LEIBNIZ et les triangles de Pascal : l'invention du calcul différentiel

Anne MICHEL-PAJUS
IREM PARIS VII

Pour répondre aux accusations de plagiat portées par certains mathématiciens britanniques, qui l'accusent d'avoir eu connaissance des travaux de Newton et de s'en être inspiré pour inventer sa méthode de calcul différentiel, Leibniz écrit en 1714 son ***Histoire et Origine du Calcul Différentiel***; Mais il souligne tout l'intérêt pédagogique de son récit .

"Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions mémorables, surtout de celles dont la découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée. En effet, cela permet non seulement à l'Histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire, mais contribue de plus au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître la méthode sur des exemples remarquables."[1]

L'atelier de Nantes était donc l'occasion de prendre quelques leçons sur "l'art d'inventer" avec un Maître incontesté de cet Art. Pour rafraîchir les connaissances sur la théorie des différences finies, qui est à la base de ce récit, nous avons commencé par l'étude d'un énoncé de problème de Terminale inspiré de ce texte (voir annexe).

Un résumé très schématique du récit :

Le calcul différentiel de Leibniz naît de deux sources de réflexion :

• D'une part, la fascination pour les nombres, et en particulier l'observation du triangle de Pascal, aboutit à une théorie des différences finies et permet la sommation de séries infinies.

• D'autre part, l'utilisation du "triangle caractéristique de Pascal", jointe aux propriétés élémentaires des triangles semblables, conduit à la résolution des problèmes géométriques de l'époque (aires, longueurs de courbes, moments), mais surtout à une méthode générale, qui consiste à "réduire les quadratures au problème inverse des tangentes". [Nous connaissons ici le théorème fondamental de l'analyse, et le double aspect de l'intégrale comme mesure d'aire et primitive.]

---

1 Historia et Origo Calculi Differentialis, *Mathematische Schriften*, ed. C.I. Gerhardt, 1849, réed; Olms, 1962. Une traduction annotée et commentée est publiée dans Mnémosyne, n° 13 (juin 1997), IREM PARIS VII. On trouve dans le même numéro le texte de problème cité plus bas, ainsi qu'un énoncé de problème sur la quadrature du cercle à partir d'un autre texte de Leibniz, une chronologie de la controverse, etc... c'est pour cette raison que le compte-rendu de cet atelier est aussi succint !

Ces deux sources se mêlent miraculeusement pour donner la solution au problème de la quadrature du cercle (au moyen d'une série infinie).

Mais surtout l'analogie entre les deux situations discrète/continue (différences finies dans le cas des séries, accroissements différentiels en géométrie) suscite un "nouveau genre de notation" appelé calcul différentiel, que Leibniz va tenter de généraliser à toutes les fonctions connues.

Mais comment l'observation devient-elle créative ?

Nous avons tous regardé des triangles de Pascal, sans même imaginer un quelconque rapport avec le calcul différentiel, que nous connaissons pourtant !

Un examen détaillé du texte a dégagé les points suivants :

Le passage de l'observation à la mise en relief du concept de différences est provoqué ou tout au moins catalysé par la préoccupation logique de tout ramener à la vérité identique (A = A), qui peut nous sembler incongrue dans ce contexte, mais que Leibniz expose au début, comme point de départ (fondement ?) de sa réflexion. Cette préoccupation est à rapprocher de l'intérêt de Leibniz pour les couples antagonistes : d et $\int$, tangente et quadrature.

Cette observation est très active : l'observation du tableau des combinaisons, issu d'une suite particulière, celle des 1, conduit au concept des suites-différences successives pour une suite quelconque. L'observation des tableaux de formules ainsi obtenus conduit à l'introduction d'une nouvelle suite, x, qui engendre les coefficients du tableau. Les lectures opérées de différents points de vue, en lignes, colonnes ou diagonales, font surgir des formules dont l'harmonie cachée est révélée par un symbolisme approprié.

La même diversification des points de vue opère en géométrie. Ainsi se révèle l'universalité de la *méthode de la quadratrice* : "nous réduisons le calcul des superficies des solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectification de courbes, et en même temps nous réduisons le problème des quadratures au problème inverse des tangentes."

L'introduction du symbolisme ne se contente pas de faciliter les calculs, mais il modifie aussi les points de vue sur le calcul proprement dit, en faisant apparaître les différences finies et sommations comme des opérateurs, et les suites comme les valeurs prises sur les entiers par des fonctions. De là découle naturellement l'application de l'opérateur "différence" aux fonctions qui mesurent les objets géométriques, la composition de ces nouvelles "opérations" avec les autres opérations (somme, produit), et l'extension de l'usage de ce calcul "étonnamment facile", à toutes les fonctions connues. Cette liberté d'extension du calcul à tous les objets possibles est caractéristique de "l'Art Combinatoire" de Leibniz.

Ce texte nous donne aussi de précieuses indications sur le contextes "humain" des inventions : la formation scolastique initiale... la rencontre avec Huygens qui lui pose un problème assez difficile pour être intéressant, mais assez simple pour être accessible sans culture mathématique... la formation autodidacte en mathématiques,

qui a peut-être favorisé cette liberté d'inventer... l'orgueil légitime pour la "célèbre quadrature" du cercle...

Il ne donne en revanche aucune indication sur les recherches métaphysiques de Leibniz, qu'on ne peut cependant ignorer. Citons un passage de la Monadologie :

"57. Et comme une même ville regardée de différents côtés paraît toute autre, et comme multipliée perspectivement, il arrive de même que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque Monade."

"58. Et c'est le moyen d'obtenir autant de variété qu'il est possible, mais avec le plus grand ordre, qui se puisse, c'est-à-dire, c'est le moyen d'obtenir autant de perfection qu'il se peut."[2]

Dans ce contexte, la multiplication des points de vue n'est pas seulement pour Leibniz un moteur puissant de l'invention : elle lui permet de concilier la conception classique du Vrai, liée à l'unité, puisque la vérité est Une, et l'acceptation de la pluralité (que Spinoza, par exemple, rattachait à l'erreur) car les différentes perspectives sont validées du fait que chacune exprime à sa façon l'unité du Monde.

En conclusion, je souhaiterais souligner l'intense jubilation que procure le contact avec un esprit aussi libre et fertile.

2 *La Monadologie*, 1714, Livre de Poche, 1991, p.156-157.

ANNEXE

TRAVAIL DONNÉ EN CLASSE:

Différences finies et sommation de séries

par une méthode de Leibniz ou

la naissance d'une vocation mathématique

Martine Bühler Anne Michel-Pajus

En 1672, Gottfried Wilhelm Leibniz, arrive à Paris. Agé de 26 ans, il est chargé par le prince de Hanovre d'une mission diplomatique. Bachelier à seize ans, il a déjà beaucoup étudié (en Allemagne), mais il s'intéresse plus à la logique et à l'invention d'une machine à calculer qu'aux mathématiques. Il rencontre à Paris Huygens, la gloire scientifique de l'époque, et lui parle d'une découverte, fondée sur des réflexions logiques, qui lui semble intéressante pour calculer les sommes de séries (avec une notation différente, sans indices, il s'agit du résultat de la question 3a)

> Il observait que, à partir de ceci : "A = A" ou à partir de son équivalent : "A - A = 0" (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :
>
> $$\underbrace{A - A + B}_{+L}\ \underbrace{-B + C}_{+M}\ \underbrace{-C + D}_{+N}\ \underbrace{-D + E}_{+P} - E = 0$$
>
> Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :
>
> $A + L + M + N + P - E = 0$, ou : $L + M + N + P = E - A$,
>
> c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Huygens décide alors de tester le jeune homme, et lui demande de calculer la somme de la série $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+etc$ (série du 2 e). Leibniz réussit brillamment, généralise la méthode et encouragé par ce succès, décide de se mettre sérieusement aux mathématiques!

C'est cette méthode que nous vous présentons ici.

A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite du par :

$(du)_n = u_{n+1} - u_n$, nommée suite des différences premières associées à u

1) Déterminer (du) dans les cas suivants :
   a) $u_n = n$
   b) $u_n = n_2$
   c) $u_n = n_3$
   d) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$
   e) $u_n = \frac{1}{n}$

2) A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite Su par :

$(Su)_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, nommée suite-somme associée à u.

Déterminer Su dans les cas suivants :
   a) $u_n = a$ (où a est une constante réelle)
   b) $u_n = 2n + 1$
   c) $u_n = q^n$ si $q \neq 1$
   d) $u_n = n$
   e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour n>0 et $u_0 = 0$ (utiliser 1 e). Si vous n'avez pas trouvé, essayez encore après la question 3a))

3) Montrer que :
   a) $(S(du))_n = u_{n+1} - u_0$. Sous quelle forme ce résultat apparaît-il dans l'extrait donné dans l'introduction?
   b) $(d(Su))_n = u_{n+1}$

4) Lire le texte suivant :

> Il [Leibniz] considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, etc. est appelé x, on appellera le terme général de la suite des carrés x.x ou de celle des cubes x^3 etc. ; le terme général de la suite des nombres triangulaires, c'est-à-dire que 0, 1, 3, 6, 10, etc. s'écrira $\frac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\frac{xx+x}{2}$. (voir note)
>
> N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc. ... s'écrira $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, soit $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée], lorsqu'elle est exprimée numériquement,
>
> Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est xx + 2x + 1, la différence des deux est 2x + 1, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la " suite-différence " des nombres carrés. En effet, si x désigne 0,

---

Note : si x est la suite des naturels, sa suite-somme est la suite des nombres triangulaires, la suite-somme de celle-ci est la suite des nombres pyramidaux, etc.. Leibniz note ainsi x ce que nous désignerions plutôt par n.

1, 2, 3, 4, etc., 2x + 1 désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x3 et x3 + 3xx + 3x + 1 est 3xx + 3x + 1, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes.

5) Montrer que :

Si u et v sont deux suites : $d(u + v) = du + dv$

Si u est une suite et k un réel quelconque : $d(ku) = k\, du$

6) Soit u la suite numérique réelle définie par $un = a\, n^3 + b\, n^2 + \; g\, n + d$, où a,b,g,d sont des constantes réelles.

a) Déterminer $(du)_n$

b) Soit v définie par $v_n = n^2$. Comment faut-il choisir a,b,g,d pour que $du=v$?

Ceci implique-t-il que $(Sv)_n = u_{n+1}$? (on peut utiliser 3)a))

Déterminer a,b,g,d pour que $(Sv)_n = u_{n+1}$. En déduire une expression rationnelle de $1^2+2^2+...+n^2$ en fonction de n.

Lire la suite du texte :

Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x, qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = lx^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = l\, d(x^3) + md\,(xx) + n$ (en posant que dx = 1). Mais d(xx) = 2x + 1 et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$\begin{aligned} dz = 3\,lxx + 3\,lx \;\; &+ l \\ + 2\,mx &- m \\ &+ n = xx \end{aligned}$$

donc $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ ou $n = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire que le terme général de la suite-somme des carrés est : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, soit $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$.

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$

sera $\frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285$, ou $\frac{2.1331 - 3121 + 11}{6} = 385$.

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

7) Leibniz affirme plus loin:

En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x, en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera :

$$b^{x+1} - b^x = b^x\,(b - 1)$$

Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique.

Soit u une suite géométrique de raison b ($b \neq 1$)

a) Ecrire la relation liant u et du indiquée dans le paragraphe précédent.

b) Quelle est l'opération permettant de passer de u à du

c) Quelle est la nature de la suite du ? La suite Su est-elle de même nature ?

d) Déterminer, en utilisant ce qui précède, une expression de $(Su)_n$ à l'aide de u_n et u_0.

8) Dans l'extrait suivant, Leibniz donne une méthode permettant de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, puis lim S_n quand n tend vers l'infini . Pour les calculs, il utilise une suite auxiliaire u définie a priori par $u_n = \frac{e}{bn + c}$, ainsi que la suite (du).

Lire le texte suivant, puis expliciter les calculs nécessaires à la démonstration du résultat sur la limite de S_n et déterminer cette limite.

Effectivement, soit x = 1 , ou 2, ou 3, etc..; le terme général de la série $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} +$ etc... est $\frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx + c}$; on aura : $\frac{e}{bx + c} - \frac{e}{bx + b + c} = \frac{eb}{b^2x^2 + b^2x + bc + 2bex + c^2} = \frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$

En identifiant ces deux formules on obtient :

b = 2, eb = 1, donc : $e = \frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : 4 + 4c = 8 ou c = 1, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x + 1}$, soit $\frac{1}{4x + 2}$; or 4x + 2 est le double d'un nombre impair.