par exemple. Il est frappant en effet qu'Hérodote convoque avant tout ses connaissances pour *déranger* son lecteur (ses coutumes, ses habitudes, ses lois...) plus que pour expliquer les Guerres Médiques, même si cette dimension explicative est aussi présente chez lui. Quant aux historiens contemporains, ils sont devenus ou redevenus sensibles depuis moins d'un siècle à la nécessaire concomitance entre l'interrogation du passé et le présent. Les réflexions de Husserl sur la géométrie pourraient leur servir de mot d'ordre : interroger la tradition signifie d'abord *y être*, et cette interrogation *au présent* du passé est le cœur vivant de la démarche de l'historien, qui sait que toute histoire est racontée et qu'il ne fait que la raconter *à nouveau* et *à sa façon*. Mais cet échange vivant du présent et du passé, bien loin de les garantir tous deux, *les déstabilise ensemble* et dérange le lecteur.

Mais pour parler plus simplement de cette histoire à laquelle je crois, je dirai par un exemple comment je l'ai pratiquée, bien avant d'ailleurs de reconnaître que c'est elle que je pratiquais : un de ces étudiants auxquels j'ai donné un cours sur Euclide m'a dit après quelques séances, et pour mon plus grand plaisir, qu'il ne savait plus *" ce qu'était une droite, un point, un cercle "*. *Ne plus savoir* ce que sont droite et cercle : voilà ce qu'un géomètre sait être le moment critique où il peut les revoir à neuf, comme un enfant. Voilà aussi ce qu'un historien sait être le moment critique à partir duquel une inquiétude historique devient possible : Euclide ne voyait pas comme nous, et ses évidences ne sont plus les nôtres. Mais les deux moments n'en forment donc qu'un seul selon moi, et dans l'une de ses dimensions nous sommes historiens, inquiétés puis inquiétants.

Les fractales : un objet de stage interdisciplinaire math-philo

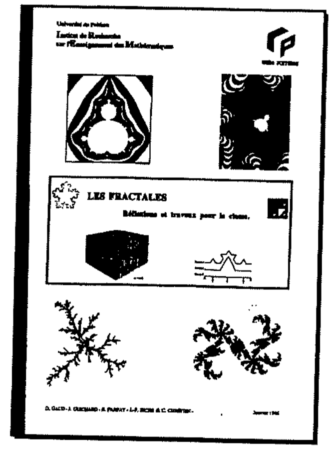
Jacqueline GUICHARD, Dominique GAUD

Un bon sujet pour une action de formation courte

Depuis deux ans, l'IREM de Poitiers propose aux professeurs de mathématiques et de philosophie une action de formation d'une journée, dans le cadre du plan académique de formation de la MAFPEN, sous le titre :

«Les fractales : objet interdisciplinaire math-philo.»

La conception et la mise en œuvre de ce stage ont été interdisciplinaires, assurées par un enseignant de mathématiques (D. G.) et une enseignante de philosophie (J. G.).



Cette conception s'appuie sur les travaux de l'*Atelier Philo-Math* de l'IREM de Poitiers qui de 1993 à 1995 ont principalement porté à la fois sur l'histoire des fractales et sur la conception et la mise en œuvre d'activités pour les élèves. Le tout a abouti à la publication d'une brochure :

LES FRACTALES.
Réflexions et travaux pour la classe.[1]

En formation initiale, une initiation aux fractales est également proposée aux Professeurs des Lycées et Collège en deuxième année d'IUFM, dans le cadre d'un module de formation complémentaire.

Les fractales nous ont paru un bon sujet, — à la croisée des chemins de l'histoire des mathématiques, de l'épistémologie et de la pédagogie —, pour réfléchir sur le statut des objets mathématiques, sur la modélisation, et fournir des idées d'activités interdisciplinaires en prise directe avec les programmes de mathématiques et de philosophie pour favoriser chez les élèves une meilleure compréhension de la spécificité des mathématiques. Dépasser le stade le plus connu des belles images fractales en les resituant dans le contexte mathématique où elles se

1 LES FRACTALES. Réflexions et travaux pour la classe. D. Gaud - J. Guichard - S. Parpay - J.-P. Sicre & C. Chrétien. Brochure de 105 pages. I.R.E.M. de Poitiers. Janvier 1996.

sont construites donne un accès direct à ces questions sur l'activité mathématique qui sont constitutives de son sens. C'est pourquoi les fractales constituent un bon sujet pour une action de formation courte.

Les objectifs du stage :

- apporter des informations sur la notion de fractale, sur l'histoire des fractales,
- montrer en quoi les fractales sont un bon sujet interdisciplinaire "math-philo",
- analyser des documents pédagogiques expérimentés dans le cadre d'une action "math-philo",

déterminent trois axes principaux : l'axe information et familiarisation avec les fractales, des idées d'activités mathématiques pour les élèves et l'amorce d'une réflexion "épistémologico-philosophique".

/.../ Qu'importe, en effet, que cette géométrie <fractale> ne soit pas, avant tout, sa propre fin. Elle semble s'emparer de l'esprit de l'élève et l'amener à se poser, *de lui-même*, mille questions qu'on aime qu'il se pose, qui sont au cœur des mathématiques, et qu'on préférait jusqu'à présent poser d'abord dans des cas très simples. Mais il se trouve qu'elles passent mieux dans le contexte fractal, qui est à la fois compliqué et visuel. L'étudiant voit certaines formules fractales engendrer des montagnes au réalisme étonnant, tandis que d'autres formules engendrent l'ensemble de Mandelbrot. C'est magique, et cette magie (blanche !), nul ne peut s'empêcher de vouloir l'explorer. C'est quoi les nombres complexes ? D'où vient le signe «moins» quand on les multiplie ? C'est quoi, le hasard? Comment peut-il créer une telle variété de formes ? Qu'y a-t-il de commun entre les montagnes et l'ensemble de Mandelbrot ?

Il est bon de s'arrêter un instant pour répondre à cette dernière question et caractériser la géométrie fractale comme étant l'étude d'une grande structure mathématique, à savoir l'invariance par dilatation ou réduction. /.../

B. MANDELBROT. *Les fractales à l'école ?* POUR LA SCIENCE N° 214, août 1995

1. L'axe information et familiarisation avec les fractales :

Il vise en priorité à resituer les fractales dans l'histoire des mathématiques et à apporter quelques précisions mathématiques.

• Un **historique de la préhistoire des fractales** remonte en général aux premières fonctions continues sans dérivées : 1872 est la date retenue pour la "naissance des premiers monstres" : fonction de Weierstrass – puisque l'exemple trouvé par Bolzano en 1830 constitue des prémices ignorées jusqu'en 1921.

- Mais il peut être éclairant de remonter un peu le temps. Dominique GAUD s'est livré à ***une recherche de filiation*** jusqu'au début de la définition de la notion de fonction – J. Bernoulli 1718 –, pour voir comment le trouble va être jeté quelques décennies après par un problème de physique, celui des cordes vibrantes, objet d'une polémique qui amène Euler à revoir sa définition de la notion de fonction (1755).

«Le monde mathématique se passionne alors durant presque deux siècles pour les séries trigonométriques. Celles-ci constituent un exemple d'objet mathématique introduit pour les besoins de la physique et dont l'étude va préciser des concepts mathématiques mais va aussi créer d'autres théories.

La notion de fonction se précise au hasard des découvertes sur les fonctions trigonométriques en mettant à mal des conceptions bien établies. /.../» [2]

Plan de la journée de formation

I. INTRODUCTION
- Présentations d'objets apparemment divers : ressemblances ?
- **Objectifs du stage** :
  - apporter des informations sur la notion de fractale, l'histoire des fractales,
  - montrer en quoi les fractales sont un bon sujet interdisciplinaire "math-philo",
  - analyser des documents pédagogiques expérimentés dans le cadre d'une action "math-philo".

II. QUELQUES DÉFINITIONS :
- "fractal", "fractale", "objet fractal"
- "self-similarité" ou " auto-similarité".

III. D'OÙ VIENNENT-ILS ?
1. Recherche de filiation : vers la création de "monstres"
2. Les travaux de Fatou et Julia ≈ 1920.
3. L'intervention des expérimentalistes.

IV. LE THÉORICIEN : MANDELBROT ≈ 1975
1. Qui est-il ?
2. Une «géométrie de la nature»
3. L'exhumation des monstres.

V. FAMILIARISATION AVEC LES FRACTALES
1. Travaux pratiques
2. Quelques précisions mathématiques
   - en quoi sont-ils des monstres ?
   - la notion de dimension fractale
   - calculs de dimensions.

VI. QUESTIONS PHILOSOPHIQUES
1. Le statut des objets mathématiques
2. Les mathématiques et la réalité
   ➥ Le problème de la modélisation
   ➥ Le statut de la théorie descriptif / explicatif : vers un autre stage...

VII. ANALYSE D'UNE SÉQUENCE PÉDAGOGIQUE

---

2 D. GAUD. *Recherche de filiation.* In LES CHANTIERS DU CHAOS. Brochure de l'Atelier Philo-Math de l'IREM de POITIERS. À paraître.

• Une étude de l'apport de B. MANDELBROT [3], travail de modélisation et de théorisation, avec :

- la récupération de l'héritage de ces mathématiques "centenaires" pour modéliser des phénomènes appartenant aux domaines les plus divers ; cf. le tableau synoptique, **DOC. 1.** ci-après.

- la création d'un concept unificateur «*fractal*» qui parle à l'intuition et l'explicitation de ses propriétés : self-similarité, dimension fractale...

Et une interrogation sur le statut des fractales : est-ce une théorie ? cf. le tableau analytique, **DOC. 2.** ci-après.

• Des précisions mathématiques :

- en quoi les fractales sont-elles des monstres ?

- notion de dimension fractale, calculs de dimensions.

> FRACTAL, adj. Sens intuitif. Dont la forme est soit extrêmement irrégulière, soit extrêmement interrompue ou fragmentée - quelle que soit l'échelle d'examen. *Remarque* : le masculin pluriel est *fractals*, calqué sur navals, de préférence à *fractaux*.
>
> - *Fractale*, n. f. Configuration fractale ; ensemble ou objet fractal. Remarque : puisque mon pluriel *fractals* prête à quelque controverse, il paraît bon que le nominatif correspondant soit féminin.
>
> - *Dimension fractale*. Dimension au sens de Hausdorff et de Besicovitch. Nombre qui sert à quantifier le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble. La dimension fractale n'est pas nécessairement un entier.
>
> - *Ensemble fractal*. Ensemble dont la dimension fractale est égale ou supérieure à sa dimension ordinaire (laquelle est un concept topologique).
>
> - *Objet fractal*. Objet naturel qu'il est raisonnable et utile de représenter mathématiquement par un ensemble fractal.
>
> --------------------
>
> B. MANDELBROT *Des monstres de Cantor et Peano à la géométrie fractale de la nature,* in *Penser les mathématiques* (collectif). Points Sciences S29. Seuil 1982, p. 228.

2. Des idées d'activités mathématiques pour les élèves

• Les activités restent dans les programmes de mathématiques et de philosophie. Elles visent à favoriser une pratique plus consciente de l'activité mathématique chez les élèves, en les faisant travailler sur les concepts en jeu : suites, limites, dimension..., pour qu'ils accèdent à une meilleure compréhension de leur complexité et de leur pouvoir de modélisation, l'objectif étant de mieux cerner la spécificité du domaine mathématique et ses articulations avec la connaissance de la nature.

3 Introduit par un extrait du film télévisé LES FRACTALES, avec la participation de Benoît MANDELBROT et Isabelle STENGERS - production FR3 1991.

• Le stage comporte un temps d'utilisation du Logiciel "FRACTINT" pour Windows 3-1 (Pilat informatique) exploité avec les élèves, et l'étude d'un document pédagogique mis en œuvre dans la classe. Un extrait dans le **DOC. 3.** ci-après.

3. L'amorce d'une réflexion "épistémologico-philosophique"

• Des textes pour un travail interdisciplinaire sur :

- le statut des objets mathématiques, le travail sur les fractales pouvant être aussi bien une entrée dans cette réflexion avec les élèves, qu'un moment d'approfondissement dans un parcours où le problème a déjà pu se poser à propos des complexes , à propos des fonctions et dérivées et statut du dx, [4] etc. ;

- la modélisation et les rapports mathématiques-physique-réalité : en quoi les fractales peuvent être la «*géométrie de la nature*» (B. MANDELBROT : *LES OBJETS FRACTALS*), beaucoup plus adéquate que la géométrie euclidienne ? **DOC. 4.** ci-après.

• La réflexion a été introduite par l'extrait du film télévisé précédemment cité (en 1.) et peut se prolonger sur le statut et la fonction d'une théorie mathématique.

4 TRAVAUX INTERDISCIPLINAIRES : • Mathématiques et Philosophie • Sciences Physiques et Philosophie EN CLASSES TERMINALES SCIENTIFIQUES, I.R.E.M. de Poitiers - LPI (Lycée Pilote Innovant du Futuroscope). I.R.E.M. de Poitiers. Septembre 1993. Et, DES TANGENTES AUX INFINIMENT PETITS. Brochure de l'Atelier Philo-Math de l'IREM de POITIERS. À paraître.

DOC. 1. Un travail de modélisation

LA DIVERSITÉ DES DOMAINES ABORDÉS

• Linguistique mathématique (≈1953...)

• L'économie : étude des prix (les cours du coton ≈ 1960).
Principe : «... *il n'y a aucune différence de nature entre les variations à court et à long terme*» B.M.

• La télétransmission : étude de la répartition des erreurs dans la transmission téléphonique des données entre ordinateurs. (≈1955...)

• La physique : thermodynamique statistique.

• La météorologie : phénomènes de turbulence.

• L'hydrologie et l'hydrographie :
- hydrologie : étude des niveaux des rivières, «*effet Joseph*» pour modéliser la persistance des hauts niveaux, «*effet Noé*» pour modéliser les grandes crues,
- tracés de réseaux hydrographiques.

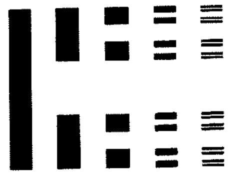
• La géographie :
- la mesure des côtes ; un exemple pour faire reconnaître la validité de ses travaux (1967),
- des tracés de montagnes...

• La cosmographie : répartition des galaxies, tracés de nuages ...

«*Je me suis rendu compte qu'il devait y avoir derrière un principe de la Nature*» B.M.

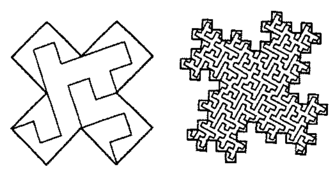
LES MODÈLES MATHÉMATIQUES

➤ un modèle mathématique pour tracer des chroniques boursières, représenter les perturbations, la distribution des galaxies ... :
l'ensemble triadique de CANTOR :



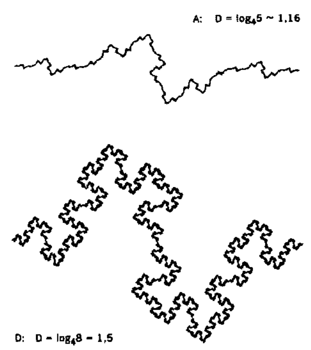
$D = \log_3 2 \sim 0,63$ B. M.

➤ « *un algorithme pour imiter les rivières* », → des tracés artificiels "aussi vrais que nature" : la courbe de PEANO "retravaillée



B.M.

➤ un modèle mathématique pour le tracé des côtes. La méthode de Von KOCH généralisée.



B.M.

DOC. 2. Les fractales : une théorie ?

UNE THÉORIE = une construction ou structure intellectuelle qui :			LES FRACTALES = un **modèle** ou «*outil de pensée*» (1) pour :
• permet de **regrouper et de décrire** des objets, des phénomènes en apparence divers, hétérogènes,	FONCTION UNIFICATRICE ET DESCRIPTIVE	M O	- courbes"étranges", - cours du coton, de la bourse - erreurs dans la télétransmission des données, - côtes maritimes, - réseau hydrographique, niveaux des rivières, - distributions des galaxies, - poumon, - colloïdes, turbulences...
• permet de **comprendre** les propriétés, le **comportement** à plus ou moins long terme de phénomènes initialement inclassables,	FONCTION EXPLICATIVE	D È	
• produit : - une **réoganisation** du savoir antérieur - une **nouvelle conception de la réalité**, dans laquelle l'ordre, la régularité apparaissent comme une approche "grossière".	FONCTION ARCHITECTONIQUE	L E	• **lecture récurrente** des mathématiques de 1870 à 1925 «*premières fractales*» • **re-situation de la géométrie euclidienne** : «*deuxième révolution anti-euclidienne*» (2).

1. B. MANDELBROT : *LES OBJETS FRACTALS, FORME, HASARD ET DIMENSIONS*. Flammarion, 1975, 3e édition, suivie de *Survol du langage fractal*, 1989, pp. 16-17.
2. B. MANDELBROT : *DES MONSTRES DE CANTOR ET PEANO À LA GÉOMÉTRIE FRACTALE DE LA NATURE*, in *PENSER LES MATHÉMATIQUES* (collectif). Points Sciences S29. Seuil 1982, pp. 232-233.

Modélisation ? Découverte ?

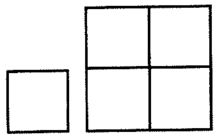
«*Les images que je calculais avec ma théorie mathématique ressemblaient curieusement à la réalité : si je pouvais imiter la nature, c'est que peut-être j'avais trouvé un des secrets de la nature.*»

B. MANDELBROT : COMMENT J'AI DÉCOUVERT LES FRACTALS.
La Recherche n° 175, pp. 423. Mars 1986.

DOC. 3. Extrait de la brochure : *LES FRACTALES. Réflexions et travaux pour la classe.* **II. Les fractales dans la classe**

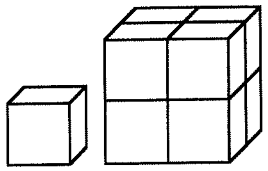
Activité 3 (extrait) :

Prenons un segment et prolongeons-le (homothétie de rapport 2) d'un autre de même longueur. Le résultat est évidemment un morceau de longueur double.



(1) (2)

Si on fait la même expérience (homothétie de rapport 2, qui correspond au rapport des côtés) avec des carrés, on passe du carré (1) au carré (2).



(1) (2)

Avec des cubes, toujours avec une homothétie de rapport 2, on passe du cube (1) au cube (2).

Faire de même avec des triangles équilatéraux, avec des carrés et une homothétie de rappport 3.

Vérifier dans chacune des figures que : $\mathbf{n = k^d}$, avec un nombre n d'objets après transformation, k le rapport d'homothétie, d la dimension.

Vous trouverez au dos une façon plus imagée de voir les choses (extrait de la BD *LES FRACTALS* de I. STEWART).

Utiliser cette définition pour trouver la dimension des monstres rencontrés.

Cette nouvelle définition vous paraît-elle satisfaisante ? Pourquoi ?

/.../

Documents fournis aux élèves :

STEWART I. *Les fractals*. Les chroniques de Rose Polymath (bande dessinée). Belin 1982, pp. 17 à 21, extrait indiqué ci-dessus.

STEWART I. *Les mathématiques*. Pour la science. Diffusion Belin 1989. Ch. 16. *La dimension 2,5,* : pp. 192-194.

MANDELBROT B. *Des monstres de Cantor et Peano à la géométrie fractale de la nature,* in *Penser les mathématiques* (collectif). Points Sciences S29. Seuil 1982, p. 228 : "FRACTAL".

DOC. 4. Textes pour une réflexion "épistémologico-philosophique"

➤ I. LE PROBLÈME DU STATUT DES OBJETS MATHÉMATIQUES

1. PLATON. *R2PUBLIQUE*, livres VI, 510e. Trad. M. DIXSAUT. In PLATON. Bordas Paris 1986.

/.../ tu dois savoir aussi qu'ils se servent de formes visibles et que, à propos de ces formes, ils élaborent des raisonnements, bien que ce ne soit pas sur ces formes visibles qu'ils raisonnent mais sur ce dont ces formes visibles sont les images ; lorsqu'ils raisonnent, c'est en visant le Carré en soi, la Diagonale en soi et non pas la diagonale qu'ils tracent, et il en va de même de tout le reste. Tout ce qu'ils façonnent et qu'ils tracent et dont il y a à la fois ombre et reflet à la surface des eaux, ils s'en servent à leur tour comme si c'étaient des images, quand ils cherchent à voir les réalités qu'on ne peut saisir autrement que par la raison.

2. Roger APÉRY. *MATHÉMATIQUES CONSTRUCTIVES*, in *Penser les mathématiques*, Seuil, 1982.

En tant qu'êtres de raison, les êtres mathématiques n'existent que dans la pensée du mathématicien et non dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain. /.../ Le mathématicien constructif reconnaît une certaine réalité aux objets mathématiques, mais les différencie essentiellement des objets matériels, en ne leur attribuant que les propriétés susceptibles de démonstration. Une distinction analogue différencie les héros de roman des personnages historiques. Une question concernant VERCINGÉTORIX admet une réponse, même si elle échappe à nos moyens d'investigation ; la même question concernant DON QUICHOTTE n'a pas de réponse si celle-ci ne peut être déduite des affirmations de CERVANTÈS.

3. John Stuart MILL. *SYSTÈME DE LOGIQUE*, 1851. Trad. L. Peisse, Ed. Ladrange, Paris 1866, L. III, ch. XXIV, § 5, Tome second p. 146. Rééd. Mardaga Liège-Bruxelles 1988.

Le fait énoncé dans la définition d'un nombre est un fait physique. Chacun des nombres, deux, trois, quatre, etc., dénote des phénomènes physiques et connote une propriété physique de ces phénomènes. Par exemple, deux dénote toutes les paires, et douze toutes les douzaines d'objets ; lesquels connotent ce qui en fait des paires et des douzaines, c'est-à-dire une propriété physique. On ne niera pas, en effet, que deux pommes ne puissent être physiquement distinguées de trois pommes, deux chevaux d'un seul, etc., que ce sont là des phénomènes différents, visibles et tangibles.

4. Gottlob FREGE. *LES FONDEMENTS DE L'ARITHMÉTIQUE*, 1884 § 7, 58, 87 & 96. Trad. C. IMBERT. Éditions du Seuil, Paris 1969.

7. Quel pourrait-être de par le monde le fait observé - ou comme le dit encore MILL : physique - qui se trouve affirmé dans la définition du nombre 777864 ? /.../ Et quel dommage que MILL n'ait pas décrit les faits physiques sur lesquels reposent 0 et 1 !

58. /.../ On ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes, parce que le nombre n'est ni un être sensible, ni une propriété des choses externes. Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. On cherchera en vain à se représenter 0 étoiles visibles. On peut bien penser que le ciel est couvert de nuages : il n'y a rien là qui corresponde au mot "étoile" ni à 0. On ne fait qu'imaginer une situation qui pourrait donner lieu au jugement : aucune étoile n'est visible pour l'instant". /.../

96. Allons-nous donc créer des nombres qui permettent de sommer des séries divergentes ? Non, même un mathématicien ne peut pas faire ce qu'il veut, pas plus que le géographe ; celui-ci comme celui-là ne font que découvrir ce qui existe et lui donner un nom.

5. Charles HERMITE. *LETTRE À STIELJES du 13 mai 1894.*
In *CORRESPONDANCE D'HERMITE À STIELJES*. Gauthier-Villars, Paris 1906.

Je crois que les nombres ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous, avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et nous les rencontrons ou les découvrons, et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes leurs objets.

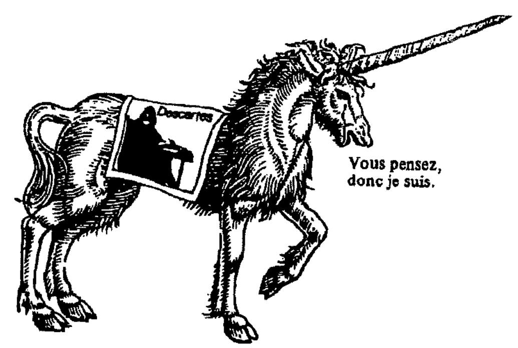
6. Richard DEDEKIND. *LES NOMBRES : QUE SONT-ILS ET À QUOI SERVENT-ILS ?* 1887.
Trad. J. MILNER - H. SINACEUR, La Bibliothèque d'Ornicar, Paris 1978.

En ne définissant l'arithmétique que comme une partie de la logique, je proclame déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée. Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses.

7. Hermann HANKEL. THÉORIE DU SYSTÈME DES NOMBRES COMPLEXES, 1867.

Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les Pythagoriciens. La question de l'existence des nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres représentent les relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on ne peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être que de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type.

8. Philip J. DAVIS et Reuben HERSH. L'UNIVERS MATHÉMATIQUE. Gauthier Villars 1985. À propos de Ludwig WITTGENSTEIN : *SUR LA CERTITUDE*, 1935.



«Comment sait-on comment se convaincre de l'existence des licornes ?» demande L. WITTGENSTEIN dans un article intitulé *Sur la certitude*. La licorne est un animal à corps de cheval et une corne longue et pointue au milieu du front. On trouve des descriptions de cet animal dans CTÉSIAS et ARISTOTE. Il est soigneusement peint dans beaucoup d'œuvres d'art, en particulier dans la suite de tapisseries de la Dame à la licorne, au musée de Cluny et aux *Cloisters* de New York, ainsi que dans les armes du Royaume Uni. Beaucoup d'enfants reconnaîtraient une licorne si on leur en montrait un dessin ; ou, étant donné un dessin d'un animal au hasard, ils pourraient facilement décider si ce dessin est ou non celui d'une licorne. On peut répondre à beaucoup de questions au sujet de cet animal, par exemple : son nombre de pieds, sa nourriture probable. En poésie, c'est un symbole de pureté. On a affirmé que sa corne, réduite en poudre, est un antidote contre le poison. On a affirmé tout ceci et bien d'autres choses encore, aussi bien que le fait qu'il n'existe pas de tel animal.

La licorne, en tant que légende littéraire, existe. Comme gravure animalière, elle existe. Mais comme créature vivante qui pourrait être attrapée et exhibée dans un zoo, elle n'existe pas. On peut concevoir qu'elle a jadis existé ou qu'elle pourrait exister un jour, mais elle n'existe pas actuellement. Comme pour la licorne, il n'y a pas de notion simple de l'existence des objets mathématiques. L'existence est intimement reliée au cadre, aux demandes, à la fonction. Le nombre $\sqrt{2}$ n'existe pas comme entier ou comme rationnel, pas plus qu'un poisson tropical n'existe dans l'océan Arctique.

Mais dans le milieu des nombres réels, $\sqrt{2}$ est vivant et bien vivant. Le moser n'existe pas comme nombre explicité en numération décimale ; il existe toutefois comme programme ou comme ensemble de règles pour sa construction. *

---

* Le *moser* est «*une énorme puissance de 2*» Les auteurs exposent une approche du schéma de construction à partir des définitions et notations du mathématicien polonais Hugo STEINHAUS :

«Posons $\triangle a = a^a$, c'est-à-dire $\triangle 2 = 2^2 = 4$; posons $\boxed{b} = b$ avec autour un nombre de triangles égal à b, par exemple $\boxed{2} = \triangle\triangle 2 = \triangle 4 = 4^4 = 256$; posons $⬠ c = c$ avec autour un nombre de carrés égal à c. On définit maintenant un *méga* comme $= ⬠ 2 = \boxed{\boxed{2}} = \boxed{256} = 256$ avec 256 triangles autour, c'est-à-dire 256^{256} avec 255 triangles autour, soit encore $(256^{256})^{256^{256}}$ avec 254 triangles autour, etc.

Ne se contentant pas de ces nombres passablement grands, MOSER [5] continue le schéma avec des hexagones, des heptagones, etc. Un n-gone contenant le nombre d est défini comme le nombre d avec autour un nombre de $(n$-1)-gones égal à d. Le *moser* est défini comme 2 à l'intérieur d'un mégagone.»

ib. p. 136

5 Léo MOSER, mathématicien canadien contemporain.

➤ II. MATHÉMATIQUES ET RÉALITÉ - LE PROBLÈME DE LA MODÉLISATION

◆ Est-ce toujours le même problème à travers les siècles ?

9. LA CONCEPTION DES PYTHAGORICIENS (-VI°s), rapportée par ARISTOTE (-385-322)). *MÉTAPHYSIQUE*, N 3, 1090 a20-30. Trad. J. Tricot. Ed. Vrin 1970.

- Quand aux PYTHAGORICIENS, voyant que plusieurs des déterminations des nombres étaient immanentes aux corps sensibles, ils ont supposé que les êtres sensibles étaient des nombres ; ces nombres pourtant ne sont pas séparés mais ce sont des nombres entrant dans la constitution des êtres. Pour quelle raison ? Parce que, <disaient-ils>, les déterminations des nombres se rencontrent dans l'échelle musicale, dans le Ciel[1], et dans beaucoup d'autres êtres.

1. Le cosmos. Note du traducteur.

10. GALILÉE G. *IL SAGGIATORE, 1623, L'ESSAYEUR*, trad Ch. CHAUVIRÉ, «Annales littéraires de l'université de Besançon », vol. 234, Les Belles Lettres, Paris 1980.

La philosophie est écrite dans ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire l'Univers), mais on ne peut le comprendre si l'on n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot.

11. Benoît MANDELBROT. *LES OBJETS FRACTALS, FORME, HASARD ET DIMENSIONS*. Flammarion, 1ère éd. 1975, 2ème éd. 1984, 3ème éd., suivie de *Survol du langage fractal*, 1989. Resp. p. 199 & pp. 14-15.

Reprenant l'idée du langage, nous voyons que la géométrie fractale vient ajouter de nombreux "caractères" nouveaux à "l'alphabet" que GALILÉE avait hérité d'EUCLIDE.

/.../ Il est bien connu que décrire la terre fut un des premiers problèmes formels que l'Homme se soit posés. Aux mains des Grecs, la "géo-métrie" donna jour à la géométrie mathématique. Cependant - comme il arrive bien souvent dans le développement des sciences! - la géométrie oublia très vite ses origines, ayant à peine gratté la surface du problème initial.

Mais par ailleurs - chose étonnante, bien qu'on en ait pris l'habitude - «dans les sciences naturelles, le langage des mathématiques se révèle efficace au delà du raisonnable», suivant la belle expression de WIGNER 1960. «C'est un merveilleux cadeau que nous ne comprenons ni ne méritons. Nous devons en être reconnaissants et espérer qu'il continuera de servir dans nos recherches futures, et que, pour le meilleur ou pour le pire, il s'étendra, pour notre plaisir et peut-être même aussi pour notre stupéfaction, à de larges branches de la connaissance. Par exemple, la géométrie issue directement des Grecs a triomphalement expliqué le mouvement des planètes, cependant elle continue à éprouver des difficultés avec la distribution des étoiles. De même, elle servit à rendre compte du mouvement des marées et des vagues, mais non de la turbulence atmosphérique et océanique.

En somme, ce livre s'occupe, en premier lieu, d'objets très familiers, mais trop irréguliers pour tomber sous le coup de cette géométrie classique : la Terre, la Lune, le Ciel, l'Atmosphère et l'Océan.

En deuxième lieu, nous considérons brièvement divers objets qui, sans être eux-mêmes familiers, éclairent la structure de ceux qui le sont. Par exemple, la distribution des erreurs sur certaines lignes téléphoniques se trouve être un excellent outil de transition. Autre exemple : l'articulation de molécules organiques dans les savons (solides, pas effilés en bulles). Les physiciens ont établi que la dite articulation est gouvernée par un exposant de similitude. Et il se trouve que cet exposant est une dimension fractale. Si ce dernier exemple devait se généraliser, le domaine d'application des fractales toucherait à la théorie des phénomènes critiques, domaine particulièrement actif à ce jour.

(P.S. Cette prédiction s'est pleinement réalisée.)

12. Benoît MANDELBROT. COMMENT J'AI DÉCOUVERT LES FRACTALS. La Recherche n° 175, p. 423. Mars 1986.

Les images que je calculais avec ma théorie mathématique ressemblaient curieusement à la réalité : si je pouvais imiter la nature, c'est que peut-être j'avais trouvé un des secrets de la nature.

V

HISTOIRE ET FORMATION MATHÉMATIQUE