TABLE III. (n° 316).

3	(0)......3 ; (1)...6
7	(0)......142857
9	(0)......1 ; (1)...2 ; (2)..4 ; (3)..8 ; (4)..7 ; (5)..5
11	(0)......09; (1)..18; (2)..36; (3)..72; (4)..45
13	(0)......076923; (1)..461538
17	(0)......0588235294 117647
19	(0)......0526315789 47368421
23	(0)......0434782608 6956521739 13
27	(0)......037; (1)...074; (2)...148; (3)...296; (4)...592; (5)...185
29	(0)......0344827586 2068965517 24137931
31	(0)......0322580645 16129
	(1)......5483870967 74193
37	(0)......027 ; (1)...135; (2)...675; (3)...378 ; (4)..891 ; (4)..459; (6)..297; (7)..486 ; (8)..432 ; (9)..162 ; (10)..810; (11)..054
41	(0)......02439; (1)..14634; (2)..87804; (3)..26829; (4)...60975; (5)...65853; (6)...95121 ; (7)...70731
43	(0)......0232558139 5348837209 3
	(1)......6511627906 9767441860 4
47	(0)......0212765957 4468085106 3829787234
	0425531914 893617
49	(0)......0204081632 6530612244 8979591836
	7346938775 51
53	(0)......0188679245 283; (1)..4905660377 358;
	(2)......7547169811 320; (3)..6226415094 339
59	(0)......0169491525 4237288135 5932203389
	8305084745 7627118644 06779661
61	(0)......0163934426 2295081967 2131147540
	9836065573 7704918032 7868852459

SUITE DE LA TABLE III.

67	(0)......0149253731 3432835820 8955223880 597
	(1)......1791044776 1194029850 7462686567 164
71	(0)......0140845070 4225352112 6760563380 28169
	(1)......8732394366 1971830985 9154929577 46478
73	(0)......01369863; (1)..06849315; (2)..34246575;
	(3)......71232876; (4)..56164383; (5)..80821917;
	(6)......04109589; (7)..20547945; (8)..02739726
79	(0)......0126582278 481; (1)..3670886075 949;
	(2)......6455696202 531; (3)..7215189873 417;
	(4)......9240506329 113; (5)..7974683544 303
81	(0)......012345679; (1)......135802469;
	(2)......493827160; (3)......432098765;
	(4)......753086419; (5)......283950617
83	(0)......0120481927 7108433734 9397590361
	4457831325 3
	(1)......6024096385 5421686746 9879518072
	2891566265 0
89	(0)......0112359550 5617977528 0898876404
	4943820224 7191
	(1)......3370786516 8539325842 6966292134
	8314606741 5730
97	(0)......0103092783 5051546391 7525773195
	8762886597 9381443298 9690721649
	4845360824 7422680412 3711340206
	185567.

Comportement curieux de la touche y^x

Mariza Grand'Henry-Krysinska et Pierre Bolly

A travers le problème développé dans cet article nous souhaitons contribuer à la discussion sur l'apprentissage de la démonstration par des élèves du secondaire.

Selon une conception largement répandue, la démonstration serait univoquement définie dans un système hypothético-déductif et surtout elle exclurait tout recours aux données empiriques.

Élaborer une démonstration, ce n'est pas seulement déduire. Dans un problème de recherche, c'est aussi formuler des conjectures et chercher leurs preuves même empiriques.

Plusieurs facettes de cette démarches sont présentes dans les problèmes liés au comportement de la touche y^x.

1. Exploration

Avec la touche y^x *et un nombre a on peut fabriquer une suite de nombres de la forme*

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

Construisez de telles suites à l'aide de vos calculatrices pour quelques valeurs positives de a. Que pouvez-vous observer à leur sujet ? Formulez des conjectures [1] *.*

1.1 Premiers calculs et observations

Pour $a = 1$, le résultat est évident.

Formons la première suite pour $a = 2$. La calculatrice affiche les trois premiers termes 2, 4, 16 et après, elle signale *overflow*. Cela se comprend aisément : cette suite tend très vite vers l'infini.

Formons la deuxième suite pour $a = 1{,}2$. La calculatrice affiche les termes qui changent jusqu'à la 19ème étape. Par après, le nombre affiché reste le même : 1,257734.

Considérons encore une troisième suite pour $a = 0{,}5$. Les termes affichés ne changent plus à partir du 33ème qui est 0,64118574451.

Dans le cas des deux dernières suites, nous sommes tentés de dire qu'elles convergent vers des nombres dont l'approximation est fournie par la calculatrice quand l'affichage des termes de la suite se stabilise.

Pour des raisons encore obscures ou peut être par analogie avec les suites géométriques de raison plus petite que 1, nous pouvons penser que les suites construites avec un nombre $a < 1$ sont convergentes. Par contre, la même analogie avec le comportement des suites géométriques de raison plus grande que 1 ne tient pas la route : la suite formée à partir de 2 tend vers l'infini mais celle formée à partir de 1,2 paraît convergente.

[1] Une conjecture est une propriété que l'on a certaines raisons de croire vraie, mais dont on n'est pas entièrement sûr.

Continuons à explorer les suites formées à partir d'autres valeurs de a comprises entre 1 et 2 et rassemblons les résultats dans un tableau (Tableau 1).

a	le nombre affiché quand la suite paraît stationnaire	le nombre d'étapes avant la stabilisation de la suite
1,1	1,11178201104	11
1,2	1,25773454138	18
1,3	1,47098896009	26
1,4	1,88666330624	54
1,5	overflow	13
1,6	overflow	8

Tab. 1

D'après les résultats récoltés dans le tableau 1 il serait pertinent de continuer à étudier la suite formée à partir des valeurs de a comprises entre 1,4 et 1,5 ce qui est fait dans le tableau 2.

a	le nombre affiché quand la suite paraît stationnaire	le nombre d'étapes avant la stabilisation de la suite
1,41	1;96295582753	61
1,42	2,05738816750	74
1,43	2,18402922620	97
1,44	2,39381174817	158
1,45	overflow	42

Tab. 2

La rupture entre la convergence et la divergence de la suite est maintenant mieux située ; elle a lieu quelque part pour la valeur de a entre 1,44 et 1,45.

Formulons maintenant les premières conjectures et questions.

Il semble exister un certain nombre pivot a_0 situé entre 1,44 et 1,45 tel que

- pour a > a_0 la suite est divergente vers l'infini;

- pour a < a_0 la suite est convergente.

Dans ce deuxième cas, comment la limite de la suite dépend-elle de a ? Cette limite peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Que se passe-t-il quand $a = a_0$?

Remarquons également que la suite est croissante pour $a > 1$ et "oscillante" pour $a < 1$.

1.2 Une formulation technique

Y a-t-il une formule algébrique exprimant la loi de formation de la suite ?

La loi de formation de la suite

$$a, a^a, a^{\left(a^a\right)}, a^{\left(a^{\left(a^a\right)}\right)}, \ldots$$

peut être écrite sous forme de la formule de récurrence suivante :

$$x_0 = a, x_1 = a^{x_0}, \ldots, x_{n+1} = a^{x_n}$$

ou encore à l'aide de la fonction $f(x) = a^x$ comme une suite d'itérations successives

$$x_0 = a, x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n).$$

1.3 Une interprétation géométrique

Illustrez la loi de formation de la suite à l'aide de la courbe d'équation $y = a^x$ et de la droite $x = y$ représentées dans un même repère.

Pour fixer les idées, limitons nous aux cas où a est égal à 2, 1,2 ou 0,5 (Figures 1,2,3,).

$a = 2$

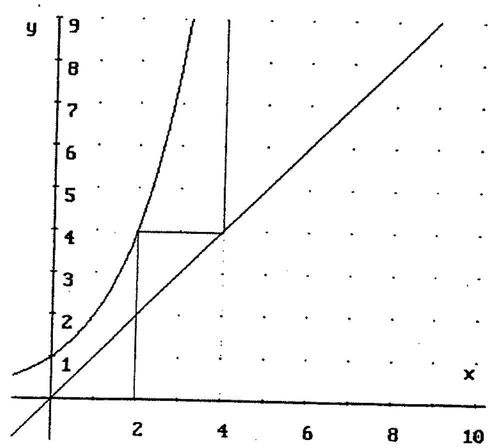

Fig. 1

$a = 1{,}2$

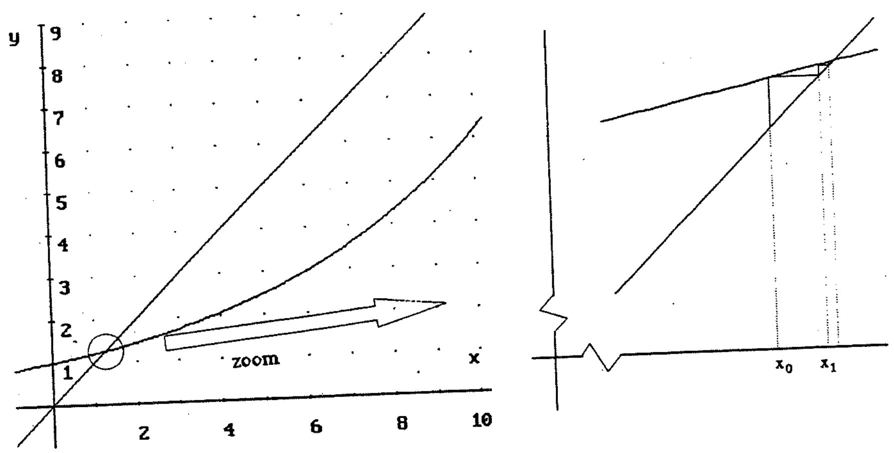

Fig. 2

$a = 0{,}5$

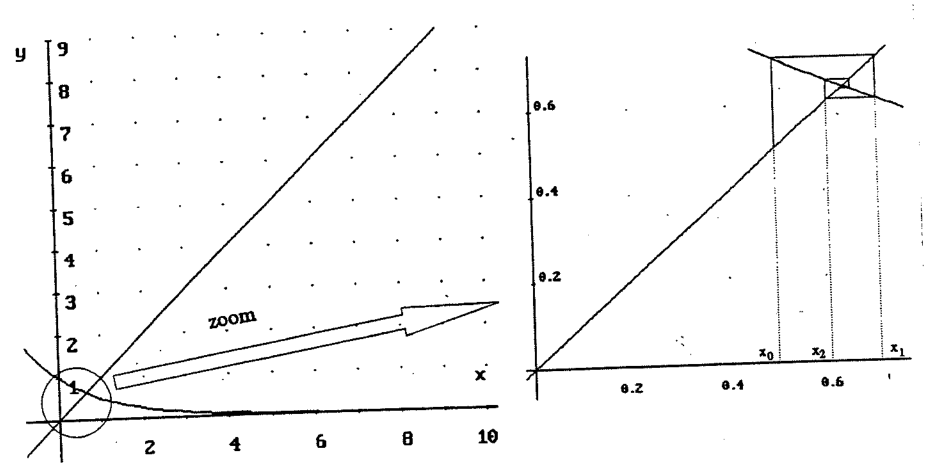

Fig. 3

L'interprétation géométrique ci-dessus nous amène aux constatations suivantes :

- la suite x = y semble tendre vers l'infini quand la courbe d'équation $y = a^x$ ne coupe pas la droite $x = y$,

- dans le cas contraire, la suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite,

- la courbe d'équation $y = a^x$ coupe toujours la droite $x = y$ quand $0 < a < 1$ et dans ce cas la suite est toujours convergente,

- pour $a > 1$, la courbe d'équation $y = a^x$ peut être sécante ou non avec la droite $x = y$; cela dépend de la valeur de a.

A ce stade-là, l'interprétation géométrique permet de construire un raisonnement plausible expliquant des conditions de convergence ou de divergence de la suite. Elle permet également de formuler de nouvelles conjectures et de nouvelles questions.

La suite est convergente quand l'équation

$$a^x = x \qquad \textbf{(1)}$$

a au moins une solution.

La limite de la suite des x_n est une solution de l'équation (1).

Pour quelles valeurs de a la droite $x = y$ et la courbe $y = a^x$ sont elles sécantes ?

1.4 D'autres explorations de graphiques

Étudiez à l'aide de la calculatrice graphique, par exemple, les positions relatives de la droite $x = y$ et des courbes $y = a^x$ en fonction des valeurs de a.

Nous avons déjà vu que des valeurs de a particulièrement intéressantes sont situées entre 1 et 1,5. Représentons donc quelques courbes correspondantes et regardons de plus près si elles coupent la droite $y = x$ (Fig. 4).

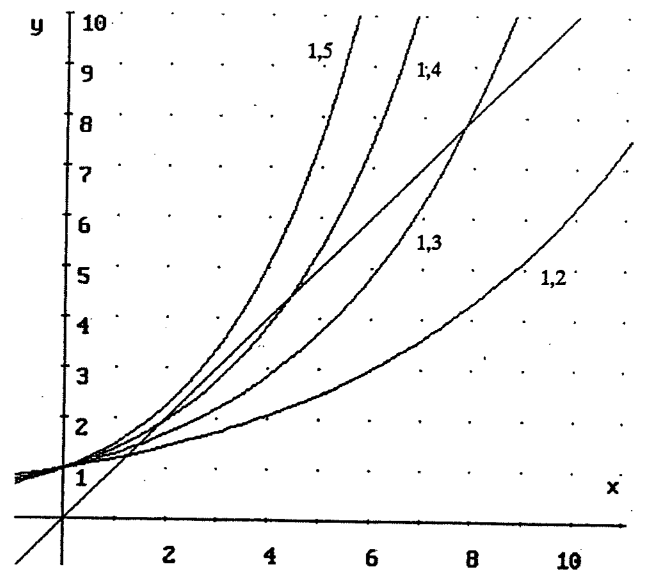

Fig. 4

On peut également dessiner les graphiques correspondant aux nombres 1,41, 1,42, 1,43, 1,44, 1,45. Mais leurs précisions permet-elle de trancher lequel coupe la droite $y = x$?

Cette nouvelle interprétation géométrique confirme et étend les résultats précédents. A cette étape, nous sommes pratiquement convaincus des faits qui suivent.

La suite est convergente pour les valeurs de a compris entre 0 et un nombre pivot situé entre 1,44 et 1,45 . Cela est lié au fait que la courbe $y = a^x$ et la droite $y = x$ sont sécantes. La limite de cette suite est alors égale au nombre qui est la solution de l'équation $a^x = x$.

Pour toutes les valeurs de a supérieurs au nombre pivot, la suite tend vers l'infini. Cela s'explique par le fait qu'alors la courbe $y = a^x$ ne coupe pas la droite $y = x$.

Peut-on en savoir plus au sujet du nombre pivot ?

Pour les valeurs de a comprises entre 1 et le nombre pivot, la courbe $y = a^x$ coupe la droite $y = x$ en deux points. Pour les valeurs plus grandes que ce nombre pivot, la courbe ne coupe pas la droite. Pour la valeur de a égale au nombre pivot, la courbe est tangente à la droite en une certaine valeur de x, c'est-à-dire que la pente de la tangente pour cette valeur de x est égale à 1. On trouve cette valeur de x et le nombre pivot en résolvant le système

$$\begin{cases} a^x = x \\ \left(a^x\right)' = 1 \end{cases}$$

Comme la dérivée vaut

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x,$$

le système devient

$$\begin{cases} a^x = x \\ \ln a \cdot a^x = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x\ln a = \ln x \\ x\ln a = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln a = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = e \\ \ln a = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x = e \\ a = e^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$

La Figure 5 traduit des résultats obtenus.

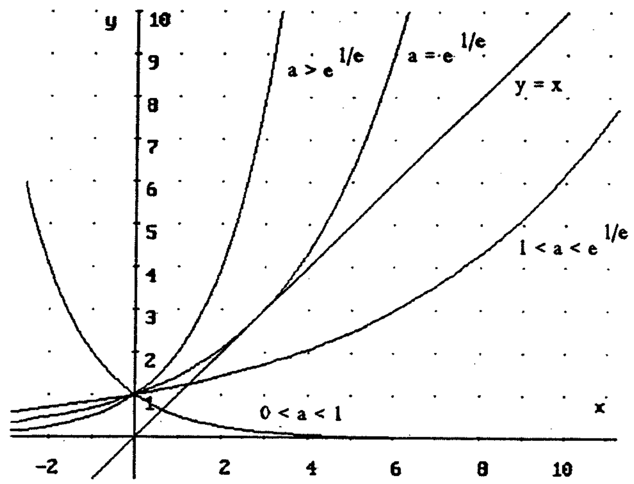

Fig.5

Il nous semble qu'à ce stade-là on a compris l'essentiel du problème car, à l'aide de raisonnements plausibles fondés expérimentalement, on a abouti à des explications convaincantes du phénomène. Néanmoins, on peut continuer à se poser des questions.

Comment la limite d'une suite dépend de a ?
Tout nombre peut-il être la limite d'une telle suite ? Si non, lequel est le plus grand ?

Pour répondre à ces questions on doit rentrer dans un raisonnement et des calculs de plus en plus "pointus". Pour un certain nombre d'élèves, ce niveau n'est plus accessible. Néanmoins, ceux-là ont pu accomplir un travail créateur également (même s'ils n'ont pas réussi à résoudre le problème jusqu'au bout).

Pour terminer cette première phase de résolution citons Polya [1].

En fait, dans la tâche du scientifique, formuler le problème, constitue peut être la meilleure part de la découverte et nécessite souvent plus de perspicacité et d'originalité que la résolution proprement dite. Ainsi, en permettant à vos étudiants de poser eux-mêmes, en partie, le problème, non seulement vous les incitez à travailler plus activement, mais aussi vous leur enseignez une excellente attitude intellectuelle.

2. Construction des preuves formelles

Dans cette section, notre tâche principale sera d'étudier des solutions de l'équation $a^x = x$ en fonction des différentes valeurs de a.

2.1 Premier problème auxiliaire

Pour pouvoir positionner la courbe $y = a^x$ par rapport à la droite $y = x$, il suffit d'étudier le signe de l'expression $a^x - x$. Cela se fera à l'aide de l'étude de la variation de la famille de fonctions $g_a(x) = a^x - x$.

Considérons la famille de fonctions

$$g_a(x) = a^x - x \text{ où } a > 0$$

Pour quelles valeurs de a une fonction g_a admet -elle un extremum ? Que vaut-il alors ? Quel est son signe?

Y a-t-il une valeur de a telle que la fonction g_a admette un minimum égal à 0 ? Que vaut cette valeur de a ?

Quelle interprétation donner aux résultats obtenus, dans le contexte des positions relatives des courbes $y = a^x$ et de la droite $x = y$?

Pour étudier les extrémés des fonctions g_a nous allons étudier le signe de leurs dérivées. Calculons donc g_a' :

$$g_a'(x) = (a^x - x)' = (e^{x \ln a} - x)' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} - 1 = \ln a \cdot a^x - 1.$$

Cherchons les racines de g_a' :

$$g_a'(x) = 0$$

ou

$$\ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} - 1 = 0$$

ou

$$\ln a \cdot a^x = 1$$

ou

$$a^x = \frac{1}{\ln a}. \qquad (1)$$

Pour pouvoir isoler x dans l'équation (1) il faut ajouter la condition que

$$\frac{1}{\ln a} > 0$$

ou que

$$\ln a > 0$$

ou que

$$a > 1.$$

Cas : $a > 1$.
L'équation (1) devient alors équivalente à

$$x \cdot \ln a = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

ou à

$$x \cdot \ln a = -\ln(\ln a)$$

ou à

$$x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}.$$

Pour étudier le signe de la dérivée, remarquons que $g_a'(x) = \ln a \cdot a^x - 1$ est une fonction croissante. En effet, pour $a > 1$ la fonction exponentielle a^x est croissante, de même son produit par une constante positive $\ln a \cdot a^x$ et la différence $\ln a \cdot a^x - 1$. Puisque la dérivée s'annule pour $x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$, elle est forcement négative à gauche de $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ et positive à droite de $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$. En on conclut qu'une fonction g_a est décroissante à gauche de $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ et croissante à droite de $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$, donc elle admet un minimum en $x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$. Ce minimum vaut

$$g_a\left(\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}\right) = a^{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$$

$$= e^{\ln a\left(\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}\right)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$$

$$= e^{-\ln(\ln a)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln(\ln a)}} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$$

$$= \frac{1}{\ln a} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$$

$$= \frac{1}{\ln a}(1 + \ln(\ln a)).$$

Étudions maintenant le signe de $\frac{1}{\ln a}(1 + \ln(\ln a))$. Dans le cas envisagé de $a > 1$, le signe du facteur $\frac{1}{\ln a}$ est positif. Pour déterminer le signe de $1 + \ln(\ln a)$ résolvons l'inéquation suivante en a :

$$1 + \ln(\ln a) \le 0.$$

Cela donne

$$1 \le -\ln(\ln a)$$

$$1 \leq \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

$$e \leq \frac{1}{\ln a}$$

$$\frac{1}{e} \geq \ln a$$

$$e^{\frac{1}{e}} \geq a.$$

En résumé, cela veut dire que pour un $a \leq e^{\frac{1}{e}}$ le minimum est négatif ou nul et pour un $a > e^{\frac{1}{e}}$ le minimum est positif. Dans le premier cas, la différence $a^x - x$ devient localement négative donc la courbe $y = a^x$ qui, en $x = 0$, est au-dessus de la droite $y = x$ passe au-dessous et la coupe en deux points quand on la regarde de gauche à droite. Dans le second cas, la courbe reste toujours au dessus de la droite.

Quand $a = e^{\frac{1}{e}}$, le minimum vaut 0 et la courbe n'a qu'un point de contact avec la droite. Le nombre $e^{\frac{1}{e}}$ est la valeur pivot de a. La calculatrice fournit 1,44466786101 comme valeur approchée de ce nombre.

Cas : a < 1

La dérivée n'a pas de racines et elle est négative, donc la fonction est décroissante sur son domaine (de x > 0) et il n'y a pas d'extrémés. De plus, comme la différence $a^0 - 0$ est positive et la différence $a^1 - 1$ est négative, la fonction $g_a(x) = a^x - x$ doit s'annuler (une seule fois car elle est décroissante) : la courbe coupe la droite en un seul point.

Tous les résultats obtenus dans cette section sont plus précis par rapport à ceux obtenus précédemment . On peut les résumer ainsi : la suite qui correspond à une valeur de a est convergente quand

$$0 < a < e^{\frac{1}{e}}.$$

La méthode utilisée ici pour étudier l'existence et le nombre des solutions de l'équation $a^x = x$ est généralisable à toutes les équations du type $f(x) = x$.

2.2 Second problème auxiliaire

Considérons la suite correspondante à un a compris entre 0 et $e^{\frac{1}{e}}$. Que vaut sa limite ?

Dans le cas particulier de $a = e^{\frac{1}{e}}$ l'équation

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x = x$$

admet une solution unique. Cette solution est égale à e, en effet

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e.$$

Ce cas particulier nous suggère une conjecture pour le cas général : **la limite de la suite construite à partir de la touche y^x et correspondant à un nombre a positif est un nombre r tel que**

$$\boldsymbol{r^{\frac{1}{r}} = a.}$$

Cette conjecture peut être confrontée avec des résultats numériques de la section 1.1. Par exemple, la suite formée à partir de 1,2 s'est stabilisée autour du nombre r = 1,25773454138. Ce nombre peut être considéré comme la valeur approchée de la limite de cette suite. Le calcul de $1{,}25773454138^{\frac{1}{1{,}25773454138}}$ donne 1,2.

D'une manière générale, dés que $r^{\frac{1}{r}} = a$ on a que $a^r = r$. Mais est-il toujours possible de représenter un nombre a sous forme de $r^{\frac{1}{r}}$? Pour répondre à cette question, il faut résoudre le problème auxiliaire suivant.

Étudiez la variation de la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
Quels renseignement peut-on en tirer au sujet des limites des suites considérées ?

La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ est définie pour tous les x > 0. Considérons donc son domaine égale à $\mathbf{R}_0^+$. On peut alors remplacer l'expression $x^{\frac{1}{x}}$ par $e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

On établit facilement que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

et que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Calculons $f'(x)$: cela donne

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x}\ln x})$$

$$= (\frac{1}{x}\ln x)' e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right)e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

Comme les facteurs $\frac{1}{x^2}$ et $e^{\frac{1}{x}\ln x}$ sont positifs, le signe de la dérivée est celui de $1-\ln x$. Résolvons l'inégalité $1-\ln x \geq 0$. Cela donne $1 \geq \ln x$ ou $e \geq x$. Ainsi la dérivée est positive pour $x \leq e$ et négative pour $x \geq e$. Il en résulte que la fonction f admet un maximum en $x = e$, il vaut $e^{\frac{1}{e}}$!

La Figure 6 représente le graphique de cette fonction.

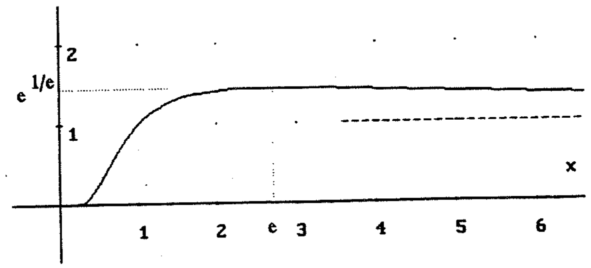

Fig. 6

On peut l'interpréter ainsi : tout nombre entre 0 et $e^{\frac{1}{e}}$ peut être représenté sous forme $r^{\frac{1}{r}}$. De plus, pour des nombres inférieurs à 1, cela est possible d'une manière et pour des nombres supérieurs à 1, de deux manières. Faisons le rapprochement entre ce résultat et le fait que les courbes $y = a^x$ et la droite $y = x$ sont sécantes pour toutes les valeurs de a comprises entre 0 et $e^{\frac{1}{e}}$: en un point quand $0 < a < 1$, en deux points quand $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ Dans ce dernier cas c'est l'abscisse du premier point d'intersection qui correspond à la limite de la suite: cette abscisse ne dépasse pas le nombre e.

2.3 Preuves de la convergence de la suite

Pour $a < e^{\frac{1}{e}}$, la dérivée de a^x est strictement inférieure à 1 (en valeur absolue). pour de valeurs de x comprises strictement entre 0 et e, et dans ce cas, la convergence de la suite est assurée par le théorème du point fixe.

Pour $a = e^{\frac{1}{e}}$, la suite des x_n est strictement croissante et majorée par e (ceci se démontre facilement par récurrence); elle est donc convergente.

3. Retour au point de départ

Comment calculer la limite r de la suite associée à un nombre a ?

Dans la section précédente nous avons établi que la limite de la suite est un nombre r tel que $r^{\frac{1}{r}} = a$. Cette équation en r est équivalente à l'équation $a^r = r$. Or il n y a aucune méthode algébrique permettant de la résoudre : pour la plupart des valeurs de a, les solutions sont des nombres irrationnels donc des nombres connus uniquement par leurs approximations. Une des méthodes possibles est celle qui consiste à construire une suite de x_n tels que $x_{n+1} = f(x_n)$ ce que nous avons fait au début de la section 1.1. Ce procédé s'appelle méthode du point fixe. Nous avons pu voir qu'à partir d'une certaine étape le nombre affiché ne changeait plus. Ce nombre est la meilleure approximation de r que nous puissions obtenir à l'aide d'une calculatrice.

Il y a d'autres méthodes numériques permettant de résoudre l'équation $a^r = r$. La méthode de Newton donne très rapidement une approximation de la racine de la fonction $g_a(x) = a^x - x$. Par exemple, pour a=1,4 , il faut plus de cinquante étapes à la méthode du point fixe pour stabiliser les dix premières décimales de la limite (1,886663306) alors qu'il ne faut que cinq étapes à la méthode de Newton.

Ouvrages consultés.

[1] *La découverte des mathématiques*, G. Polya, éd. Dunod, Paris, 1967.

[2] *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications*, N. Rouche, in démonstration mathématique dans l'histoire" , Actes du 7ème Colloque Inter-IREM, Épistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon, 1989.