

Un exemple d'enseignement des mathématiques dans une perspective historique, en S.T.S.

André STOLL - IREM de Strasbourg -

L'exposé des objectifs de l'enseignement des Mathématiques en S.T.S. (S.T.S. = section de techniciens supérieurs) insiste sur le fait qu'il doit "contribuer au développement de la formation scientifique grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche scientifique : mathématisation d'un problème (modélisation), travail d'expérimentation et de recherche, construction et mise en œuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus au regard du problème posé".

Dans cette optique, j'ai depuis plusieurs années pris l'habitude d'organiser mon enseignement en S.T.S. en relation avec mes collègues de Mécanique, Physique ou Electricité.

Tout en respectant les impératifs de programme et d'examen, j'ai été conduit à modifier notablement mon enseignement, tant dans la forme que dans le contenu :

-dans la forme : d'une part en introduisant toute notion nouvelle par son aspect pratique et, si possible, en liaison avec le cours technique correspondant ; d'autre part en proposant un enseignement construit davantage autour d'activités de résolution de problèmes que de cours théoriques.

-dans le contenu : en construisant des activités autour de thèmes spécifiques du programme, qui associent partie mathématique et partie pratique ;

Du fait que je participe depuis quelques années au groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Strasbourg, ces activités ont été surtout inspirées par des situations historiques exemplaires. Elles m'ont permis de constater combien les étudiants étaient alors mieux intéressés par l'enseignement qu'ils recevaient et combien ce retour aux sources pratiques et historiques stimulait leur propre réflexion et invention.

Une des difficultés principales de l'enseignement des Mathématiques en S.T.S. vient du fait que les outils conceptuels utilisés sont très élaborés, et que leurs définitions rigoureuses mais abstraites et formelles sont, la plupart du temps, inaccessibles aux étudiants de ces sections. Le retour aux sources historiques permet alors de trouver un chemin plus intuitif, plus en accord avec la formation de ces étudiants, pour leur faire comprendre la notion dans toute sa dimension, sans les perdre dans un formalisme inadapté.

Le texte ci-dessous est un exemple d'une telle activité. Celle-ci est inspirée d'une courbe qui joua un rôle fondamental dans l'élaboration de nouvelles méthodes au XVII^e-ième siècle. La lecture du court extrait du "Traité des Indivisibles" de G. Personne de Roberval ne pose pas de gros problème aux étudiants. Elle est le point de départ d'une réflexion des étudiants qui se rendent compte de la nécessité de préciser les notions essentielles en mathématiques et en mécanique que sont la dérivée, la tangente à une courbe, le vecteur-vitesse¹ ainsi que les liens entre ces notions.

Dans la deuxième partie intitulée "Le pendule cycloïdal de Ch. Huygens", j'ai voulu replacer le problème dans son contexte historique. La démonstration de Huygens me paraissant trop

¹ c'est évidemment un bel anachronisme que de parler de vecteur-vitesse en parlant de Roberval. Mais il ne faut pas oublier que le document s'adresse à des étudiants de S.T.S. et, s'il ne s'agit pas de "faire n'importe quoi", on est parfois amené à faire quelques compromis.

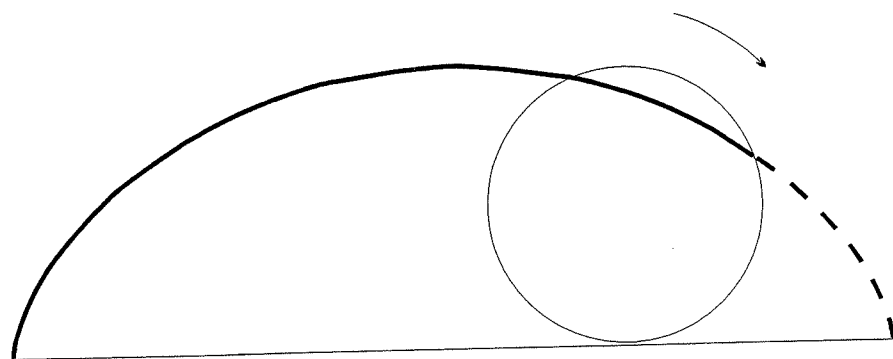
difficile pour les étudiants, j'ai préféré opter pour une démonstration plus moderne utilisant le calcul différentiel. Cette démonstration étant un bel exemple d'application d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.

Enfin, la dernière partie intitulée "la quadrature de la cycloïde" présente un problème de calcul d'aire. Les méthodes vues en classe terminale ne s'appliquant pas ici, il faut revenir à la source du calcul intégral. G.P. Roberval et B. Pascal traitent ce problème à l'aide des indivisibles. Aborder cette "théorie" dans une classe de S.T.S. ne me semble pas judicieux. Aussi, ai-je gardé les idées des deux mathématiciens en les traduisant à l'aide d'outils qui sont plus à la portée des étudiants².

Bibliographie

1. Blaise PASCAL : Œuvres complètes - Bibliothèque de la Pléiade - 1991 - En particulier :
- Histoire de la Roulette (appelée autrement trochoïde ou cycloïde)
- Traité général de roulette
2. Gilles Personne de ROBERVAL : Traité des indivisibles - 1693 -.
3. "Christiaan Huygens et la cycloïde en classe : approches géométriques, analytiques et graphiques" par Michel ROELENS in "Actes de la Première Université d'Été Européenne - Montpellier 19 au 23 juillet 1993 -"
4. "Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens" Evelyne BARBIN in "Actes du colloque Inter-IREM - Histoire et Epistémologie des mathématiques - Strasbourg 22-23 mai 1987"

La cycloïde



² voir la fin de la note 1.

1. Introduction

Dans l'*Histoire de la Roulette* datée du 10 octobre 1658, Blaise Pascal écrit:

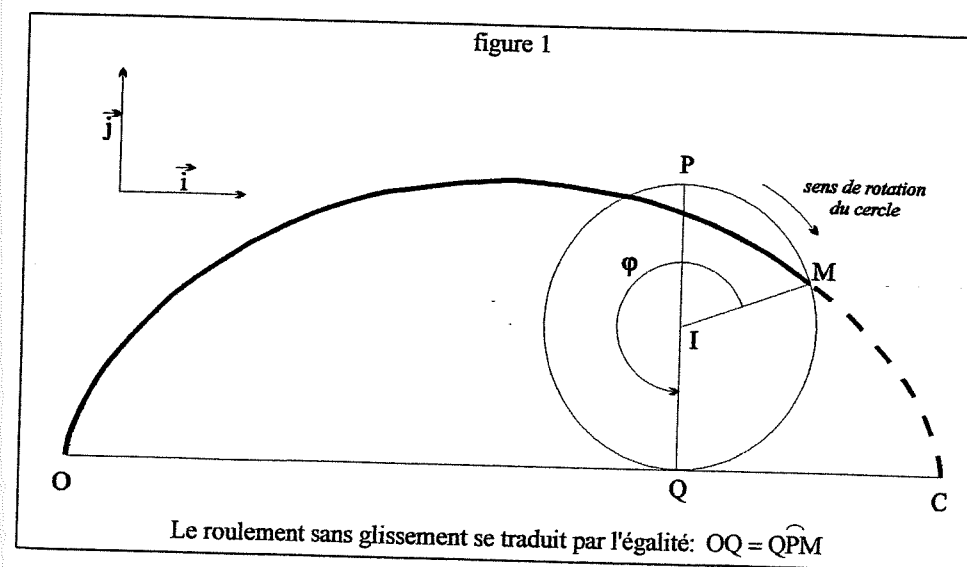
La roulette (aussi appelée trochoïde ou cycloïde) est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; [...] ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire [...] supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

Dans ce même texte, Blaise Pascal nous apprend que les plus grands mathématiciens de l'époque ont cherché à "connaître la nature et les propriétés" de cette courbe. On y trouve entre autres les noms de Roberval, de Fermat, de Descartes, de Wren, de Huygens... Chacun trouvant une propriété de la cycloïde ou une autre démonstration d'une propriété déjà connue.

Le problème ci-dessous propose de trouver et de démontrer quelques propriétés de la cycloïde, souvent par des méthodes "modernes" parfois par des méthodes (apparemment) plus anciennes.

2. Définition de la cycloïde.

Soit (C) un cercle de centre I et de rayon r . La cycloïde est la trajectoire d'un point M du cercle (C) lorsque celui-ci roule sans glisser sur une droite. Cette droite est appelée la base de la cycloïde (cf. figure 1).



3. Tangente et normale à la cycloïde à un instant t quelconque.

La méthode.

Les méthodes (dérivée d'une certaine fonction,...) vues jusqu'à présent ne s'appliquent pas. Il nous faut donc trouver une autre manière de procéder. La mécanique nous en fournit une.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, nous appliquerons le principe énoncé par Gilles Personne de Roberval au XVII^{ème} siècle: La tangente (Roberval écrit *la touchante*) à une courbe en un point M est la direction du mouvement de ce point. (Voir encadré ci-contre).

Pour faciliter le travail de recherche de la direction lorsque le point M est animé de plusieurs mouvements, nous utiliserons l'outil vectoriel et nous représenterons chaque mouvement par un vecteur - appelé « vecteur vitesse » qui a pour direction et sens, la direction et le sens du mouvement et pour norme la vitesse linéaire du point.

Par exemple si le point M se déplace sur une droite (d); le déplacement de ce point sera représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la droite (d), pour sens le sens du déplacement et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 3). Lorsque le point M est fixe sur une demi-droite [Ow qui pivote autour du point O avec une vitesse angulaire ω (exprimée en rad/s), le point M décrit un cercle de centre O et de rayon OM. Le déplacement de M sera représenté par un vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la perpendiculaire à (OM), pour sens, le sens de rotation et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 2).

Exercice: Exprimer $\|\vec{v}\|$, la norme de $\vec{v}$ lorsque $\theta = \omega t$ (ω constante) puis lorsque $\theta = \theta(t)$.

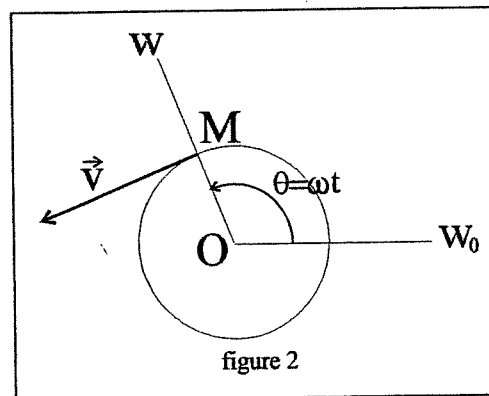


figure 2

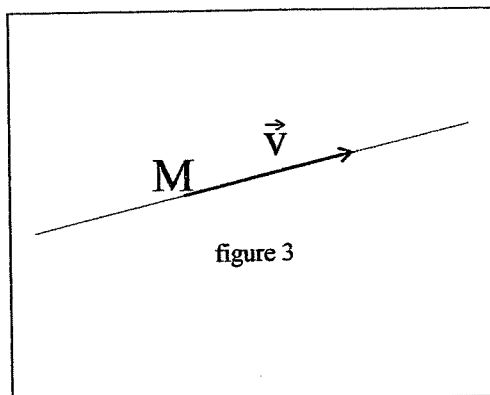


figure 3

Donnée: les touchantes des lignes courbes par les mouvements mêmes mêlés.
Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître les mouvements qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.
Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

Règle générale.

Pour les propriétés spécifiques de la ligne courbe qui vont être données, examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe. La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

Lorsque le déplacement de M résulte de la composition de plusieurs mouvements, celui-ci sera représenté par la somme des vecteurs représentant chaque mouvement.

Application à la cycloïde.

Le mouvement du point M, le point générique de la cycloïde, peut être décomposé en deux mouvements: un mouvement de translation représenté par le vecteur $\vec{MV}$ et un mouvement de rotation représenté par le vecteur $\vec{MU}$. (cf. figure 4)

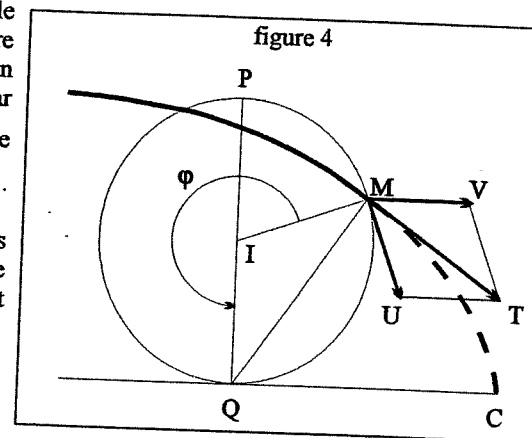


figure 4

1. Préciser la direction et le sens de ces deux vecteurs et montrer que "le roulement sans glissement" se traduit par l'égalité $\|\vec{MU}\| = \|\vec{MV}\|$.
2. En déduire un vecteur directeur $\vec{MT}$ de la tangente à la cycloïde lorsque le point M n'est pas en C.
3. Que peut-on dire de $\vec{MT}$ lorsque le point M est en C ?
4. Montrez que l'angle orienté $(\vec{QM}, \vec{QP})$ est la moitié de l'angle orienté $(\vec{IM}, \vec{IP})$.
Déduisez-en que les droites (MQ) et (MT) sont orthogonales et que:

la normale à la cycloïde en M est la droite (MQ).

5. On suppose dans cette question et la suivante, que la vitesse angulaire ω du cercle (C) (en d'autres termes $\omega = \frac{d\phi}{dt}$) est constante. Exprimez la norme du vecteur $\vec{MT}$ et la vitesse du point M en fonction de la variable t.

Application: longueur d'un arc de cycloïde.

Soit la fonction $S: t \rightarrow S(t) = \widehat{OM}$; En remarquant que $\dot{S}(t) = v(t)$ (la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t c'est à dire le temps), montrez que:

$$\widehat{OM} = 4r \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right) = 4r \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right) = 8r \left(\sin \frac{\phi}{4} \right)^2$$

Et en particulier:

$$\widehat{OC} = 8r$$

4. Equations paramétriques de la cycloïde.

1. Montrez qu'avec les notations de la figure 1, une représentation paramétrique de la cycloïde dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

2. Calculez les dérivées de x et de y par rapport à la variable φ et déduisez-en que:

$$\vec{MT} = \begin{pmatrix} 2r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

3. Donnez un vecteur unitaire de la tangente et un vecteur unitaire de la normale en M à la cycloïde.

Déduisez-en la tangente à la cycloïde en O et en C .

4. On appelle u l'angle orienté $u = (\vec{MT}, \vec{IP})$; montrez que le rapport $\frac{\sin^2 u}{y}$ est constant.

5. Le pendule cycloïdal de Chrisrian Huygens

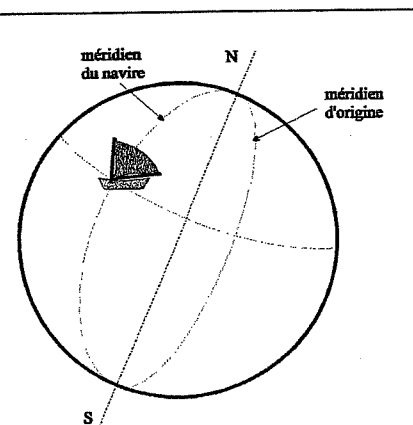
La découverte des Amériques et l'expansion du commerce maritime obligent les marins à changer leurs habitudes. Contrairement à leurs prédécesseurs, les navigateurs du XVII^{ème} siècle s'éloignent des côtes et s'aventurent en haute mer. Aussi, leur faut-il apprendre à se repérer convenablement c'est à dire à trouver la latitude et la longitude du bateau. Si la latitude du navire s'obtient assez facilement en mesurant la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, il n'en est pas de même de la longitude: il n'existe aucun moyen simple de l'évaluer! De nombreuses cargaisons sont perdues et des fortunes gaspillées.

Les pouvoirs prennent rapidement conscience de ce problème et promettent de fortes récompenses à celui qui résoudra le secret des longitudes: le Stathouder de Hollande promet 25000 florins, Charles II d'Angleterre un traitement de 100 livres l'an et le Cardinal de Richelieu une pension de 2000 francs... Toutes ces récompenses incitent les savants à se mettre au travail.

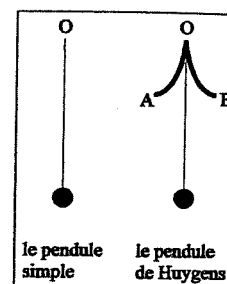
Un des principes pour trouver la longitude est de comparer l'heure locale, celle du bateau, à l'heure du port d'attache ou du méridien d'origine. (Cf. encadré ci contre). Mais pour cela, il faut transporter l'heure du méridien d'origine sur le navire.

Le pendule de Galilée ou pendule simple permet de régulariser assez correctement les horloges terrestres dont le support est immobile. Malheureusement, l'isochronisme de ce pendule n'est qu'approximatif car la période des oscillations dépend de l'amplitude de ces oscillations. Une horloge de ce type se dérègle trop rapidement sur un navire.

Pour corriger le défaut du pendule simple, Christian Huygens a l'idée de munir le pendule de deux arcs courbes entre lesquels ont lieu les oscillations. Mais, quelle forme faut-il donner à ces arcs? Dans ses premières tentatives, Huygens procède par tâtonnements.



Supposons par exemple que le soleil soit au zénith du bateau et qu'on sache qu'au même instant, il est 15 heures sur le méridien d'origine. Dans ce cas, le navire est à 3 heures à l'ouest c'est à dire à 45 degrés à l'ouest du méridien d'origine.



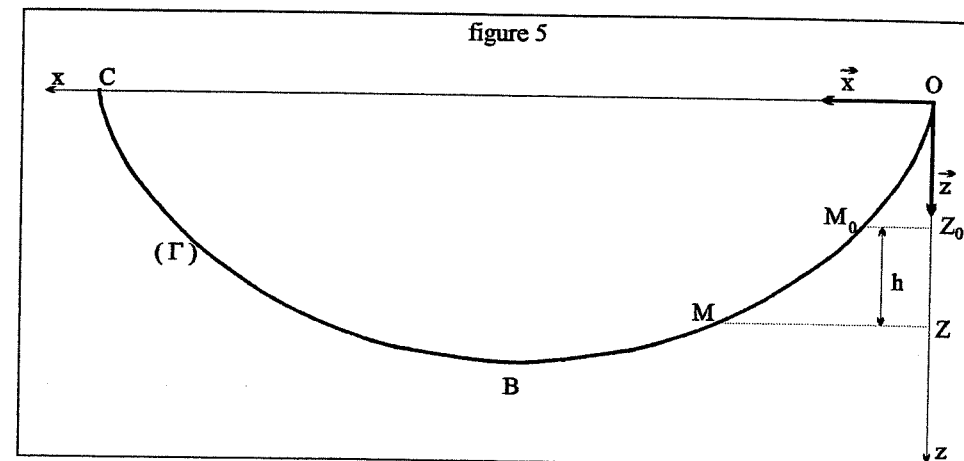
En 1659, il démontre deux propriétés de la cycloïde qui lui permettront de construire un pendule dont les oscillations sont parfaitement isochrones c'est à dire indépendantes de l'amplitude des oscillations. Une horloge munie d'un tel pendule garde l'heure du méridien d'origine quel que soit les mouvements du navire et, par suite, permet de déterminer la longitude du navire.

Le but du problème ci-dessous est de présenter les deux propriétés découvertes par Christian Huygens qui sont le fondement du pendule cycloïdal.

Première propriété: la cycloïde est une courbe isochrone.

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement dans un plan vertical sur la cycloïde Γ engendrée par un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses (cf. figure 5)

Il s'agit de montrer que le temps mis par le point matériel M pour revenir à sa position initiale est indépendante de la position M_0 d'où on lâche le point matériel avec une vitesse nulle.



Notations: soit f une fonction de la variable t (c'est à dire le temps), on note, suivant la coutume, $\dot{f}$ sa dérivée.

1. Montrez qu'une représentation paramétrique de la cycloïde Γ est:
$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi) \\ y = 0 \\ z = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

Remarque: dans cette représentation paramétrique, φ est en fait une fonction inconnue de la variable t . La connaissance de cette fonction φ nous donne la solution du problème.

2. Quelle relation peut-on écrire entre l'abscisse curviligne $s(t) = \widehat{BM}$ et la vitesse $v(t)$ du point M à l'instant t ?

Exprimez $v(t)$ et $s(t)$ en fonction de $\varphi(t)$ et de $\dot{\varphi}(t)$.

(Rappel: l'abscisse curviligne $s(t) = \widehat{BM}$ n'est rien d'autre que la longueur de l'arc $\widehat{BM}$ affectée du signe - lorsque M est entre O et B, et du signe + lorsque M est entre B et C)

3. Montrez en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que: $v(t)^2 = 2g(z - z_0)$ (*)

4. Calculez $\dot{z}$ et montrez que que $\dot{v} = g \cos \frac{\varphi(t)}{2}$ (indication: dérivez la relation (*))

5. Déduisez de ce qui précède que la fonction s est solution de l'équation différentielle

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{4r}} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \begin{cases} s(0) = \widehat{BM}_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

6. Résolvez cette équation différentielle.

7. Quelle est la période des oscillations ?

Conclusion 1:

La période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations

Deuxième propriété:

Soit $\widehat{OB}$ et $\widehat{OA}$ deux demi-cycloïdes identiques; Un fil dont une extrémité est fixée en O s'enroule sur cette courbe. La partie libre [PQ] du fil reste toujours tendue. Il s'agit de montrer que lorsque la longueur du fil est égale à la longueur de l'arc $\widehat{OB}$ alors l'extrémité libre du fil décrit une cycloïde dont la base est la droite (AB) (cf. figure 6).

8. Avec les mêmes notations que ci-

dessus, on a $\widehat{OB} = 4r$.

Déduisez-en la longueur PQ.

Quelle est la direction de la droite (PQ)?

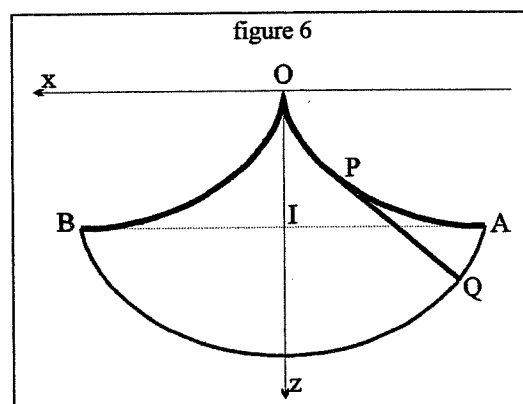
Calculez en fonction de φ les

coordonnées du vecteur $\vec{PQ}$ puis du

vecteur $\vec{AQ}$.

Déduisez-en que la trajectoire du point Q

est une cycloïde.



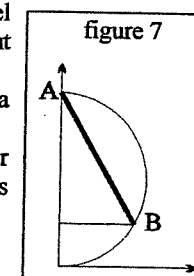
En 1663, pour vérifier l'exactitude des horloges conçues par Huygens, le Capitaine Holmes s'embarque avec deux horloges munies de pendules cycloïdaux. Huygens sait que, même sur la terre ferme, ces horloges ne sont pas parfaitement isochrones car il a négligé la résistance de l'air et les imperfections du fil. Il pense que ces défauts ne sont pas rédhibitoires en ce qui concerne la détermination de la longitude. Sans attendre le retour du navire, Huygens essaie de tirer le maximum de profit de son invention et réclame ses récompenses. Celles-ci lui seront d'ailleurs accordées. En 1666, Huygens sera invité par Colbert à faire partie de l'Académie Royale des Sciences.

6. La cycloïde est "la courbe de plus rapide descente"

1. Avec les notations du § précédent, quel temps faut-il au point matériel M pour aller de A à B le long de la cycloïde (le point matériel étant lâché en A sans vitesse initiale)?

2. Quelle temps faudrait-il au point M pour aller de A à B le long de la droite (AB) ?

3. (Cf. figure 7) Montrer que le temps mis par un point matériel pour aller de A vers B le long du segment [AB] est indépendant du point B pris sur le demi-cercle



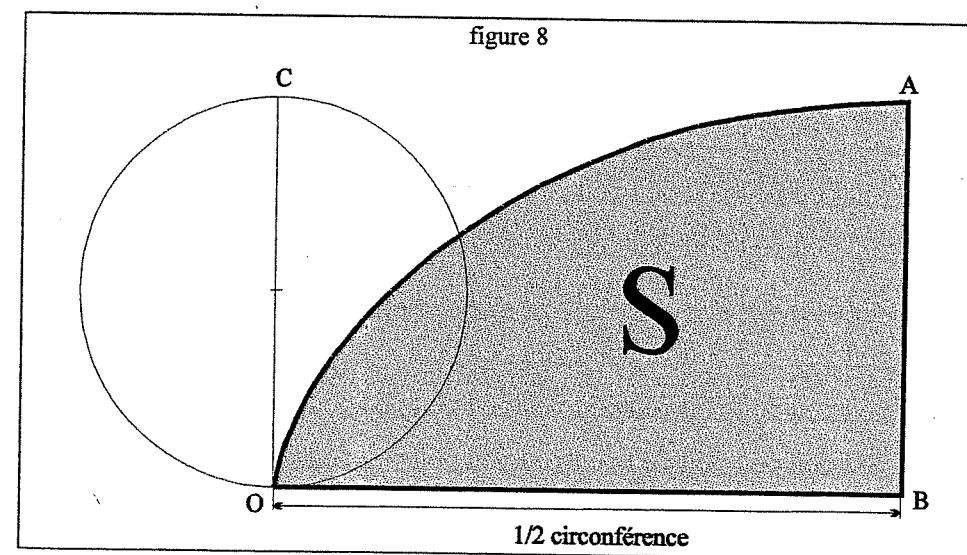
Conclusion:

Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus rapide !

Commentaire: on peut d'ailleurs démontrer que la cycloïde est la "courbe de plus rapide descente" (aussi appelée la brachistochrone pour la pesanteur) c'est à dire le chemin le plus rapide de A vers B pour un point matériel pesant, abandonné sans vitesse initiale en A et glissant sans frottement le long de cette courbe.

7. Quadrature de la cycloïde.

But de cette partie: trouver l'aire A de la surface $(S) = (OAB)$ où l'arc $\widehat{OA}$ est l'arc de cycloïde de base [OB] engendré par le cercle de diamètre [OC] (cf. figure 8).

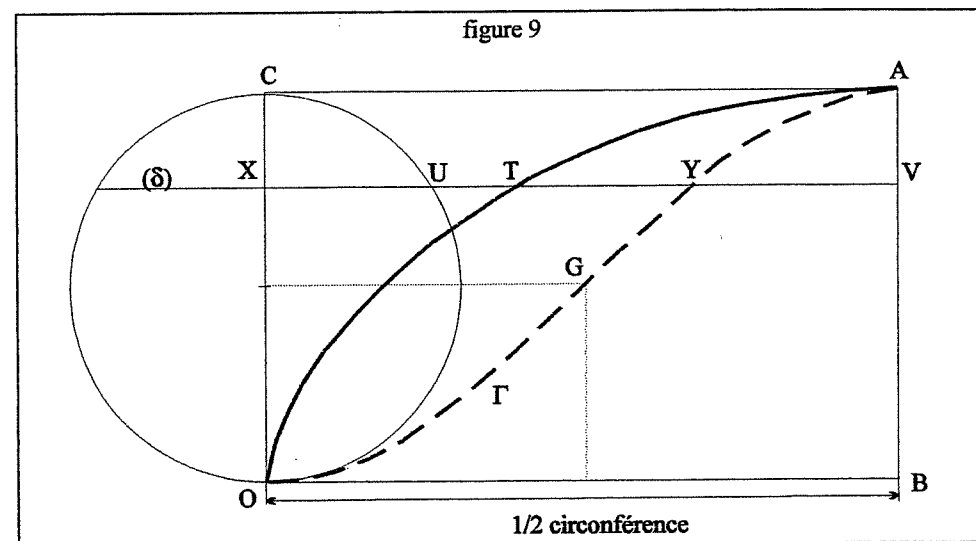


Première méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Roberval

Soit (δ) une droite parallèle à la base de la cycloïde. Cette droite (δ) coupe $[OC]$ en X , le cercle en U et la cycloïde en T (cf. figure 9). Sur (δ) , on prend le point Y tel que $\vec{XU} = \vec{TY}$.

1. Donnez une représentation paramétrique de l'arc de cycloïde $\widehat{OA}$ et de la courbe Γ décrite par le point Y lorsque X décrit $[OC]$
2. Déduisez-en qu'une équation de Γ est: $y = r \left(1 - \cos \frac{x}{r} \right)$ avec $0 \leq x \leq \pi r$ et que le point G de la courbe Γ d'abscisse $\frac{\pi r}{2}$ est centre de symétrie de Γ .
3. Montrez que l'aire de la surface délimitée par Γ , $[BA]$ et $[OB]$ est la moitié de l'aire du rectangle $(OCAB)$. Calculez cette aire.
4. Calculez l'aire de la surface délimitée par Γ et l'arc de cycloïde.
5. Conclusion:

l'aire A est égale à trois fois l'aire du demi-cercle générateur de la cycloïde.



Deuxième méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Blaise Pascal.

On découpe la surface (S) en " n tranches horizontales" de même épaisseur Δy . En notant $f(y_k)$ la longueur moyenne de la k -ième tranche alors une approximation de l'aire A est

$\sum_{k=1}^n f(y_k) \Delta y$. En faisant tendre n vers l'infini, on a: $A = \int_0^{2r} f(y) dy$ où $f(y) = TV$ (cf. figure 10)

1. On pose $g(y) = TW$ et $h(y) = WV$.

Montrez que: $A = \int_0^{2r} g(y) dy + \int_0^{2r} h(y) dy$.

2. Que représente $\int_0^{2r} h(y) dy$?

Déduisez-en, sans calcul, que $\int_0^{2r} h(y) dy = \frac{\pi r^2}{2}$

3. Montrez que le roulement sans glissement du cercle (C) se traduit par l'égalité: $TW = \widehat{AW}$.

On pose $i(y)$ la longueur de l'arc $\widehat{AW}$ et $j(y)$ la longueur de l'arc $\widehat{BW}$. Démontrez les égalités suivantes: $\int_0^{2r} g(y) dy = \int_0^{2r} i(y) dy = \int_0^{2r} j(y) dy$.

Calculez $\int_0^{2r} i(y) dy + \int_0^{2r} j(y) dy$ (remarquez que $i(y) + j(y) = \widehat{AB}$) et déduisez-en que $\int_0^{2r} g(y) dy = \pi r^2$.

4. Conclusion.

