

**Rapports numériques et harmonie en grèce
ancienne :
néo-pythagorisme et médio-platonisme
aux Ier et IIème siècles de notre ère.**

Joëlle Delattre (IUFM Lille)

L'idée que la consonance musicale a une explication ou une raison numérique qui la fonde et la constitue semble remonter aux origines du pythagorisme ; plusieurs témoignages, plus ou moins tardifs il est vrai, attribuent la découverte du *lógos mousikós* ou "proportionalité musicale" soit à Pythagore lui-même,¹ soit à l'un de ses disciples. Nous nous proposons de relire quelques-uns de ces témoignages en les comparant au célèbre passage du *Timée* de Platon où le démiurge fabrique harmonieusement le mécanisme de l'âme du monde.²

En effet, il se trouve que certains traités d'harmonie du IIe siècle de notre ère, comme ceux de Plutarque,³ de Nicomaque de Gêrase⁴ et de Théon de Smyrne,⁵ sous des allures de manuels de théorie musicale, se réfèrent en réalité, plus ou moins explicitement, à ce texte de Platon pour tenter d'en donner la clé numérique et harmonique.

Or, pour Platon, l'harmonie musicale contrôlée par l'oreille du musicien ou par celle de l'auditeur est seulement une imitation ou un reflet de la véritable harmonie laquelle est numérique, proportionnelle, et doit se saisir non par l'ouïe mais par l'intellect. Ainsi le calcul des médiétés ne va pas se limiter uniquement au calcul des moyennes arithmétiques et harmoniques ; il pourra inclure aussi le calcul de la subcontraire à l'harmonique et des subcontraires à la géométrie, et prendre un tel essor mathématique, chez les pythagoriciens dits "modernes",⁶ qu'il n'aura même plus aucun sens ni intérêt musical.

Pourtant, la division platonicienne du canon musical selon Thrasyllé, astrologue et ami de l'empereur romain Tibère, du moins telle que Théon de Smyrne nous l'a transmise, est bien loin d'être une opération de pure harmonie numérique. Nous serions tentée d'y reconnaître, au contraire, un essai paradoxal de conciliation entre les exigences de rigueur et de proportionnalité des théoriciens de l'harmonie numérique, et les exigences d'accord et de justesse des praticiens de l'harmonie musicale vocale ou instrumentale ; nous essaierons de montrer qu'il s'agit, de fait, d'une entreprise de modélisation mécanique fort étonnante et sans doute caractéristique d'une certaine forme du néo-pythagorisme médio-platonicien.

¹ Cf. Jamblique, *Vie de Pythagore* 115-121.

² Cf. Platon, *Timée* 34b-37a

³ Plutarque, *De la musique*, H. Weil et T. Reinach (Paris 1900) ; *De la musique*, F. Lasserre (Olten-Lausanne 1954).

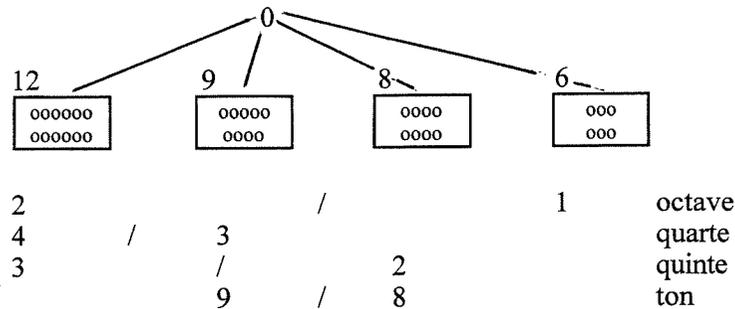
⁴ Nicomaque de Gêrase, *Manuel d'harmonie ou Enchiridion*, trad. angl. A. Barker, *Greek Musical Writings* II (1989). Voir aussi le *Fragment III*, trad. C. E. Ruelle (1881), pp. 45-47.

⁵ Théon de Smyrne, *De ce qui est utile du point de vue scientifique à la lecture de Platon*, éd. du texte grec : E. Hiller (Leipzig 1878, rééd. 1971). Nous utiliserons notre propre traduction de préférence à celle de J. Dupuis, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (Paris 1892- rééd. Bruxelles 1966).

⁶ Cf. La doxographie de Simos, Myonide et Euphranor, dans *Les Présocratiques*, p. 555 et notes explicatives pp. 1386-1387.

Les consonances musicales correspondent à des rapports numériques

Jamblique, dans sa *Vie de Pythagore*,⁷ raconte comment Pythagore a découvert la science de l'harmonie et les rapports harmoniques. Il cherchait, nous dit-il, un instrument équivalent, pour l'ouïe, au compas, à la règle et à la dioptré pour la vue. "Passant près d'une forge, il entendit des marteaux qui battaient le fer sur une enclume et qui produisaient des sons mêlés... en harmonie les uns avec les autres... ; il y reconnut l'accord d'octave, celui de la quinte et celui de la quarte... ; il entra dans la forge et, après de multiples essais, il découvrit que la différence entre les sons dépendait du poids des marteaux..."⁸ S'ensuit alors la description d'une expérience étonnante à l'aide de quatre cordes, "faites avec la même matière, de même longueur, de même diamètre et torsadées de la même façon" qu'il fixe au mur en un seul point, et auxquelles il attache, pour les tendre, quatre poids respectivement de douze, de neuf, de huit et de six unités. Et de cette manière, "en frappant les cordes tour à tour deux par deux, il découvrit les susdites⁹ harmonies, une pour chaque couple de cordes."¹⁰

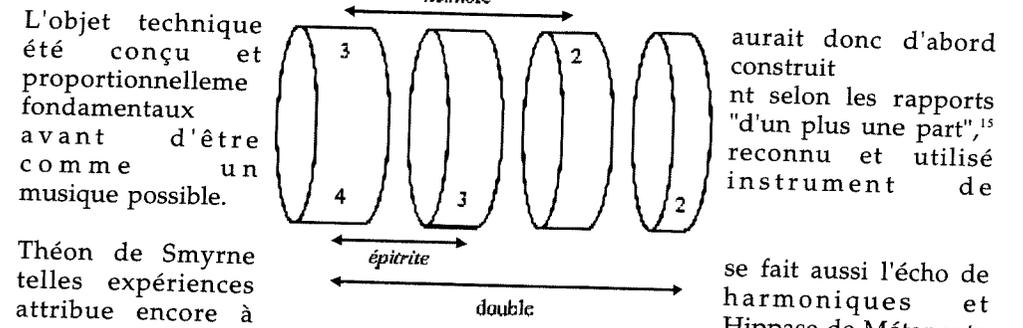


Au delà du caractère fictif¹¹ ou non de l'expérience racontée par Jamblique, on peut remarquer qu'elle est présentée comme le modèle, à la fois mécanique et numérique de tout instrument à corde ; le point unique de fixation au mur correspond au chevalet de l'instrument, et les tensions proportionnelles obtenues par les poids jouent le rôle de l'ajustement et de l'accord que permettent les chevilles ou les clefs qui enroulent les cordes et en règlent la tension.

Une autre tradition transmise par Eusèbe,¹² et par un scolie au *Phédon* de Platon,¹³ présente les choses un peu différemment. Elle attribue à un certain Glaucos la découverte artistique et musicale du phénomène, grâce à "l'observation des sons

⁷ Loc. cit. 115-121, traduction Luc Brisson et Alain Philippe Segonds, Paris 1996, pp. 66-69.
⁸ *Ibidem*, p. 66.
⁹ C'est-à-dire l'octave, la quinte et la quarte.
¹⁰ Entre la corde tendue par le poids de douze et celle tendue par le poids de six, un rapport double (2/1) correspondait à l'octave, entre la corde tendue par le poids de douze et celle de huit un rapport hémiole (3/2) correspondait à la quinte, entre celle de douze et celle de neuf un rapport épitríte (4/3) correspondait à la quarte ; enfin, entre la corde de neuf et celle de huit, un rapport épogde (9/8) correspondait à l'intervalle d'un ton, intervalle-mesure important, quoiqu'il ne soit pas consonant, car c'est là la différence entre la quarte et la quinte qu'il mesure.
¹¹ Les traducteurs pensent que "l'expérience est fictive", arguant que des masses de métal ne vibrent pas en raison directe de leur poids, *ibidem* note au § 116.
¹² Cf. *Contre Marcellus* XXIV 746, éd. Migne. Voir *Les Présocratiques*, p. 80.
¹³ Platon, *Phédon* 108 d. Voir *Les Présocratiques*, p. 79.

produits par les <quatre> disques" de bronze qu'Hippase de Métaponte, disciple dissident de Pythagore,¹⁴ avait fabriqués en leur donnant des diamètres égaux, mais des épaisseurs telles que "celle du premier était supérieure d'un tiers à celle du deuxième, de la moitié à celle du troisième, et double de celle du quatrième".

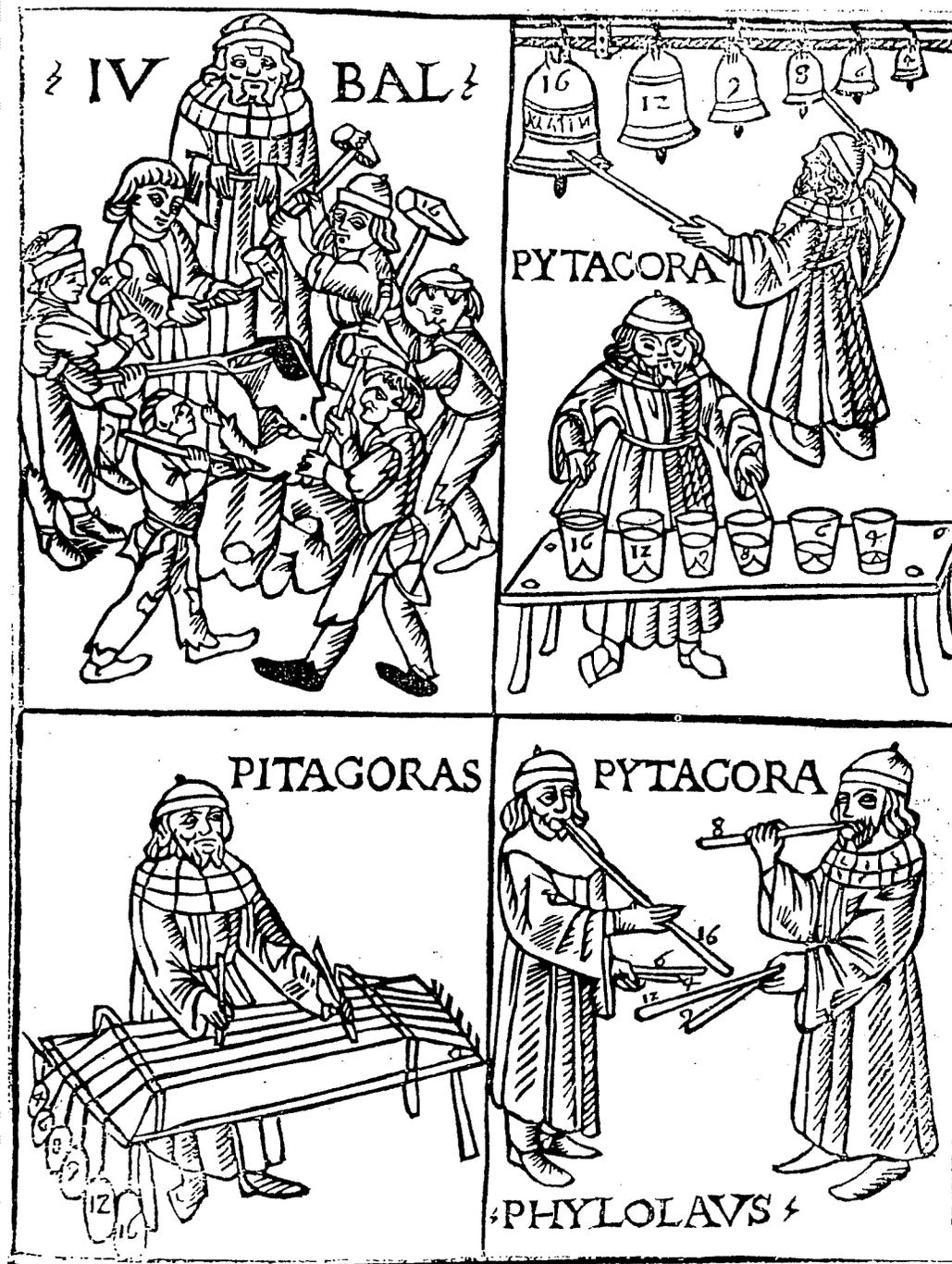


Si l'on traduit, en effet, en chiffres le nombre de "parts" de vide dans chaque vase, à partir simplement de l'indication du nombre de "parts" remplies d'eau, on obtient les trois couples suivants :

A	B	C
vase à moitié	vase aux 3/4	vase aux 2/3
vide vide	vide vide	vide vide
2 1	4 3	3 2
octave	quarte	quinte

¹⁴ Disciple de Pythagore, et semble-t-il maître d'Héraclite (cf. *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, Hippase VII, VIII, IX, trad. D. Delattre, p. 78). Hippase de Métaponte aurait été chargé, dans l'école pythagoricienne, de l'enseignement des "auditeurs" externes, et se serait rendu coupable d'avoir divulgué un savoir secret du maître (inscription des douze pentagones dans la sphère). Voir Jamblique, *Vie de Pythagore* 88, trad. L. Brisson et A. Ph. Segonds (Paris 1996), p. 51. Il aurait fait partie du courant démocratique au sein du groupe pythagoricien, *ibidem* 257, p. 138, ce qui n'était pas pour le racheter.
¹⁵ En grec : *epimórios* "qui a une part en plus" ; on l'écrit parfois sous la forme : $1 + 1/n$. Tels sont justement les rapports : double (un plus une unité, 2/1), hémiole (un plus une moitié, 3/2) et épitríte (un plus un tiers, 4/3). C. Ptolémée, dans ses *Harmoniques*, témoigne qu'Archytas de Tarente, pythagoricien dit "récent" comme Philolaos (car on suppose que Platon les a rencontrés), avait recouru à d'autres rapports d'un plus une part en s'efforçant de déterminer avec précision la commensurabilité des subdivisions de la quarte selon les différents genres (par exemple, 9/8, 8/7 et 28/27 pour le genre diatonique et 5/4, 36/35 et 28/27 pour le genre enharmonique). Cf. *Les Présocratiques*, Archytas A XVI, p. 528.
¹⁶ Lasos d'Hermioné serait le premier à avoir écrit un traité d'harmonie, dans lequel, si l'on en croit Martianus Capella (*Noces de Mercure et de Philologie* IX), il dressait un programme d'enseignement musical en trois branches (substantielle, pratique et transmissive) et neuf subdivisions, séparant nettement la technique, la création et la pratique, dès le début du Ve siècle avant notre ère.
¹⁷ Le terme grec *krouein* employé ici signifie à la fois "heurter" et "jouer d'un instrument".
¹⁸ Théon, II 60.10-21. Voir *Les Présocratiques*, Hippase XIII, p. 80, où les rapports ont été inversés par le traducteur.

Encore une fois, on peut dire que la correspondance entre le rapport numérique de parts mesurées et l'intervalle consonant produit, perceptible à l'oreille, se prépare et s'expérimente d'une manière rationnelle et mécanique. D'ailleurs, l'expérience est restée classique, semble-t-il, si l'on en croit les manuels d'enseignement de la physique, la difficulté de sa réussite résidant essentiellement dans le choix de vases qui vibrent à vide exactement à l'unisson, ce qui est loin d'être simple et évident. Telles étaient donc les différentes traditions concernant la manière dont les consonances musicales, dites fondamentales, furent découvertes et définies.



Les consonances se divisent et se composent comme les rapports

La correspondance entre les consonances et les rapports numériques ne s'arrête pas à ces premières expériences, elle concerne aussi les opérations de division et de composition qu'il est possible d'effectuer sur les unes et sur les autres.

Par exemple, explique Théon de Smyrne¹⁹ :

"puisque l'octave se compose de la quinte et de la quarte, en quoi elle se divise aussi, et que le rapport d'octave est double, celui de la quarte étant épitríte et celui de la quinte étant hémiole²⁰, il apparaît que le rapport double lui-aussi se compose de l'épitríte et de l'hémiole, en quoi il se divise aussi ; en effet, huit est épitríte de six, tandis que douze est hémiole de huit, autrement dit douze est double de six : ce qui donne six/huit/douze."²¹

La correspondance est ici mise en évidence dans le détail, au moyen de chiffres qui en font percevoir la portée harmonique et mathématique, même si le point de départ est bien l'étude de la division et de la composition d'un intervalle musical. Or, continue Théon de Smyrne :

"à nouveau, le rapport double de douze à six se divise²² dans le rapport épitríte de douze à neuf, et le rapport hémiole de neuf à six. De plus, puisque la quinte dépasse justement la quarte d'un ton (en effet, la quinte est de trois tons et demi²³), et que le ton est dans le rapport épogde, il apparaît que le rapport hémiole, lui aussi, dépasse l'épitríte d'un épogde ; car si l'on diminue²⁴ un rapport hémiole, par exemple de neuf à six, d'un rapport épitríte de huit à six, il reste un rapport épogde, celui de neuf à huit. Et à nouveau, si ce rapport est augmenté d'un rapport épitríte, celui de douze à neuf, c'est un rapport hémiole celui de douze à huit qui se trouve alors complété."

Si l'on admet qu'à la division et à la composition des consonances correspondent la division et le produit de leurs rapports, et non pas leur soustraction ou leur addition, la correspondance entre les opérations portant sur les unes et sur les autres est bien exacte. Théon poursuit la vérification détaillée de cette correspondance à propos des intervalles redoublés jusqu'à généraliser :

"Les composés de ces nombres²⁵ seront trouvés justement dans les rapports correspondants, aussi loin que nous progresserons dans les échelles d'intervalles²⁶."

¹⁹ Cf. Théon II 62.7.

²⁰ L'une des difficultés de ce passage vient de ce que les termes *épitríte*, *hémiole* et *épogde* y ont trois usages simultanés : ils désignent à la fois le rapport lié à la consonance correspondante, le rapport de nombres lui-même, indépendamment de la consonance, et enfin le nombre résultant de la double opération indiquée par le rapport. Par exemple, *hémiole* est associé à la consonance de quinte, au couple de nombres 3/2, mais aussi à tout nombre une fois et demi plus grand qu'un autre, comme 9 par rapport à 6, ou 18 par rapport à 12, etc.

²¹ La série 6 (=2 fois 3), 8 (=2³), 12 (2² fois 3) donne le rapport des nombres d'éléments dans le cube, qui est la forme stéréométrique fondamentale, correspondant à l'élément "grave", (c'est-à-dire, lourd et froid : la terre) : six faces, huit angles, douze arêtes.

²² En effet, 12/6 = 12/9 x 9/6 de même que 2/1 = 4/3 x 3/2.

²³ Alors que la quarte est de deux tons et demi, comme cela a été dit précédemment.

²⁴ Le verbe grec *aphairoûmai* signifie enlever ou retrancher, mais on voit bien ici qu'il s'agit non pas d'une soustraction de rapports, mais de leur division : 9/6 : 8/6 = 9/8. Et, ce n'est pas non plus l'addition mais bien le produit de l'épitríte et l'épogde qui va compléter l'hémiole, 9/8 x 8/6 = 9/6.

²⁵ C'est-à-dire des nombres qui viennent d'être utilisés comme "exemples" : 6/8/12 pour l'octave, 3/4/8 pour l'octave et quarte, 6/9/18 pour l'octave et quinte, 6/12/24 pour la double octave ; ce sont ces mêmes groupes de trois nombres que les schémas accompagnant le texte de certains manuscrits donnent aussi comme bornes des quatre consonances composées : octave, (12,8,6) octave et quarte (8,4,3), octave et quinte (18,9,6) et double octave (24,12,6).

²⁶ Cf. Théon II 63.22. Ceci est l'énoncé d'une sorte de loi de série numérique derrière laquelle se profile un axiome de la théorie des rapports de proportion, formulé un peu plus loin en référence à Eratosthène : II 83.3-83.14.

Aux trois premières consonances, il convient en effet d'en ajouter trois autres : l'octave et quarte, l'octave et quinte et la double octave. On les appellerait aujourd'hui "intervalles redoublés". Or, les rapports numériques qui leur correspondent sont le rapport quadruple pour la double octave, le rapport triple pour l'octave et quinte, et un rapport de huit tiers appelé "double et deux fois épitríte", c'est-à-dire un rapport de deux plus deux tiers, pour l'octave et quarte. On obtient ainsi six consonances principales correspondant à six rapports numériques fondamentaux différents :

quarte : épitríte	4/3	octave et quarte : double et deux fois épitríte	8/3
quinte : hémiole	3/2	octave et quinte : triple	3/1
octave : double	2/1	octave double : quadruple	4/1

Mais, chose étonnante, Théon de Smyrne en affirmant que "toutes les consonances sont embrassées dans la tetractús",²⁷ omet dans la récapitulation des rapports correspondants, le rapport double et deux fois épitríte pour ne nommer que les cinq rapports hémiole, épitríte, double, triple et quadruple.²⁸ Si nous en croyons la note en marge du texte, ce n'est pas un oubli. De fait, nous dit cette note²⁹ : "l'octave et quarte, il n'est pas possible de la trouver dans la tetractús car elle est dans le rapport de huit à trois". Huit se trouve au-delà ou en dehors des quatre premiers nombres principes. On peut dire aussi que le rapport de huit tiers,³⁰ à la différence des cinq autres rapports, n'est ni un rapport multiple ni un rapport d'un plus une part, qui sont les deux sortes de rapports les plus simples et qui servent en quelque sorte de principe et de mesure pour toutes les autres sortes de rapports plus complexes.

Un texte de Plutarque, précisément le chapitre dix de *L'E de Delphes*, dans un contexte beaucoup plus cosmique et théologique,³¹ précise la difficulté : "Que les consonances sont au nombre de cinq, et pas plus, la raison en convainc celui qui veut poursuivre ces recherches dans les cordes et les trous des instruments à vents, par la sensation sans recourir à la raison. Toutes, en effet, elles tirent leur origine de rapports rationnels de nombres : le rapport de la quarte est épitríte, celui de la quinte hémiole. Double est celui de l'octave, celui de l'octave et quinte, triple et celui de la double octave, quadruple. Quant à celle que les experts en harmonie introduisent en plus de celles-là, et qu'ils nomment "octave et quarte", du fait qu'elle sort de la mesure,³² il n'est pas juste de l'accepter en s'abandonnant au caractère irrationnel de l'ouïe, contre la raison³³ comme règle".

²⁷ C'est-à-dire dans le groupe des quatre premiers nombres, qui sont, pour les pythagoriciens, principes numériques, et qui constituent, par leur addition, la *décade* (1+2+3+4=10) (II 58.13).

²⁸ Théon II 59.1-3.

²⁹ Théon II 58.15.

³⁰ Ce rapport est appelé, dans la classification que Théon emprunte à Adraste, rapport multiple d'un plus plusieurs parts (*pollaplasiepimerés*). Voir Théon II 79.15.

³¹ Il s'agit du nombre cinq (*pentade*) qui s'écrit en grec E (*epsilon*) et dont Plutarque nous dit que les prêtres le comparent au feu (*pûr*), et au monde (*kósmos*), disant qu'il "produit la *décade* à partir de lui-même". Voir Théon II 101.14-102.3. Le nombre cinq est moyenne entre tous les couples de nombres 1-9, 2-8, 3-7, 4-6 qui composent le nombre dix, et on le représentait au centre du cercle constitué à partir de quatre diamètres équidistants aux extrémités desquelles on plaçait les chiffres extrêmes de chacun des couples précédents. Voir aussi J.-F. Mattéi, *Pythagore et les pythagoriciens* (Paris 1993), pp. 108-118.

³² Il s'agit bien sûr de mesure au sens de commensurabilité, et non de mesure au sens rythmique musical.

³³ Ce passage est difficile à traduire du fait que le même mot en grec : *lógos* désigne à la fois la faculté de la raison par opposition à celle de la sensation, et le rapport de proportion ou rapport rationnel de deux nombres.

Plutarque est ici beaucoup plus explicite que Théon de Smyrne. En ce qui concerne "la musique qui plaît le plus au Dieu", il n'est absolument pas possible, selon lui, de concevoir qu'elle ne soit pas tout à fait rationnelle et conforme à la raison. Le rapport de huit tiers, correspondant à l'intervalle d'octave et quarte, n'entre pas dans la même catégorie que les autres rapports ; il ne permet donc pas d'accepter cette consonance parmi les consonances fondamentales.

Mais, avant de nous interroger de manière plus approfondie sur l'exigence de rationalité qui limite au nombre de cinq les consonances principales, nous allons terminer l'étude de leur division et de leur composition, selon la méthode de Théon de Smyrne. Voici, en effet, ce qu'il écrit³⁴ :

"la quarte qui est dans le rapport épitríte est complétée par le ton, autrement dit par l'intervalle qui est dans le rapport épogde, de la manière suivante : tous sont d'accord, en effet, que la quarte est plus grande que deux tons, et plus petite que trois tons. Mais si Aristoxène dit qu'elle est composée de deux tons et demi parfaits, Platon, lui, la compose de deux tons, plus ce qu'on appelle leïmma. Or, le leïmma, selon lui, n'est désigné par aucun nom,³⁵ et il est dans le rapport numérique de deux-cent-cinquante-six avec deux-cent-quarante-trois. Tel est l'intervalle, c'est-à-dire que la différence est de treize³⁶."

On sent ici comme une sorte de confusion entre l'intervalle musical auquel le rapport numérique est censé correspondre, et l'intervalle numérique entre les deux termes du rapport, qui est appelé "différence"³⁷ entre les deux nombres. Certes, Théon s'en défend, et dit même un peu plus loin que "rien n'empêche de retrouver le rapport que deux-cent-cinquante-six a avec deux-cent quarante-trois, aussi à partir d'autres nombres, car ce n'est pas un nombre défini qu'a pris Platon, mais un rapport de nombres."³⁸ On peut toutefois douter qu'il ne tombe pas lui-même dans l'erreur qu'il récuse quand il entreprend de comparer le rapport de treize à deux cent quarante trois avec un seizième ou un dix-huitième.³⁹ Sans entrer dans tous les détails de ces calculs peu musicaux, étudions plutôt "comment on a trouvé le ton", et comment on peut trouver le leïmma, car il nous semble que Théon recourt à des procédures qui justement supposent l'usage d'une sorte de table numérique, sans doute pythagoricienne.⁴⁰

- Le ton tout d'abord : "Puisque l'intervalle de quarte apparaît être dans un rapport épitríte, et celui de quinte dans un rapport hémiole, le premier nombre qu'on a pris contient une moitié et un tiers⁴¹ : c'est six. Son épitríte c'est huit, et son hémiole neuf. (six/huit/neuf). Donc on a trouvé que l'intervalle de l'hémiole à l'épitríte est

³⁴ Cf. Théon II 67.7-14.

³⁵ Leïmma en grec signifie simplement : "ce qui reste".

³⁶ Si on soustrait le plus petit nombre 243 au plus grand 256 on obtient 13. Mais on peut remarquer aussi que 243 c'est 3 fois 92, tandis que 256 c'est 4 fois 82 où l'on retrouve les deux couples de nombres 3 et 4 d'une part, et 9 et 8 d'autre part, qui constituent les termes des rapports épitríte (4/3) et épogde (9/8) correspondant à la quarte et au ton.

³⁷ Ou plus précisément "excès (du plus grand par rapport au plus petit)" : *huperokhé*.

³⁸ Théon II 69.12. Ainsi, 512 est dans le même rapport avec 486 que 256 avec 243, car $512 = 256 \times 2$ et $486 = 243 \times 2$.

³⁹ Il s'agit, en fait de comparer le leïmma avec le demi-ton : sachant que le ton correspond à 9/8, ce qui peut aussi s'écrire 18/16. Or, la division de 243 par 18 donne 13, avec un reste de 9, ce qui signifie que 13 est un peu plus petit qu'1/18 (et a fortiori qu'1/16) de 243.

⁴⁰ On trouve chez Nicomaque de Gêrase (*Introduction arithmétique* II 3) l'indication précise du procédé de construction d'une telle table.

⁴¹ Les deux rapports 4/3 et 3/2 ont comme plus petit commun dénominateur le nombre 6.

dans un rapport épogde (neuf en effet est l'épogde de huit), et sa tension⁴² a été appelée "ton".⁴³

- Le leïmma ensuite : "Six ne saurait être le premier terme puisqu'il n'a pas de huitième pour produire un rapport épogde, et huit non plus assurément : car aussi bien, s'il a neuf comme épogde, neuf à son tour n'a pas d'épogde. Or il faut prendre un épogde d'épogde⁴⁴, puisque la quarte épitríte est supérieure à deux tons. Nous prenons donc l'épogde fondamental⁴⁵, celui de 8 et 9 : en multipliant 8 par lui-même, nous trouvons 64 ; puis 8 par 9 : cela fait 72, enfin 9 par lui-même : cela fait 81. (8/9/64/72/81).

Qu'on prenne ensuite, à nouveau, chacun d'eux trois fois⁴⁶ : cela fera trois fois 64, 192, trois fois 72, 216, trois fois 81, 243. (8/9/64/72/81/192/216/243).

Ensuite nous ajoutons à 243 l'épitríte 256 obtenu à partir de 192, de telle sorte que la disposition soit la suivante : épogde fondamental : 9/8 ; deuxièmes épogdes : 64/72/81 ; troisièmes épogdes deux à deux : 192/216/243. Qu'on pose aussi l'épitríte de 192, 256 : cet épitríte sera complété par deux tons plus le leïmma susdit.⁴⁷

Certains⁴⁸ au contraire prennent comme premier terme 384⁴⁹. En effet, pour prendre deux épogdes, ils multiplient par 8⁵⁰ le premier terme 6, produisant 48, et multiplient 48 à nouveau par 8⁵¹, produisant 384, dont l'épitríte est 512⁵².

⁴² Le terme grec *tásis* signifiait à la fois la hauteur du son et la tension. De même *tónos* peut signifier aussi ton et tension, du verbe *teíno* : tendre.

⁴³ Cf. Théon II 70.8-12.

⁴⁴ C'est-à-dire (9/8)2 : 81/64.

⁴⁵ On appelle "nombre fondamental" : *puthmén*, le plus petit nombre, dans une série, possédant une propriété donnée. Cf. Nicomaque, *Introduction arithmétique* I 19, et II 19 ; voir aussi *Theologoumena arithmeticae* 62.

⁴⁶ Tout part des 2 premiers nombres 8 et 9, qu'on multiplie entre eux pour obtenir 3 autres nombres (64, 72, 81), qu'on multiplie ensuite chacun par 3 pour obtenir encore 3 autres nombres (192, 216, 243), qu'il suffira ensuite de multiplier par 2 pour obtenir les 3 derniers nombres (384, 432, 486). Les trois couples de trois nombres correspondent chacun à un double épogde, et du point de vue harmonique, à un *ditonos* ou double ton. Notons que pour obtenir le rapport de quarte, on complète par un leïmma, ce qui est fait effectivement par Théon pour les deux derniers triplets de nombres, mais pas pour le premier. Cela confirme notre hypothèse du recours à la table numérique pythagoricienne, nous allons le montrer.

⁴⁷ On peut récapituler le procédé de calcul, en mettant en évidence le subtil mélange de 2 et 3 :

$3 \times (2^3)2 = 192$ $3 \times 2^3 \times 3^2 = 216$ $3 \times (3^2)2 = 243$ $22/3$ de $3 \times (2^3)2 = 256$

⁴⁸ Cf. Timée de Locres, *De l'âme du monde et de la nature*, fin du ch. 1, et la critique de J. Dupuis, note XIII pp. 347-351. Voir aussi Proclus, *Commentaire au Timée*, 193 et suiv. et l'étude détaillée des commentaires anciens par L. Brisson, *Le Même et l'Autre dans la structure ontologique du Timée de Platon*, pp. 318-323.

⁴⁹ Le choix de ce premier terme résulte de la volonté, dans le calcul de toutes les médiétés arithmétiques et harmoniques nécessaires pour combler les intervalles entre les nombres de la double *tetractis* du Timée, de toujours travailler avec des nombres entiers. Voir par exemple la représentation que L. Brisson donne des résultats, selon Plutarque, de ces calculs disposés selon des *lambdas* emboîtés (o. c. p. 321).

⁵⁰ On a vu plus haut que six ne pouvait pas être le premier terme parce qu'il ne comportait pas huit parties, la multiplication par huit crée donc un premier terme divisible par huit.

⁵¹ Comme il faut pouvoir prendre un épogde d'épogde (9/8)2, correspondant aux deux tons de la quarte, peut-être faut-il pour cela que le premier terme de la série soit divisible par 82.

⁵² 512 c'est 4/3 de 384. Le texte des manuscrits est accompagné d'un schéma de chacune des quartes épitrítes ainsi construites, schémas reproduits dans l'édition de E. Hiller pp. 68 et 69 :

192	216	243	256
épogde	épogde	leïmma	
384	432	486	512
épogde	épogde	leïmma	

Or, entre ces nombres, il y a deux épogdes : 432, épogde de 384, et 486, épogde de 432⁵³ ; le rapport de leïmma trouve donc sa place⁵⁴ à partir d'eux jusqu'à 512.⁵⁵

Le passage est un peu long, mais il est assez difficile de le résumer ou de l'écourter si l'on veut comprendre exactement la procédure utilisée. Il nous semble, en effet, que Théon de Smyrne propose en réalité au lecteur soit d'écrire, soit de repérer les nombres dont il parle, dans une table de nombres déjà disposée comme il l'entend. Il s'agit, selon nous, d'une table des "doubles" et des "triples"⁵⁶, disposés de telle sorte qu'on puisse y lire, entre la ligne horizontale où les multiples de deux sont disposés selon la largeur, et la ligne oblique où les multiples de trois sont disposés selon l'hypoténuse, les nombres dans un rapport *hémiole*, dans un rapport *épitríte* et dans un rapport *épogde*, toujours selon une même disposition.⁵⁷ Il est assez facile d'y retrouver les chiffres et nombres indiqués par Théon, dans la "disposition" qu'il désigne. Et selon nous, la table numérique est le support conceptuel, sinon matériel et directement visible, de tout ce passage très procédural et répétitif.

Cette table de multiples se trouve être en réalité le développement indéfini à partir de l'unité, par multiplication d'une part par deux, d'autre part par trois, des deux *tetractús* du *Timée* au moyen desquelles Platon a constitué harmoniquement et numériquement l'âme du monde⁵⁸. Théon toutefois n'use qu'implicitement de la table sans en décrire "l'engendrement", il semble la supposer bien connue de ses lecteurs.

De fait, ce n'est qu'une table d'addition assez élémentaire, où chaque fois le résultat de l'addition horizontale s'écrit sous le deuxième terme de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 1 + 2 ; [2] + 4 ; [4] + 8 \\ 3 + 6 + 12 \\ 9 + 18 \\ 27, \text{ etc.} \end{array}$$

Voici d'abord une petite partie de la table numérique développée, où nous avons écrit en gras les nombres dont se sert Théon, en particulier les deux groupes de quatre nombres correspondant aux quartses *épitrítes* fondamentales⁵⁹ 256 / 192 (la

⁵³ L'*épitríte* s'obtient en prenant 4/3 de 384, ce qui donne 512 ; le premier *épogde* s'obtient en prenant 9/8 de 384, ce qui donne 432, et le second s'obtient en prenant 81/64 de 384, ce qui donne 486 ; il reste entre 512 et 486 un *leïmma* (qui toutefois n'est pas de 13, mais de 26 !).

⁵⁴ Les prépositions "à partir de" et "jusqu'à" ont ici un sens spatial indéniable qui correspond peut-être plus à une lecture dans un tableau de nombres, qu'à une opération mentale.

⁵⁵ Entre 512 et 384 il y a un rapport de 4/3 (384 = 128 fois 3, et 512 = 128 fois 4) correspondant à une quarte ; et entre 432 et 384, comme entre 486 et 432, le rapport est de 9/8 (384 = 48 fois 8, et 432 = 48 fois 9 ; 432 = 54 fois 8, et 486 = 54 fois 9), et correspond chaque fois à un ton ; ce qui reste est bien un *leïmma* (486 = 2 fois 243 et 512 = 2 fois 256). Notons que tous ces nombres peuvent être à nouveau exprimés en puissance carrée et cubique de 2 et de 3, et que 512 en particulier est la puissance cubique de 2³, c'est-à-dire 2⁹, tandis que 256 c'est 2 à la puissance 2³, c'est-à-dire 2⁸. Ces deux numérateurs possibles pour le rapport de nombres correspondant au *leïmma* exprimaient donc d'une certaine manière l'*épogde* fondamental en puissances de deux.

⁵⁶ Voir Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique* II 3, trad. J. Bertier p. 90, et surtout p. 41, où la traductrice développe la table jusqu'aux nombres 4096 (2¹²) et 531441 (3¹²).

⁵⁷ Le rapport *hémiole* selon la verticale de bas en haut, l'*épitríte* selon une perpendiculaire à l'hypoténuse de haut en bas, et le rapport *épogde* de bas en haut selon une oblique en sautant une ligne et vers la droite. Voir la table développée pages suivantes.

⁵⁸ Il s'agit des deux séries 1, 2, 4, 8 et 1, 3, 9, 27 auxquelles l'unité est commune et qu'on représente habituellement sous la forme d'un L (*lambda*).

⁵⁹ Étudiées par Théon à la suite de la définition de la quarte et du ton selon Adraste (II 66.12-14) et de la première définition du *leïmma* selon Platon (*Timée* 36 b, 67.13-15). La première quarte est présentée dans le texte que nous venons de lire en 68.13 et la seconde en 69.4.

première quarte *épitríte* dont les deux tons *épogdes* et le *leïmma* se lisent dans le tableau) et 512 / 384 (la première quarte dans l'échelle numérique proportionnelle selon le vingt-septième⁶⁰ qui va de 384 à 10368). Or, Théon fait constater que les nombres correspondant à ces quartses sont simplement dans un rapport double, ce qui se lit immédiatement sur le tableau.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096...
	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536	3072...	
		9	18	36	72	144	288	576	1152	2304	4608	9216...
			27	54	108	216	432	864	1728	3456	6912...	
				81	162	324	648	1296	2592	5184	10368...	
					243	486	972	1944	3888	7776...		
												...

Nous proposons, à présent, la table plus complète des multiples selon les puissances de deux et de trois, telle que visiblement Théon la présupposait connue de son lecteur et l'utilisait, selon nous, pour lire directement les rapports numériques correspondant aux consonances d'octave, de quarte, de quinte et d'octave et quinte, mais aussi pour repérer les tons *épogdes* et les rapports de *leïmma* qui composaient ces dernières.

⁶⁰ En effet, si au lieu de commencer à l'unité, on commence à 384, le nombre qui correspond à 27 dans l'échelle numérique, c'est 10368.

2°	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰	2 ¹¹	2 ¹²	2 ¹³
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
	↑ ↓						↓	↓	↑ ↓	↑			
3°	3	6	<u>12</u>	<u>24</u> *	48	<u>96</u>	<u>192</u>	<u>384</u>	768	1536	3072	6144	12288
		3 ¹	9	18	36	72	144	<u>288</u>	<u>576</u>		1152	2304	4608
		9216*		18432									
			3 ²	27	54	<u>108</u>	<u>216</u>	<u>432</u>	864	1728	3456	6912	<u>13824</u> ...
					3 ³	81	162	<u>324</u>	<u>648</u>	1296	2592	5184	
					10368*	20736	...						
			3 ⁴	<u>243</u>	<u>486</u>	<u>972</u>	1944	3888	7776	15552	...		
				3 ⁵	<u>729</u>	<u>1458</u>	<u>2916</u>	5832	11664	de 10368 à 384 :			
xxx	dénominateur ⁶¹	de		3 ⁶	<u>2187</u>	<u>4374</u>	<u>8748</u>	17496	...	1 ton, 1 octave			
	leïmma				3 ⁷	<u>6561</u>	13122	1 quinte,			
↑ =	quinte	hémiole			3 ⁸	19683	1 octave,			
↓ =	quarte	épitrite			3 ⁹	et 2 octaves. ⁶²			
↗ =	ton	épogde											

Nous avons muni d'une astérisque (*) et souligné en pointillés, trois groupes de trois nombres qui constituent différentes combinaisons possibles pour une double octave : 6/12/24, 2304/4608/9216, et 2592/5184/10368. Théon de Smyrne n'utilise dans ses exemples que la première (6/12/24), mais Aristide Quintilien précise⁶³ que le nombre 9216 correspond à la note *proslambanomène*, la plus grave, 4608 à la *mèse*, ou note moyenne et 2304 à la *nète des hyperbolées*, note la plus aiguë. On peut constater évidemment, par leur position dans la table, que ces nombres sont des multiples, à partir de 384, des nombres 6, 12 et 24. Quant aux trois derniers nombres, on voit aussi directement sur la table qu'ils se situent un ton au dessous des trois précédents. Nous allons y revenir un peu plus loin, après avoir relu le passage du *Timée* de Platon que tous ces nombres sont finalement destinés à illustrer et commenter.

⁶¹ Les numérateurs correspondant se trouvent en remontant de cinq lignes vers le haut et en reculant de trois colonnes vers la droite.

⁶² Quatre octaves, une quinte et un ton, était l'étendue de l'harmonie de l'âme platonicienne, comme nous allons le voir.

⁶³ Cf. *De la musique* III 2, 97.10.

Revenons, en effet, à Pythagore dont Jamblique nous dit qu'il utilisait certaines mélodies et certains rythmes pour apaiser les soucis ou les souffrances de ses compagnons.⁶⁴ "A lui-même en revanche, il n'appliquait pas la même méthode, au moyen d'instruments ou par la voix, mais, mettant à profit une supériorité divine indicible et difficile à comprendre, il tendait son ouïe et fixait son intellect sur les accords célestes de l'Univers : lui seul, à ce qu'il paraissait, entendait et comprenait l'harmonie et l'unisson universels des sphères et des astres qui se meuvent en elles." Et, un peu plus loin,⁶⁵ Jamblique précise : "on aurait dit qu'il se rafraîchissait à cette harmonie, il mettait ainsi en ordre sa faculté intellectuelle et, pour ainsi dire, il l'entraînait comme un athlète"...

"il pensait qu'il était digne d'apprendre et d'étudier à la source même et à la racine de la nature,⁶⁶ et de chercher à s'assimiler, par aspiration et par imitation, aux corps célestes"...

Cette description de la saisie de l'harmonie universelle dans et par l'étude numérique des mouvements célestes nous renvoie très directement au *Timée* de Platon, où l'on trouve aussi bien l'idée que l'entraînement à comprendre la régularité et la beauté des mouvements célestes procure à notre âme une beauté et une régularité semblables,⁶⁷ que la proposition selon laquelle l'intelligibilité essentielle du monde est due à la composition harmonique très complexe dont le démiurge s'est lui-même chargé, en fabriquant le "mécanisme" de l'âme du monde⁶⁸ et en épuisant tout le mélange substantiel, sans laisser d'autres "restes" que les *leïmma*.⁶⁹ Relisons, dans la traduction de Luc Brisson, les termes dans lesquels Platon décrit la chose⁷⁰ :

"Il se mit donc à faire le partage que voici. D'abord, il retrancha une seule part sur le tout ; après celle-ci, il en retrancha une seconde, double de la première ; et encore une troisième qui, valant une fois et demie la seconde, était le triple de la première ; une quatrième, double de la seconde ; une cinquième, triple de la troisième ; une sixième valant huit fois la première ; et une septième valant vingt-sept fois la première." Telle est la première partition du mélange. Elle est formulée, on le voit, en termes de rapports (en particulier de rapports double, hémiole et triple, sauf pour les deux dernières parts qui ont des valeurs cubiques⁷¹) et non pas simplement en termes de nombres entiers, comme la représentation traditionnelle selon le *lambda* pourrait le laisser penser.

"Après quoi, continue Platon, il combla les intervalles doubles et triples, en détachant encore des morceaux du mélange initial et, en les intercalant entre les

⁶⁴ Cf. *Vie de Pythagore* 64-65, trad. cit. pp. 36-37.

⁶⁵ *Ibidem* 66, trad. cit. p. 37.

⁶⁶ Il atteignait ainsi "directement le nombre", comme le signalent les traducteurs en note. Car, selon les Pythagoriciens, "la source et la racine de l'éternelle nature", c'est la *tetractis* qui la possède, comme le précise justement la formule du serment pythagoricien évoquée par Théon au début de son traité (I 18.1), et explicitée plus longuement en II 94.6-9 et 99.16.

⁶⁷ Cf. Platon, *Timée* 47 b c, trad. L. Brisson p. 144.

⁶⁸ *Ibidem* 34 c, p. 123. Voir J. Delattre, "Y a-t-il un modèle mécanique dans le *Timée* de Platon ?", *Lectures du "Timée" de Platon*, Publication du groupe philosophie de la MAFPEN et de l'IREM de Lille (1994).

⁶⁹ C'est-à-dire les intervalles qui, dans un rapport de deux cent cinquante six à deux cent quarante trois, comblent la différence entre les doubles tons et les quarts.

⁷⁰ Cf. *Timée* 35 b-36 b, trad. cit. pp. 124-125.

⁷¹ Huit c'est 2³ et vingt-sept c'est 3³. On obtient ainsi la double série à partir de 1 : 2, 2² et 2³ et 3, 3² et 3³. On la représente souvent par un angle aigu (ou un *lambda*) dont le sommet est occupé par l'unité, l'un des côtés décline la progression des doubles, et l'autre côté, la progression des triples.

premières [parts], de façon qu'il y ait dans chaque intervalle deux médiétés, la première surpassant l'un des extrêmes tout en étant surpassée par l'autre d'une même fraction de chacun d'eux⁷², et la seconde surpassant l'un des extrêmes d'un nombre égal à celui dont elle est elle-même surpassée.⁷³

De ces relations naquirent, dans les intervalles ci-dessus mentionnés, des intervalles nouveaux de un plus un demi, un plus un tiers et un plus un huitième."

Tels sont donc les rapports hémioles (un plus un demi), épitríte (un plus un tiers) et épogde (un plus un huitième) auxquels le demiurge recourt maintenant, pour harmoniser les subdivisions de l'âme du monde, au moyen de quarts et de quintes, dont la différence est d'un ton, après avoir utilisé d'abord la division en rapports doubles et triples, c'est-à-dire au moyen d'octaves, et d'octaves et quintes⁷⁴. En même temps Platon précise que c'est le calcul des deux types de médiétés arithmétiques et harmoniques et leur intercalation régulière qui permet d'obtenir les nombres correspondant à ces rapports.⁷⁵ Aussi, la disposition harmonieuse des nombres les uns par rapport aux autres dans un rapport de consonance apparaît-elle davantage comme la conséquence d'un calcul numérique qui fonctionne comme un "mécanisme"⁷⁶ demiurgique plutôt que comme ce qui le précéderait ou le fonderait. La musique de l'Univers est ainsi essentiellement numérique et fort peu musicale a priori.

D'ailleurs, la troisième étape de la subdivision harmonique de l'âme se produit ensuite de la manière suivante : "A l'aide de l'intervalle de un plus un huitième, le dieu a comblé tous les intervalles de un plus un tiers", laissant subsister de chacun d'eux une fraction, telle que l'intervalle restant fût défini par le rapport du nombre deux cent cinquante-six au nombre deux cent quarante-trois.⁷⁸

C'est ainsi que le mélange, d'où il avait détaché tous ces morceaux, il se trouva l'avoir entièrement utilisé.⁷⁹

Voilà le fameux passage du *Timée*⁸⁰ que les exégètes platoniciens philosophes, mathématiciens ou musiciens, se sont évertués à commenter à travers toute l'Antiquité, comme nous l'avons déjà évoqué en commençant cette étude. Cela nous invite, en tout cas, aussi, à approfondir notre connaissance des médiétés.

⁷² Il s'agit d'une moyenne harmonique : de trois nombres a, b, c, tels que a < b < c, b est moyenne harmonique entre a et c si

$$a + \frac{a}{x} = b \text{ et } b = c - \frac{c}{x}, \text{ ou encore } b = \frac{2ac}{a+c}.$$

⁷³ C'est une moyenne arithmétique : de trois nombres a, b, c, tels que a < b < c, b est moyenne arithmétique entre a et c

$$\text{quand } a + x = b \text{ et } b = c - x, \text{ ou encore } b = \frac{a+c}{2}.$$

⁷⁴ On voit bien que l'octave et quarte est absente des consonances utilisées par le demiurge.

⁷⁵ L'absence de la moyenne géométrique (de trois nombres a, b, c, tels que a < b < c, b est moyenne géométrique entre a et c quand b² = ac, ou b = \sqrt{ac}) dans ces calculs harmoniques, résulte d'une part du fait que les rapports multiples et les

rapports d'un plus une part ne peuvent être partagés également en deux, d'autre part de la difficulté de calculer \sqrt{ac} , lorsque le produit des extrêmes n'est pas un carré.

⁷⁶ Au sens du terme grec *mekhané* qui désigne aussi bien un dispositif matériel ingénieux, qu'une démarche astucieuse envisagée seulement au plan conceptuel.

⁷⁷ Autrement dit, la subdivision s'opère à présent à l'aide de tons, et ce sont les quarts (et les quintes qui sont des quarts augmentés d'un ton) que l'on divise.

⁷⁸ C'est-à-dire le rapport correspondant au *lemma* et que nous avons rencontré précédemment.

⁷⁹ Il n'y a pas d'autre reste que les *lemma* utilisés pour compléter les doubles tons des quarts.

⁸⁰ Cf. *Timée* 35 b-36 b, trad. L. Brisson, pp. 124-125.

Le calcul des médiétés, purement numérique, n'a pas d'utilité musicale

Théon de Smyrne consacre les dernières pages de la deuxième partie sur la musique de son traité⁸¹ à composer une théorie élémentaire des médiétés platoniciennes. Il est amené à définir les médiétés de manière générale de la façon suivante :

"De façon générale, il y a médiété quand, entre deux termes de même genre et inégaux, on prend un autre terme de même genre de telle sorte que entre la différence du premier et plus grand terme avec celui qu'on a pris, et la différence du terme moyen avec le terme le plus petit, il y ait le même rapport qu'entre le premier terme et, soit lui-même, soit l'un des autres, ou à rebours, qu'entre le plus petit et l'un des autres."⁸² En utilisant la notation littérale que l'on emploie aujourd'hui, cet énoncé peut s'écrire : "si c > b > a, on dit que b est médiété entre a et c

$$\text{quand } \frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{c} \text{ ou } \frac{c}{a} \text{ ou } \frac{c}{b} \text{ ou quand } \frac{c-b}{b-a} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a}{c}."$$

Il serait fastidieux de reprendre une à une les définitions données ensuite, dans les mêmes termes, de chacune des médiétés arithmétique, géométrique, harmonique, puis de la subcontraire de l'harmonique, de la cinquième et de la sixième. Car Théon de Smyrne s'en tient à ces six médiétés-là sans signaler l'existence de quatre autres médiétés, dont nous parlent pourtant Nicomaque de Gérase⁸⁴ et Pappus.⁸⁵ Il nous a paru plus intéressant de présenter, en un tableau récapitulatif, l'ensemble des dix médiétés, exprimées grâce à la notation littérale moderne⁸⁶ ; il s'agira ensuite de faire apparaître les ressemblances et les différences entre les trois auteurs quant aux exemples qu'ils proposent pour illustrer leurs définitions. Si l'on pose a < b < c, on peut écrire les médiétés ainsi :

	arithmétique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$	$ma = \frac{a+c}{2}$
Pythagore	géométrique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$	$mg^2 = ac$
	harmonique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$	$mh = \frac{2ac}{a+c} = mg^2 \cdot \frac{1}{ma}$
	subcontraire de		
Hippase et	l'harmonique	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	$\frac{1}{mh}$

⁸¹ Cf. Théon II 106.12-119.17.

⁸² Cf. Théon II 113.11-17.

⁸³ Notons que cet énoncé ne donne en fait que cinq possibilités, où l'on peut reconnaître d'abord les trois médiétés principales : arithmétique, harmonique puis géométrique, et ensuite, l'inverse de la géométrique puis l'inverse (ou subcontraire) de l'harmonique.

⁸⁴ Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique* II XXVIII, trad. J. Bertier pp. 136-139.

⁸⁵ Pappus, *Collection mathématique* III, (réimpr. Paris 1982) trad. P. Ver Eecke, t.1 pp. 58-72.

⁸⁶ Nous nous appuyons pour ce faire sur la note explicative, p. 1387 dans *Les Présocratiques*, en proposant la rectification de quelques inexactitudes qui ont échappé à la relecture. Merci aux collègues de l'atelier pour leur aide précieuse !

Archytas ⁸⁷	cinquième	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$	$\frac{1}{mg}$
	sixième	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$	$\frac{1}{mg}$
	septième ⁸⁸	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$	
Simos	huitième	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	
Myonide et			
Euphranor ⁸⁹	neuvième	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$	
	dixième	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ ou $c = a + b$. ⁹⁰	

Les exemples numériques donnés par les trois auteurs, Théon de Smyrne, Nicomaque de Gérase et Pappus sont différents, ils témoignent sans doute de procédures de calcul différentes, ou parfois d'une double réponse possible.⁹¹ En voici aussi la récapitulation. Cela met clairement en évidence à quel point de tels calculs avaient pu se développer à l'écart des considérations harmoniques et musicales, auxquelles seules les trois premières médiétés semblent avoir eu quelque part.⁹²

⁸⁷ Selon Jamblique, *Commentaire à l'Introduction arithmétique de Nicomaque*, 116.1. Tandis que selon Proclus, c'est Eudoxe qui serait l'auteur de l'ajout de ces trois autres médiétés (*Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide*, p. 59).

⁸⁸ Nous utilisons les définitions de Nicomaque, trad. cit. p. 138, pour les quatre dernières.

⁸⁹ Voir *Les Présocratiques*, p. 555.

⁹⁰ Par symétrie on pourrait encore en ajouter deux, égales à c/b ; mais les auteurs se limitent à dix médiétés, y compris Ozanam dans son *Dictionnaire mathématique*. Voir M. Spiesser, *Histoire de moyennes*, IREM de Toulouse (1997), pp. 28-34.

⁹¹ Par exemple pour la cinquième médiété.

⁹² Cf. à ce propos, M. Spiesser, *Histoire de moyennes* (IREM de Toulouse 1997), p. 34 ; voir aussi *Sciences et techniques en perspective*, "Musique et mathématiques. Les médiétés dans la pensée grecque", vol. 23 (1993).

	Théon	Nicomaque	Pappus
arithmétique	3 2 1	1 2 3	6 4 2
géométrique	1 2 4	1 2 4	4 2 1
harmonique	2 3 6	3 4 6	6 3 2
subcontraire de l'harmonique	6 5 3	3 5 6	6 5 2 ⁹³
cinquième	5 4 2	2 4 5	5 4 2
sixième	6 4 1	1 4 6	6 4 1
septième		6 8 9	3 2 1
huitième		6 7 9	6 4 3
neuvième		4 6 7	4 3 2
dixième		3 5 8	3 2 1

Pour ce qui est des procédures de calcul proposées par Théon de Smyrne, on peut s'étonner en particulier que celle de la moyenne harmonique soit aussi compliquée⁹⁴ : "il faut multiplier la différence des extrêmes par le plus petit terme et diviser le terme obtenu par la somme des extrêmes ; ensuite il faut ajouter le quotient de la division au plus petit"⁹⁵, autrement dit, cinq opérations sont nécessaires (le quotient d'une différence et d'une somme, puis encore une addition et un quotient). Pourtant, lors de la définition de la médiété harmonique, la remarque a été faite que $b(a+c) = 2ac$ ⁹⁶, le quotient d'un double produit et d'une somme serait, en effet, bien plus simple à opérer. Une première explication de cette anomalie pourrait être à rapprocher de l'exigence rationnelle étonnante qu'il ne puisse y avoir que cinq consonances fondamentales, laquelle a abouti à l'exclusion de l'octave et quarte, dont nous avons parlé plus haut. Le calcul, pour être vraiment platonicien, nécessiterait ainsi cinq opérations⁹⁷, pas une de plus ou de moins. Une autre explication plus intéressante, du point de vue de l'histoire des idées scientifiques, nous a été suggérée par la manière dont M. Caveing⁹⁸ interprète le rôle des moyennes arithmétique et harmonique dans le calcul approché des racines carrées⁹⁹. Si, effectivement la moyenne arithmétique constitue l'approximation par

⁹³ Concernant la différence entre les exemples de Nicomaque et de Pappus pour la 5e médiété, voir M. Spiesser, *o. c.*, annexe 8, remarque a), p. 62.

⁹⁴ Nous avons étudié la procédure de calcul de cette médiété aux Journées académiques de l'IREM de Lille : cf. *Actes des journées académiques organisées par le groupe Philosophie de la MAFPEN et l'IREM de Lille* (nov. 1997), "La démonstration et l'exemple chez Théon de Smyrne", pp.17-30.

⁹⁵ Cf. Théon II 119.3-8.

⁹⁶ Cf. Théon II 114.25-27.

⁹⁷ De même que la définition générale des médiétés correspondait seulement à cinq médiétés.

⁹⁸ Cf. M. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, t. 3 (Thèse Univ. Lille 1982, en cours de publication), p. 1188, référence empruntée à M. Spiesser, *o. c.* p. 8.

⁹⁹ Par exemple, si $ma = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ moyenne arithmétique entre 1 et 2 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$,

$\frac{2}{mh} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, d'où $mh = \frac{4}{3}$ moyenne harmonique entre 1 et 2, autrefois appelée "subcontraire" (avant la découverte des trois médiétés d'Eudoxe, ou bien d'Hippase et d'Archytas) en est une valeur approchée par défaut. Ainsi l'enjeu

Bibliographie

Auteurs anciens :

- Jamblique, *Vie de Pythagore*, traduction Luc Brisson et Alain Philippe Segonds, Paris 1996.
- Nicomache de Gêrase, *Manuel d'harmonie ou Enchiridion*, trad. angl. A. Barker, *Greek Musical Writings II* (1989). Voir aussi le *Fragment III*, trad. C. E. Ruelle (1881), pp. 45-47.
- Nicomache de Gêrase, *Introduction arithmétique*, trad. J. Bertier, Paris 1978.
- Pappus, *Collection mathématique III*, (réimpr. Paris 1982) trad. P. Ver Eecke, t.1.
- Plutarque, *De la musique*, H. Weil et T. Reinach (Paris 1900).
- Plutarque, *De la musique*, F. Lasserre (Olten-Lausanne 1954).
- Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, trad. D. Delattre, J.-P. Dumont et J. L. Poirier, Paris 1988.
- Théon de Smyrne, *De ce qui est utile du point de vue scientifique à la lecture de Platon*, éd. du texte grec, E. Hiller (Leipzig 1878, rééd. 1971) ; trad. J. Dupuis, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (Paris 1892- rééd. Bruxelles 1966).

Etudes et articles récents :

- Barker A., *Greek Musical Writings II*, Cambridge 1989 (notices des auteurs traduits).
- Barker A., "Aristides Quintilianus and constructions in early music theory", *Classical Quarterly* 32 i (1982).
- Bélis A., *Aristoxène de Tarente et Aristote*, Paris 1986.
- Brisson L., *Le Même et l'Autre dans la structure ontologique du Timée de Platon*, Paris 1974, rééd. 1997.
- M. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, t. 3, Thèse Univ. Lille 1982.
- Delattre J., "Y a-t-il un modèle mécanique dans le *Timée* de Platon ?", *Lectures du "Timée" de Platon*, Publication du groupe philosophie de la MAFPEN et de l'IREM de Lille (1994).
- Delattre J., "La démonstration et l'exemple chez Théon de Smyrne", *Actes des journées académiques "Mathématiques et Philosophie" organisées par le groupe Philosophie de la MAFPEN et l'IREM de Lille* (nov. 1997), pp.17-30.
- Mattéi J.-F., *Pythagore et les pythagoriciens* (Paris 1993).
- Spiesser M., *Histoire de moyennes* (IREM de Toulouse 1997), p. 34 ; voir aussi *Sciences et techniques en perspective*, "Musique et mathématiques. Les médiétés dans la pensée grecque", vol. 23 (1993).
- H. Tarrant, *Thrasylan Platonism*, Ithaca-London 1993.

Le sens de l'histoire et la question de l'Origine de la Géométrie chez Husserl.

Alain Bernard

" Nous nous tenons... dans l'horizon historique en lequel, si peu de choses que nous sachions, tout est historique. "

Husserl, in *L'Origine de la Géométrie*.

Présentation de l'argument :

Quiconque s'interroge sur les mathématiques, qu'il le fasse en professeur, en historien, en philosophe ou en physicien, et qui veut croire aujourd'hui à l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire pense que cette histoire a un intérêt essentiel et fondamental pour l'enseignement et la recherche en mathématiques, ne reste pas insensible aux phrases vibrantes qu'emploie Husserl dans *L'Origine de la Géométrie* pour défendre la pertinence d'une *histoire* des sciences, et des mathématiques en particulier.

Qu'en est-il de cette défense, comment la comprendre aujourd'hui, et les arguments husserliens sont-ils toujours d'actualité ? On se propose ici d'argumenter en faveur du oui à ces questions, on montrant plus particulièrement que c'est, dans la méditation husserlienne, l'échec répété du questionnement "doctrinaire" sur l'origine de la géométrie, c'est-à-dire l'incertitude d'un questionnement général sur les mathématiques qui déploie l'espace d'une interrogation historique authentique.

1. Quel est le problème soulevé ?

(a) Avant de décrire dans ses détails le problème au sujet duquel il me semble qu'on peut relire Husserl, qu'on me permette d'énoncer une évidence (elle fait partie de ces banalités qui méritent toujours d'être rappelées) : il faut, pour lire un philosophe, poser un problème philosophique.

Je dis ceci, pour prendre d'emblée parti contre cette philosophie qui prétend examiner "de l'extérieur" les auteurs, ou bien, pour plagier le pédantisme courant, pour "mettre à jour leurs présupposés", les "fondements philosophiques" de leurs "systèmes", etc. Pour moi, lire une réflexion philosophique signifie avant tout se confronter avec elle, et à partir d'une interrogation propre. C'est donc porter ses regards, non pas avant, ou après, ou devant, derrière, en dessous ou au dessus de l'auteur auquel on se confronte, mais bien en face de lui et d'égal à égal.