avoir présenté un problème rentrant parfaitement dans ces critères.

Problème 5 (finale miNi 2016)

Énoncé

Mathilde s'amuse à essayer de recouvrir (entièrement et sans chevauchement) des damiers carrés avec trois types de plaques qu'elle tire de sachets contenant chacun une grande plaque 5×5, une moyenne 3×3 et deux petites 1×1. Elle s'est imposé d'utiliser chaque fois les quatre plaques d'un sachet.

1. Est-ce possible pour un damier 18×18 ?
2. Est-ce possible pour un damier 12×12 ?
3. Est-ce possible pour un damier 2016×2016 ?
4. Est-ce possible pour un damier 24×24 ?

Solution

Solution inspirée de celles de François Cayphas, Loris Degueldre et Traian Sirbu

1. C'est possible pour un damier 18×18.

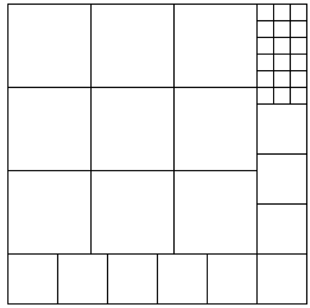
Voici un exemple de recouvrement. Le damier est complètement recouvert avec :

— 9 plaques 5×5 ;

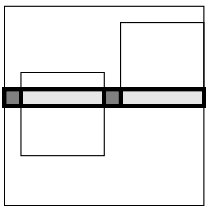
— 9 plaques 3×3 ;

— 18 plaques 1×1.

Mathilde a ouvert 9 sachets et il n'y a aucune plaque de trop.



2. Non, ce n'est pas possible pour un damier 12×12.



Combien de sachets seraient nécessaires ?

Les plaques contenues dans un sachet permettent de recouvrir une surface d'aire 36 :
$1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1^2 = 36$.

Pour recouvrir un damier d'aire $12^2 = 144$, Mathilde devrait utiliser 4 sachets : $\frac{144}{36} = 4$. Elle devrait donc placer 4 grandes plaques 5×5 sur le damier.

Une ligne du damier est de longueur 12 et de largeur 1. Si celle-ci est recouverte (en partie) par deux plaques 5×5, il reste à recouvrir deux petits carrés 1×1 ($12 - 2 \cdot 5 = 2$). Mathilde ne peut recouvrir cette surface restante qu'avec deux petites plaques 1×1.

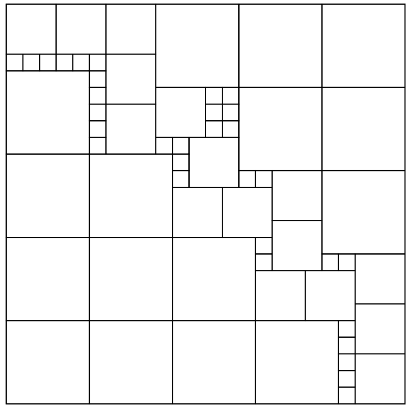
Finalement, comptons le nombre de lignes du damier où on trouverait (des parties de) deux grandes plaques 5×5. Les 4 grandes plaques à utiliser se composent chacune de 5 bandes horizontales 5×1. Sur le damier, on aurait donc au total $4 \cdot 5 = 20$ bandes 5×1, avec au maximum deux bandes 5×1 par ligne du damier de côté 12. Par conséquent, il y aurait certainement au moins $20 - 12 = 8$ lignes du damier recouvertes avec (des parties de) deux grandes plaques.

Pour chacune de ces 8 lignes, Mathilde aurait besoin de deux petites plaques 1×1. Il lui faudrait donc $8 \cdot 2 = 16$ petites plaques, or elle n'en a que $4 \cdot 2 = 8$ dans ses 4 sachets, donc c'est impossible.

3. Oui, c'est possible pour un damier 2016×2016.

   2016 est divisible par 18 ($2016 = 18 \cdot 112$). Il suffit de décomposer le damier 2016×2016 en 112^2 damiers 18×18 côte à côte. Mathilde peut recouvrir chacun des damiers 18×18 en utilisant complètement 9 sachets et en disposant les plaques de la même manière qu'au (a).

4. Oui, c'est possible pour un damier 24×24. Voici un exemple de recouvrement avec 16 sachets.



Analyse du problème

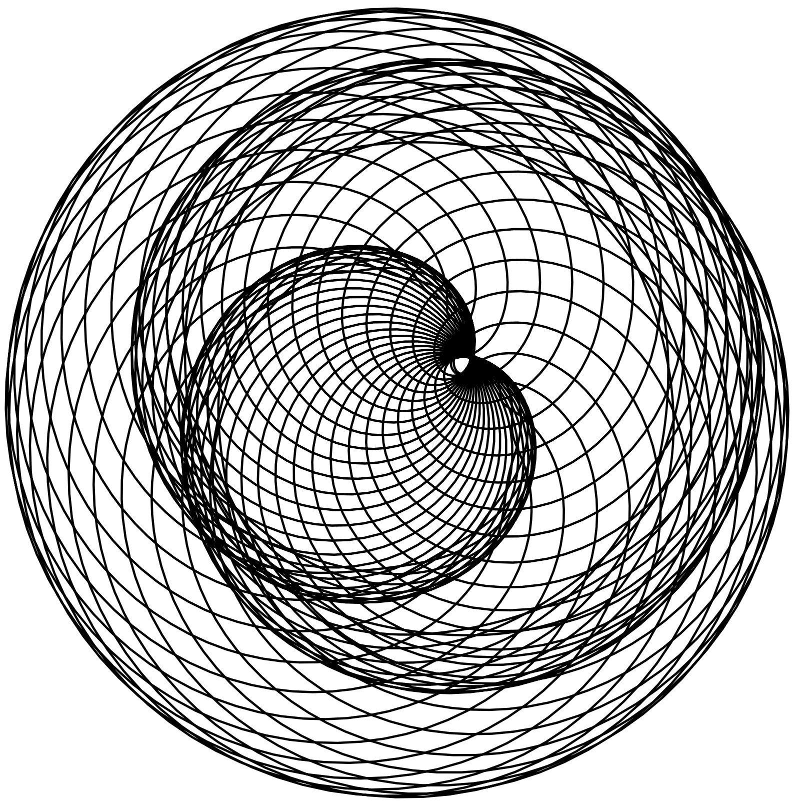
Tout mathématicien lisant cette question se demandera immédiatement pour quelles valeurs de n un damier $n \times n$ peut être recouvert de cette manière. Pour une telle catégorie d'âge, on ne peut évidemment procéder de la sorte. Le problème a donc été découpé en quatre questions demandant des raisonnements différents et qui pourraient conduire à une solution générale du problème.

La première question est assez simple pour que tout le monde puisse débuter. Il suffit de mettre les 9 grandes plaques dans un coin. Ensuite, on complète le pourtour avec les plaques moyennes et on termine avec les petites.

La deuxième question rentre dans le vif du sujet. Quatre sachets pourraient a priori couvrir un damier 12×12 puisque les plaques totalisent $12^2 = 144$ cases. Mais en réalité, ce n'est pas possible. Ceci montre que le problème général n'est donc pas uniquement arithmétique. Pour des participants de cet âge, expliquer pourquoi représente la vraie difficulté de la question. L'argument présenté n'est pas unique, mais toutes les solutions se ressemblaient.

La troisième question pousse les participants assez jeunes à abstraire leur raisonnement. Pas question évidemment de répondre par un dessin de damier 2016×2016. La solution est simple mais, sans l'abstraction nécessaire, impossible à développer pour un participant de 12 ans.

La dernière question de la finale doit être un véritable défi pour les plus doués des participants. C'est ici que le problème devient vraiment intéressant aussi pour les mathématiciens plus chevronnés. Il est conseillé ici de placer les grandes plaques dans des coins opposés pour compléter la diagonale vide par les pièces restantes. Aucune solution « régulière » n'a été trouvée par le jury. On entre vraiment dans un registre de créativité.



$$\begin{cases} x(t) &= 73\cos(37t+156)+72\cos(73t+154)+32\cos(108t-40) \\ y(t) &= 73\sin(37t+156)+72\sin(73t+154)+32\sin(108t-40) \end{cases}$$

Rallye Mathématique Champagne Ardenne Niger

Présentation

Historique

L'IREM de Reims organise depuis de nombreuses années un rallye mathématique gratuit destiné aux collégiens. Celui-ci a évolué dans le temps en s'ouvrant aux classes de 2^{nde} des lycées puis en devenant le RMCAN depuis la mise en place de son partenariat avec le Niger en 2003.

L'objectif est de favoriser l'intérêt des mathématiques, le travail en équipe ainsi que la participation et l'initiative des classes. Cette opération permet de montrer qu'il est possible de s'amuser en résolvant des exercices et que cette matière peut être ludique.

Compétition

► **Nombre de participants :**

— **en Champagne-Ardenne** : environ 1 000 classes et 25 000 élèves ;

— **au Niger** : environ 150 classes et 7 000 élèves.

► **Niveaux d'études**

De la 6^{e} à la 2^{nde}.

► **Type d'épreuves proposées**

Les 2 épreuves annuelles se déroulent selon les mêmes modalités. En 55 minutes, dans une salle de cours, tous les élèves d'une même classe doivent s'organiser en groupes pour résoudre une palette d'exercices. L'équipe « Rallye » les crée spécialement pour cette compétition ; les 6^{e} doivent résoudre les énigmes 1 à 8, les 5^{e} celles de 1 à 10, les 4^{e} de 1 à 12, les 3^{e} de 1 à 13 et les 2^{nde} toutes soit les 15. À l'issue de l'épreuve, chaque classe remet une fiche réponse ; seules les solutions sont donc transmises.

► **Fréquence**

Tous les ans, la demi-finale est organisée, en principe, autour de la mi-février dans chacun des établissements inscrits. La finale départementale se déroule un mercredi après-midi, fin mai, dans un lieu spécifique à chacun des 4 départements. Elle voit s'affronter les 3 meilleures classes par niveau et par département. Une comparaison des résultats permet de proclamer le(s) vainqueur(s) académique(s). Parallèlement, une finale est organisée à Niamey au Niger.

Partenaires

- **En Champagne-Ardenne**

URCA, Rectorat de l'Académie de Reims, IPR de mathématiques, Collectivités locales, APMEP Champagne Ardenne, Texas Instrument, Casio, HP.

- **Au Niger**

Université Abdou Moumouni de Niamey, Direction de la Formation Initiale et Continue, les sociétés : Nigelec, Nigertelecom, Sonidep, le Collège Mariama de Niamey et la télé nationale ORTN .

Contacts : IREM de Reims

- **Responsable académique :**

Isabelle Audra, @ isabelle.audra@wanadoo.fr

- **Site de l'IREM de Reims**

www.univ-reims.fr/site/laboratoires/irem/

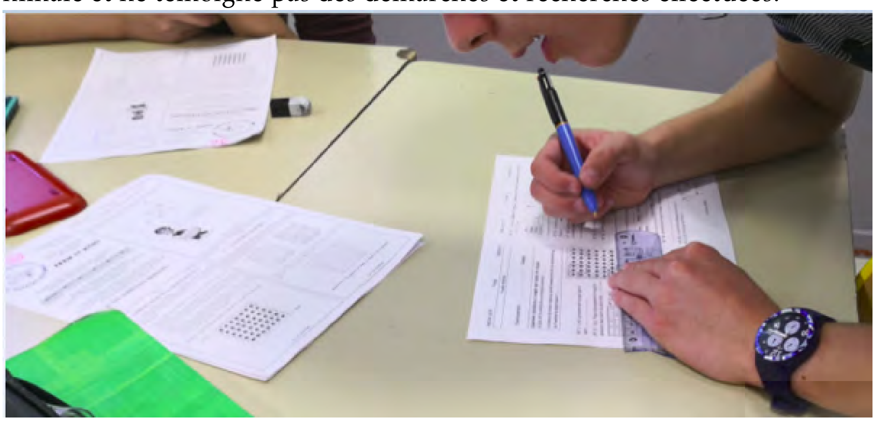
- **Site dédié**

rmcan.fr

Remarques communes aux sujets présentés

Les quinze exercices de la demi-finale, comme de la finale, doivent être variés et ludiques dans la forme comme sur le fond. Ils doivent être accessibles pour ne pas décourager les élèves mais permettre aussi un classement. Chaque exercice proposé est le résultat d'une sélection effectuée lors d'une rencontre académique, basée sur les propositions des sous-groupes départementaux et du Niger. Le choix des exercices et leur classement selon leur difficulté supposée s'effectuent dans le souci de proposer un sujet équilibré et attractif…

Chaque classe remet une fiche réponse complétée, la rédaction est minimale et ne témoigne pas des démarches et recherches effectuées.



Régulièrement des collègues nous demandent des énoncés, qu'ils utilisent en classe comme entraînement, pour des devoirs à la maison ou encore pour créer des animations (liaison école-collège par exemple). Quelques exercices ont été repris dans le premier manuel Sésamath 5e. Différentes revues spécialisées s'intéressent à nos productions.

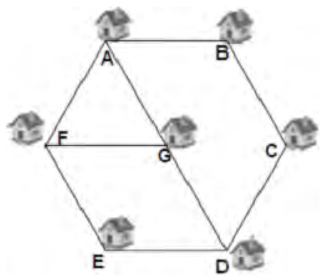
Les représentants des établissements concernés et les différents partenaires sont invités lors des finales. Celles-ci sont relayées dans les médias locaux en France et par la chaine de télévision nationale au Niger.

Pourquoi faire simple ? ⋆⋆⋆⋆⋆

(demi-finale 2018, énigme 12)

Énoncé

Au village de Coulra-Houle, on prend son temps : pour aller d'une maison à une autre (en suivant bien sûr l'une des 9 routes tracées), on ne choisit jamais le chemin le plus court mais toujours le plus long possible. Toutefois, il est interdit de passer deux fois au même endroit, sinon personne n'arriverait à destination !



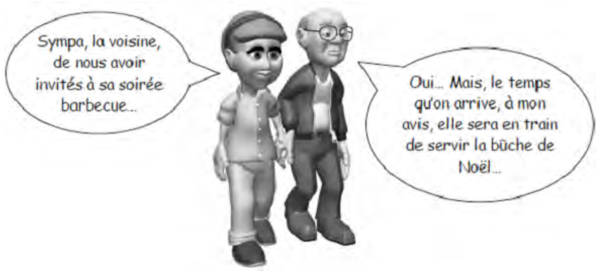
Par exemple, pour aller de B à C, on ne fait pas le trajet B-C mais B-A-G-F-E-D-C, soit 600 m, car il y a toujours 100 m entre deux maisons consécutives.

Les habitants sont tellement fiers de cette coutume qu'ils viennent d'organiser un concours : chacun devait additionner les distances (maximales) le séparant des 6 autres maisons et le gagnant était celui qui obtenait le plus grand total.

C'est Lilou qui a gagné, suivie par Yann et Julie à égalité.

Anthony est arrivé 4e, Gabriel 5e, Shaïna 6e et Océane dernière.

Sachant que Julie a plus de chemin à parcourir que Yann pour aller chez Shaïna, retrouve où habite chacune de ces sept personnes.



► **Fiche réponse à compléter (extrait)**

N° 12 : (★★★★★) Complète le tableau suivant en indiquant, pour chaque habitant, la lettre de sa maison :

	Lilou	Yann	Julie	Anthony	Gabriel	Shaïna	Océane
Lettre							

Solution

	Lilou	Yann	Julie	Anthony	Gabriel	Shaïna	Océane
Lettre	**E**	**C**	**G**	**B**	**F**	**A**	**D**

Niveaux concernés

4^{e}, 3^{e} et 2^{nde}.

Compétences mathématiques

Chercher, raisonner et calculer.

Domaines mathématiques abordés

— Nombres et calculs ;

— Grandeurs et mesures ;

— Organisation et gestion de données.

Analyse

Régulièrement des exercices de ce type, liés à la théorie des graphes, sont proposés. L'énoncé, non retenu dans un premier temps, a été retravaillé avant d'être sélectionné. Il nécessite beaucoup de rigueur pour être résolu. Ne pas chercher les distances les plus courtes rompt avec les problèmes d'optimisation et peut s'avérer perturbant. L'exemple donné est indispensable pour s'assurer d'une bonne compréhension par le plus grand nombre.

Pour trouver la solution, il faut franchir plusieurs étapes ; l'utilisation d'un tableau de distances peut s'avérer très judicieuse pour obtenir toutes les mesures nécessaires, ensuite, il faut effectuer les sommes attendues puis enfin départager les deux ex-æquo.

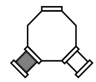
Cet exercice n'est donc pas aussi simple qu'il n'y paraît. Comme souvent, définir son niveau de difficulté a donné lieu à débat. Le taux de réussite est très faible pour les trois niveaux. S'assurer que les distances obtenues sont bien les plus longues, effectuer les sommes et les comparaisons prend un temps qui a sans doute manqué à trop de groupes de travail ; une bonne organisation du groupe est nécessaire.

Outre le travail sur les distances, le traitement des données trouve ici un intérêt particulier.

Il faut changer les filtres à 8 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆

(finale 2018, énigme 15)

Aujourd'hui, on s'amuse à assembler les « filtres à nombres » qui ont tous cet aspect extérieur :



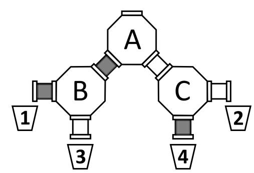
On dispose :

— d'un filtre A qui envoie les nombres pairs vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise,

— d'un filtre B qui envoie les nombres multiples de 3 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise,

— d'un filtre C qui envoie les nombres diviseurs de 30 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise.

Ainsi, dans la configuration ci-contre, lorsqu'on introduit les nombres 1, 2, 3 et 4 dans l'entrée du filtre du haut, ils se répartissent automatiquement comme indiqué dans les gobelets ci-contre :



Mais on dispose aussi de 4 autres filtres :

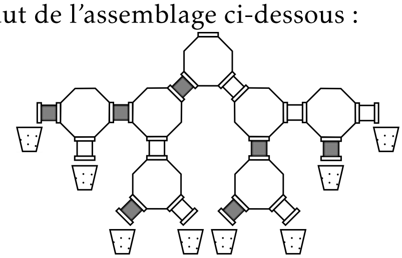
— le filtre D envoie les nombres diviseurs de 70 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise,

— le filtre E envoie les nombres strictement supérieurs à 2 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise,

— le filtre F envoie les nombres multiples de 4 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise,

— le filtre G envoie les nombres inférieurs ou égaux à 5 vers la sortie blanche et les autres vers la sortie grise.

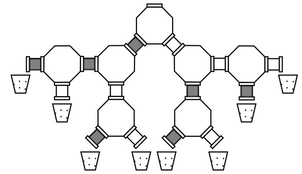
On introduit successivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 dans l'entrée du filtre du haut de l'assemblage ci-dessous :



Replace les lettres A, B, C, D, E, F et G sur les filtres pour que chacun des 8 nombres arrive dans un gobelet différent.

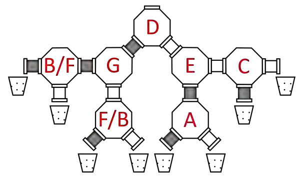
► **Fiche réponse à compléter (extrait)**

Nº 15 : (★★★★★★) Replace les lettres A, B, C, D, E, F et G sur les filtres.



Solution

Nº 15 : (★★★★★★) Replace les lettres A, B, C, D, E, F et G sur les filtres.



Compétences mathématiques

Chercher et raisonner.

Domaines mathématiques abordés

Nombre et calculs :

- comparaison de nombres entiers ;
- comprendre et utiliser les notions de divisibilité.

Analyse

Des exercices basés sur l'arithmétique sont régulièrement proposés. Plusieurs déclinaisons sont possibles rendant la résolution plus ou moins difficile, la solution unique ou non. Le sujet retenu est proposé en dernier élément donc pour seulement les élèves de seconde. La solution n'est pas unique puisqu'il y a permutation possible entre les filtres F et B. Le tri des nombres, filtre par filtre, ne présente guère de difficultés mathématiques. Il s'agit alors de trouver l'emplacement exact des filtres de sorte que les nombres soient partagés équitablement. Retrouver l'emplacement exact de chacun d'entre eux nécessite donc une réflexion sur le nombre et la nature des nombres obtenus à la sortie de branches...

Cet exercice peut être résolu par essais successifs.

Le nombre de classes participantes n'est guère significatif puisqu'il s'agissait d'une finale, mais cet exercice a été bien réussi.

Des codes et moi… ⋆⋆ (finale 2018, énigme 4)

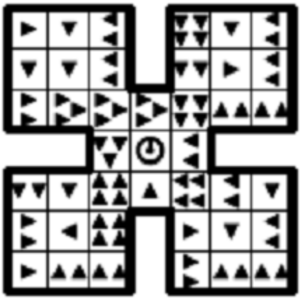
Énoncé

La petite Emma passe beaucoup trop de temps sur sa tablette. Pour la faire travailler un peu, son père a installé une application pour que sa fille soit obligée de résoudre une énigme avant chaque utilisation. Pour activer le bouton central et ainsi pouvoir utiliser sa tablette, Emma doit d'abord appuyer une fois sur chacune des autres cases dans un ordre bien précis.

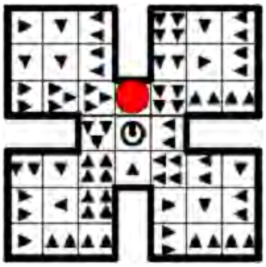
Indique-lui par quelle case elle doit commencer.

► **Fiche réponse à compléter (extrait)**

N° 4 : (★★) Colorie la case par laquelle Emma doit commencer :



Solution



Niveaux concernés

De la 6e à la 2nde.

Compétences mathématiques

Chercher et raisonner.

Domaines mathématiques abordés

Espace et géométrie : repérage et déplacement au cycle 3.

Analyse

Cet exercice a été rapidement sélectionné par l'ensemble de l'équipe. Il répond à plusieurs de nos critères : ludique, facile à comprendre par une majorité d'élèves… En dépit de sa forme imagée, il a été classé en niveau « 6e moyen » et non « 6e facile ». En effet, peu d'explications sont données et les élèves doivent découvrir la signification des symboles puis trouver le chemin complet. Dans un premier temps l'idée de donner un exemple de déplacement fut évoquée ; mais celle-ci fut vite abandonnée, l'exercice y perdant une grande partie de son intérêt.

La procédure attendue est basée sur le test. Une fois le principe de déplacement décrypté et bien assimilé, étayé de quelques essais pour atteindre le bouton central, tenter de « remonter » le parcours peut s'avérer pertinent et performant.

Le nombre de classes participantes n'est guère significatif ; parmi les finalistes, les 6^{e}, 3^{e} et 2nde ont très bien réussi cet exercice, les autres niveaux un peu moins ; peut-être se sont-ils posés trop de questions.

Cette activité sur le déplacement peut entrer dans le cadre de l'informatique débranchée et trouver sa place dans la partie initiation à la programmation du cycle 3, en amont d'exercices du type sortie de labyrinthe avec un logiciel de programmation.

Olympiades de mathématiques

Présentation

Différentes compétitions portent le nom d' « Olympiades de Mathématiques » : nous les regroupons ici dans un seul et même chapitre.

Organisée par le Ministère de l'Éducation Nationale, l'**Olympiade Nationale de Mathématiques** (initialement « Olympiade Académique de Mathématiques ») attire chaque année plus de 21 000 candidats de toutes les sections de première (dont 2 000 de lycées français à l'étranger). En outre, certaines Académies (en 2018 : Amiens, Besançon, Caen, Corse, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Orléans-Tours, Reims, Rouen, Versailles) organisent des Olympiades de Quatrième (concours René Merckhoffer), et l'Académie de Versailles, des Olympiades de Troisième et Seconde. Tous les établissements reçoivent une invitation officielle à participer à ces compétitions, et l'APMEP publie chaque année (sur son site) les annales de l'Olympiade Nationale de Première.

Par ailleurs, plusieurs compétitions internationales portent le nom d'« Olympiades », notamment la plus ancienne d'entre elles, l'**Olympiade Internationale de Mathématiques (IMO ou OIM pour les francophones)** à laquelle, chaque année, plus de cent pays envoient chacun ses six meilleurs lycéens. La France participe également à l'Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques (JBMO) pour les élèves de quinze ans et demi maximum ; l'Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles (EGMO), réservée aux filles (qui sont trop peu nombreuses dans les autres Olympiades : seulement 10% à l'IMO) ; le Master Roumain de Mathématiques (RMM) ; le Championnat Méditerranéen des Jeunes Mathématiciens (MYMC), épreuve par équipes mixtes, assez différente des Olympiades ; et parfois l'Olympiade Balkanique de Mathématiques (BMO), l'Olympiade de Mathématiques du Bénélux (BxMO)...

Toutes ces compétitions internationales ont en commun que les différentes équipes de France sont entraînées et sélectionnées dans le cadre de la **Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)**, organisée par l'association **Animath**. Début juin, la Coupe Animath de Printemps qui, en 2018, a attiré 781 candidats (de première à quatrième), permet de sélectionner 80 participants pour un stage de dix jours fin août. Un second stage, de cinq jours, est organisé fin octobre pour une quarantaine de collégiens. La Coupe Animath d'Automne (début octobre) permet de recruter plus de cent participants à la préparation par correspondance, consistant en cinq envois (chaque mois, une série d'exercices à résoudre), cinq tests en temps limité et, pour une quarantaine d'élèves sélectionnés, un stage de six jours en février. Parmi eux, une trentaine seront qualifiés pour l'une ou l'autre des compétitions internationales. Il est bien sûr possible de suivre la préparation olympique pendant plusieurs années, et même d'être plusieurs fois candidat aux Olympiades Internationales (jusqu'au baccalauréat).

Historique

— 1959 : première Olympiade Internationale de Mathématiques (IMO) en Roumanie, entre sept pays balkaniques.

— 1967 : première participation française à l'IMO.

— 1983 : l'IMO a lieu en France (au lycée Louis le Grand à Paris).

— 1998 : création d'Animath qui, entre autres choses, « veille à l'essor des compétitions mathématiques ». Premier stage olympique Animath (dans le cadre de l'Université d'Été de la FFJM).

— 2001 : première Olympiade Académique de Mathématiques, permettant notamment de repérer des candidats potentiels à l'IMO.

— 2005 : l'Olympiade Académique est désormais ouverte à tous les élèves de première.

— 2006 : première Olympiade de Quatrième, dans l'Académie de Versailles.

— 2008 : la France étend sa participation aux compétitions internationales :

2008 – BMO (créée en 1984),

2013 – JBMO (créée en 1997) et EGMO (créée en 2012),

2015 – RMM (créé en 2008), BxMO (créée en 2009) et MYMC (créé en 2013).

— 2011 : l'Olympiade Académique accepte les Établissements Français à l'Étranger.

— 2014 : création de l'Olympiade de Troisième et Seconde par équipes, dans l'Académie de Versailles.

Compétition

- **Nombre de participants**

— Olympiade Nationale de Première : plus de 21 000.

— Olympiade de Quatrième - concours René Merckhoffer : plus de 7 000.

— Olympiade de Troisième - Seconde : plus de 1 300.

— Coupe Animath : 781 au printemps 2018.

— Olympiades Internationales : généralement 6 par pays et par compétition, sélectionnés (en France, par la POFM suite à la coupe Animath). En tout, 36 Français qualifiés en 2018.

- **Niveaux d'études**

— Olympiade Nationale : toutes sections de Première.

— Olympiades de Quatrième, Troisième et Seconde : comme leurs noms l'indiquent.

— Coupe Animath et POFM : quatrième à terminale. Les Olympiades Internationales sont en principe ouvertes à tous les lycéens et collégiens, jusqu'au baccalauréat. Dans d'autres pays, certains sont candidats à l'IMO jusqu'à six années de suite. En France, la plupart des qualifiés pour l'IMO sont en terminale, mais la JBMO accueille des collégiens.

- **Type d'épreuves proposées**

— Olympiade Nationale de Première (mi-mars) : depuis 2016, deux épreuves distinctes et consécutives, de deux heures (et deux problèmes) chacune, dont la seconde, académique, peut être résolue par équipe (obligatoirement mixtes depuis 2018 si les candidats proviennent d'un établissement mixte).

— Olympiades de Quatrième – concours René Merckhoffer (fin mars) : individuelle (ou par équipes de trois élèves à Amiens), quatre exercices indépendants en deux heures.

— Olympiades de Troisième et Seconde (même date, fin mars) : par équipes de trois élèves, pouvant être de deux niveaux distincts. Trois ou quatre exercices en deux heures.

— **Coupe Animath**
Éliminatoires en ligne (12 questions dont les réponses sont des nombres entiers : il faut 7 réponses justes sans justification). Les lauréats de certaines compétitions sont dispensés d'éliminatoires.
Épreuve de trois heures pour collégiens, quatre heures pour lycéens, début juin (coupe de printemps) et début octobre (coupe d'automne), de cinq exercices indépendants notés chacun sur 7 points. Un sujet pour collégiens, un pour lycéens (deux exercices communs).

— **Olympiade Internationale de Mathématique**
Deux épreuves de 4 heures et demie chacune (deux matins consécutifs, mi-juillet), comprenant chacune trois problèmes (un accessible, un difficile et un très difficile), notés chacun sur 7.
Les autres olympiades sont similaires : RMM en février, EGMO en avril, BMO et BxMO fin avril – début mai, JBMO fin juin. Une seule épreuve de 4 heures et demi (4 problèmes) aux JBMO, BMO et BxMO, problèmes notés chacun sur 10 aux JBMO et BMO. Le championnat MYMC (en juillet, par équipes mixtes) est très différent.

Partenaires

Ministère de l'Education Nationale, Animath, ainsi que de nombreux sponsors (Inria, Texas Instruments, Hewlett Packard, Crédit Mutuel Enseignant, École Polytechnique, Casio, Google, CNRS, Fondation Blaise Pascal, Fondation Société Générale, Cassini, Dunod, Vuibert, Pour la Science, Belin, Tangente, Kangourou, Wolfram, etc.)

Renseignements et Contacts

— Olympiade Nationale (première) :
eduscol.education.fr/cid46901/
olympiades-academiques-de-mathematiques.html
www.apmep.fr/-Olympiades-A-partir-de-2010-

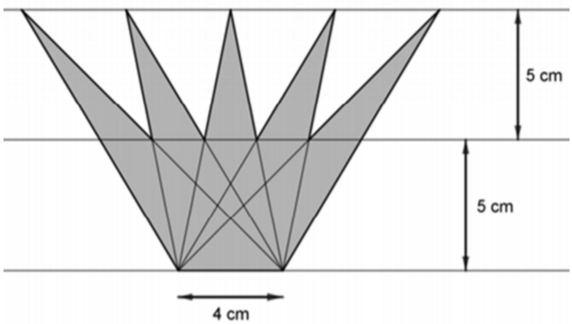
— Préparation olympique (POFM) : maths-olympiques.fr

— Animath : www.animath.fr

— @ olymp@animath.fr

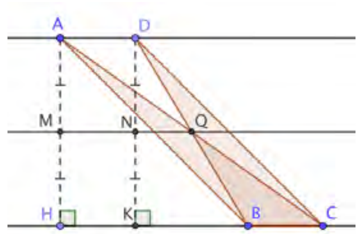
La couronne (2018, Olympiade 4e)

Énoncé



Les sommets du polygone grisé représenté ci-contre sont situés sur des droites parallèles espacées de 5 cm. La « base » a pour longueur 4 cm. Quelle est l'aire de ce polygone ?

Solution



La propriété de la droite des milieux appliquée aux triangles AHC et DKB prouve que [AC] et [BD] ont même milieu Q, donc que ABCD est un parallélogramme et que AD = BC = 4 cm. De la même manière, on met en évidence trois autres parallélogrammes de côté BC. La « couronne » peut donc se voir comme un trapèze de bases (4×4) cm et 4 cm, et de hauteur 10 cm, donc d'aire : $\frac{1}{2}(16+4) \times 10 = 100$ cm^2, dont on a retranché quatre triangles de même aire que ADQ, soit $\frac{1}{2}(4 \times 5) = 10$ cm^2. Donc l'aire de la couronne vaut : $100 - (4 \times 10) = 60$ cm^2.

Remarque

Cette solution suppose connue la propriété de la droite des milieux des côtés d'un triangle. Le théorème de Thalès fournirait une autre solution plus rapide, mais il n'est pas au programme de quatrième.

Suites de chiffres (2018, Olympiade 3e - 2nde)

Énoncé

Le protocole suivant permet de définir des suites de chiffres :

— Donner les quatre premiers chiffres de la suite, par exemple 1 – 2 – 3 – 4.

— Chaque terme nouveau est le chiffre des unités de la somme des quatre précédents.

Par exemple, en partant de 1 – 2 – 3 – 4, les chiffres qui suivent sont : 0 – 9 – 6 – 9 – 4 – 8 – 7 – etc.

1. Quel est le vingtième chiffre de la suite dont les premiers termes sont 1 – 7 – 8 – 9 ?
2. Quels sont les chiffres de la suite dont les premiers termes sont 5 – 5 – 5 – 5 ?
3. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître la succession 2 - 0 - 1 - 7 ?
4. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître une deuxième fois 2 - 0 - 1 - 8 ?

Solution

1. La suite débutant par 1 – 7 – 8 – 9 se poursuit ainsi : 5 – 9 – 1 – 4 – 9 – 3 – 7 – 3 – 2 – 5 – 7 – 7 – 1 – 0 – 5 – 3. Le vingtième chiffre est donc 3.
2. La suite débutant par 5 – 5 – 5 – 5 se poursuit ainsi : 0 – 5 – 5 – 5 – 5 – 0 - etc. Le motif (5 – 5 – 5 – 5 – 0) se répétera indéfiniment.
3. On observe les parités des termes de la suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 : pair, pair, impair, pair. Le cinquième terme, 1, est impair et les suivants reproduisent le schéma « pair, pair, impair, pair, impair » à l'infini. En effet, si e a même parité que $a+b+c+d$, alors $b+c+d+e$ a même parité que a, donc le $n+5$-ème terme de la suite a toujours même parité que le n-ième. Notamment la suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 ne contiendra jamais deux chiffres impairs consécutifs : elle ne contiendra donc jamais la séquence 2 - 0 - 1 - 7.
4. Chaque séquence de quatre chiffres a un successeur unique, mais également un prédécesseur unique. En effet, pour b, c, d, e donnés, il existe un et un seul chiffre a tel que $a+b+c+d$ ait pour chiffre des uni-

tés e : a est le chiffre des unités de $e+(10-d)+(10-c)+(10-b)$. Or il n'y a que 10 000 séquences de quatre chiffres possibles, donc en réitérant le protocole plus de 10 000 fois, nécessairement une même séquence de quatre chiffres apparaîtra plus d'une fois : cela résulte du « principe des tiroirs ». Si l'on appelle « redite » la première des séquences qui apparaît plus d'une fois, celle-ci a un prédécesseur (qui l'a fait apparaître pour la première fois) et un « autre » qui la fait apparaître pour la deuxième fois : c'est impossible, puisque toute séquence de quatre chiffres n'a qu'un seul prédécesseur. On doit donc décaler : c'est ce prédécesseur qui est la « redite »... et ainsi de suite. Finalement, c'est la première séquence, 2018, qui est répétée (cela s'appelle parfois le théorème de la poêle à frire).

Commentaire

Cet exercice fait découvrir aux candidats des stratégies olympiques classiques, mais absentes des programmes scolaires. Le raisonnement de la dernière question revient à interpréter le protocole comme une permutation des séquences de quatre chiffres : $(1, 7, 8, 9) \to (7, 8, 9, 5) \to (8, 9, 5, 9) \to (9, 5, 9, 1) \to \cdots$ car la transformation associant à une séquence la suivante est injective. Or toute permutation des éléments d'un ensemble se décompose en cycles : chacune des 10 000 séquences appartient donc à un cycle. Le cycle $(5, 5, 5, 5) \to (5, 5, 5, 0) \to (5, 5, 0, 5) \to (5, 0, 5, 5) \to (0, 5, 5, 5)$ est de longueur 5, ce qui répond à la deuxième question. $(2, 0, 1, 8)$ appartient lui aussi à un cycle, ce qui répond à la quatrième, et $(2, 0, 1, 7)$ appartient à un autre cycle. En effet, modulo 2, les $2^4 = 16$ séquences se répartissent en quatre cycles, dont trois de longueur 5 :
$(0, 0, 0, 0)$,
$(0, 0, 0, 1) \to (0, 0, 1, 1) \to (0, 1, 1, 0) \to (1, 1, 0, 0) \to (1, 0, 0, 0)$,
$(0, 0, 1, 0) \to (0, 1, 0, 1) \to (1, 0, 1, 0) \to (0, 1, 0, 0) \to (1, 0, 0, 1)$,
$(1, 0, 1, 1) \to (0, 1, 1, 1) \to (1, 1, 1, 1) \to (1, 1, 1, 0) \to (1, 1, 0, 1)$.
$(2, 0, 1, 7) \equiv (0, 0, 1, 1) \pmod 2$ appartient au second de ces cycles modulo 2, et $(2, 0, 1, 8) \equiv (0, 0, 1, 0) \pmod 2$ au troisième, donc ils appartiennent à deux cycles distincts, également modulo 10. Modulo 5, les $5^4 = 625$ séquences possibles se répartissent en trois cycles, le cycle trivial $(0, 0, 0, 0)$ de longueur 1, et deux cycles de longueur 312 chacun : celui contenant $(0, 0, 0, 1)$ et un autre, qui contient par exemple $(1, 1, 1, 1)$. À l'aide d'un ordinateur, on remarque que si l'on appelle a_n le n-ième chiffre de la suite, quelle que soit la suite et quel que soit n, a_{n+78} est congru à $3a_n$ modulo 5 : il suffit de le vérifier pour un seul élément de chacun des cycles modulo 5. Ainsi, modulo 5, le 78-ième successeur de $(2, 0, 1, 3)$ est $(1, 0, 3, 4)$, et modulo 2, le 78-ième successeur, égal au 3-ième successeur,

de (0, 0, 1, 0), est (0, 1, 0, 0). Donc modulo 10, le 78-ième successeur de (2, 0, 1, 8) est (6, 5, 8, 4). Dès lors, la longueur d'un cycle modulo 10 est le PPCM de sa longueur modulo 2 et de sa longueur modulo 5 : ainsi, six cycles sont de longueur 1560 – notamment celui auquel appartient (2, 0, 1, 8) et celui auquel appartient (2, 0, 1, 7) – trois cycles ont pour longueur 5 – notamment celui auquel appartient (5, 5, 5, 5) – deux cycles ont pour longueur 312 – tous leurs chiffres sont pairs – et le cycle trivial (0, 0, 0, 0) a pour longueur 1.

Double condition

(2018, coupe Animath de printemps - exercice commun : 4e à 1re)

Énoncé

Trouver tous les nombres réels a tels que : $a+\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ soient des entiers.

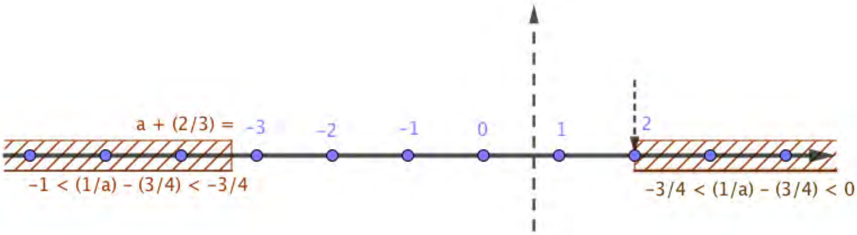
Solution 1

Si l'on appelle m l'entier $a+\frac{2}{3}$ et n l'entier $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$, $3a=3m-2$ et $\frac{4}{a}=4n+3$, donc $(3m-2)(4n+3)=12$. Or $4n+3$ est impair : les seuls diviseurs impairs de 12 étant $-3, -1, 1, 3$, on doit avoir :

- soit $4n+3=-3$, équation dont la solution n'est pas un entier ;
- soit $4n+3=-1$, équation qui admet pour solution $n=-1$, mais cela entraîne $3m-2=-12$, équation dont la solution n'est pas un entier ;
- soit $4n+3=1$, équation dont la solution n'est pas un entier ;
- soit $4n+3=3$, équation qui admet pour solution $n=0$, ce qui entraîne $3m-2=4$, donc $m=2$. Comme $a=m-\frac{2}{3}$, l'unique solution du problème est : $a=\frac{4}{3}$.

Solution 2

a doit être « suffisamment petit » ($-4 \leq a \leq \frac{4}{3}$) pour que $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ soit entier, car pour $a > \frac{4}{3}$, $0 < \frac{1}{a} < \frac{3}{4}$, donc $-\frac{3}{4} < \frac{1}{a}-\frac{3}{4} < 0$, et pour $a < -4$, $-\frac{1}{4} < \frac{1}{a} < 0$ donc $-1 < \frac{1}{a}-\frac{3}{4} < -\frac{3}{4} < 0$, or il n'existe pas d'entier strictement compris entre -1 et 0.



Par ailleurs, pour $-4 \leq a \leq \frac{4}{3}$, $-\frac{10}{3} \leq a+\frac{2}{3} \leq 2$, donc $a+\frac{2}{3}$ ne peut prendre que six valeurs entières : -3, -2, -1, 0, 1, 2. Les seules solutions possibles sont donc : $-\frac{11}{3}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$. Comme $\left(-\frac{3}{11}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$ et $\left(3-\frac{3}{4}\right)$ ne sont pas des entiers, la seule de ces valeurs qui convient (pour laquelle $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ est lui aussi un entier) est $a=\frac{4}{3}$.

Stratégie équestre (2018, Olympiade Internationale)

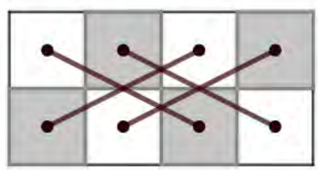
Énoncé

Un site est un point $(x; y)$ du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.
Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Remarque préliminaire

Dans l'énoncé initial, Alice et Bernard (en anglais : Horst et Queenie) plaçaient non pas des pierres, mais des chevaux et des reines sur un échiquier. Au moment de finaliser l'épreuve, le jury international a formulé différemment l'énoncé : notamment l'alternance de cases blanches et noires qui caractérise un échiquier n'y figure plus explicitement, mais les candidats entraînés savent qu'un tel coloriage est souvent nécessaire pour résoudre ce genre de problème. Au lieu de cases de l'échiquier menacées par un cheval, on parle de sites distants de $\sqrt{5}$, mais cela revient au même. L'important est de bien distinguer : la détermination du nombre K, la preuve qu'Alice peut effectivement placer au moins K pierres rouges quelle que soit la stratégie de Bernard, et la preuve que Bernard dispose d'au moins une stratégie pour empêcher Alice de placer plus de K pierres rouges, quelle que soit la manière de jouer d'Alice.

Le problème ressemble à celui, plus classique : combien peut-on placer de chevaux sur un échiquier (de 64 cases) mutuellement imprenables ? 32 : il suffit d'en placer un sur chaque case noire, car un cheval placé sur une case noire ne menace que des cases blanches.



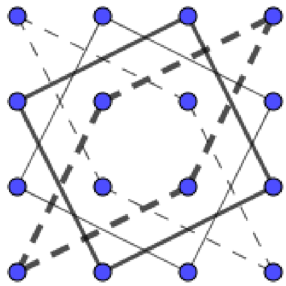
Et pour prouver qu'on ne peut pas en placer 33, on divise l'échiquier en rectangles de 8 cases : un tel rectangle contient quatre paires de cases qui se menacent mutuellement. Si l'on place 33 chevaux sur un échiquier, l'un de ces 8 rectangles de 8 cases contiendra au moins 5 chevaux (principe des tiroirs), et l'une des quatre paires de cases de ce rectangle contiendra au moins deux chevaux, qui seront donc mutuellement prenables.

Le raisonnement est ici similaire, mais la formalisation est un peu moins simple et l'échiquier est plus grand.

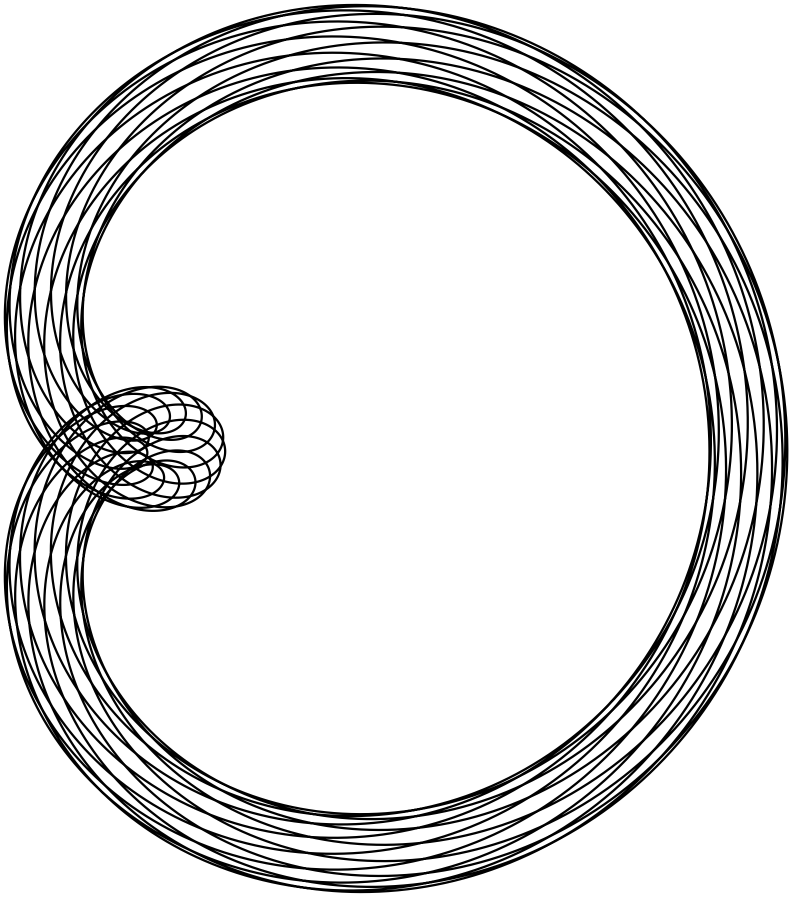
Solution

La réponse est $K = 100$. En effet, tant qu'Alice ne joue que sur des cases noires, que l'on appellera plutôt des sites pairs, c'est-à-dire des sites tels que $x + y$ soit pair, elle pourra toujours continuer à jouer, car la distance de deux sites pairs ne peut pas être $\sqrt{5}$. Si $x + y$ et $x' + y'$ sont tous deux pairs, $(x - x')^2 + (y - y')^2$ est lui aussi pair, donc différent de 5. Or il existe 200 sites pairs, et même si Bernard décide de jouer lui aussi uniquement sur des sites pairs, comme il ne joue pas plus de fois qu'Alice, il ne peut pas l'empêcher de jouer au moins 100 fois sur des sites pairs.

En revanche, il peut l'empêcher de jouer 101 fois, quelle que soit la stratégie d'Alice. En effet, notre « échiquier » de 400 sites peut être divisé en 25 ensembles de 16 sites chacun, et les 16 sites d'un tel ensemble peuvent être groupés quatre par quatre, conformément à la figure suivante :



deux « carrés » (en traits pleins) et deux « losanges » (en pointillé), ayant chacun tous leurs côtés de longueur $\sqrt{5}$. Chaque fois qu'Alice pose une pierre en un sommet d'un tel carré ou losange, Bernard choisit de poser une pierre au sommet opposé du même carré ou losange. Les deux sommets restants étant distants de $\sqrt{5}$ de celui où Alice a placé sa pierre, Alice ne pourra plus y poser de pierre : elle ne pourra donc poser qu'une seule pierre par carré ou losange, et comme notre échiquier compte en tout cent carrés ou losanges, elle ne pourra pas placer plus de cent pierres.



$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & -11\cos(-8t+142)-79\cos(-15t-45)+52\cos(-30t-90) \\ y(t) & = & -11\sin(-8t+142)-79\sin(-15t-45)+52\sin(-30t-90) \end{array} \right.$$

Rallye Mathématique de Loire-Atlantique

Présentation

Le Rallye Mathématique de Loire-Atlantique est une compétition qui s'adresse à des classes entières, avec deux catégories possibles :

— une catégorie « sixième » pour les classes entières de 6^{e} ;

— une catégorie « mixte cycle 3 », adressée aux équipes mixtes, CM2/6^{e} (constituée par moitié d'élèves de CM2 et d'élèves de 6^{e}) ainsi qu'aux classes entières de CM2. Il est possible de faire participer une classe à double niveau CM1/CM2.

Cette catégorie mixte permet de mettre en place, ou de consolider, une véritable liaison CM2-6^{e} et de façon générale, cette compétition s'inscrit totalement dans le cadre du socle commun. Les élèves pratiquent une démarche scientifique pour résoudre les problèmes, tout en développant l'autonomie, l'initiative et le respect des autres, indispensables dans le travail d'équipe qui est requis pour ces épreuves. La participation à un concours suscite de plus un engouement chez une grande partie de nos élèves, aiguise leur appétit pour les mathématiques dans un esprit de coopération, à l'image de la devise de notre Rallye : « le groupe est plus fort que le plus fort du groupe ».

Historique

Créé à l'IREM des Pays de la Loire, centre de Nantes en 1990, arrêté en 2000, le Rallye faisait concourir jusqu'à dix niveaux : CM1 et CM2 ; 6^{e} et 5^{e} ; 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e} SEGPA, 4^{e} et 3^{e} Techno.

Le Rallye reprend à l'IREM en 2007 pour les niveaux CM2 et 6^{e}.

Une catégorie « mixte CM2-6^{e} » est créée en 2009. Cette catégorie évolue en 2017 en catégorie « mixte cycle 3 ».

Dans chaque établissement inscrit, les classes passent d'abord deux épreuves qualificatives. Puis, une dernière épreuve regroupe dans un même lieu du département les classes finalistes.

— En 2008, 167 classes (58 CM2 et 109 6^{e}), 3 755 élèves.

— En 2018, 384 classes (222 groupes mixtes, 162 classes en 6èmes), 9 536 élèves.

Épreuves

— Une première épreuve de dix problèmes à résoudre en une heure.

— Une deuxième épreuve dans laquelle les élèves choisissent six problèmes dans une liste de douze.

— Une finale :

une partie « Épreuves » d'une heure, dans laquelle trois problèmes sont imposés, trois problèmes à choisir parmi cinq et deux manipulations à choisir parmi quatre ;

une partie « Ateliers » dans laquelle les élèves se répartissent au préalable (course d'orientation, jeu de Hex, manipulations, multimédia).

Calendrier

La première épreuve se déroule en janvier, la deuxième épreuve en mars lors de la semaine des mathématiques, et la finale début juin.

Partenaires

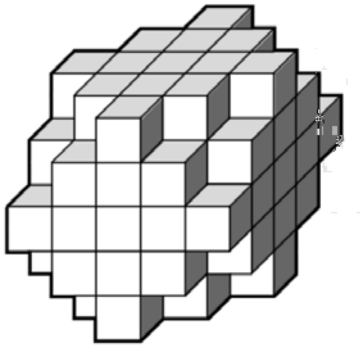
APMEP, ALEPH, Casio, Texas Instruments, CIJM, MGEN, Conseil Départemental de Loire-Atlantique, Crédit Mutuel Enseignant, Inspection académique de Loire-Atlantique, Rectorat de l'académie de Nantes.

Contacts

✉ RALLYE MATHEMATIQUE DE LOIRE-ATLANTIQUE
IREM des Pays de la Loire-Atlantique
Franck Fougère
Collège Albert Vinçon
23, route de Saint-Marc
44600 Saint-Nazaire
☎ : 06-64-31-18-69
@ franck.fougere@ac-nantes.fr
www.rallye44.cijm.org

Enoncé 1 (Problème 5 deuxième épreuve 2014/2015, facultatif)

Quelle que soit la façon de poser cet objet sur une table, on le voit toujours ainsi :



Combien faut-il de petits cubes pour construire cet objet ?

Domaines mathématiques abordés

— géométrie dans l'espace ;

— dénombrement.

Pourquoi ce sujet ?

— Avoir la possibilité de développer des raisonnements différents pour arriver au résultat.

— Faire appel à la géométrie dans l'espace.

— Les attendus de fin de cycle sont : reproduire, représenter, construire des solides simples sous la forme de maquettes ou de dessins.

— Amener les élèves à confronter leurs méthodes et à valider leur réponse collective.

Compétences mathématiques mises en jeu :

— Chercher : les élèves doivent observer, s'engager dans une démarche, faire un choix de stratégie de dénombrement.

— Raisonner : les élèves doivent argumenter et faire aboutir leur stratégie en écoutant et en comprenant les stratégies tierces.

— Communiquer : les élèves doivent confronter leurs recherches en utilisant un vocabulaire adapté pour se faire comprendre.

— Calculer.

Quelles sont les procédures attendues ?

1. On imagine le grand cube et on soustrait les cubes manquants.
2. On compte par couche horizontale
3. On compte par couche verticale.
4. On compte par colonne de cubes.
5. Par symétrie, on compte le nombre de cubes manquants dans chaque coin, on le multiplie par 8 et on soustrait ce nombre au grand cube.

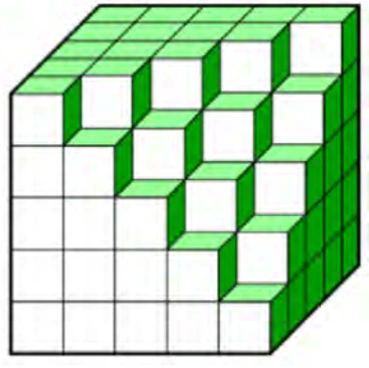
Résultats observés :

Le nombre de classes de mixtes et sixièmes étaient respectivement 91 et 164 classes. Ce problème a été choisi par 36 % des mixtes et 24 % des sixièmes. Ce problème a été réussi par 15 % des mixtes et 22 % des sixièmes.

Ces résultats nous confortent dans l'idée de proposer ce type de problèmes. Il est peu choisi et peu réussi. La géométrie dans l'espace reste un thème difficile. Dans ce problème, elle a le mérite de permettre différentes manières de raisonner pour aboutir à la réponse.

Quelle exploitation en classe ?

En entraînement, nous étudions l'exercice suivant :



Avec des petits cubes on a construit un gros cube, puis on en a retiré quelques-uns.

Combien de cubes avons-nous retirés ?

C'est un travail mené dans une classe de sixième en amont de la seconde épreuve. Des exercices ouverts sont donnés régulièrement aux élèves.

Pour ce type d'exercice, nous faisons la « mise en place » décrite ci-après :

— Temps de recherche individuel avec prise de notes de recherche sur le cahier d'exercices.

  Consigne orale : « temps individuel en silence, vous laisserez trace de votre recherche sur votre cahier ».

  Compétence travaillée : Chercher.

— Temps d'explicitation en groupe : chacun explique sa recherche aux autres sans échanges.

  Consigne orale : « Sans commentaire, vous montrez aux autres camarades du groupe votre démarche, vos calculs et vos résultats. ».

  Compétence travaillée : Communiquer.

— Temps de confrontation en groupe :

  Consigne orale : « Vous devez vous mettre d'accord par petits groupes. ».

  Chaque groupe argumente par l'exposé de sa démarche.

  Compétences travaillées : Raisonner, Communiquer.

  L'objectif majeur est de faire émerger les différentes manières de raisonner.

— Temps de synthèse magistral : un élève rapporteur du groupe vient au tableau afin de lister les démarches qui aboutissent.

Trois dénombrements ont émergé :

1. On remplit le pavé et on soustrait les cubes manquants.
2. On compte par couche : soit horizontale, soit verticale.
3. On compte par colonne de cubes, c'est ici la méthode qui a le plus convaincu.

Dans une des deux classes où cette séance a été testée, la régulation a été un peu différente car un groupe n'arrivait pas à se mettre d'accord. Il y avait une confusion entre les mots : « face » et « cube » et donc un cube était compté plusieurs fois.

La synthèse de groupe a permis de préciser les définitions et de faire comprendre qu'un cube était dénombré plusieurs fois si on comptait ses faces.

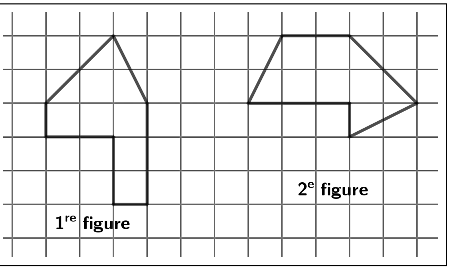
L'exposé des différentes méthodes amène les élèves à valider leur résultat par la multiplicité de raisonnements qui aboutissent à la même conclusion.

Énoncé 2 (Épreuve 1, problème 5, 2018)

L'aire de la 1^re^ figure est de 63 schmoguls.

12 schmoguls = 1 rafnoute

Quelle est, en rafnoutes, l'aire de la 2e figure ?



(52 % de réussite en mixte et 43 % en 6e)

Domaines mathématiques abordés

— Grandeurs et mesures

— Gestions de données

Pourquoi ce sujet ?

Plusieurs notions sont mises en jeu : l'aire d'une surface et l'unité dans laquelle elle est exprimée, la proportionnalité, conversions d'unités, distinction aire/périmètre d'une figure.

Le vocabulaire utilisé ici est ludique, voire déstabilisant. Certains groupes d'élèves ont cherché dans le dictionnaire les définitions de « schmogul » et « rafnoute ».

Compétences mathématiques mises en jeu

Chercher, raisonner, modéliser, calculer, communiquer.

Procédures attendues

— découpage de chaque figure en assemblages de figures élémentaires (triangles rectangles, rectangles. . .) ;

— dénombrement de l'aire de chaque figure en prenant comme unité le carreau, puis conversion dans l'une des deux unités schmogul ou rafnoute ;

— investissement des propriétés de linéarité de la proportionnalité, passage à l'unité.

Ces procédures ont effectivement été observées dans les différents groupes, tant en mixte qu'en 6e.

Résultats attendus

Le taux de réussite est supérieur à nos attentes. Cette tâche complexe combine deux notions difficiles pour les élèves : aire d'une surface et proportionnalité entre deux grandeurs.

La démarche de résolution de ce problème comporte plusieurs étapes, mettant en jeu les 4 opérations.

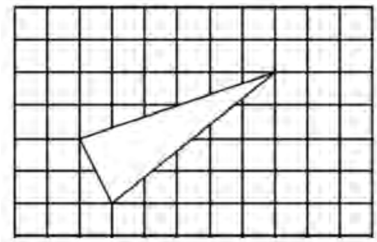
Prolongements – réinvestissement en classe

Nous proposons deux exercices de difficulté croissante en prolongement :

Problème 2 épreuve 2 année 2017

L'unité d'aire est le carreau.

Quelle est l'aire du triangle blanc ?

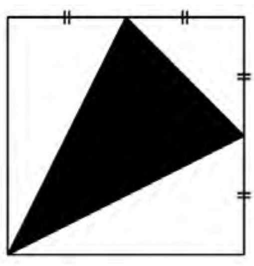


Procédure attendue : calcul de l'aire du rectangle dans lequel est inscrit le triangle blanc puis soustraction de l'aire de chacun des trois triangles rectangles.

Problème 1 épreuve 2 année 2018

Le carré a pour aire 24 cm^2.

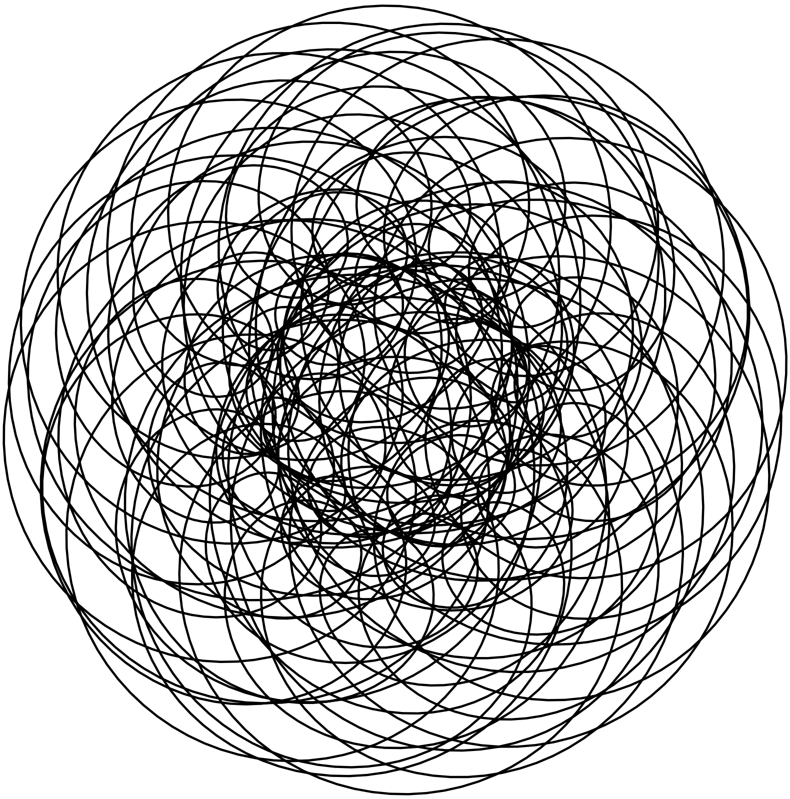
Quelle est l'aire du triangle noir ?



Procédure attendue :

- découpage de chaque figure en assemblages de figures élémentaires (triangles rectangles, rectangles…) ;
- calcul de fraction de l'aire d'une surface.

La contrainte de l'aire de 24 cm^2 empêche le calcul de la longueur du côté du carré. Ceci impose un raisonnement par fraction d'aire de la surface du carré.



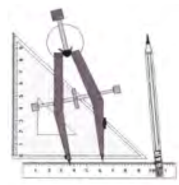
$$\begin{cases} x(t) &= 60\cos(-1t+88)+60\cos(41t)-60\cos(91t+180) \\ y(t) &= 60\sin(-1t+88)+60\sin(41t)-60\sin(91t+180) \end{cases}$$

Rallye Mathématique de la Sarthe

Présentation

Historique

Le rallye se déroule depuis 1990 avec des effectifs qui augmentent chaque année. Pour le rallye 2018-2019, 775 classes issues de 61 collèges publics ou privés soit 19 441 élèves inscrits.



Déroulement

Ce rallye est ouvert à toutes les classes de tous les collèges sarthois (publics ou privés). C'est la classe entière qui doit s'organiser pour résoudre les énigmes mathématiques : la réponse est collective.

Deux épreuves de qualification (50 minutes chacune) se déroulent dans les collèges, la première en novembre, la seconde en janvier. Les objectifs :

- faire pratiquer les mathématiques ;
- aider à acquérir une méthode de travail en groupe ;
- entrainer au débat : argumenter, discuter de preuves, trouver des exemples, des contre-exemples, vérifier ;
- proposer un projet stimulant où s'impliquent tous les élèves d'une classe.

A l'issue de ces deux épreuves, 20 classes sont qualifiées pour la finale qui se déroule en mai-juin sur un site de plein air ; un même collège ne peut avoir qu'une classe qualifiée. La majorité des 10 ateliers proposés se déroule en extérieur et nécessite des manipulations, des mesures, des constructions et fait appel à la logique, au calcul et à l'organisation

L'organisation est prise en charge par une équipe de 13 professeurs avec le soutien de la DSDEN de la Sarthe, du Rectorat de l'Académie de Nantes et des IA-IPR de Mathématiques.

Contacts

Centre de Ressources : Collège JF Kennedy (Allonnes)

Professeur responsable : Gilles Ravigné, @ gilles.ravigne@ac-nantes.fr

Tous les renseignements, sujets, réponses, photos, films... sur le site du rallye : sarthe.cijm.org/blog/

Multiplions les méthodes (Finale mai 2016)

- **Mots clés :**

Multiplications, algorithme.

- **But du problème :**

Proposer différentes méthodes pour effectuer une multiplication entre deux nombres.

- **Présentation du problème :**

Découvrir différentes méthodes pour multiplier deux nombres au fil des âges et à travers le monde.

- **Commentaires et développement :**

Le calcul mental et le calcul posé sont des activités appréciées par les élèves. L'objectif de cet atelier est de revisiter le produit de deux nombres entiers en abordant diverses méthodes. La contrainte est parfois de savoir multiplier/diviser un nombre par 2.

Les réglettes de Genaille-Lucas présentent l'avantage de donner directement le résultat lorsque l'un des facteurs est inférieur à 10.

L'algorithme de Karatsuba permet d'obtenir tous les chiffres d'un produit de deux grands nombres. La calculatrice devient alors un outil pour un usage différent de celui qu'on lui donne habituellement. C'est un moyen de travailler aussi sur le sens à donner au résultat qu'affiche une calculatrice pour un produit de 2 grands nombres.

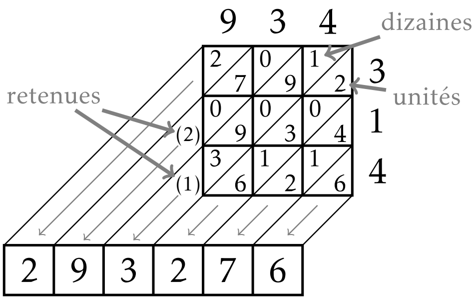
Questions données sur tous les niveaux (de la 6e à la 3e)

Les méthodes de multiplication utilisées à travers les âges et les pays sont très nombreuses. Vous allez en découvrir quelques-unes et les utiliser.

I) Multiplication *Per Gelosia*

Une disposition astucieuse de la multiplication apparaît au XVe siècle avec le mathématicien arabe Al-Kashi. Elle se propage en Orient, puis en occident.

Exemple avec 934×314



Question 1 : Observez cet exemple, et appliquez cette méthode pour calculer 427×238.

II) Multiplication Égyptienne

Dans le papyrus de Rhind datant de 1650 environ avant Jésus Christ, le scribe Ahmès donne de nombreux exemples de cette méthode sans donner de justification. L'emploi de cette méthode ne nécessite que de savoir multiplier par 2 et additionner.

Exemple avec 25×57

1+8+16
=25

	Multiples de 57
1	57
2	114
4	228
8	456
16	912
32	1 824

25×57
=57+456+912
=1425

Question 2 : Observez cet exemple et appliquez cette méthode pour calculer 29×37.

III) Multiplication dite à la russe

Cette méthode, encore en usage au début du XX[e] siècle en Russie, est très voisine de la méthode égyptienne.

Exemple avec 314×217

314	**217**
628	108
1 256	54
2 512	27
5 024	13
10 048	6
20 096	3
40 192	1

×2 ×2 ×2 ×2 …

Quotient entier de la division de 217 par 2

Quotient entier de la division de 108 par 2

Quotient entier de la division de 54 par 2

Quotient entier de la division de 27 par 2

…

On repère dans cette colonne tous les nombres impairs : 217 ; 27 ; 13 ; 3 et 1.

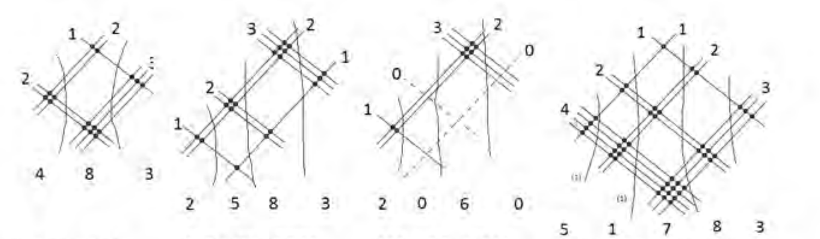
On ajoute les nombres de la colonne qui sont face à des nombres impairs : $314 + 2\,512 + 5\,024 + 20\,096 + 40\,192 = 68\,138$

Donc $314 \times 217 = 68\,138$

Question 3 : Observez cet exemple et appliquer cette méthode pour calculer 47×389

IV) Méthode graphique

Cette méthode serait d'origine maya, on la trouve aussi sous le nom de méthode japonaise ou méthode chinoise.



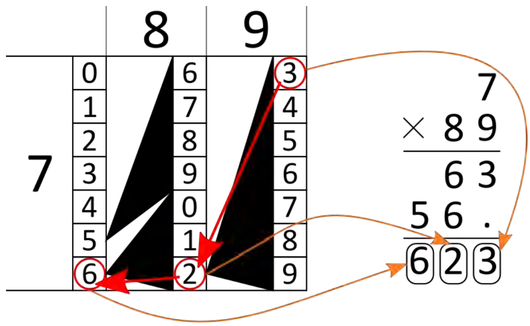
21 x 23 = 483 123 x 21 = 2583 103 x 20 = 2060 421 x 123 = 51 783

Question 4 : Observez ces exemples et rendez-vous à l'atelier n° 8 pour mettre cette méthode en application.

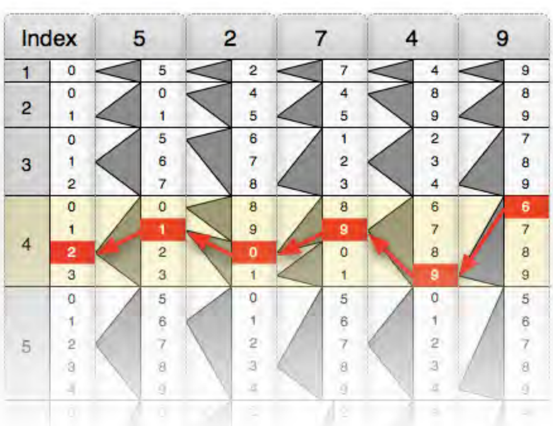
V) Les réglettes de Genaille-Lucas

Les réglettes multiplicatrices de Genaille et Lucas ont été inventées en 1885.

Il suffit de les juxtaposer côte à côte et de suivre par lecture directe le résultat d'un nombre à plusieurs chiffres multiplié par un nombre à un chiffre.



4×52749



Exemple :
$4 \times 52749 = 210\,996$

Question 5 : Observez cet exemple et rendez-vous à l'atelier n° 8 pour mettre cette méthode en application.

Partie donnée seulement pour les 4e et 3e

VI) Selon l'algorithme de Karatsuba, et avec une calculatrice

Karatsuba est un mathématicien soviétique, décédé en 2008. Il mit au point un algorithme permettant de multiplier plus rapidement des grands nombres entre eux à l'aide d'un ordinateur.

Sa méthode à l'avantage de permettre de connaître tous les chiffres d'un produit de deux nombres jusqu'au chiffre des unités, ce qu'une calculatrice ne permet pas toujours.

Une illustration de son algorithme avec une multiplication de deux grands nombres peut se résumer de la manière suivante :

Exemple avec $67\,523\,415 \times 987\,643\,237$

$\boxed{675\ \ 23415} \times \boxed{9876\ \ 43237}$

Les chiffres sont regroupés par paquet de 5 chiffres en partant des unités.

675	23415
9876	43237

		10123	94355	⟵	43237×23415	$= 1\,012\,394\,355$	$= 1\ 0123\ 94355$
	291	84975		⟵	43237×675	$= 29\,184\,975$	$= 291\ 84975$
	2312	46450		⟵	9876×23415	$= 231\,246\,540$	$= 2312\ 46540$
66	66300			⟵	9876×675	$= 6\,666\,300$	$= 66\ 66300$
	(1)			⟵	retenue pour $10123 + 89475 + 46450 = 1\ 41638$		
66	68904	41638	94355				

$$67\,523\,415 \times 987\,643\,237 = 66\,689\,044\,163\,894\,355$$

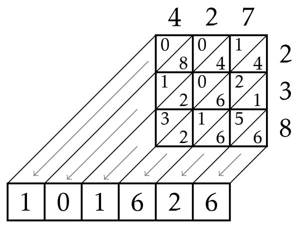
Le principe est le même qu'avec une multiplication posée.

Il suffit de poser l'opération comme à l'habitude, à l'aide de la calculatrice mais en utilisant des blocs de 5 chiffres.

Question 6 : À l'aide de cette méthode, écrire tous les chiffres du résultat de $432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114$.

Solutions

Question 1 : Résultat de 427×238 selon la méthode *per gelosia*.



Question 2 : Résultat de 29×37 selon la méthode égyptienne.

		Multiples de 37
→	1	37
	2	74
→	4	148
→	8	296
→	16	592
	32	1184

$16 + 8 + 4 + 1 = 29$

donc $29 \times 37 = 37 + 148 + 296 + 592$

$29 \times 37 = 1\,073$

Question 3 : Résultat de 47×389 selon la méthode à la russe

×2 — Quotient entier de la division de 389 par 2

47	**389**	←
94	194	
188	97	←
376	48	
752	24	
1 504	12	
3 008	6	
6 016	3	←
12 032	1	←

$47 \times 389 = 389 + 97 + 3 + 1$

$47 \times 389 = 18\,283$

Question 6 : Écrire tous les chiffres du résultat de $432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114$.

4326 73102

65213 52114

		38096	37628
	2254	45164	
	47672	00726	
2821	11438		
2821	61364	83986	37628

$432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114 = 2\,821\,613\,648\,398\,637\,628$

Robot binaire (finale juin 2017)

► **Mots clés :**

Robot, programme, programmation.

► **But du problème :**

Programmer les déplacements d'un robot à l'aide de seulement deux actions et d'une procédure récursive.

► **Présentation du problème :**

Ce sujet a été choisi pour faire travailler tous les élèves (et vérifier leurs acquis) sur l'ajout dans le nouveau programme de mathématiques pour le cycle 3 : « Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran ».

Les élèves recevaient les consignes, les plans des niveaux et un pion pour simuler les déplacements en autonomie. Pour l'un des niveaux, ils pouvaient venir tester leur solution sur un ordinateur.

L'une des difficultés pour les élèves était d'utiliser une procédure annexe pour utiliser le moins d'actions possibles mais ils en ont bien compris le fonctionnement grâce aux simulations. Beaucoup l'ont d'ailleurs utilisée pour programmer l'action « tourner à gauche » (en tournant trois fois à droite). Le fait d'utiliser une procédure de cette façon permet de bien comprendre la notion de répétition (car on écrit la commande autant de fois que l'on souhaite l'exécuter). Certains élèves ont même été jusqu'à appeler la procédure au sein de la procédure pour limiter encore davantage le nombre de blocs.

Ce sujet peut très facilement être réinvesti en classe car il nécessite peu de matériel et peut être facilement développé : un élève crée le parcours, d'autres doivent en programmer les déplacements (avec une contrainte ou non sur le nombre de blocs).

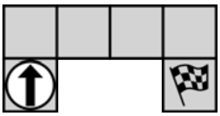
Questions données sur tous les niveaux (de la 6e à la 3e)

MT2 est un robot ancien dont la mémoire ne permet d'enregistrer que les deux actions de déplacements suivantes (représentées par des blocs) :

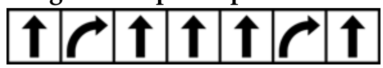
 avancer d'une case

 faire un quart de tour vers la droite

Sur le parcours ci-dessous, le pion fléché  indique la position initiale du robot et sa direction. Avec ce programme, le robot peut se rendre sur la case  .



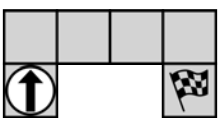
Programme principal :

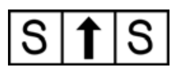


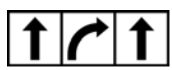
Un professeur de mathématiques a souhaité lui donner une seconde vie en lui ajoutant une barrette mémoire supplémentaire. Cela permet d'enregistrer une troisième action (la super-action) combinant les deux autres.

$\boxed{S}$ super-action

Sur le même parcours, on peut maintenant programmer le robot de la façon ci-dessous pour qu'il se rende sur la case  .



Programme principal : 

Super-action $\boxed{S}$: 

Le robot effectue d'abord la super-action : il avance d'une case (image 1), il fait un quart de tour vers la droite (image 2) et avance de nouveau d'une case (image 3). Ensuite, le robot avance d'une case (image 4). Enfin, il effectue une deuxième fois la super-action et parvient sur la case  (image 5).

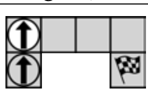
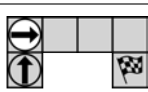
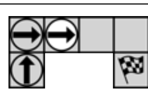
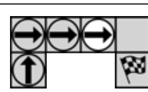
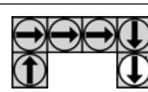
				

Image 1	Image2	Image 3	Image 4	Image 5

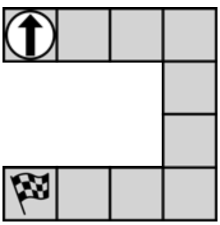
Vous devrez réaliser quatre défis qui vous seront remis lors de l'atelier.

— Les trois premiers défis consistent à programmer le robot pour qu'il atteigne l'arrivée. N'oubliez pas que la super-action indiquée précédemment n'est qu'un exemple et qu'elle peut être modifiée selon vos besoins. Au niveau de l'atelier, vous pourrez simuler sur ordinateur, une et une seule fois, votre réponse à l'un de ces trois premiers défis. Vous choisirez sur quel défi vous souhaitez l'utiliser.

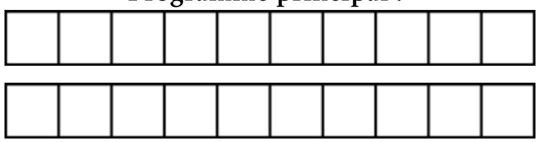
— Le quatrième défi consiste à venir sur l'atelier pour déplacer le robot sur une grille en suivant un programme donné. Seulement deux élèves devront venir. Après lecture de cet énoncé, venez d'ores et déjà chercher le défi 1.

Vous pouvez faire ces défis à l'adresse suivante :
sarthe.cijm.org/blog/archives/2010-2019/2016-2017/irobot/

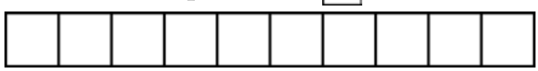
Défi 1 : Vous devez écrire le programme pour que le robot se rende sur la case  .



Programme principal :

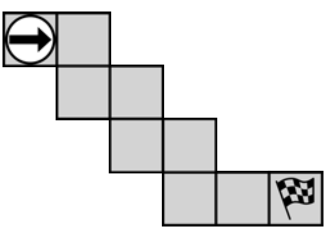


Super-action S :

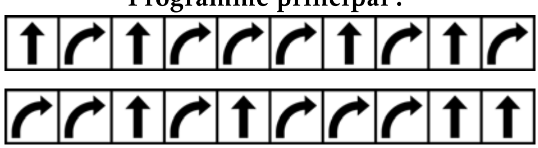


Défi 2 : On a écrit le programme ci-dessous pour que le robot se rende sur la case  .

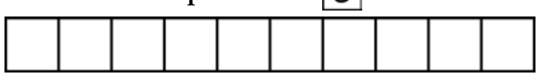
Vous devez l'optimiser en réduisant au maximum le nombre total de blocs utilisés (programme principal et super-action).



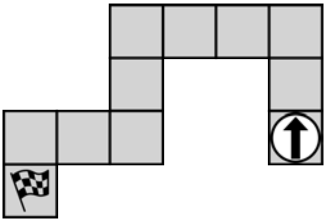
Programme principal :



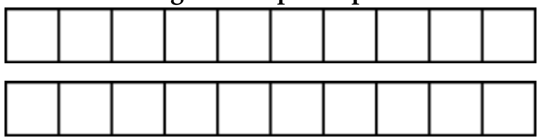
Super-action S :



Défi 3 : Vous devez écrire le programme pour que le robot se rende sur la case  . Vous devez optimiser votre programme en réduisant au maximum le nombre total de blocs utilisés (programme principal et super-action).

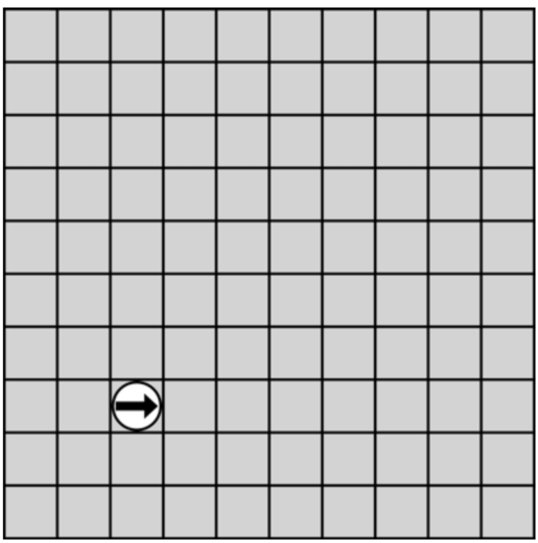


Programme principal :

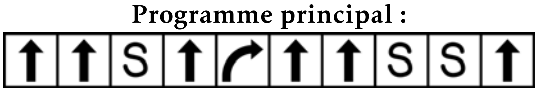


Super-action S :

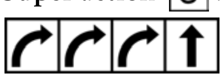
Défi 4 : Vous devez indiquer la case sur laquelle le robot parvient après exécution du programme ci-dessous.



Programme principal :

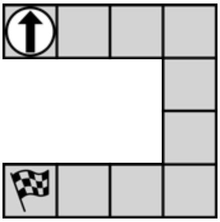


Super-action S :

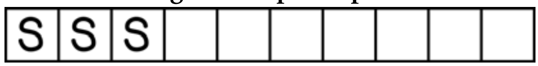


Solutions

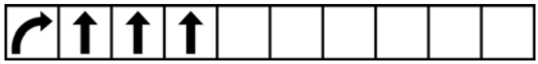
Défi 1 :



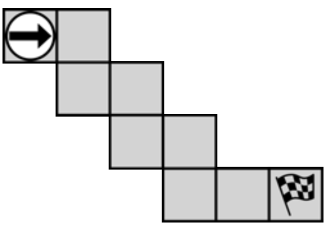
Programme principal :



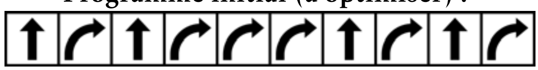
Super-action S **:**

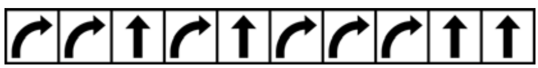


Défi 2 :

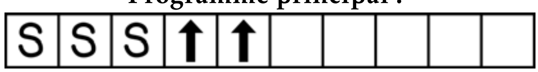


Programme initial (à optimiser) :

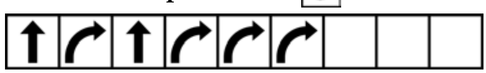




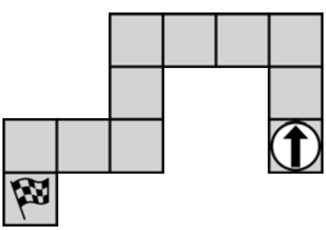
Programme principal :



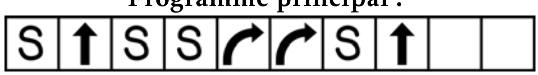
Super-action S **:**



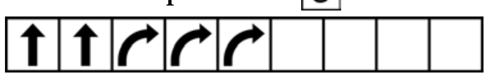
Défi 3 :



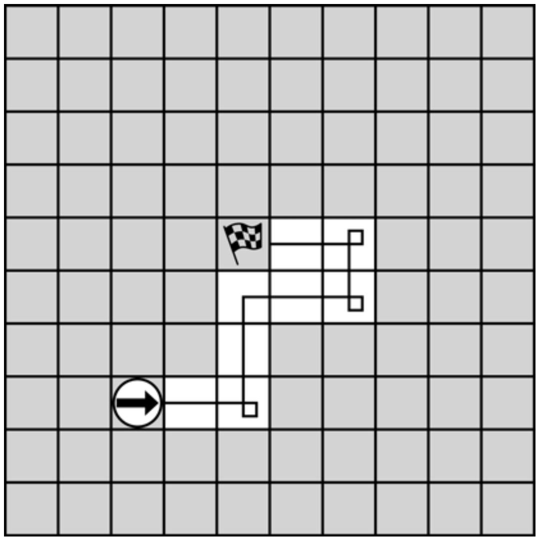
Programme principal :



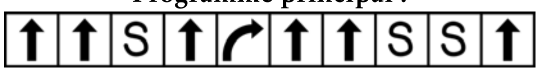
Super-action S **:**



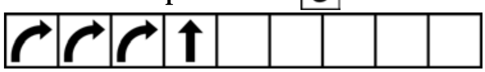
Défi 4 :

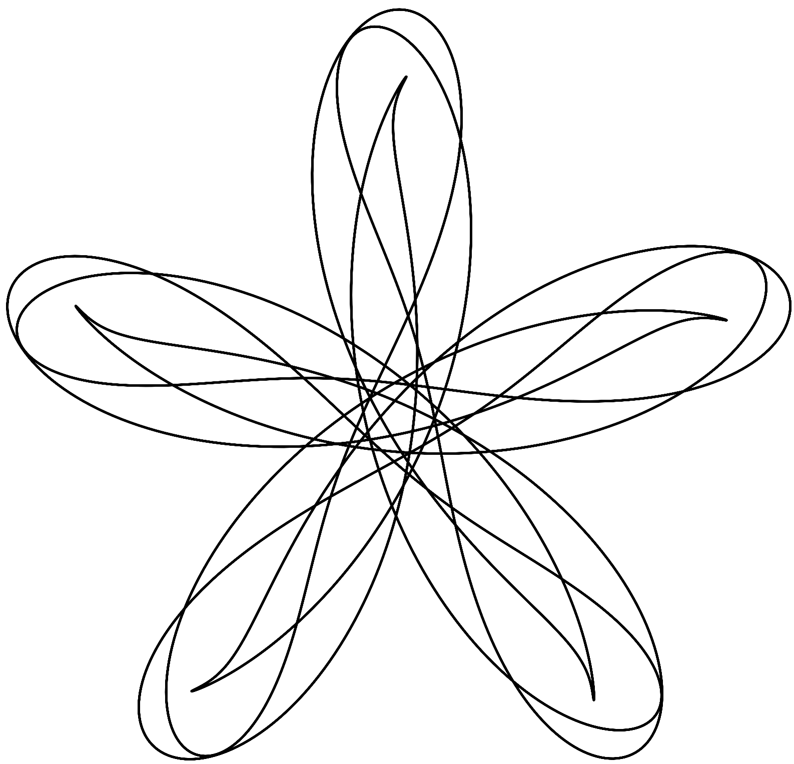


Programme principal :



Super-action S :





$$\begin{cases} x(t) &= 100\cos(-18t+180) - 100\cos(27t+45) - 21\cos(57t-8) \\ y(t) &= 100\sin(-18t+180) - 100\sin(27t+45) - 21\sin(57t-8) \end{cases}$$

Rallye Mathématique de l'IREM de l'Université des Antilles

Présentation

Crée fin 1991, initialement appelé rallye mathématiques de l'IREM des Antilles et de la Guyane, le Rallye Mathématique de l'IREM des Antilles est un jeu-concours placé sous l'autorité des Recteurs des Académies de Guadeloupe et Martinique et du Président de l'Université des Antilles. Le changement de nom s'est opéré en 2014, date de la création de l'Université de Guyane et du passage de l'Université des Antilles et de la Guyane (UAG) à l'Université des Antilles (UA).

Le Rallye est organisé chaque année par l'IREM, avec le concours des associations de type loi 1901, PROMATH pour la Guadeloupe (Président Serge Baudet), de l'APMEP régionale Antilles-Guyane et de PROMO MATH pour la Martinique (Présidente Mickaelle Ramassamy).

Ce jeu concours est ouvert à tous les élèves depuis le cycle 3 jusqu'au lycée, quel que soit leur niveau en mathématique. Les sélections en établissement ont lieu en général fin janvier et les finales académiques en mars durant la semaine des mathématiques. Durant ces deux temps, les élèves concourent par équipes de trois et doivent résoudre six problèmes relevant des champs logique, numérique, géométrique et, depuis l'année dernière, algorithmique. Les épreuves se déroulent sur les deux îles sœurs Guadeloupe et Martinique. Les sujets sont conçus en collaboration par les équipes des deux sections de l'IREM des Antilles. Il s'agit pour les participants et les équipes pédagogiques qui les préparent de faire « vivre les mathématiques autrement ».

Lors de la réforme des collèges, nous avons fait évoluer les catégories proposées au Rallye.

Nous proposons actuellement :

— catégorie 1 : cycle 3 pour les CM1, CM2 et 6^{e} nous essayons d'encourager les équipes inter-degré,

— catégorie 2 : cycle 4 qui n'est ouverte qu'aux 4^{e}-3^{e},

— catégorie 3 : lycée pour les 2^{nde}-1^{re},

— catégorie 4 : lycée professionnel pour les 2nde-1re,
— catégorie 5 : SEGPA pour les 4e-3e de SEGPA.
— catégorie Gran'moun : sujets à destination du grand public proposés dans la presse locale lors de la semaine des mathématiques.

Les associations PROMATH et PRO MOMATH s'occupent du montage financier et de l'organisation pratique du Rallye ainsi que de la remise des prix.

Le Rallye est une véritable institution locale, relayé tant au niveau académique que dans les médias, bénéficiant d'un fort soutien de la population.

Lors de sa première édition en 1991-1992, on comptait déjà plus de 6 000 participants, pour dépasser les 21 000 dans les années 2000. Nous avons connu une baisse ces dernières années et mis en place un accompagnement des équipes pédagogiques du cycle 3 en proposant chaque mois un sujet corrigé et commenté « le petit problème du rallye » afin d'accompagner les enseignants dans la pratique d'activités de recherche en classe. L'an dernier, nous avons eu 17 000 participants sur les deux îles. Depuis l'ouverture du rallye aux élèves de 6e dans le cadre de la catégorie cycle 3, certains collèges n'hésitent pas à banaliser la journée des sélections afin de faire participer tous leurs élèves.

Partenaires

Rectorats de la Guadeloupe et de la Martinique, la collectivité territoriale de Martinique, SARA, Crédit Agricole Guadeloupe, Crédit mutuel Martinique, MGPA, ...

Contacts

— IREM de Antilles

✉ Université des Antilles, Bât. recherche, campus de Fouillole, BP 592, 97157 Pointe à Pitre Cedex

☎0590483043

@ irem@univ-antilles.fr

— Frédéric Louvet, Responsable de la Section de Guadeloupe

✉ Université des Antilles, Bât. recherche, campus de Fouillole, BP 592, 97157 Pointe à Pitre Cedex

@ frederic.louvet@ac-guadeloupe.fr

— Christine Nouel, Responsable de la Section de Martinique

✉ ESPE de la Martinique Bât 6, Pointe des Nègres, 97200 Fort-de-France

@ christine.residant@ac-martinique.fr

Le goûter de tatie Vivi (logique, finale 2017, catégorie 1)

Énoncé

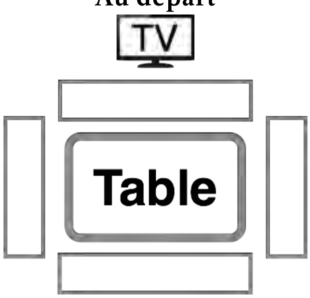
Titi, Soso , Juju et Zaza se mettent autour de la table pour prendre le goûter chez tatie Vivi.

Zaza : « Je ne veux pas Juju en face de moi. Echange de place avec moi, Soso. »
Elles se déplacent alors.
Soso : « Mais maintenant, je suis la seule à ne pas voir la télé ! Viens à ma place Juju. »
Elles échangent donc leurs places.
Titi : « Je préfère avoir Juju à ma gauche. Echange avec moi Zaza. ».
Ce qu'elles font.
Tatie Vivi : « Ça y est ? Tout le monde est bien placé ? Alors je sers ! »

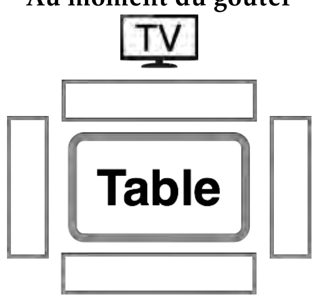
Comment étaient placées les quatre jeunes filles au départ ?
Comment sont-elles placées lorsque Tatie Vivi sert le goûter ?

Pour répondre à ces deux questions, complète les schémas ci-dessous en écrivant le nom des enfants sur les bancs.

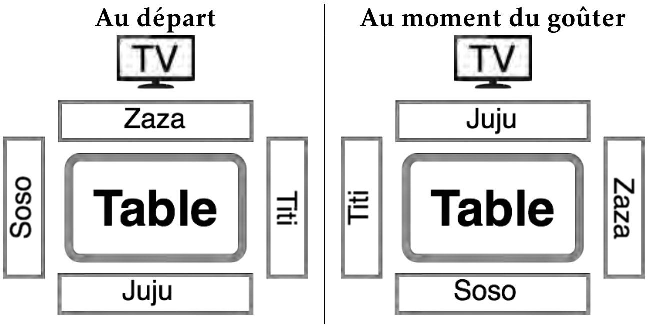
Au départ



Au moment du goûter



Solution



Compétences mathématiques mobilisées

► **Chercher**

— prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. ;

— s'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle ;

— tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

► **Raisonner**

— résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement ;

— progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;

— justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

► **Communiquer**

— expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Procédures attendues

Construire un raisonnement par étapes en validant ses hypothèses.
Raisonnement imbriqué.

Réinvestissement en classe

Peut permettre de s'exercer au travail de groupe en structurant son raisonnement. L'élève peut procéder par la méthode « essai-erreur ». Au sein du groupe, les élèves sont amenés à co-évaluer les différentes étapes de leur raisonnement et à en valider chaque étape. Cela permet de développer des compétences relatives au débat scientifique dans un travail de groupe. Les élèves sont amenés à travailler la compétence communication en verbalisant les différentes étapes de la solution ou les hypothèses avancées, une restitution à l'oral ou à l'écrit peut être envisagée.

Hors la classe

Cet exercice a été corrigé et commenté au public lors de la cérémonie de remise des prix. Ce problème a été utilisé dans les clubs « Rallye » en école et au collège pour s'entraîner.

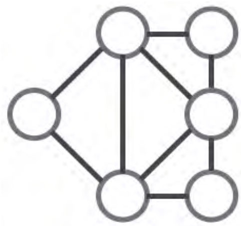
Le père Turbateur (logique, finale 2017, catégories 2 et 5)

Ce sujet peut être proposé de l'école au lycée.

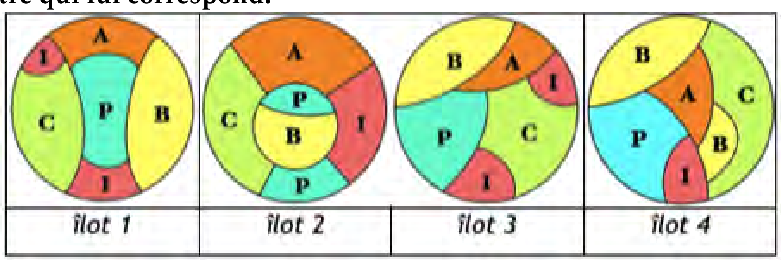
Énoncé

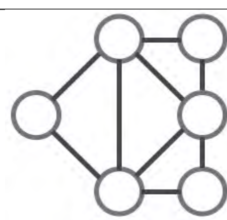
Sur son îlot le père Turbateur cultive des ananas (A), des bananes (B), de la canne (C), de l'igname (I) et de la patate douce (P).

Le graphe ci-contre décrit les relations entre ces différentes cultures. Chaque disque du graphe représente une zone de culture. Une ligne entre deux disques signifie que les deux zones se touchent.

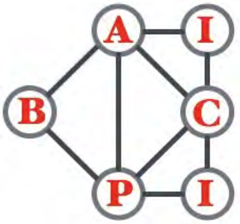


Retrouve, parmi ces quatre cartes, l'îlot du père Turbateur, c'est celui décrit par le graphe. Puis, complète chaque disque du graphe par la lettre qui lui correspond.



Réponses	**Îlot :** . . .	

Solution

Réponses	**Îlot : 3**	

Compétences mathématiques mobilisées

► **Chercher**

— extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ;

— s'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture ;

— tester, essayer plusieurs pistes de résolution ;

— décomposer un problème en sous-problèmes.

► **Modéliser**

— Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).

► **Raisonner**

— mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;

— démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;

— fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

► **Communiquer**

— expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Procédures attendues

Procéder par élimination et validation.

Emettre des hypothèses et les questionner à l'aide des quatre modèles proposés.

Réinvestissement en classe

— Permet de s'exercer au travail de groupe en structurant son raisonnement et en imposant une phase de validation.

— On peut envisager des pistes de différenciation soit en changeant le graphe proposé, soit en pré-positionnant en amont pour certains élèves une culture sur le graphe réponse, par exemple l'ananas (A).

— Peut être utiliser comme activité de découverte en terminale ES spécialité math pour l'initiation à la théorie des graphes au lycée.

Hors la classe

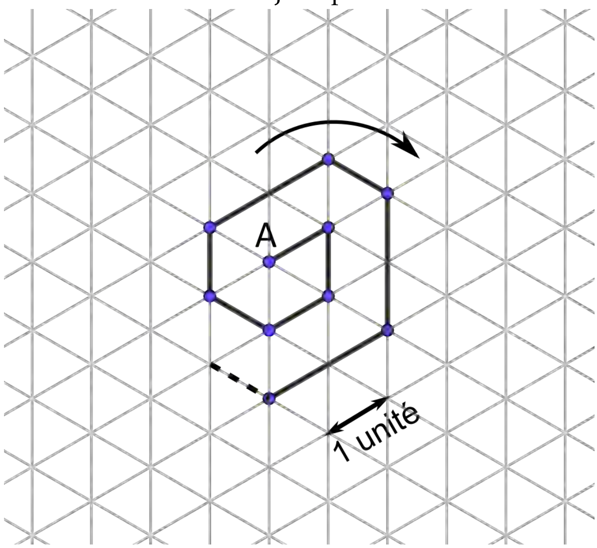
Cet exercice a été corrigé et commenté au public lors de la cérémonie de remise des prix.

Tourner déposer

(numérique et géométrique, finale 2018, catégorie 1)

Énoncé

Compère Zamba tourne autour du point A en marchant toujours dans le même sens. Il ne se déplace que sur les traits et en restant le plus proche de A sans jamais repasser au même endroit.
A chaque changement de direction il pose un caillou rond. Il en a déjà déposé 10.



1. **Combien de cailloux aura-t-il déposé s'il marche pendant 50 unités ?**
2. **Combien va-t-il en déposer s'il marche pendant 100 unités ?**

Solution

Réponse 1 : **22**.
Réponse 2 : **32**.

Compétences mathématiques mobilisées

► **Chercher**

— prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. ;

— s'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle ;

— tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

► **Modéliser**

— reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

► **Représenter**

— utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc.

► **Raisonner**

— résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement ;

— progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;

— justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

► **Calculer**

— contrôler la vraisemblance de ses résultats ;

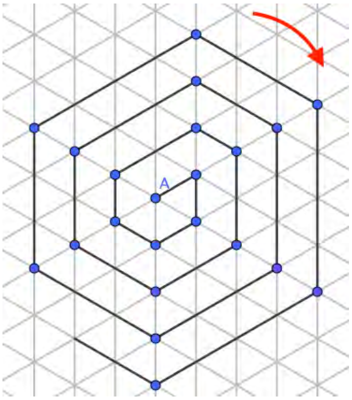
— utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

► **Communiquer**

— expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

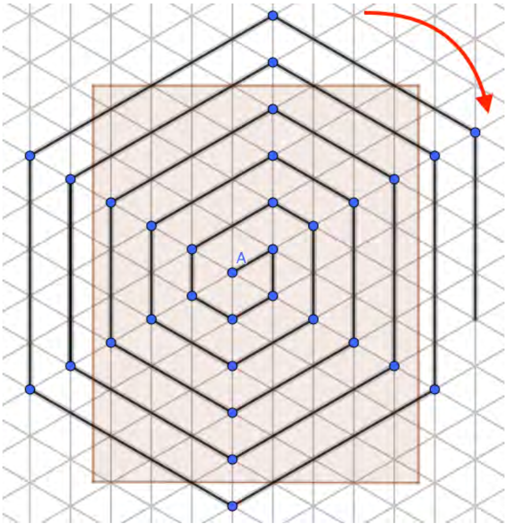
Procédures attendues

Pour la première question, il est possible de poursuivre la construction sur la grille isométrique proposée par le sujet et de compter le nombre de cailloux ainsi posés.

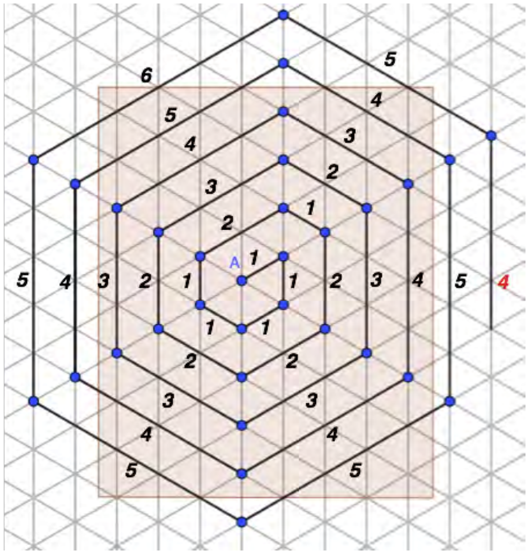


Pour la seconde question, deux stratégies sont gagnantes :

— Stratégie 1 :
Utiliser une autre feuille, agrandir la grille et poursuivre le comptage visuel.



— Stratégie 2 :
Modéliser en s'intéressant aux suites de nombres issues des mesures des longueurs.



Lors de l'épreuve, nous avons pu constater que les deux stratégies ont été mobilisées par les élèves.

Réinvestissement en classe

Cet exercice permet d'initier le travail sur le raisonnement, de proposer un changement de cadre, du géométrique au numérique.

Exercice progressif, autorisant dans un premier temps une approche visuelle de la situation et l'accès à la solution pour tous. Lors d'une réutilisation de cet exercice en classe, si la procédure visuelle a été utilisée à nouveau pour la deuxième question, on peut proposer 500 unités lors d'une troisième question afin de montrer aux élèves les limites de la procédure visuelle et les amener à modéliser la situation.

Hors la classe

Cet exercice a été corrigé et commenté au public lors de la cérémonie de remise des prix.

Ce problème a été utilisé dans les clubs « Rallye » de collège pour s'entraîner.

A^{2}DEMTI

Présentation

L'Association Algérienne pour le Développement de l'Enseignement des Mathématiques et Technologies de l'Information (A^{2}DEMTI) est née lors de l'assemblée générale constitutive qui s'est tenue le 13 Mars 2010 à Boumerdès - Algérie.

L'A^{2}DEMTI est une association scientifique et culturelle ; les membres fondateurs et adhérents de l'association mettent en commun, bénévolement et dans un but non lucratif, leurs connaissances et leurs moyens pour promouvoir et encourager les activités dans ces domaines. Parmi ses missions, l'une est de constituer un lien et un cadre de concertation permanent entre les acteurs de l'enseignement des mathématiques et l'autre, de promouvoir l'intégration des technologies de l'information dans l'enseignement de cette matière.

Activités

L'association organise périodiquement les Journées de jeux mathématiques et des compétitions à l'intention des élèves de différents paliers scolaires dans différentes régions du pays.

Elle organise des rencontres nationales et internationales dans le domaine des mathématiques. Elle participe également aux événements scientifiques et culturels organisés par différents organismes.

Contact : A^{2}DEMTI

🖂 69, boulevard Ahmed Zaidat, Azazga – Tizi Ouzou—Algérie
☎ +213 (0) 549 254 717
@ asso.aademti@gmail.com
🌐 www.aademti.org

Exercice 1 (primaire et collège)

Énoncé

Samira est née en l'an 2000 et Amira, sa soeur, est née en 2003.
Que peut-on affirmer avec certitude concernant la différence d'âges entre les deux soeurs ?

a. Quelle est au moins de 3 ans.
b. Quelle est exactement de 3 ans.
c. Quelle est de moins de 3 ans.
d. Quelle n'est pas de moins de 2 ans.
e. Quelle est de plus de 3 ans.

► **Domaine mathématique**
Calcul et logique.

Solution

Proposition d.

Exercice 2 (primaire et collège)

Énoncé

En les lisant dans l'ordre donné, laquelle de ces affirmations est la première à être vraie ?

a. « c. est vraie »
b. « a. est vrai »
c. « e. est fausse »
d. « b. est fausse »
e. « $1 + 1 = 2$ »

► **Domaine mathématique**
Logique.

Solution

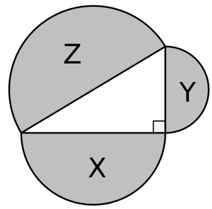
Proposition d.

Exercice 3 (primaire et collège)

Énoncé

Sur la figure ci-contre, sont dessinés 3 demi-cercles inscrits sur les 3 côtés d'un triangle rectangle. Les 3 demi-cercles ont pour superficies, en cm^2, X, Y et Z.
Quels critères sont vérifiés par les réels X, Y et Z ?

a. $X + Y = Z$
b. $X^2 + Y^2 = Z$
c. $X^2 + Y^2 = Z^2$
d. $X + Y < Z$
e. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$



► **Domaine mathématique**
Géométrie.

Solution

Proposition a.

Exercice 4 (primaire et collège)

Énoncé

m est un nombre premier tel que $3 < m < 19$ et satisfait exactement 3 des critères suivants. Trouvez ces critères.

a. $2m > 30$
b. $m^2 > 1$
c. $m + 2$ n'est pas premier
d. m est pair
e. m est un multiple de 13

► **Domaine mathématique**
Arithmétique.

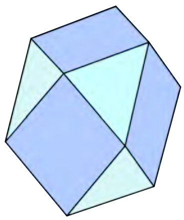
Solution

Propositions b, c et e.

Exercice 5 (primaire et collège)

Énoncé

Les faces du polyèdre ci-dessous sont des triangles et des carrés. Chaque carré est entouré/voisin immédiat de 4 triangles et chaque triangle est entouré/voisin immédiat de 3 carrés.
On sait qu'il y a 6 carrés. Combien y a-t-il de triangles ?



a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

► **Domaine mathématique**
Géométrie dans l'espace.

Solution

Proposition d.

Exercice 6 (collège et secondaire)

Énoncé

Soit a, b et c trois réels positifs. Montrer que :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

On suppose un triangle ABC tel que AB = c, AC = b et BC = a.
Sachant que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, de quelle nature est ce triangle ?

► **Domaine mathématique**
Opération sur les nombres réels et résolution de problèmes.

Solution

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

On a $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0$.

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$ et $(b-c)^2 = 0$ et $(c-a)^2 = 0$

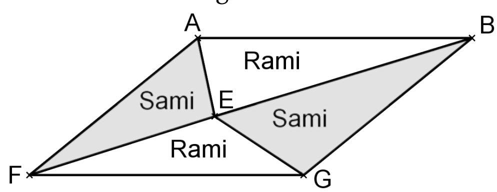
Comme a, b et c sont des nombres réels positifs alors $a+b+c \neq 0$ donc $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b$ et $b=c$ et $a=c$.

Comme AB = AC = BC, alors le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 7 (début secondaire)

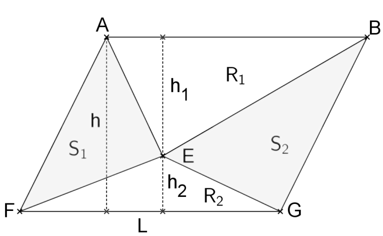
Énoncé

Dans son testament, un père a laissé un plan de partage à ses deux fils Sami et Rami d'une parcelle sous forme d'un parallélogramme comme le montre la figure ci-dessous et ce, pour que les deux enfants bénéficient d'une manière pratique du forage se trouvant au point E.
Rami curieux a voulu prouver que ce partage est juste ; aider Rami à démontrer que les deux aires sont égales.



► **Domaine mathématique**
Géométrie euclidienne.

Solution



Il suffit de montrer que $R_1+R_2=\frac{1}{2}\text{Aire}(ABGF)=S_1+S_2$.

On a $\text{Aire}(ABGF)=L\times h$

d'autre part $\begin{cases} R_1 &= \frac{L}{2}(h-h_2) \\ R_2 &= \frac{L}{2}(h-h_1) \end{cases}$.

En ajoutant membre à membre $R_1+R_2=\frac{L}{2}(h-h_2+h-h_1)$

Comme $h_1+h_2=h$,

on a $R_1+R_2=\frac{L}{2}(2h-h)$

i.e. $R_1+R_2=\frac{L\times h}{2}=\frac{\text{Aire}(ABGF)}{2}$.

Donc le partage est juste.

Exercice 8 (1re année secondaire)

Énoncé

$[x]$ désigne la partie entière du nombre x, i.e. $[x]$ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à x.
Trouver toutes les solutions réelles de l'équation $4x^2 - 44[x] + 57 = 0$ où x est l'inconnue.

► **Domaine mathématique**
Équations du second degré, propriétés de la partie entière d'un nombre.

Solution

Sachant que pour tout réel x, on a $x - 1 < [x] \leqslant x$,

alors $44(x-1) < 44[x] \leqslant 44x$.

Soit $4x^2 - 44[x] + 57 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 57 = 44[x] \quad (E)$

alors $4x^2 + 57 \leqslant 44x$ et $4x^2 + 57 > 44(x-1)$

i.e. $4x^2 - 44x + 57 \leqslant 0$ et $4x^2 - 44x + 101 > 0$

i.e. $(2x-3)(2x-19) \leqslant 0$ et $\left(2x - 11 + 2\sqrt{5}\right)\left(2x - 11 - 2\sqrt{5}\right) > 0$

i.e. $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{19}{2}\right]$ et $x \in \left]-\infty; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

i.e. $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[$ ou $x \in \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; \frac{19}{2}\right[$.

► **1er cas :** $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[$

Dans ce cas $[x] = 1$ ou $[x] = 2$ ou $[x] = 2$.

— Si $[x] = 1$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 + 13 = 0$, pas de solution réelle.

— Si $[x] = 2$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 31$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{31}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{31}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{31}}{2}\right] = 2$, alors $\frac{\sqrt{31}}{2}$ valeur acceptable.

— Si $[x] = 3$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 75$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{75}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{75}}{2}\right] = 4$, $\frac{\sqrt{75}}{2}$ valeur rejetée.

► **2e cas :** $x \in \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; \frac{19}{2}\right[$

Dans ce cas $[x] = 7$ ou $[x] = 8$ ou $[x] = 9$.

— Si $[x] = 7$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 251$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{251}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{251}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{251}}{2}\right] = 7$, alors $\frac{\sqrt{251}}{2}$ valeur acceptable.

— Si $[x] = 8$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 295$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{295}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{295}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{295}}{2}\right] = 8$, alors $\frac{\sqrt{295}}{2}$ valeur acceptable.

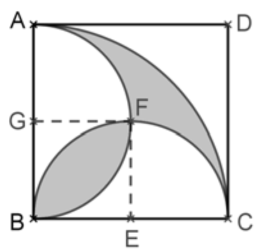
— Si $[x] = 9$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 339$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{339}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{339}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{339}}{2}\right] = 9$, $\frac{\sqrt{339}}{2}$ valeur acceptable.

En résumé, les solutions de l'équation (E) sont $\frac{\sqrt{31}}{2}$; $\frac{\sqrt{251}}{2}$; $\frac{\sqrt{295}}{2}$ et $\frac{\sqrt{339}}{2}$.

Exercice 9 (secondaire)

Énoncé

Le carré ABCD a un coté de longueur 4 cm.
On trace comme ci-contre dans le carré deux demi-cercles de diamètre [AB] et [BC] et un arc de cercle de centre B passant par A et C.
Trouver en cm² l'aire S de la zone grise.



► **Domaine mathématique**
Les aires et la résolution de problèmes.

Solution

► **1re méthode**
Soit S' l'aire grise dans le carré BEFG.

$$S' = 2\left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \pi}{4} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2}\right] = \frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

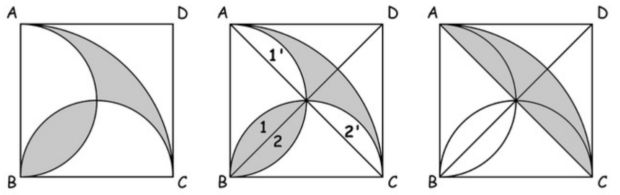
.

Soit S'' l'aire grise en dehors du carré BEFG.

$$S'' = 2\left[\frac{L^2\pi}{4} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \pi}{4}\right)\right] = \frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

.
On trouve $S = S' + S'' = 8\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\text{cm}^2$.

► **2ᵉ méthode**



En partageant le carré par ses deux diagonales, on fait apparaître les zones 1, 1', 2 et 2' superposables et donc de même aire. Par découpage et recollement (1 en 1' et 2 en 2'), on observe que la zone grisée est égale à l'aire du quart de disque de rayon R = 4 cm moins l'aire de la moitié du carré de côté R.

Exercice 10 (secondaire)

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$-x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots - x^{2017} + x^{2018} = 0.$$

► **Domaine mathématique**
Résolution d'équation polynomiale par regroupement et factorisation.

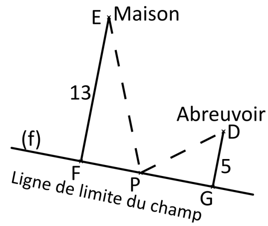
Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, -x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots - x^{2017} + x^{2018} = 0$
$\Leftrightarrow -x - x^3 - x^5 - \ldots - x^{2017} + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2018} = 0$
$\Leftrightarrow -x\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) + x^2\left(1 + x^2 + \ldots + x^{2016}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(-x + x^2\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) = 0$
$\Leftrightarrow -x + x^2 = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) > 0$
$\Leftrightarrow -x(1 - x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
L'équation admet donc deux solutions réelles : 0 et 1.

Exercice 11 (secondaire)

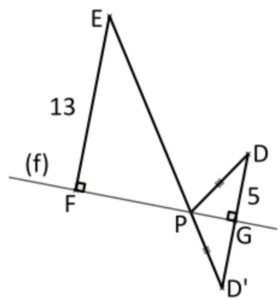
Énoncé

Un agriculteur veut creuser un puits sur la frontière limite de son champ que l'on suppose rectiligne. Sa maison E est distante de 13 m de la frontière et l'abreuvoir est distant de 5 m de la frontière. Aider cet agriculteur à choisir le lieu P pour que le trajet EPD soit le plus court.
On donne FG = 11 m.



► **Domaine mathématique**
Géométrie euclidienne.

Solution



► **1re méthode : inégalité triangulaire**

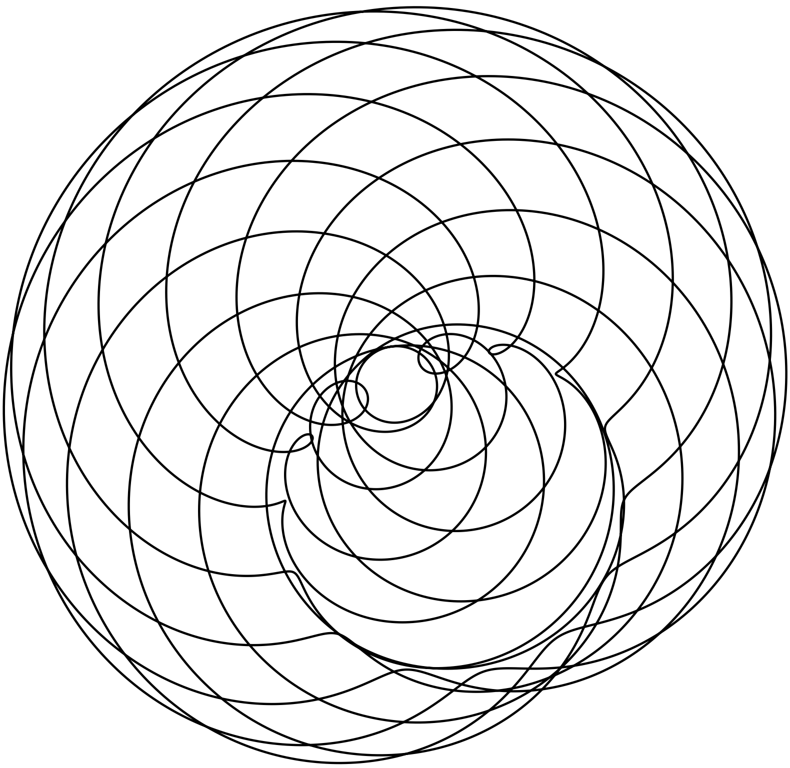
Soit D' le symétrique de D par rapport à la droite (f) dans ce cas on a EP + PD = EP + PD'.

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire on a EP + PD $\geqslant$ EP + PD', d'où EP + PD' est la distance minimale ; donc le lieu du puits est l'intersection de la droite (f) et de la droite (ED').

► **2e méthode : théorème de Thalès ou triangles semblables**

Les deux triangles EFP et PD'G.

$\frac{EP}{PD'} = \frac{11-PG}{PG} = \frac{13}{5}$ d'où $5(11-PG) = 13PG \Leftrightarrow 18PG = 55 \Leftrightarrow PG = \frac{55}{18}u$.



$$\begin{cases} x(t) &= -100\cos(-8t+142) - 100\cos(-15t+45) + 52\cos(-30t) \\ y(t) &= -100\sin(-8t+142) - 100\sin(-15t+45) + 52\sin(-30t) \end{cases}$$

Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques

Présentation

La Fédération Française des Jeux Mathématiques (FFJM) offre chaque année aux élèves, du cours élémentaire à l'Université, et aux adultes de tous âges, une compétition mathématique s'étalant sur une année : le Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques.

Huit catégories, quatre phases successives pour ce que les journalistes n'ont pas hésiter à appeler « l'événement le plus astucieux de l'année », et qui a le mérite d'associer scolaires et adultes.

Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour est souvent présent. Sont exigés de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche, mais pas forcément de connaissances. Seul le résultat est pris en compte, encore qu'en cas de solution multiple, il faille donner le nombre exact de solutions.

Le Championnat voit chaque année la participation de concurrents issus de nombreux pays. Des structures relais organisent demi-finales, finales régionales ou nationales en Algérie, Belgique, Italie, Maroc, Moldavie, Niger, Pologne, Russie, Québec, Suisse, Tunisie, Ukraine.

Historique

Le premier Championnat a été lancé durant l'année scolaire 1986-1987, patronné par les revues Jeux & Stratégie et Science & Vie. La FFJM est l'un des artisans du renouveau de l'image des mathématiques auprès des élèves et du grand public.

Compétition

Les participants sont répartis en huit catégories :

CE : 2^{e} et 3^{e} année de l'école élémentaire ;

CM : 2 dernières années de l'école élémentaire ;

Cl : élèves de 6^e - 5^e ;

C2 : élèves de 4^e - 3^e ;

L1 : élèves de la 2^{nde} à la terminale ;

L2 : deux premières années du supérieur scientifique ;

GP : grand public (adultes) ;

HC : haute compétition.

Deux modes de participation aux quarts de finales sont possibles :

— par correspondance ou en ligne sur le site de la FFJM ;

— dans les établissements scolaires sous la conduite d'un enseignant.

Les quarts de finale ont lieu entre septembre et janvier, les demi-finales en mars durant la semaine des mathématiques, la finale internationale à la fin du mois d'août juste avant la rentrée scolaire.

Partenaires

Casio, Tangente

Contacts

FRANCE FFJM www.ffjm.org

BELGIQUE FBJM www.fbjm.be/

SUISSE FSJM homepage.hispeed.ch/FSJM/

ITALIE Centro PRISTEM, Università Bocconi, Viale Isonzo 7, 20 100 Milano

NIGER ANJM, 13180, NIAMEY

QUÉBEC Département de Mathématiques et de Statistique, Université Laval, Québec G1K7P4

POLOGNE FPJM, H. Steinhaus Center, Politec. Wroclawska 50-370 Wroclaw

TUNISIE ATSM, 43, rue de la Liberté 219 Le Bardo

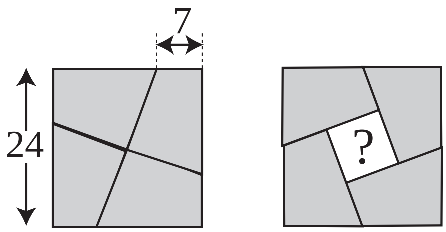
UKRAINE Union des Jeunes Mathématiciens, Vinnytsia

Le puzzle

Énoncé

Cette énigme a été proposée lors des finales régionales 2018 à tous les participants à partir de la classe de 4e.

Ce puzzle a été construit en divisant un carré de côté 24 cm par deux découpes perpendiculaires passant par le centre du carré.



On peut ensuite réassembler les quatre pièces du puzzle pour former un nouveau carré troué comme le montre la figure de droite.
Quelle est, en centimètres, la longueur du côté de ce nouveau carré ?
On arrondira, si besoin est, au centimètre le plus proche.

Commentaires

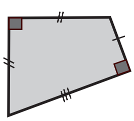
► Domaines de compétences

Les notions mathématiques mises en jeu dans ce problème sont :
- les propriétés du carré ;
- le calcul de l'aire d'un carré ;
- la notion de centre de symétrie ;
- le théorème de Pythagore.

Des prolongements sont possibles permettant d'effectuer des mises en équation.

► Analyse de la tâche

Une première tâche consiste à observer la forme des quatre pièces. De par leur mode de construction, celles-ci sont parfaitement superposables.



Chaque pièce du puzzle comprend, par construction, deux angles droits (opposés), un angle aigu, un angle obtus, un petit côté, deux côtés égaux moyens et un grand côté.

Dans le carré plein, chaque côté du carré est constitué par l'assemblage d'un petit côté (de 7 cm) et d'un grand côté (de 17 cm).

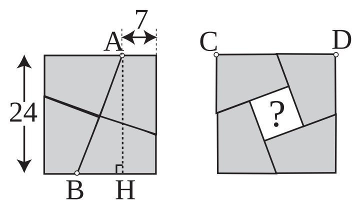
Dans le carré évidé, chaque côté du carré est constitué par l'assemblage de deux côtés moyens.

On peut ensuite résoudre le problème posé de deux façons : sans le théorème de Pythagore, ou en utilisant le théorème de Pythagore.

— sans le théorème de Pythagore :

Dans le carré évidé, le trou carré a pour côté la différence entre la longueur d'un grand côté et celle d'un petit côté d'une pièce du puzzle, soit $17 - 7 = 10$ cm. Son aire est donc égale à 100 cm^2 et l'aire totale du carré évidé est égale à celle du carré plein augmentée de 100 cm^2, soit $24^2 + 10^2 = 676$ cm^2. Or $676 = 26^2$, le côté du carré évidé mesure donc 26 cm.

— avec le théorème de Pythagore :



Comme nous l'avons noté, nous avons CD = AB.

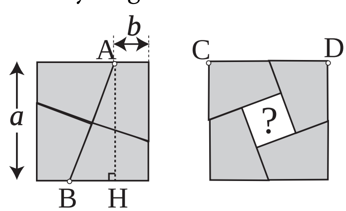
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABH, nous avons :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2 = 24^2 + 10^2 = 676$$

d'où AB = CD = 26 cm.

► **Prolongement**

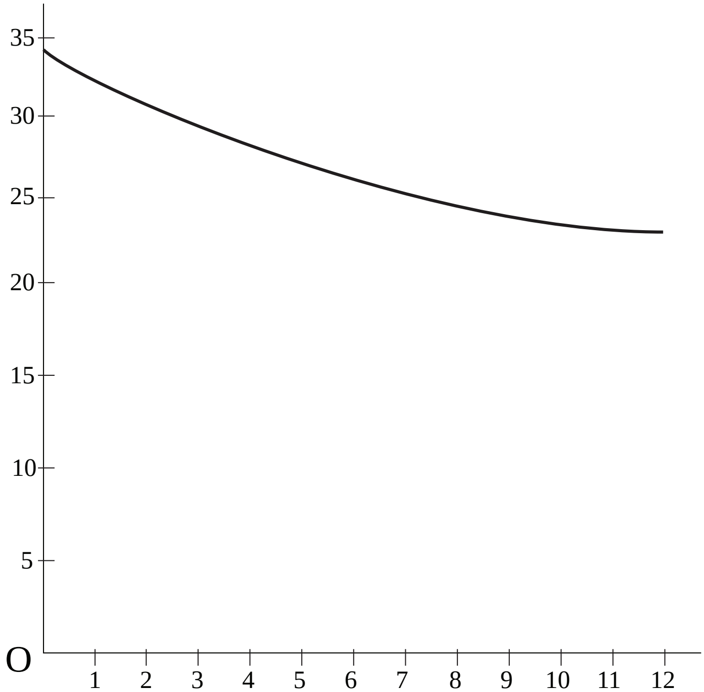
En se plaçant dans le cas général, ce puzzle peut donc servir à démontrer le théorème de Pythagore.



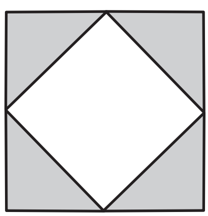
On suppose ici que $0 < b < \frac{a}{2}$.

Nous avons alors $\mathrm{CD} = \mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + (a-2b)^2}$.

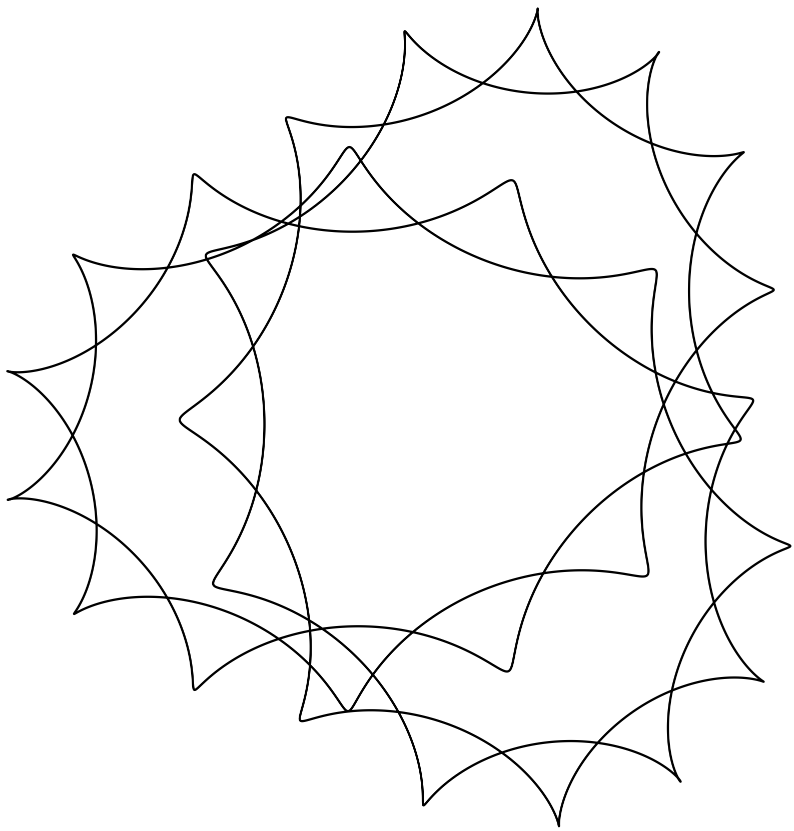
Pour $a = 24$, voici une représentation graphique de cette expression en fonction de b, pour b variant entre 0 et 12.



Pour $b = 12$, il n'y a plus de vide central et les deux carrés sont identiques.
Dans l'autre cas limite ($b = 0$), on obtient la figure suivante :



Le carré évidé a alors un côté mesurant $24\sqrt{2}$, soit environ 33,94 cm.



$$\begin{cases} x(t) &= 30\cos(-2t) - 100\cos(4t+107) - 14\cos(-25t-155) \\ y(t) &= 30\sin(-2t) - 100\sin(4t+107) - 14\sin(-25t-155) \end{cases}$$

Rallye mathématique des collèges de Bourgogne

Présentation

Ce rallye a lieu une fois par an. Il a pour but de montrer aux collégiens que les mathématiques peuvent être abordées de façon ludique et attrayante, de donner une vision moins scolaire des mathématiques en développant des capacités de recherche personnelle sur des énoncés invitant au jeu. Mais il cherche aussi à mettre en valeur le travail d'équipe dans une démarche scientifique.

Malgré les difficultés toujours plus nombreuses pour trouver des subventions pour organiser le rallye, l'IREM de Dijon tient à maintenir son entière GRATUITÉ !

Historique

La première édition a eu lieu en janvier 1998 avec la participation de 22 collèges de Côte-d'Or (soit 3 672 élèves) sous le nom « rallye mathématiques des collèges de Côte-d'Or ». En janvier 2007, pour sa dixième édition, un petit frère voit le jour sous le nom « rallye mathématique des collèges de Saône-et-Loire » avec la participation de 7 collèges de ce département. En 2011, les deux rallyes fusionnent pour former le « rallye mathématique des collèges de Bourgogne » et permet la participation de deux collèges de la Nièvre. En 2013 le rallye s'étend à l'intégralité des collèges de Bourgogne. Durant l'année scolaire 2016/2017 le rallye a fêté ses 20 ans d'existence avec une participation de 7 747 élèves soit 70 collèges. En février 2019 aura lieu la 22^{e} édition.

Compétition

— Niveaux : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}.

— Nombre de participants : 60 à 75 collèges, 1 600 à 2 100 équipes, 6 000 à 8 000 élèves.

— Modalités : équipe de 4 élèves maximum, qui doit s'organiser pour chercher et rendre une seule copie contenant leur solution. Pour les 6^{e} - 5^{e} les solutions de certains exercices sont à compléter sur la feuille-réponse. Ils peuvent s'aider de tout ce qu'ils souhaitent sauf du téléphone portable, d'internet et des cerveaux de leurs surveillants.

► **1re étape**

— Sujets : un sujet 6e - 5e et un sujet 4e - 3e.

— Date / lieu : les épreuves du rallye ont lieu un vendredi après-midi, fin janvier ou début février dans les établissements des collégiens inscrits et durent 2 h.

— Correction : les copies sont réparties parmi l'ensemble des professeurs concernés qui les corrigent. Un classement par département et pour l'académie est établi.

— Récompenses : une cérémonie récompense les huit premiers groupes de chaque niveau en Côte-d'Or. Ailleurs, les modestes récompenses sont adressées directement aux établissements.

► **2nde étape**

Depuis juin 2011, est organisée une « super finale » à l'université des sciences de Bourgogne, à Dijon. Lors de cette journée, sont réunies les deux premières équipes de Côte-d'Or et de Saône-et-Loire, et les premières de la Nièvre et de l'Yonne, pour chaque niveau. Le but est de déterminer la meilleure équipe de Bourgogne, à travers 3 épreuves reposant sur la manipulation d'objets mathématiques, le tout dans une ambiance ludique et conviviale. Durant cette journée, les élèves participent aussi à des conférences, assistent à des expériences dans des laboratoires universitaires et découvrent la faculté.

► **Type d'épreuves proposées**

Chaque sujet comporte une huitaine d'exercices communs pour les 6e - 5e, avec deux exercices spécifiques pour les uns ou les autres. Idem pour 4e et 3e.

Les exercices se divisent en « énigmes » qui ne demandent pas d'explications et en « recherches » qui appellent des justifications.

Partenaires

IREM de Dijon, Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Conseil Départemental de Côte-d'Or, Conseil Départemental de Saône-et-Loire, APMEP, Aleph, la revue Cosinus, Crédit Mutuel, Casio.

Contact : Groupe Rallye des collèges, IREM de Dijon

✉ Faculté science Mirande, BP 47 870, 21078 DIJON Cedex
☎ 03.80.39.52.30
@ iremsecr@u-bourgogne.fr
rallyemath.u-bourgogne.fr

Aux quatre coins de la Bourgogne en saluant la Franche-Comté (énigme commune, 2018, 6^{e}-5^{e})

Énoncé

Remplir la grille de nombres croisés de la feuille réponse.
Les consignes ne sont données que pour des nombres s'écrivant avec au moins deux chiffres.
Si plusieurs nombres sont sur la même ligne ou la même colonne, les consignes sont séparées par une barre oblique /.

Extrait feuille réponse :
Horizontalement

- I Multiple de 21 dont la somme des chiffres est 21 / Département bourguignon
- II Nombre associé au carbone utilisé par les archéologues / Plus petit multiple de 3 dans sa centaine
- III Cinq territoires de Belfort
- IV La Haute-Saône en verlan / Somme des quatre premiers nombres impairs
- V Nombre qui s'écrivait MMXVIII chez les Romains
- VI Plus petit multiple de 21 possible / Pour le Jura

Verticalement

1. Département bourguignon / Autre département bourguignon avec un chiffre inutile
2. Nombre palindrome
3. Doubs et carré
4. Année de la médaille Fields de Cédric Villani
5. L / 10 heures et 780 secondes en minutes
6. Multiple de 12 / Département bourguignon

	1	2	3	4	5	6
I				■		
II			■			
III	■				■	
IV			■			■
V		■				
VI				■		

Domaine

L'énigme porte sur des notions variées des programmes de 6^{e} et 5^{e} : numération (chiffres romains, écriture d'un nombre), multiples et diviseurs, calculs.

Par ailleurs, certaines définitions visent à tester la culture générale et scientifique des élèves.

Dans le cadre de la Réforme des collèges, il permet de toucher deux domaines : domaine 1.3 (langage mathématique) pour les notions mathématiques et le domaine 5 (représentation du monde) quant aux questions de culture générale et scientifique.

Analyse

C'est une énigme qui est donnée en début d'énoncé afin de rassurer les élèves.

Elle porte sur des notions élémentaires de mathématiques et de culture générale.

Ce type d'exercice présente un certain avantage puisque les solutions s'enchainent et permettent de s'auto-corriger. Mais c'est aussi un inconvénient lorsque les élèves se trompent et enchainent les erreurs.

Solution

Horizontalement

I Multiple de 21 dont la somme des chiffres est 21 :

Il y a 3 cases donc le nombre s'écrit avec 3 chiffres. En **I1**, on a soit 2 (de 21), soit 7 (de 71). En **I2**, il y a un 7. **Si** en **I1** on a un 2, alors il reste : $21-7-2=14$ qui n'est pas composé d'un seul chiffre. Donc en **I1** on a un 7. Par conséquent : $21-7-7=7$; et on a bien : $777=21\times37$.

Département bourguignon :

Comme en **I5** on a un 5, c'est donc la Nièvre (58).

II Nombre associé au carbone utilisé par les archéologues :

Le carbone 14 est utilisé en datation.

Plus petit multiple de 3 dans sa centaine :

Comme en **II4** il y a un 2, « dans sa centaine » signifie qu'on est entre 200 et 299. Le plus petit multiple est 201 (la somme des chiffres est un multiple de 3).

III Cinq Territoire de Belfort :

Le département du Territoire de Belfort porte le numéro 90. Donc $5\times90=450$.

IV La Haute-Saône en verlan :

La Haute-Saône a pour numéro de département 70, donc en verlan : 07.

Somme des quatre premiers nombres impairs :

Les quatre premiers nombres impairs sont 1, 3, 5 et 7 et leur somme vaut 16. Ce qui confirme le 1 en **IV4** et le 6 en **IV5**.

V Nombre qui s'écrivait MMXVIII chez les romains :

MMXVIII = 2018 ; ce qui confirme le 2 en **V3**, le 0 en **V4** et le 1 en **V5**.

VI Plus petit multiple de 21 possible :

En **VI3** on a mis un 5, et en **VI1** un 1, ce nombre doit s'écrire 1_5. Seul un multiple de 5 se termine par 5, c'est donc 105 car $21 \times 5 = 105$.

Pour le Jura :

Le numéro du département du Jura est 39.

Verticalement

1. Département bourguignon :

   Côte-d'Or (21), Nièvre (58), Saône-et-Loire (71), Yonne (89).

   C'est la Saône-et-Loire ; voir le raisonnement de « horizontal I ».

   Autre département bourguignon avec un chiffre inutile :

   Le chiffre inutile en tête d'un nombre est 0.

   La Côte-d'Or est le seul « autre » département de Bourgogne possible qui n'a pas encore été placé dans cette colonne et en prenant compte de la réponse à **VI**.

2. Nombre palindrome :

   Un nombre palindrome est un nombre que l'on peut lire dans les deux sens, sans que cela ne change sa valeur.

   Les réponses à **II2** et **III2** donnent bien deux 4. La réponse à IV2 donne un 7 en I2.

3. Doubs et carré :

   Le département du Doubs a pour numéro 25, et 25 est le carré de 5.

4. Année de la Médaille Fields de Cédric Villani :

   2010

5. L :

   50 en chiffre romain.

   10 heures et 780 secondes en minutes :

   $10 \text{ h} = 10 \times 60 \text{ min} = 600 \text{ min}$

   $780 \text{ s} = 780 \text{ s} : 60 \text{ s/min} = 13 \text{ min}$

   Donc $10 \text{ h } 780 \text{ s} = 600 \text{ min} + 13 \text{ min} = 613 \text{ min}$.

6. Multiple de 12 :

   Comme en **I6** on a un 8, et en **II5** un 1, ce nombre doit s'écrire : 81_.
   On cherche les multiples de 12 au-delà de 810. $12 \times 68 = 816$.

   Département bourguignon :

   Comme en **V6** on a 8 et en **VI6** 9, le numéro est bien celui de l'Yonne.

Constat

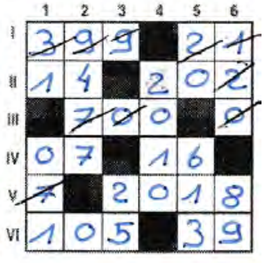
Cet exercice présente 3 possibilités de réponses :

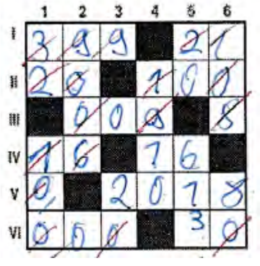
— totalement réussi ;

— non traité, l'absence de réponse est peut-être due à un manque de culture de la région et de maitrise des nombres ;

— quelques réponses justes (chiffres romains, département, médaille Fields, etc.).

L'exercice a été réussi de la même manière quel que soit le niveau.





Pour aller plus loin

Ce type d'exercice peut être réinvesti dans n'importe quel niveau des cycles 3 et 4, en modifiant l'énoncé, lors d'un club de mathématique ou durant la semaine des mathématiques afin de diversifier les exercices.

Ce tournoi nous donne le tournis (énigme commune, 2018, 6e-5e et 4e-3e mais réservée aux 4es pour ce dernier)

Énoncé

On souhaite réaliser un tournoi entre 7 équipes sportives.
Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres et ne peut jouer qu'un seul match par jour.
★ **Quel est le minimum de jours à prévoir pour faire toutes les rencontres ? Expliquez.**
★ Et si on ajoute une 8e équipe, **faut-il prévoir plus de jours ? Expliquez. (Uniquement 4e)**

Domaine

Le dénombrement est une notion essentielle des mathématiques, notamment lorsque l'on avance dans un cursus mathématique. Il est donc important pour nous d'essayer de présenter chaque année un exercice de ce genre afin d'initier les élèves à ce domaine important des mathématiques.

Analyse

Cet exercice permet d'initier les élèves aux problèmes ouverts qui demandent des compétences multiples : chercher (comprendre l'énoncé), modéliser, raisonner, calculer et communiquer leur réponse. Dans celui-ci, les élèves pouvaient aussi choisir leur modélisation : schématiser leur réponse, effectuer des calculs ou prendre le point de vue d'une équipe.

Un intérêt supplémentaire est qu'il est proposé à plusieurs niveaux, et peut ainsi être résolu par des méthodes et raisonnements différents.

À ce titre, pour les élèves de 4e, la seconde question permet d'aller plus loin dans le raisonnement et de faire comprendre aux élèves que, pour 7 ou 8 équipes, la durée du tournoi sera la même.

En plus de l'actualité sportive de l'année 2018, cet exercice permet aux élèves participant à des tournois de comprendre l'intérêt des mathématiques pour l'organisation de ceux-ci.

Solution

Une des solutions consiste à présenter les matchs sous la forme d'un tableau à double entrée. On ne complète que la partie supérieure ou inférieure à la diagonale afin de ne pas compter les matchs-retours et les matchs contre soi-même.

Chaque jour de rencontres, un nombre pair d'équipes jouent, il ne peut donc y avoir que trois matchs au maximum.

	A	B	C	D	E	F	G
A		3	2	5	4	7	6
B			1	6	7	5	4
C				7	6	4	5
D					1	2	3
E						3	2
F							1
G							

En effet, la division euclidienne de 7 par 2 donne : $7 = 3 \times 2 + 1$ avec $1 < 2$.

Ainsi, chaque jour de rencontres, une équipe ne joue pas. Ce ne peut pas être 2 fois la même équipe ! Par exemple : A ne joue pas le jour 1, B le jour 2, . . ., G le jour 7.

On donne dans ce tableau une programmation possible avec le numéro du jour dans la case de chaque match.

Il faut donc au minimum 7 jours pour faire toutes les rencontres.

► **Autres raisonnements possibles**

— Chaque équipe rencontre 6 équipes adverses. On pourrait croire qu'il y a donc $6 \times 7 = 42$ rencontres à prévoir. Mais, on compterait deux fois une même rencontre puisque lorsqu'une équipe A rencontre une équipe B, la B rencontre donc la A.

Le nombre de rencontres nécessaires est donc : $42 : 2 = 21$.

— On peut aussi raisonner en imaginant qu'une 1re équipe rencontre les 6 autres, puis que la 2e n'a plus que 5 rencontres, etc. ; ce qui fait donc $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ rencontres.

— Enfin, en une journée, on ne peut faire jouer que 3 rencontres, soit 6 équipes, la septième n'ayant pas d'adversaire. Comme $21 = 7 \times 3$, il faut donc prévoir un minimum de 7 jours.

On procède de la même façon pour 8 équipes.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	2	3	4	5	6	7
B			3	2	7	4	5	6
C				1	6	7	4	5
D					5	6	7	4
E						1	2	3
F							3	2
G								1
H								

Cette fois, le nombre de rencontres est : $7 \times 8 : 2 = 28$.

Chaque jour, il peut y avoir quatre matchs au maximum.

En effet : $8 = 4 \times 2$.

$28 : 4 = 7$

Il faut donc au minimum 7 jours pour faire toutes les rencontres ; il ne faut pas prévoir plus de jours que lorsqu'il y a 7 équipes.

On propose donc ci-contre une programmation du tournoi.

Constat

Les élèves de 6^e n'ont pas très bien réussi cet exercice, ne sachant pas comment le résoudre.

La première raison est qu'ils ont mal compris l'énoncé et ont compté un match par jour.

Recherche 6 : Il faut 21 jour pour que toute les équipes se remcontrement.

1 jours : équipes 1-2	8 jours : équipes : 2-4	15 jours : équipes : 3-7
2 jours : équipes 1-3	9 jours : équipes : 2-5	16 jours : équipes : 4-5
3 jours : équipes 1-4	10 jours : équipes : 2-6	17 jours : équipes : 4-6
4 jours : équipes 1-5	11 jours : équipes : 2-7	18 jours : équipes : 4-7
5 jours : équipes 1-6	12 jours : équipes : 3-4	19 jours : équipes : 5-6
6 jours : équipes 1-7	13 jours : équipes : 3-5	20 jours : équipes : 5-7
7 jours : équipes : 2-3	14 jours : équipes : 3-6	21 jours : équipes : 6-7

Soit, ils ont fait un dénombrement correct mais se sont trompés dans le nombre de jours nécessaires.

Enfin, quelques équipes ont pensé à utiliser la division.

Recherche 6 :

Il y a 21 matchs et on peut en disputer que 3 par jour du coup 21 ÷ 3 = 7
Il faut prévoir minimum 7 jours de compétition

Le niveau 5^e a tout de même mieux réussi ce type d'exercice.

Pour quelques équipes, on peut envisager que leur expérience de la compétition les ait aidées dans la résolution du problème. Ainsi, leur réponse se résume alors à une phrase exposant le point de vue d'une équipe, ce que nous n'avions pas envisagé comme solution.

7 équipe - mon équipe = 6 équipes donc 6 jours +
1 jour de repos = 7 jours

Mais nous avons rarement eu un dénombrement comme avec les 6^e, et si c'était le cas, ce fut présenté sous forme de tableau.

Les réponses du niveau 4^e regroupe l'intégralité de celles des 6^e et 5^e mais en ajoutant la solution sous forme de tableau.

La question 2 a été bien réussie mais ne semble pas les avoir laissés perplexes sur le résultat.

Tampon Patate (énigme commune, sujet 2018, 4e-3e)

Énoncé

Peut-être savez-vous que l'on peut fabriquer un tampon à l'aide d'une pomme de terre.
On dispose d'une pomme de terre (O.G.M. !!!) en forme de cube de 8 cm d'arête. (Elles s'empilent mieux dans les cagettes !)
En coupant un « coin », on veut fabriquer un tampon triangulaire de la façon suivante :

- à partir d'un sommet S, on place un point A sur une arête, à 3 cm de S ;
- on place un point B sur une autre arête, à 4 cm de S ;
- on place un point C sur la 3e arête, à 5 cm de S ;
- on coupe le « coin » de la pomme de terre suivant le plan (ABC), on met de l'encre sur le triangle ABC et on tamponne...

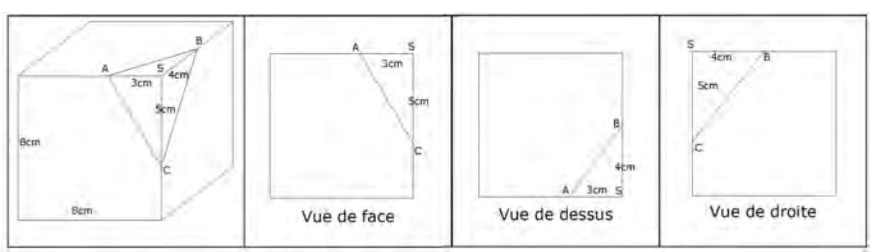
★ **Dessinez en vraie grandeur la forme du dessin obtenu.**
Aide : Fabriquez ou dessinez un patron des 3 faces du « coin » du cube, puis construisez le triangle ABC à la règle et au compas.

Analyse

C'est un exercice de géométrie de l'espace : l'IREM souhaite donner un coup de projecteur à ce domaine. En effet, la part de géométrie dans les programmes semble diminuer et les élèves ont généralement davantage de difficultés dans ce domaine des mathématiques.

Il s'agit donc, à partir d'une situation concrète et (peut-être) connue des élèves, de les intéresser aux problèmes géométriques du plan et de l'espace (visualisation dans l'espace), comme cela est préconisé dans les programmes de cycle 4 (partie A, Espace et géométrie).

Solution



Il suffit ensuite de construire le triangle ABC à la règle et au compas.
Les côtés mesurent environ : AC $\simeq$ 5,8 cm ; AB = 5 cm ; BC $\simeq$ 6,4 cm.

Constat

Quel que soit le niveau, l'exercice est soit réussi, soit pas du tout. Les échecs semblent avoir pour origine les difficultés à visualiser en trois dimensions. Ainsi, le tracé des trois faces est difficile.

Lorsque l'exercice est traité, les réponses sont précises, soignées et l'utilisation du compas est maîtrisée.

Prolongements possibles

On peut demander de calculer le volume du cube tronqué afin d'évaluer la capacité des élèves à gérer la notion de volume (calcul par soustraction de volumes de solides de référence).

Pour un exercice en classe, afin que les élèves plus fragiles puissent s'investir, on peut envisager également de calculer le volume de la pyramide afin de donner une question plus proche des programmes.

On peut aussi envisager de chercher diverses formes de coupes du cube (triangles divers, rectangles, carré, pentagone, hexagones, autres). Sous forme fermée en suggérant des formes ou plus ouvertes en laissant découvrir les polygones possibles...

À se crêper le chignon ! (sujet 2018 des 4^{e}-3^{e}, réservé aux 3es)

Énoncé

On dispose de deux piles de crêpes industrielles, donc toutes de même forme, même volume et même masse (nombre entier de grammes, évidemment supérieur à 1). Les deux piles sont posées sur deux plats identiques.
Avec le plat, la première pile pèse 998 g.
Avec le plat, la seconde pèse 1 153 g.
On retire une pile d'un plat que l'on pose au-dessus de l'autre pile (donc avec un seul plat en dessous). Le tout pèse alors 1 401 g.

★ Une matheuse bretonne dit que l'on peut trouver : **la masse de chaque plat, la masse d'une crêpe et le nombre de crêpes dans chaque paquet. Donnez-les lui !** Mais non, il ne manque aucun renseignement, lisez bien et **trouvez aussi le nombre total de crêpes !**

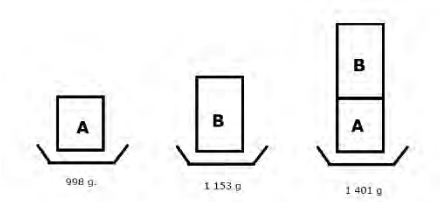
Analyse

C'est un exercice classique d'arithmétique sous la forme d'un problème ouvert, ce qui peut dérouter les élèves par la somme de compétences mises en jeu :

— chercher : lire l'énoncé et prendre en compte toutes les informations ;
— modéliser : choisir un cadre de résolution pour le problème (schéma, équation, arithmétique…) ;
— raisonner : effectuer un raisonnement logique simple et en groupe ;
— calculer : notion de multiple et de diviseur, connaissance des opérations ;
— communiquer : rédiger la réponse avec un langage mathématique correct.

Cependant, la situation s'appuie sur un cadre concret connu des élèves (les crêpes et la notion de pesée).

Solution



La masse des 2 plats et des 2 piles est de : $998\,g + 1\,153\,g = 2\,151\,g$.

La masse d'un plat est de : $2\,151\,g - 1\,401\,g = \mathbf{750}\,g$.

La masse de la 1re pile de crêpes est de : $998\,g - 750\,g = 248\,g$.

La masse de la 2e pile de crêpes est de : $1\,153\,g - 750\,g = 403\,g$.

La masse d'une crêpe doit donc être un diviseur commun à 403 et 248.

La liste des diviseurs de 248 est : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; **31** ; 62 ; 124 et 248, et la liste des diviseurs de 403 est : 1, 13, **31**, 403. Ainsi le seul diviseur commun supérieur à 1 est 31.

Or $248 = 8 \times 31$ et $403 = 13 \times 31$.

Les nombres et la masse d'une crêpe étant des entiers, on peut en déduire que la masse d'une crêpe est de **31 g** et leurs nombres **8** et **13**. Le total est : 8 + 13 = **21** encore !!!

Constat

Les réponses sont variées et ne manquent pas d'intérêt. Nous avons eu des mises en équation, des réponses argumentées à la manière d'un problème classique d'arithmétique ou encore des schémas, des graphiques.

En général, les élèves de 3e ont trouvé la masse du plat. Lorsque le reste des questions est traité, cela est juste et bien rédigé. Malgré cela, très peu d'élèves ont traité le reste des questions, par manque de temps probablement.

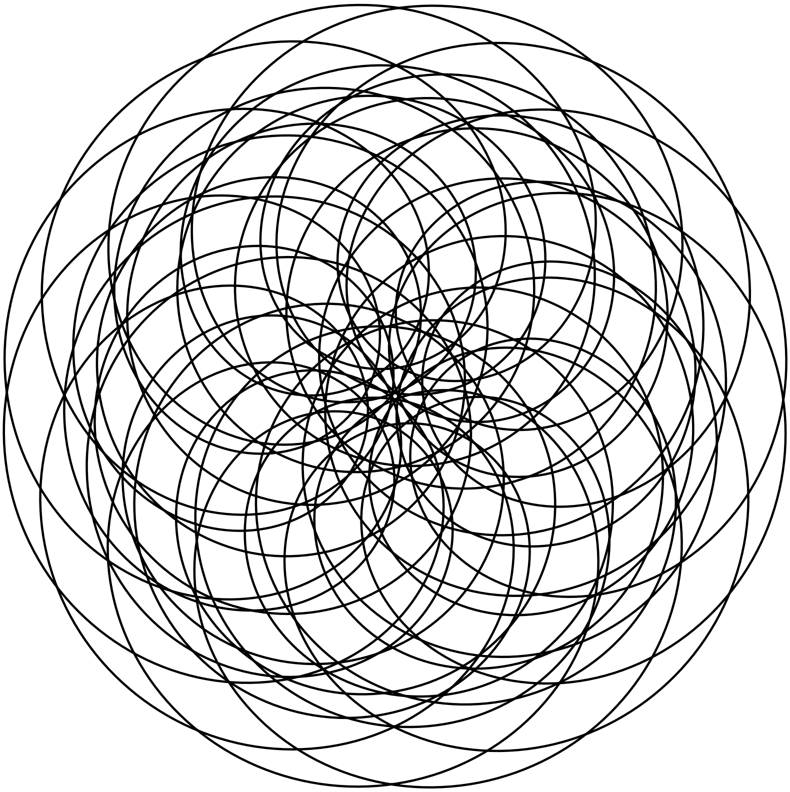
soit x la masse du plat
$1153 + 998 - x = 1401$
$2151 - x = 1401$
$-x = 1401 - 2151$
$x = \frac{-750}{-1}$
$x = 750$
le plat a une masse de 750 g
$998 - 750 = 248$
la 1ère pile a 248 grammes de crêpes
$1153 - 750 = 403$
la 2e pile contient 403 grammes de crêpes
Pour savoir le nombre de crêpes dans chaque paquet, il faut chercher le plus grand ~~multiple~~ diviseur commun de 248 et 403 afin de trouver la masse d'une crêpe.
Décomposition de 248 : $248 = 2^3 \times 31$
de 403 : $403 = 13 \times 31$
le plus grand multiple commun à 248 et 403 est 31, la masse d'une crêpe est de 31 grammes et 2 au cube est égal à 8, il y a donc 8 crêpes de 31 grammes dans le paquet de la 1ère pile et 13 crêpes de 31 grammes dans le paquet de la 2e pile.
$13 + 8 = 21$ En tout, il y a 21 crêpes

Poids du plat :
$998 - (1401 - 1153) = 998 - 248$
$= 750$
Le plat pèse 750 g.
On enlève le poids du plat de chaque pile :
$998 - 750 = 248$ g
$1153 - 750 = 403$ g
Décomposition en nombres premiers de 248 et 403 :
$248 = 2 \times 2 \times 2 \times 31$
$403 = 13 \times 31$
Les diviseurs communs à 248 et 403 sont 1 et 31.
Comme une crêpe ne peut pas peser 1 g, on en déduit qu'une crêpe pèse 31 g.
Nombre de crêpes dans chaque plat :
$403 \div 31 = 13$
$248 \div 31 = 8$
Dans le paquet qui pèse 248 g il y a 8 crêpes.
Dans le paquet qui pèse 403 g il y a 13 crêpes.
$13 + 8 = 21$
Il y a 21 crêpes au total.

Prolongement en classe

C'est un exercice pertinent pour explorer l'arithmétique en problème ouvert. Les questions intermédiaires pourraient être retirées afin de demander uniquement le poids d'une crêpe.

En 3e, on peut modifier légèrement les masses données. On s'aperçoit ainsi que l'algèbre donne la masse d'un plat, puis celle des piles de crêpes, mais si les résultats ne sont pas des entiers « convenables », le problème n'a pas de solution. On fait ainsi la part entre arithmétique et algèbre… et bon sens !



$$\begin{cases} x(t) &= 92\cos(5t+111)-100\cos(41t+119)+32\cos(17t-40) \\ y(t) &= 92\sin(5t+111)-100\sin(41t+119)+32\sin(17t-40) \end{cases}$$

Index

Couverture

Illustration : Emmanuel Pinaud
Maquette : Yannick Bonnaz, service audiovisuel, Université de Lille

Illustrations internes

Toutes les courbes paramétrées insérées entre les articles de cet ouvrage sont de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = A_1\cos(r_1 t + P_1) + A_2\cos(r_2 t + P_2) + A_3\cos(r_3 t + P_3) \\ \\ y(t) = A_1\sin(r_1 t + P_1) + A_2\sin(r_2 t + P_2) + A_3\sin(r_3 t + P_3) \end{cases}$$

où $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2 + r_1$, $r_3 = R_3 + r_2$ et $R_1, R_2, R_3, A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ sont des entiers.

Licence

Les articles de ce livre sont téléchargeables depuis les sites des éditeurs :

cijm.org   www.univ-irem.fr   apmep.fr

Ce livre a été imprimé sur les presses de l'Imprimerie de l'Université de Lille - Campus du Pont de Bois (Villeneuve d'Ascq - France) en janvier 2019.

Panora math 7

Cocktail de pistes et d'idées

La collection Panoramath initiée en 1996 par le Comité International des Jeux Mathématiques, met en lumière des rallyes mathématiques francophones. Par leur diversité, ces rallyes sont d'excellents vecteurs d'une activité mathématique riche et variée permettant de développer de nombreuses compétences.

Ce nouvel ouvrage a été réalisé au sein de la Commission Inter IREM Popularisation des Mathématiques par des membres du réseau des IREM, de l'APMEP et du CIJM. Ce recueil réunit 29 contributions d'auteurs de Rallyes* et de jeux mathématiques, reçues en réponse à l'appel lancé par la Commission en direction d'un grand nombre de structures institutionnelles et d'associations.

Les auteurs présentent l'historique, les objectifs et le mode de fonctionnement de leur action. Ils ont sélectionné des sujets originaux et représentatifs dont ils ont analysé la tâche mathématique sous-jacente et signalé des prolongements possibles.

Comme ses prédécesseurs, Panoramath 7 est donc un outil pédagogique permettant à chaque enseignant de choisir et d'adapter, par thème, des activités ludiques et de les intégrer à son enseignement. Les animateurs de clubs ou d'ateliers scientifiques pourront y puiser également des idées d'animation mathématique.

Cet ouvrage d'une grande richesse relève donc le défi de stimuler le goût des mathématiques et de la recherche !

* Le terme « Rallye » n'est pas restrictif mais englobe toutes les actions ou compétitions installées en milieu scolaire et plus largement avec une intention pédagogique.

ISBN 978-2-9540431-2-8

9 782954 043128