Conclusions which were made on the basis of that model were not categorial and were usually verified by practice which confirmed or questioned a fitness of the model. Models were involved and created by concretization and schematization from the point of view of the problem to solve. There were treated as a more appropriate when they could better fit to considered "reality".
Moreover, it seems that involving in the history the concept of expectatio and careful distinguishing it from the probability made the probability calculus more understandable and clear form many people in the past and let the theory develop more intensively.
When we analyse old probabilistic reasonings we can easily notice that all of them arose thanks to great discussions and serious disputs, because of exchanging arguments and reasonable convincing of adversaries. All these activities demonstrate that probability development has a strong interactive nature.
This diachronic view on the development of probability concept allows to pose the main didactical hypothesis - in the synchronic perspective - that the dual nature of probability concept seems to play as important role today in the process of stochastics learning as it did during the process of historical development of probability. Regarding this fundamental conclusion allows to organize the process of probability and statistics learning according to the student's cognitive development at every stage of education (the Local Models' approach - see Lakoma a.o. 1996, 1997) and also to explore the natural students' ways of probabilistic thinking (Lakoma 1990, 1997).

References:
Daston L. J., 1980, Probabilistic Expectation and Rationality in Classical Probability Theory, in: Historia Mathematica 7, p. 234-260.
Fine T. L., 1973, Theories of Probability, an Examination of Foundations, N.York.
Freudenthal Hans, 1974, Mathematics as an Educational Task, D.Reidel, Dordrecht.
Freudenthal Hans, 1983, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D.Reidel, Dordrecht.
Hacking Ian, 1975, The Emergence of Probability, Cambridge Univ., London.
Lakoma Ewa, 1990, The Local Models in Probability Teaching (in Polish), doctoral thesis, Warsaw University, Department of Mathematics, Warsaw.
Lakoma Ewa, 1992, Historical Development of Probability (in Polish), CODN-SNM, Warsaw.
Lakoma Ewa a.o., 1996, 1997, Mathematics 2001 - series of textbooks for students and guides for teachers for secondary school, WSiP, Warsaw.
Lakoma Ewa, 1998, On the Interactive Nature of Probability Learning, in: Proceedings of CIEAEM-49, Setubal, July 1997 (in print).
Ore O., 1960, Pascal and the Intuition of Probability Theory, American Mathematical Monthly 67, p.409-419.

Didactique et épistémologie : quelques aspects d'une recherche de terrain...

C. Hauchart, pour le
Groupe d'Enseignement Mathématique[1] *(GEM)*
Louvain-la-Neuve, Belgique

Le texte ci-après tente de mettre en évidence quelques particularités du type de recherche que nous pratiquons au GEM, ainsi que nos motivations et objectifs essentiels. Il témoigne de l'expérience de notre groupe, pas du tout pour présenter ce dernier en exemple, mais pour illustrer cet exposé à partir de ce que nous connaissons bien. Nous décrirons quelques résultats de notre groupe, en particulier d'un projet d'enseignement qui résulte d'une collaboration (projet désigné par AHA, Approche Heuristique de l'Analyse[2]).

1. Le Groupe d'Enseignement Mathématique.

1.1 Le GEM à ses débuts

Le groupe d'enseignement mathématique s'est créé vers la fin des années 70. Une de ses caractéristiques est d'être constitué de membres d'origines diverses : des étudiants de deuxième licence en mathématiques qui ont choisi de réaliser leur mémoire (travail de fin d'étude) dans le domaine de l'enseignement des mathématiques (à l'époque, ils étaient entre 5 et 10 chaque année année), des enseignants du secondaire (entre 20 et 30), et des universitaires (une petite dizaine). Cette diversité a été source de richesse.

La raison d'être visible du groupe était l'encadrement de ces travaux de fin d'étude. Mais par delà ce prétexte et cette contrainte (à la fin de l'année académique, un document sérieux devait être rédigé), dès le début, notre objectif premier, celui auquel se sont ordonnés les autres (les mémoires, la formation initiale des maîtres, les prestations de formation continuée, les recherches épistémologiques) était d'enseigner des mathématiques :

> *"Notre position radicale a alors été la suivante : nous avons pris pour objectif premier d'enseigner des mathématiques et de la faire sur le terrain le plus quotidien des classes, avec toutes les contraintes que cela suppose. En ce faisant, nous acceptions que nos autres actions (les mémoires et la formation initiale des maîtres, la formation continue des*

professeurs, les recherches épistémologiques) soient en quelque sorte subordonnées à notre activité principale , celle d'enseigner."[3]

Cette expérience multiforme suggère un paradoxe : ces actions secondaires du GEM avaient d'autant plus de chance d'être pertinentes qu'elles étaient secondaires, c'est-à-dire ordonnées à la fin principale.

Nous nous réunissions au rythme d'une après-midi par semaine, chaque semaine de l'année scolaire. Nous travaillions par sous-groupes, selon les sujets mathématiques à enseigner choisis. Chaque sous-groupe prépare son enseignement, réalise les mises au point théoriques nécessaires, fait des plongées dans l'histoire, discute des leçons faites, des réactions des élèves, et prépare des publications.

1.2 Le GEM aujourd'hui...

Le GEM existe toujours. Quelques uns de ses membres sont là depuis très longtemps ; chaque année nous accueillons quelques nouveaux membres compensant le départ de quelques autres.

Notre objectif est toujours d'enseigner. Les membres de notre groupe, qui s'engagent à participer aux séminaires du GEM pour une année le font selon le cas avec l'intention de

- préparer un (ou des) enseignement(s) déterminé(s) ;
- produire des documents (pour les enseignants d'abord, depuis quelques temps pour les élèves aussi (manuels)) ;
- se donner l'occasion, pour le plaisir (sans viser une retombée immédiate dans son enseignement), de se ressourcer en mathématiques ou de prendre connaissance de l'évolution historique de certaines problématiques;
- prendre part, participer à, avoir des activités au travers desquelles des personnes (enseignants, chercheurs, étudiants de licence en mathématiques) s'animent intellectuellement sur des sujets de mathématique, tout en ayant en arrière plan un regard sur comment s'effectue cet apprentissage, cette acquisition, cette évolution.

Quelques changements ont eu lieu, notamment :

- le nombre d'étudiants inscrits en mathématique s'est considérablement réduit ; on est loin du temps où sur une même année une dizaine d'étudiants faisaient une mémoire en méthodologie mathématique (maintenant, un tous les deux ou trois ans);
- paralèllement, le nombre d'universitaires de notre groupe s'est considérablement réduit (ce n'est pas un choix);
- par ailleurs depuis lors, d'une part des travaux de doctorat ont été effectué dans le contexte élargi de notre groupe, faisant ainsi de la recherche un objectif moins subordonné, moins second qu'e signalé ci-dessus ; et d'autre part nous nous sommes engagés à mener des travaux de rédaction de plus grande ampleur (manuels), travaux qui ont de fait absorbé une bonne part de nos actions.

Ce dernier point est source de questionnement. D'une part, nous pensions (et nous le pensons encore) que le moment était venu, après avoir accumulé un certain nombre de réflexions et d'expériences, de nous atteler à des travaux visant une diffusion plus ample que la diffusion assez ponctuelle et restreinte de mémoires et de quelques brochures à laquelle nous nous étions jusque là (volontairement) limités. Nous pensions qu'il était nécessaire de montrer des exemples amples d'enseignement qui correspondent à certains critères que nous allons développer ci-après, et portant sur plusieurs années. Mais d'autre part, ces travaux par nature fort absorbants ont eu pour effet, du moins à certains moments, de mettre comme objectif premier la production et la diffusion. A notre meilleur jugement, les sous-groupes du GEM qui sont sous l'impératif d'une production ample n'ont plus assez l'occasion d'échanger sur leurs pratiques.

2. Quatre couches de recherche[4].

Avant de parler de nos travaux et recherches, nous distinguerons quatre "couches" de recherches relatives à l'enseignement des mathématiques.

2.1 Les recherches des élèves.

Les premières et les plus importantes, celles auxquelles les trois autres s'ordonnent, sont les recherches des élèves. Comment ceux-ci construisent-ils, tout au long de leur jeunesse, leur autonomie intellectuelle, leur capacité de chercher sur des questions, de penser mathématiquement ?

2.2 Les recherches des enseignants sur le terrain des classes

Les deuxièmes sont les recherches de l'enseignant sur le terrain des classes. Les phénomènes qui se produisent en classe sont complexes ; le savoir s'élabore par essais et erreurs ; beaucoup de facteurs interviennent ; l'enseignant souvent pare au plus pressé, navigue à l'estime.

Un élève n'est pas l'autre, les classes sont différentes, les écoles, les matières, les trimestres, les jours, les inspecteurs, les collègues, etc. Dans le contexte touffu, changeant, souvent imprévisible de sa classe, chaque enseignant conduit sa barque en observant ce qui se passe, en réfléchissant, en s'informant, en ajustant son action à ses objectifs, en augmentant et améliorant son expérience.

Nous croyons que ce type de recherche est absolument fondamental : la réflexion en prise directe sur l'action est une forme authentique de recherche qu'aucune autre ne peut remplacer. Notons toutefois que ces deux premières couches de recherche sont peu conformes aux critères académiques et sont, de ce fait, rarement considérées comme des recherches au sens ordinaire.

2.3 Les recherches sur le développement du curriculum

Les recherches du troisième type sont les recherches sur le développement du curriculum. Nous entendons par là les recherches qui visent à concevoir un système d'enseignement d'une matière donnée (en ce qui nous concerne les mathématiques) applicable à un type d'élève et une tranche d'âge donnés, et donc destiné à être utilisé par beaucoup d'enseignants et dans beaucoup de classes. Ces recherches sont à la fois globales, car elles touchent à tous les aspects de l'enseignement (aménagement de la matière, méthodes, contrôle des connaissances), et nettement plus abstraites que les précédentes, puisqu'elles ne prennent en compte aucun élève, aucune classe en particulier. Elles tablent sur une classe moyenne, d'ailleurs difficile à cerner. Un curriculum est une sorte de partition (au sens musical) que l'enseignant doit encore interpréter dans sa classe, adapter au concret, ce qui fait partie de sa recherche à lui.

Du fait qu'elle vise l'action et ses moyens plus que la connaissance, cette troisième couche est plus souvent considérée comme "développement" que comme une recherche au sens habituel.

2.4 Les recherches "universitaires"

Reste la quatrième couche, celle des recherches que nous qualifierons d'universitaires (même si celles de la troisième couche sont aussi parfois poursuivies dans les universités). Ces recherches portent sur des sujets variés et sont de portées diverses.

Elles seules sont le plus souvent considérées comme recherches authentiques. Bien que ... ce sont surtout ces recherches là, théorisantes par nature, dont le S.C.T.P (Systematic Cooperation between Theoty and Practice)[5] observe qu'elles ont peu d'impact sur l'enseignement tel qu'il se pratique.

Le travail de notre groupe concerne ces quatre types de recherches avec, plus récemment, du fait du dévelopement des deux derniers, une place moins grande pour les deux premiers. Le deuxième reste présent dans la mesure où, même si nous sommes tendus vers un but de production ou d'action, l'activité de s'interroger à propos de problèmes ou de problématiques, celle d'y formuler des questions, celle d'en chercher des réponses restent à la base de notre travail.

3. Du rôle fondamental et des difficultés de pratiquer une recherche de terrain

3.1 Une recherche qu'il faut privilégier

Nous croyons que le deuxième type de recherche (mentionné en 2.2), celui des enseignants sur le terrain des classes est absolument fondamental, doit être privilégié et encouragé. Dewey[6], exprime la double necessité et la possibilité de

puiser la matière de la recherche dans l'expérience intime du métier et de s'en détacher assez pour dominer les problèmes :

> *"Je veux souligner le fait qu'aucune pensée, aucune idée ne peut être communiquée en tant qu'idée par une personne à une autre personne. Quand elle est dite, elle est, pour la personne à qui elle est dite, un fait donné comme les autres, non une idée. La communication peut conduire l'autre personne à se poser elle-même la question et à imaginer une idée semblable, ou bien elle peut étouffer son intérêt intellectuel et réprimer tout effort naissant de pensée. Mais ce qu'elle obtient directement[7] ne peut pas être une idée. C'est seulement lorqu'elle est aux prises directes avec les données du problème, en cherchant et en trouvant elle-même le moyen de s'en sortir, qu'elle pense. [...]*
>
> *Les faits ou vérités deviennent des sujets d'étude - c'est à dire de recherche et de réflexion - quand ils entrent comme facteurs dont on doit tenir compte dans le déroulement d'un cours d'évènements dans lequel nous sommes engagés et dont le résultat nous affectera."*
>
> J. Dewey

> *"Lorsqu'un enseignant n'est pas lui-même chercheur, il n'a aucune chance d'être réceptif aux recherches poursuivies par d'autres que lui. Il accueillera les propositions de nouveau curriculum avec lassitude et ne prendra sans doute même pas connaissance des autres recherches, celles que nous avons appelées universitaires. Ceci résulte de l'analyse de Dewey : une condition nécessaire pour assimiler les idées des autres, c'est de se poser des questions, d'être en quête de réponses. D'où une conclusion paradoxale : pour que les recherches sur le curriculum et les recherches universitaires aient un impact sur l'enseignement, il ne suffit pas qu'elles soient pertinentes et soient communiquées aux enseignants, il faut encore que ceux-ci soient encouragés dans la voie de leurs propres recherches."[8]* *N. Rouche*

On reconnaît de plus en plus le caractère nécessairement autonome de la pensée, l'intérêt d'organiser la construction personnelle du savoir et de l'expérience, mais en même temps cette idée de base est peu mise en oeuvre dans le système éducatif. On ne voit pas beaucoup d'élèves, d'enseignants, d'acteurs sociaux devenir chercheurs chacun sur son propre terrain.

3.2 Une recherche qui n'a pas toujours la place qu'elle mérite ...

Notons aussi que cette idée (la nécessité d'une recherche autonome) s'oppose à celle du partage des responsabilités entre recherche sur l'enseignement d'une part, et pratique de l'enseignement de l'autre. On ne peut pas simplement sous-traiter à des spécialistes l'étude des difficultés de l'enseignement et transmettre ensuite les solutions aux enseignants.

"Rien n'a causé plus de tort à la théorie pédagogique que le fait de croire qu'elle consiste à remettre aux enseignants des recettes et des modèles qu'il leur suffit d'appliquer dans leur enseignement."

Dewey[9]

Sans doute cette nécessité d'inclure des personnes de terrain se généralise-t-elle à d'autres domaines que l'enseignement : il y a tout simplement des choses que les experts ne peuvent pas percevoir du fait même qu'ils ne sont pas sur le terrain.

3.3 Une recherche dans l'exercice du métier qui n'est pas facile : quelques obstacles ...

- Certains enseignants, par exemple, se posent peu de questions à propos des mathématiques, et cela peut être dû à ce qu'ils n'ont retiré de leurs études qu'une culture mathématique peu étendue.

  Cette situation est explicable, surtout dans le cas des instituteurs qui ont à enseigner toutes les matières (et dans bien des cas, les mathématiques ne sont pas celles qu'ils préfèrent). Ils peuvent être persuadés que les mathématiques élémentaires sont bien définies, simples et qu'elles se ramènent à la pratique de quelques règles sans exceptions. Ils peuvent ne pas soupçonner la variété et l'importance de tous les phénomènes qui les sous-tendent sur le plan intuitif, tout en opposant des obstacles à leur élaboration dans l'esprit.

- Par ailleurs, la formation mathématique des enseignants fait d'une certaine façon obstacle:

  "Nous essayons de saisir ce que les élèves comprennent quand ils ne comprennent pas encore. Ce n'est pas facile et c'est long. Le professeur-observateur est en quelque sorte aveuglé par sa science, source de clartés trop vives et parfois réductrices. Il doit s'entraîner à oublier (provisoirement) les clefs d'interprétation immédiate que fournissent les connaissances scientifiques et devenir par là capables de capter la "naïveté" du débutant. Nous nous aidons de lectures historiques pour nous déconditionner, retrouver des points de vue "primitifs" sur des questions depuis longtemps scientifiquement classées."[10]

- Plus généralement, des idées toutes faites empêchent la curiosité.

  Pourquoi s'interroger sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques si l'on croit à la bosse des maths (les doués réussiront, les autres non) ? Pourqouoi envisager plusieurs façons d'enseigner si l'on pense que les mathématiques sont une science établie une fois pour toutes, claire, purement déductive, où l'on doit toujours chercher l'unique bonne réponse, où la rigueur est l'exigence majeure, en queque sorte unique, où l'erreur est toujours nuisible et doit être pourchassée sans cesse ? Cette idéologie fausse des mathématiques est de tradition très ancienne et n'est sans doute pas près de disparaître.

- Certaines contraintes institutionnelles peuvent aussi expliquer que beaucoup d'enseignants soient peu enclins à remettre en question leurs conceptions et leurs pratiques.

Chacun doit préparer ses élèves pour l'année suivante ou pour des examens officiels qui imposent une certaine forme de mathématiques. Chacun doit organiser lui-même des examens qu'il faut noter "objectivement". Or, s'il est facile de se donner à l'avance une règle pour comptabiliser des fautes de calcul, ce n'est pas le cas si on veut estimer le degré d'assimilation d'un concept. D'où parfois une hypertrophie de l'enseignement des calculs routiniers, partie la moins intéressante de l'activité mathématique.

- Un autre facteur important doit être relevé.

  Il est lié aux pécédents : la peur. Si les mathématiques sont une science claire, univoque, d'où l'erreur est proscrite, qui distille des certitudes, où l'opinion n'a pas cours, qui est l'affaire des gens intelligents, si les élèves, les parents, les collègues attendent de l'enseignant qu'il soit infaillible, alors la peur s'installe. Et une fois qu'on est dans ce contexte, quoi de plus naturel pour l'enseignant que de tenter de se maintenir en terrain sûr, d'éviter les riques intellectuels, de réprimer l'erreur, ainsi que la pensée libre et imaginative.

4. Une étude de la matière qui cherche à mettre en évidence le rôle instrumental des concepts

L'enseignant dans sa classe est amené à prendre des décisions rapidement et sur le tas. Nous pensons que les capacités à voir clair rapidement et à prendre des décisions sur le tas peuvent s'apprendre et s'appuyent sur un savoir.

Ainsi par exemple, analyser de façon critique une théorie mathématique sous sa forme théorique ordinaire permet parfois aux enseignants d'y déceler qu'on y voit mal le rôle de certrains concepts ou propositions : soit qu'ils sont énoncés dans une forme peu appropriée, soit qu'ils interviennent prématurément loin en amont de l'endroit où ils jouent un rôle clef. Ceci les amène parfois à récrire la théorie non pas tant pour la servir telle quelle aux élèves que pour en discerner mieux le sens interne.

"Cette connaissance plus intime, qui est d'abord pour lui-même un progrès intellectuel, l'aide à cerner les difficultés des élèves sur le chantier de reconstruction théorique, et à en débattre avec eux."

Lettre du GEM au GFEN

Un souci quasi permanent lorsque nous travaillons à un projet d'enseignement est de mettre en évidence une approche que nous appellons heuristique, de montrer une genèse des théories mathématiques que nous sommes amenés à enseigner.

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer, à cerner ce que l'on peut faire de solide, de substantiel sans formalisations ou théorisations prématurées. Dans un second temps, nous observons dans quelle(s) situation(s), à partir de quels moments, les notions familières, avec ses moyens du bord, ne suffisent plus, ne permettent plus de résoudre les problèmes, ou de démontrer des propositions.

En s'ajustant ainsi pour servir adéquatement, il arrive qu'une notion[11] se subdivise en plusieurs autres (ainsi dans l'histoire, la continuité et la continuité uniforme, jusqu'à un certain moment indifférenciées, ont pris leur existence et leur autonomie l'une par rapport à l'autre). L'ajustement peut se faire d'une autre façon : c'est le cas lorqu'un concept unique et unificateur rassemble des phénomènes du quotidien à première vue complètement étrangers entre eux (par exemple, le concept de dérivée qui rassemble les tangentes à des courbes, les vitesses, accélérations et taux de croissance instantanés et aussi l'approximation affine d'une fonction).

Une telle démarche amène ainsi, de proche en proche, à construire ou reconstruire la théorie mathématique visée. Par contraste avec une présentation qui fournit d'emblée la théorie achevée, cette démarche met en évidence le pourquoi, la pertinence, la portée, la "relevance" des concepts et de la théorie. **Un principe organisateur de nos projets d'enseignement pourrait se résumer ainsi : ne théoriser que si nécessaire et amener progressivement les élèves à une théorie formalisée, par le biais d'une suite de questions s'enchaînant d'un créneau plus familier vers des préoccupations plus abstraites.**

Nous parlions tout à l'heure des difficultés des enseignants en classe, enseignants qui sont amenés à comprendre, rapidement et sur le tas, le sens et les enjeux de ce qui se passe en classe. Nous pensons que cette capacité s'apprend. Considérons par exemple l'exercice qui consiste à "relire heuristiquement" une théorie mathématique donnée (c'est-à-dire de la relire en se demandant de quelle définition ou proposition on aurait pu se passer, en tentant de repérer celles qui ne sont pas utilisées dans la suite, ou seulement très loin en aval dans la théorie), puis à récrire une théorie qui soit plus conforme à la construction du savoir, qui s'efforce de montrer le sens et le pourquoi des concepts, et de les introduire tout près d'où ils seront amenés à servir. Nous pensons qu'un tel exercice donne des outils, prépare efficacement les enseignants à mieux comprendre les difficultés des élèves occupés à résoudre des problèmes, à être moins démunis pour les relancer par de bonnes questions ou par de bonnes explications.

> *"On comprend un phénomène en découvrant pourquoi il a lieu, quels facteurs en sont à l'origine ou quelles lois le régissent. On comprend une action pratique en devenant conscient des raisons pour lesquelles cette action produit les résultats escomptés."*
>
> A. Sierpinska[12]

<u>5. Une conception des mathématiques qui influence nos projets d'enseignement : un savoir mathématique se construit</u>[13]

> *"Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question? S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique"*[14]
>
> G. Bachelard

Nous avons choisi notre manière d'enseigner à partir d'une option idéologique : le savoir mathématique se construit. Nous sommes partis d'une certaine image des mathématiques, celle que nous décrivons ci-dessous, peut-être parfois de façon un peu caricaturale pour mieux nous faire comprendre.

Tout concept, tout élément théorique est conçu comme instrument pour résoudre des problèmes. La théorie a essentiellement valeur instrumentale. Au début, la théorie, si on pouvait déjà l'appeler comme cela, est surtout faite d'observations, de résultats d'expériences graphiques ou numériques réussies et qui peuvent resservir. L'instrumentalité joue par rapport à des problèmes tirés du quotidien. Mais au fil ds mois, la théorie mathématique se constitue et grandit, posant elle-même des problèmes. L'instrumentalité commence alors à jouer autant dans le champ des mathématiques théoriques qu'en dehors de lui.

Chaque phase d'apprentissage apporte son lot de connaissances particulières. Mais elle apporte aussi son lot de connaissances méthodologiques générales, d'une part sur les tactiques utiles pour résoudre des problèmes et d'autre part sur les grands types de raisonnement. Une aptitude mathématique se développe au fil des mois et des années.

La construction d'un peu de théorie par la classe et le professeur demande davantage qu'une recherche libre suivie d'une synthèse. C'est un travail ample, qui progresse par étapes, de recherche libre en recherche libre. Le savoir acquis à un moment donné est non seulement réinvesti dans de nouveaux problèmes, mais encore il y est remis sur le métier. Il n'y a pas accumulation monotone de connaissances définitives. Les synthèses ne sont pas empilées. Certaines en remplacent d'autres. Le savoir, en s'amplifiant, prend forme dans sa masse. Il faut défaire pour refaire en plus grand et en mieux."

Cette re-construction d'une théorie par les élèves, nous devions la considérer comme un processus global. D'abord parce que la théorie n'est pas réductible à des petits morceaux indépendants : les définitions et les théorèmes n'ont de sens que les uns par rapport aux autres, les définitions sont des outils dans les démonstrations, les théorèmes servent les uns dans les autres. L'essentiel du sens est dans la structure de l'ensemble. Ensuite, et surtout au niveau de l'initiation aux mathématiques, chaque théorie renvoie à des objets et des facettes multiples de la réalité quotidienne.

L'appropriation d'une théorie ne résulte pas de l'accumulation sur un terrain vierge de petits morceaux clairs et définitifs. Elle est une transformation alternativement continue et saccadée d'une réalité mentale structurée comme dans le quotidien en une autre structurée mathématiquement. En outre elle transforme la personne et son appréhension du quotidien. Cette observation relative à l'apprentissage des mathématiques par nos élèves nous renvoie à la citation suivante de Gonseth à propos de l'évolution d'une théorie dans l'histoire :

> *"Insistons sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu ne varietur. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions "droit devant soi", "sans incliner ni à droite ni à gauche".; le*

second avatar peut-être placé sous le signe de la géométrie grcque, le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que ce dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance. Au contraire, même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept de droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes." [15]

F. Gonseth

La construction du savoir est aussi un processus social. Qui plus est, le savoir se construit entre autres à travers de multiples communications entr'élèves, et entre élèves et professeur : c'est un processus social. Ce qu'il faut donc étudier, c'est le champ de pensées complexe que constitue la classe entière. On ne peut pas le diviser, le morceler, pour mieux en discerner les composantes, car alors il cesse d'exister. Il faut partir de l'ensemble. Une pensée théorique en construction se nourrit autant de richesse et d'échanges que de clarté.

Il est clair qu'une telle approche est difficile à gérer en classe : elle est plus longgue, plus touffue, forcément pas linéaire. Il est nécessaire que l'élève et l'enseignant se construisent régulièrement des synthèses.

Nous venons de montrer que notre conception des mathématiques est celle d'un savoir qui se construit. Ceci n'est pas neutre : quelle que soit la matière à enseigner, nous cherchons à proposer aux élèves pour commencer des problèmes relatifs à des choses familières et énoncés dans la langue commune mais qui sont aussi de nature à enclencher un activité théorisante.

6. Un projet d'enseignement heuristique inspiré par Freudenthal, Lakatos, Polya, et d'autres ...

Notre réflexion à propos de l'enseignement d'une branche déterminée des mathématiques est éclairée[16], par les travaux de H. Freudenthal[17]. Ce dernier cherche d'abord à inventorier, à identifier le plus possible de phénomènes ayant trait à une structure mathématique modélisant un ou plusieurs secteurs de la réalité. Il tente ensuite d'y mettre de l'ordre.

Constatant l'absence de cohérence globale d'un ensemble de phénomènes, il organise localement cet ensemble à l'aide de ce qu'il appelle des *objets mentaux* . Un objet mental n'est pas un concept construit techniquement comme en mathématiques avec par exemple des quantificateurs et d'autres symboles, et inscrits dans une théorie déductive. C'est quelque chose de plus familier que l'on pourrait aussi appeler notion, mais suffisamment élaboré pour en faire précisément un instrument d'organisation d'un champ de phénomènes. Ainsi par exemple, les nombres de tout le monde écrits dans le système décimal, les polygones les plus simples, ou encore les graphiques de fonctions sont trois objets mentaux parmi plein d'autres.

Freudenthal suggère que, les phénomènes sous-jacents ayant été organisés localement et donc sans qu'on y reconnaisse une cohérence globale, on appuye l'enseignement sur leur ensemble et non sur une partie d'entr'eux. Selon lui par exemple, l'"insuccès bien connu de l'apprentissage des fractions pourrait être dû à une exploration trop incomplète par les élèves des phénomènes quelque peu hétéroclites qui y conduisent.

L'apprentissage des mathématiques, selon Freudenthal, doit commencer au niveau des objets mentaux et non tout de suite à celui des concepts mathématiques formels, bien qu'il ait pour objectif de rejoindre ces derniers.

I. Lakatos, quant à lui, a mis en évidence que l'activité mathématique relève d'une dialectique preuve-réfutation. L'énoncé d'un théorème, sa preuve, ses "limites de validité" révélées par des contre-exemples et les concepts qu'il mobilise se mettent au point de manière concomitante, l'un par l'autre, l'un pour l'autre. Un des concepts majeurs d'une telle perspective est celui de *proof-generated concept*, c'est-à-dire un concept mathématiquement formé pour les besoins d'une démonstration et que l'auteur évoque en ces termes :

> *"Proof-generated concepts are neither "specifications" nor "generalisations" of naïve concepts. The impact of proof and refutations on naïve concepts is much more revolutionary than that : they erase the crucial naïve concepts completely and replace them by proof-generated concepts."*

Avant lui, G. Polya[18] avait illustré cette démarche du chercheur. Plus globalement, les travaux de Lakatos, tout comme ceux de Polya, ont souligné l'importance de l'heuristique dans l'apprentissage des mathématiques : avant d'être peaufinés pour fonctionner dans des preuves, les concepts sont progressivement construits pour résoudre des problèmes : d'abord des notions à caractère instrumental qui donnent lieu plus tard à des concepts de fondement et à des théories plus formelles. Nos projets d'enseignement tentent de respecter cette dynamique propre à l'activité mathématique. Voici quelques exemples tirés du projet du Groupe AHA[19] dont certains d'entre nous font partie.

1. Dans ce projet, la limite d'une fonction est d'abord envisagée comme une méthode de calcul qui permet de <u>déterminer</u> des pentes de tangente ou des vitesses instantanées. On met à l'épreuve cette méthode en contrôlant par ailleurs les résultats qu'elle fournit (par exemple, on contrôle la tangente à une courbe polynomiale via l'approximation affine et le débit instantané dans le problème du vase conique via une expérience de pensée).
   Une fois confortée par des exemples, cette méthode fournit un moyen de <u>définir</u> le concept de tangente par le biais de sa pente et celui de vitesse instantanée.
   A terme dans le projet, le concept de limite est formalisé au moyen de quantificateurs pour pouvoir fonctionner dans des preuves, par exemple, des preuves de théorèmes relatifs à l'algèbre des limites.

2. Au début de ce projet, les aires et les volumes sont considérés comme des objets mentaux qui jouissent de propriétés intuitives telle l'additivité. On ne doute pas a priori de leur existence même s'il s'agit d'aires et de volumes curvilignes : on cherche seulement à les <u>déterminer</u>. Dans ce contexte aussi, la limite apparaît d'abord comme un moyen de calcul. Mais déjà, pour prouver que l'aire sous $y = x^3$ vaut $1/4$ exactement, on utilise un double raisonnement par l'absurde qui mobilise quelque chose du concept de limite formalisé.
Ensuite, les sommes de Riemann générales sont définies de manière à prouver facilement les propriétés de l'intégrale définie (additivité par rapport aux intervalles, ...).
Cette approche prépare les élèves à concevoir dans la suite de leur formation qu'une aire puisse être <u>définie</u> par la limite de telles sommes.

3. Pendant une bonne partie de ce projet, les nombres sont présents sous une forme naïve :

> *"Toute mesure de grandeur implique une notion confuse de nombre réel [...] qui n'est guère différente de celle qu'on retrouve aujourd'hui dans l'enseignement élémentaire ou chez les physiciens et ingénieurs; cette notion ne se laisse pas définir avec exactitude, mais on peut l'exprimer en disant qu'un nombre est considéré comme défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celle-ci dans le calcul [...]"* , (Bourbaki, 1960)

A ce stade, les nombres sont considérés comme ayant une existence a priori : il s'agit seulement de les <u>déterminer</u>.
Ensuite, les preuves de certaines propriétés des limites font apparaître des propriétés incontournables des nombres réels auxquels on donne le statut d'axiome, tel l'axiome d'Archimède. En se basant sur certaines raisons liées à l'axiome des intervalles emboîtés, on convient alors de <u>définir</u> les nombres réels comme des séries, leur existence étant ainsi assurée par le truchement d'une définition.
Enfin, on suggérera sur un exemple (lien entre la croissance d'une fonction et la positivité de sa dérivée) que les principaux résultats de l'analyse ne sont vérifiés que pour des fonctions définies sur des ensembles de réels.

4. L'approche constructiviste de notre projet apparaît également dans l'étude de certaines classes de fonctions. Ainsi, les fonctions trigonométriques sont construites pour modéliser des phénomènes périodiques et les fonctions exponentielles pour traduire certains phénomènes de croissance.

Le principe organisateur de nos projets peut se résumer ainsi : ne théoriser que si nécessaire et amener progressivement les élèves à une théorie formalisée, par le biais d'une suite de questions s'enchaînant d'un créneau plus familier vers des préoccupations plus abstraites. Selon toute vraisemblance, tous les élèves ne peuvent être conduits aussi loin. Certains s'arrêteront en cours de route. L'important, à nos yeux, est que ceux-ci disposent d'un bagage, moins formalisé

sans doute, mais significatif pour eux et faisant écho aux questions qu'ils se sont posées et aux difficultés qu'ils ont rencontrées.

<u>7. Un enseignement qui s'inspire de l'histoire, jusqu'à un certain point ...</u>

Nous illustrerons à nouveau ceci par des exemples tirés du projet AHA. L'histoire de l'analyse a comporté en gros trois étapes.

Depuis Eudoxe jusque vers le milieu du XVII^e siècle, les problèmes de quadrature (et de cubature) n'avaient pas de rapport avec la recherche des tangentes, non plus qu'avec celle des maxima ou l'étude des vitesses. Il s'agissait là de secteurs distincts des mathématiques. Qui plus est, à l'intérieur de chaque secteur, chaque problème recevait une solution particulière même si certains principes de raisonnement tels que l'exhaustion ou la méthode de Cavalieri revenaient éventuellement d'un problème à l'autre. Il s'est ainsi constitué au fil des siècles un stock de résultats situés dans des contextes divers.

Avec la découverte du théorème fondamental par Newton et Leibniz dans la deuxième moitié du XVII^e siècle, on réalise la parenté profonde quoiqu'insoupçonnée jusque-là des résultats antérieurs. Ces derniers relèvent alors d'une méthode unique et routinière qui éclipse l'exhaustion et la méthode de Cavalieri. Mais cette méthode nouvelle mobilise en un certain sens plutôt des objets mentaux[20] que des concepts : le rapport ultime, l'approximation linéaire, les aires qu'on ne définit pas mais qu'on calcule à l'aide de primitives, etc. Pendant un siècle et demi, les résultats s'accumulent tandis que s'approfondit le malaise sur les fondements du nouveau calcul.

Une troisième phase du développement de l'analyse débute avec Bolzano et Cauchy. Les *concepts* de fondement apparaissent : la limite au sens de Cauchy qui sera formalisée par Weierstrass, la continuité techniquement définie et qui va être discernée de la continuité uniforme, l'intégrale qui se constitue de Cauchy à Riemann et fournit la définition de l'aire. La mise au point de ces concepts et la démonstration de leurs propriétés font apparaître certains axiomes incontournables des nombres réels.

Notre projet d'enseignement s'inspire de cette progression. En effet, quelque chose du concept de limite est mobilisé d'emblée dans des problèmes issus de contextes variés a priori non connectés les uns aux autres : suites, asymptotes, tangentes, vitesses, aires et volumes. Des liens apparaissent peu à peu : les pentes de tangentes et les vitesses sont deux facettes du concept de dérivée ; certains calculs d'aire et de volume se ramènent à des calculs de limites de suites; ils apparaissent ensuite comme réciproques des calculs de dérivées pour autant qu'on y introduise l'idée de variation ; l'expression "tendre vers" apparaît de manière récurrente. En définitive, l'unité globale des problèmes se réalise autour du concept de limite d'une fonction. En étudiant les propriétés de ce concept, on est amené à préciser la nature des nombres sur lesquels on travaille.

En fait, cette progression va en sens inverse d'un cursus classique d'enseignement de l'analyse qui débute par l'axiomatique des réels et qui étudie le concept fondateur de limite avant ceux de dérivée et d'intégrale et leurs applications. Un tel cursus constitue une inversion didactique au sens donné par H. Freudenthal (1973), c'est-à-dire un exposé qui va à contre-courant de l'histoire. En ce sens, notre projet restaure donc l'ordre historique.

La manière dont les fonctions apparaissent dans notre projet échappe à ce parallèle avec l'histoire. En effet, elles y sont massivement présentes dès le début, les élèves y étant déjà familiers au moment où ils abordent l'analyse. Alors que, lors du développement de l'analyse dans l'histoire, l'idée même de fonction émerge plus progressivement, son importance et sa portée dans cette discipline ne devenant explicites qu'avec Euler au XVIII^{e} s.

8. Quelques concepts pour analyser notre enseignement : les idéaux types de Max Weber

Pour analyser et situer notre enseignement, nous nous référons régulièrement à ce que Max Weber[21] appelle des *idéaux types*, c'est-à-dire en deux mots à des concepts clairs, outils servant à évoquer des choses, mais en perpétuelle attente de nuances et de complémént de sens. Plus précisément un idéal type est une construction de l'esprit qui possède les caractères les plus importants d'une situation réelle, qui les schématise en les poussant à l'extrême pour plus de clarté.

Un idéal type n'a pas pour objet de représenter fidèlement la réalité. Au contraire, c'est quelque chose de net, qui établit des distinctions logiques claires. Il ne tend pas à copier fidèlement la réalité : il la stylise, la caricature. En ce sens donc, un idéal type n'est pas un modèle. De ce dernier au contraire, on attend qu'il soit le plus proche possible de la réalité qu'il représente : les écarts entre le modèle et la réalité, même s'ils sont souvent inévitables, sont jugés inopportuns.

Contrastons pour nous expliquer, la notion d'idéal type avec celle qu'on pourrait appeler l'*idéal moyen* , c'est à dire celui qu'on utilise quand, en statistiques, on décrit des situations en termes de moyennes, variances, etc. Dans le cas de l'idéal moyen, on gomme les différences, alors que l'idéal type cherche à les accentuer dans la mesure où elles sont significatives et peuvent contribuer à l'intelligibilité de la situation.

Les idéaux types par delà le fait qu'ils sont caricaturaux et ne correspondent qu'imparfaitement à la réalité, mais en extraient seulement les relations intelligibles les plus prégnantes, permettent de l'aborder avec des idées claires, bien tranchées. Il est intéressant de l'appliquer à des situations réelles pour autant qu'on le prenne pour ce qu'il est, et seulement pour cela : un instrument de pensée, qui relève de la méthode et pas un résultat scientifique.

> *"[...]Ainsi, tout en répondant à des définitions raisonnablement claires (et peut-être à cause de cela), certains des concepts que nous avons introduits ne s'appliquent pas sans correctifs à la réalité. Ils sont des types idéaux au sens du sociologue allemand M. Weber : concepts aux contours tranchés, qui aident à situer des objets ou des phénomènes réels, mais ont souvent besoin d'un complément de sens quand on les utilise dans un contexte déterminé. "*

> *"De même que pour toute science généralisante" écrit M. Weber, "la spécificité des abstractions de la sociologie implique que ses concepts soient relativement vides de contenu vis-à-vis de la réalité historique concrète. Ce qu'elle procure en contrepartie, c'est une univocité accrue du concept. [...] elle (la sociologie) s'éloigne de la réalité et contribue à la connaissance de celle-ci en explicitant le degré d'approximation du phénomène historique par rapport aux concepts qui permettent de le situer."*
>
> *Le rôle des types-idéaux est de "conduire à la formulation d'hypothèses et de suggérer des questions à poser à la réalité". Bien qu'ils ne représentent pas fidèlement la réalité, ils exercent une fonction objectivante su fait qu'ils aident à la cerner. [...]"*[22] *"*

Nous illustrons ci-après à titre d'exemple deux type idéaux qui nous servent fréquemment à analyser des situations d'enseignement.

8.1 Les quatre types d'enseignement[23] selon A. Treffers

Considérons le schéma suivant dans lequel A. Treffers (Freudenthal Instituut, Utrecht) distingue quatre façons d'enseigner les mathématiques. Ces quatre façons d'enseigner correspondent à un double distinction : **privilégier ou non ce qu'il appelle le point de vue horizontal et le point de vue vertical.**

Le point de vue horizontal, c'est celui qui s'appuie sur la réalité, qui va chercher les mathématiques dans des contextes divers (quotidien, physique, géographique, économique, etc.), où l'on utilise le dessin, les constructions, les manipulations, les perceptions, l'intuition. Le second, *le point de vue vertical*, est celui qui met en avant la théorie, la structure, la logique, la déduction, les démonstrations, la rigueur. Si l'on accepte, fut-ce provisoirement, ces deux vues schématiques, une double dichotomie fournit effectivement quatre façons d'enseigner.

	horizontal	vertical
mécaniste	–	–
empiriste	+	–
structuraliste	–	+
réaliste	+	+

1. Un enseignement de type mécanique

Si on ne privilégie ni le point de vue horizontal, ni le point de vue vertical, on obtient le type d'enseignement qu'A. Treffers appelle *mécanique*. Dit un peu brutalement, il s'agit d'un enseignement qui ne part de nulle part et ne va nulle part... Une question se pose tout de suite : qui peut bien enseigner comme cela ? Personne sans doute, encore que celui-là n'en est pas bien loin qui propose à ses élèves des colonnes de calculs hors de tout contexte et où l'on applique des règles sans lien visible avec une théorie.

2. Un enseignement empiriste

L'enseignement *empiriste* par contre privilégie le point de vue horizontal, sans trop se soucier du point de vue vertical. C'est celui que l'on fait lorsqu'on organise dans la classe des activités et des manipulations diverses, quoique sans prendre suffisamment le temps d'en structurer les acquis, d'en tirer des conséquences organisées. L'activité considérée comme but en soi conduit à ce que R. Bkouche appelle l'activisme pédagogique.

3. Un enseignement structuraliste

Un enseignement est dit *structuraliste* lorsqu'il est axé sur la théorie et son engendrement logique, sans lien visible avec un contexte. Un exemple est celui du discours magistral qui enchaîne les axiomes, les définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, en donnant parfois un exemple au passage.

4. Un enseignement réaliste

Enfin, est-il besoin de le dire, l'enseignement *réaliste* est "le bon". C'est celui qui se soucie à la fois des contextes problématiques et de la théorie, et qui amène les élèves à saisir les liens entre chaque structure mathématique et les questions qui lui ont donné naissance ou en sont les domaines d'application (que ce soit dans les mathématiques ou ailleurs).

Bien entendu, ce schéma en quatre points est une caricature. Enseigner les mathématiques est une activité complexe, pleine de nuances, que chacun de nous pratique de son mieux. Pourquoi voudrait-on ramener les mille et unes façons significatives de le faire en quatre types seulement, engendrés par deux dichotomies brutales ? Cela paraît réducteur et malsain. Il n'empêche que nous avons ce schéma en tête quand nous concevons ou observons un enseignement, et que cela nous éclaire.

8.2 La distinction entre illustration et l'application selon P. Hilton

La distinction que propose P. Hilton[24] entre illustration et application d'une théorie mathématique est un autre idéal type qui nous sert régulièrement de référent. Formulons la de la manière symétrique suivante :

une illustration d'une théorie

est

une situation simple qui aide à comprendre la théorie

tandis que

une application d'une théorie

est

une situation simple qui aide à comprendre la théorie

Il ne s'agit pas de dire que l'une est utile et l'autre pas : P. Hilton affirme qu'elles ont chacune un rôle à jouer, mais que ce qui ne va pas (il y aurait en quelque sorte imposture), c'est de présenter quelque chose qui est en fait une illustration en affirmant qu'il s'agit d'une application.

Nous sommes à nouveau ici en présence d'un idéal type : d'une part la clarté logique de la distinction ne fait pas de doute; d'autre part, l'application à des situations réelles exige des réserves et des commentaires... Pour nous la distinction est importante dans la mesure où elle attire l'attention sur le rôle des théories et des concepts qu'elles mettent en oeuvre. S'il est vrai qu'on peut considérer une théorie comme un édifice à comtempler, nous l'avons dit plus haut, nous la considérons avant tout comme un instrument que l'on construit pour penser plus avant, que ce soit dans le champ des mathématiques elles-mêmes ou bien en dehors[25].

Donnons un exemple de l'opposition entre illustration et application à propos de la règle des signes pour la multiplications des entiers : "moins par moins donne plus", " moins par plus donne moins", etc.

Cette règle est souvent perçue par les élèves comme parfaitement arbitraire. On la trouve illustrée depuis des siècles de diverses façons. En voici une : on trouve le rapport de la composée de deux homothéties (ayant chacune pour rapport un nombre entier) en multipliant les rapports des homothéties composantes. Même si cette propriété de la composition est un fait mathématique important, elle ne fait pourtant pas beaucoup plus qu'illustrer la règle des signes. Elle n'en est par ailleurs pas une application : le caractère direct ou inverse de la composée de deux homothéties va de soi, et ne nécessite nullement la règle des signes pour être interprétée.

Certains rapprochent parfois la règle des signes de la combinaison logique des propositions : une proposition deux fois niée est en fait affirmée. Mais là, il s'agit plus d'une d'une métaphore[26] qu'une illustration, puisqu'elle n'a pas trait aux nombres relatifs.

Que serait alors une application de la règle des signes ? Considérons la recherche de la représentation d'une droite par une équation. Généralement les élèves rencontrent la première fois cette problématique à propos de situations où deux grandeurs sont liées par une relation affine (comme par exemple le périmètre et le côté d'un carré, $p = 4c$ ou encore le coût C d'une consommation d'électricité comprenant une redevance fixe f et un montant proportionnel à la consommation c, $C = f + kc$).

Comment représenter une droite entière (et pas seulement un morceau de celle-ci) par une équation ? Si on ne dispose que des entiers positifs, il suffit (si on peut dire...) de refaire pour chacun des quadrants par lesquels passe la droite ce qu'on a fait à l'étape précédente : se donner deux demi-axes positifs et une équation caractérisant le morceau de la droite qui se trouve dans le quadrant en question. Ce qui donne généralement trois équations pour une droite...

On voit alors l'économie que procure le recours aux entiers relatifs : on peut caractériser la droite au moyen d'une seule équation. Pour obtenir cette représentation efficace de la droite, il a fallu considérer x et y comme des variables auxquelles on applique la règle des signes et les autres propriétés des nombres relatifs.

Cet exemple éclaire le fait que le recours au nombres négatifs soit devenu fréquent après l'introduction de la géométrie analytique au XVIIème siècle. Il nous amène aussi à la question suivante : au moment où la multiplication des nombres relatifs est enseignée, les élèves sont-ils à un âge où on peut pas leur en montrer une application substantielle? Cette introduction searit-elle prématurée?

Nous venons de le voir, quelques concepts inspirent notre travail. Nous n'en avons pas, bien entendu, disposé *a priori*. Au contraire, nous les avons reconnus et essayés petit à petit, au fil des années, et pas tous à la fois. Ils n'ont rien d'absolu, car ils ont un lien avec nos options pédagogiques particulières. Nous n'avons nulle envie de les proposer comme une grille définitive d'analyse des actions d'enseignement mathématique. Ils ont évolué, ils évolueront encore avec nos tentatives et nos recherches futures. Mais ils nous aident à pénétrer dans la réalité de l'apprentissage, toujours plus touffue et plus imprévue qu'on ne s'y attend. Ils nous aident à nous y retrouver quelque peu, à construire, non pas une théorie générale, mais quelques îlots de rationnalité locale. Ils nous aident à réfléchir et à faire des projets."[27]

---

[1]L'exposé dont le texte ci-dessous rend compte rassemble pour l'essentiel des réflexions ou analyses qui ont jalonné notre cheminement de groupe au fil du temps. Elles ne me sont pas personnelles. Bon nombre d'entr'elles ont déjà été écrites çà et là, notamment par N. Rouche, fondateur du groupe. Je tiens à remercier M. Grand'Henry-Krysinska qui m'a aidée dans la préparation de cet exposé.

[2]Les auteurs de ce projet sont: P. Bolly (collège St Michel à Bruxelles), A. Chevalier (GEM), M. Citta-Vanthemsche (GEM), M. Grand'Henry-Krysinska (GEM), C. Hauchart (GEM), D. Legrand (GEM), N. Rouche (GEM) et M. Schneider-Gilot (FUNDP, Namur). Ce projet sera prochainement édité chez C. De Boeck, Louvain-la Neuve

[3]N. Rouche, *Le groupe d'enseignement mathématique ou un exemple de coopération diversifiée*, dans la Revue de Louvain.

[4]Cette section et la suivante sont empruntées à N. Rouche, *Sur la notion de recherche dans le domaine de l'éducation mathématique*, LLN.

[5]S.C.T.P., sigle pour Systematic Cooperation between Theory and Practice.

[6]J. Dewey, *Démocratie et éducation*, trad. G. Deledalle, rééd. A. Colin, 1990, 1ère éd. anglaise, 1916.

[7]C'est Dewey qui souligne

[8]N. Rouche, *Sur la notion de recherche dans le domaine de l'éducation mathématique*, LLN.[compléter]

[9]J. Dewey, *Démocratie et éducation*, trad. G. Deledalle, rééd. A. Colin, 1990, 1ère éd. anglaise, 1916.

[10]Lettre du GEM au GFEN

[11]nous distinguons ici *notion* d'une part et *concept*, d'autre part : la notion préfigurant dans le domaine plus familier la concept c'est-à-dire l'objet mathématique techniquement défini.

[12]A. Sierpinska, *La compréhension en mathématiques*, Modulo éditeur, Quebec, 1995

[13]Cette section est empruntée pour une bonne part à la *Lettre du GEM au GFEN*

[14]G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris, 1938.s

[15]F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité*, A. Banchard, Paris, 1936, rééd. 1974.

[16]N. Rouche, dans *Des grandeurs aux nombres rationnels*, in Actes du colloque Inter-IREM de Géométrie de Limoges, 1992 illustre cet apport de Freudenthal à une réflexion sur l'enseignement des nombres rationnels.

[17]H. Freudenthal, *Didactical phenomenolgy of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[18]G. Polya, *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris, 1967

[19]Pour une présentation plus globale de ce projet, cf. par exemple C. Hauchart, M. Schneider, *Une approche heuristique de l'analyse*, dans Repères-IREM, n°25, octobre 96

[20]notions empruntées au quotidien et qui servent à organiser et interpréter les phénomènes et à construire les premiers raisonnements.(sur les notions d'objet mental et de phénomènes, cf. H. Freudenthal, *Didactical phenomenologyof mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983

[21]économiste et sociologue allemand ; M. Weber, Essais sur la théorie de la science, trad. J. Freund, Plon, Paris, 1951, rééd. 1992

[22]N. Rouche, *L'apprentissage des mathématiques est-il un objet de recherche sérieux? , Louvain-la-Neuve, 1988.*

[23]cette section est reprise en substance de N. Rouche, *Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ? une question de sens*, Louvain-la Neuve, 1994

[24]P. Hilton, *Le langage des catégories*, trad. J.C. Mathys, J. Freund, Plon, Paris, rééd. 1992

[25]Il ne faut pas ici identifier *application* à *application à la physique, à l'économie, ...*

[26]qui n'est par ailleurs pas vide de sens dans la mesure où elle montre une identité de structure.

[27]Lettre du Gem au GFEN.