

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1850) : *Leibnizens Mathematische Schriften*, éd. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin: Julius Pressner ; rééd., *Œuvres Mathématiques de Leibniz*, Paris: Librairie de A. Frank Editeur, 1853.

Muir, Thomas (1890-1923) : *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, 4 vols., London: MacMillan ; rééd., New-York: Dover Publications, 1960.

Rouché, Eugène (1880) : Notes sur les équations linéaires, *Journal de l'École Polytechnique*, 48^e Cahier, Tome XXIX, 221-228 ; extraits in (Muir 1890-1923, 3:91-92).

Smith, Henry John Stanley (1861) : On Systems of Linear Indeterminates, Equations, and Congruences, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 151, 293-326 ; rééd. in *Collected Mathematical Papers* ; rééd. New-York: Chelsea Publishing Company, 1965, 1:367-409 ; extraits in (Muir 1890-1923, 3:83-84).

De Dürer à Bézier : dessin des caractères d'imprimerie.

(Activités à l'usage des lycées)

L'atelier propose une série d'activités sur le dessin des caractères d'imprimerie. Il s'agit de décrire ces caractères afin de pouvoir les mémoriser, les reproduire, les déformer. Les premières portent sur les travaux de Dürer (1525), les suivantes présentent sur des exemples accessibles aux élèves les rudiments sur les courbes de Bézier et leurs nombreuses applications.

Loïc LE CORRE*

Introduction

Conserver la mémoire d'un tracé : l'exemple du dessin des caractères d'imprimerie.

L'écriture manuscrite est – souvent – très belle, si le scribe a du talent, s'il forme bien ses lettres, s'il manie le calame, le pinceau ou la plume avec dextérité, s'il sait adapter le dessin de chaque lettre à celui de ses voisines, s'il sait justifier ses lignes c'est à dire adapter leur longueur à celle de la page en employant éventuellement des abréviations. Elle a un gros inconvénient : toutes les lettres doivent être dessinées une à une et le dixième « a » de la page est à dessiner comme le premier. C'est évidemment très lent et le risque de mal faire est grand.

Pour que chaque lettre soit bien dessinée – toujours le même tracé – le scribe applique une procédure. Il ne dessine pas sa lettre au hasard mais le *ductus*, la séquence de mouvements de la plume qui trace la lettre, est codifié au moins par la pratique. C'est le *ductus* qui définit la structure géométrique de la lettre, ses pleins et ses déliés, son contraste, ses empattements, sa tension.

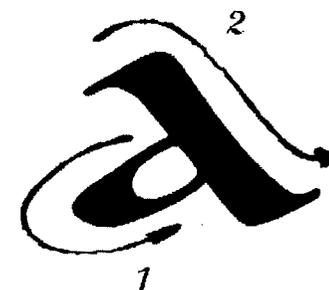


Figure 1 : lettre « a » caroline calligraphiée (IX^e siècle)

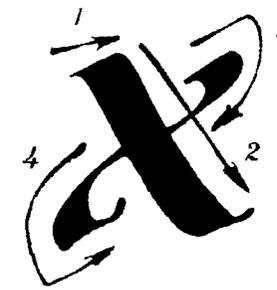


Figure 2 : lettre « x » onciale calligraphiée (V^e siècle)

C'est une première façon de conserver la mémoire d'un tracé : on garde en mémoire non pas le résultat de la lettre tracée mais la façon de faire, la procédure. Ici, évidemment, c'est un procédé très particulier. C'est en quelque sorte une mémoire gestuelle. La précision de la reproduction future est laissée à l'habileté du scribe et les variantes possibles sont celles de sa fantaisie : on est plus du côté de l'artisanat ou de l'art que des mathématiques.

Pourtant le problème est posé :

On possède un dessin original. Comment le conserver et le reproduire, en faire une copie exacte (précision de la copie) ou une copie modifiable (variations possibles) ?

L'histoire oscillera entre ces deux réponses : conservation du dessin lui-même ou conservation de la procédure qui a permis de le tracer. Et d'une certaine façon, plus on est du côté de la procédure et plus on est du côté des mathématiques.

Autrement dit :

1. Le dessin original, la procédure de tracé, reste « secret » mais le résultat est « public ». Ainsi en est-il de l'imprimerie avant Dürer mais aussi de l'imprimerie avant les courbes de Bézier. Le dessin des caractères d'imprimerie est du côté de l'art plutôt que du côté de l'industrie.

2. La procédure qui permet à chacun de tracer la lettre est publique. C'est l'imprimerie après Dürer ou après l'apparition des courbes de Bézier. Le rapport entre industrie et art s'est inversé.

Nous vous proposons donc un voyage à travers le dessin des caractères d'imprimerie, des copistes du moyen-âge aux imprimeurs de la renaissance et jusqu'à la typographie numérique d'aujourd'hui.

La première partie (chapitres 1 à 4) sur l'imprimerie traditionnelle nous permettra de tracer des caractères comme Albrecht Dürer le préconise.

La deuxième partie (chapitres 5 et 6) sur la typographie numérique permettra de s'initier au tracé du contour des lettres à l'aide de courbes de Bézier.

*... et le groupe Histoire des mathématiques (95-97) de l'Irem de Rennes.

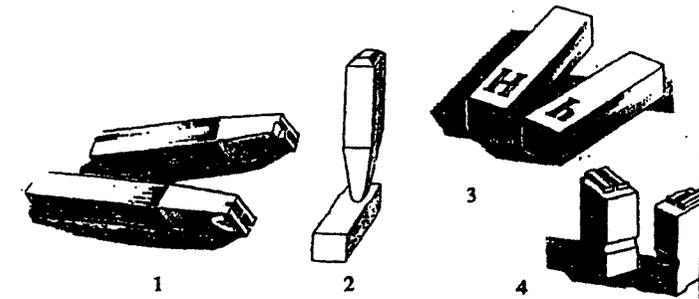
1. Les débuts de l'imprimerie

Johannes Gutenberg (1398 - 1468) n'a pas inventé l'imprimerie. Ce qu'il a inventé, vers 1435, vraisemblablement à Strasbourg, c'est le processus de fabrication, de production et de réutilisation des caractères mobiles en plomb.

En Chine, au milieu du X^{ème} siècle on imprimait déjà à partir de bois en relief - un ouvrage coréen, conservé à Paris (B.N.F.) a été imprimé en 1377 avec des caractères mobiles métalliques ; l'imprimerie a-t-elle été inventée en Corée ? La presse était connue des vigneron. Des caractères mobiles en bois avaient été utilisés pour des almanachs dès le XIV^{ème} siècle en Europe. L'innovation technique de Gutenberg, qui connaissait le travail du métal - fonderie et métallurgie, orfèvrerie - est le « moule à main » : un appareil qui permet de fondre isolément des caractères que l'on peut assembler à volonté et redistribuer en vue d'une autre composition, d'où leur nom de caractères mobiles ou types.

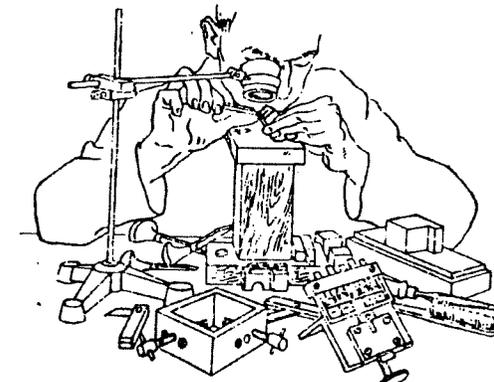
La gravure et la fabrication des types

1. Le poinçon, gravé à la main à l'aide de gouges, est une pièce d'acier d'environ 5 cm de haut et quelques mm² de surface.
2. Le poinçon est frappé dans un bloc de cuivre dans lequel il laisse son empreinte.
3. Cette matrice est introduite dans un moule où le caractère est fondu dans un alliage plomb-étain (puis plomb-étain-antimoine).
4. Les caractères obtenus permettent de composer le texte. Ils peuvent servir plusieurs fois. Quand ils sont éroussés, ils sont refondus et leur métal est récupéré pour mouler de nouveaux caractères à partir de la même matrice.

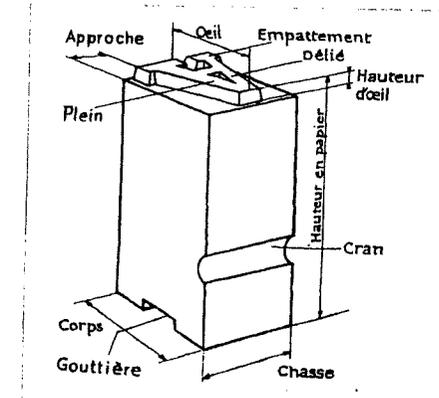


Les différentes étapes du processus de fabrication et d'utilisation d'un caractère mobile métallique.

Cette technique sera utilisée sans modification importante jusqu'au milieu du XIX^{ème} siècle. On trouve encore à Paris quelques graveurs de poinçons.



La gravure manuelle : le contour de la lettre est tracé à la pointe, puis l'œil est dégagé à l'aide d'échoppes et de limes de différentes formes.



Le caractère ou type

La bible à 42 lignes

Le premier livre connu ayant fait l'objet d'une impression en nombre est la Bible à 42 lignes éditée par Gutenberg et imprimée à Mayence vers 1454-1456 par Fust et Schöffer. Elle comprend 42 lignes sur une page et sur 2 colonnes. Le caractère d'impression, le *textura* était surtout utilisé à l'époque pour les ouvrages liturgiques. Il donne une grande écriture ce qui laisse penser que ces bibles étaient destinées à la lecture à haute voix dans les réfectoires.

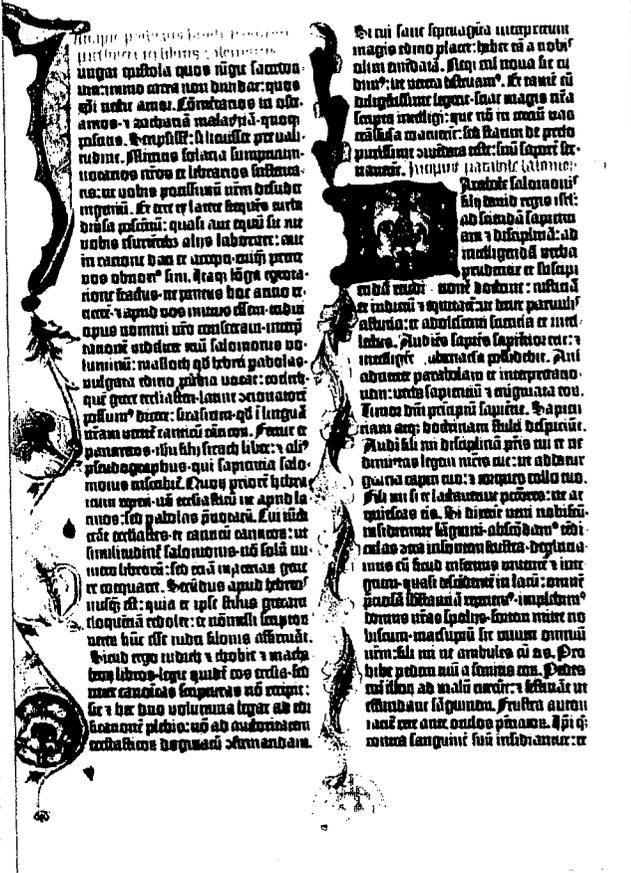
L'aspect général de cette Bible est très proche des manuscrits : de nombreuses lettres capitales et enluminures sont rajoutées à la main, les ligatures (lettres reliées entre elles) ainsi que les abréviations sont fréquentes. La seule différence significative est le fait que les fins de lignes sont soigneusement alignées sur une verticale : elles sont justifiées. C'est la marque de l'imprimerie par rapport au travail des copistes. Pour cette impression Gutenberg avait utilisé une casse (l'ensemble des caractères utilisés) très importante d'environ 285 éléments comprenant minuscules, majuscules, ligatures, abréviations, ponctuation.

C'est donc surtout l'aspect « production en masse » permis par l'imprimerie qui a été privilégié à ses débuts.

La Bible à 42 lignes peut ainsi être examinée sur deux plans. Au plan esthétique, c'est l'aboutissement d'une longue évolution, celle du manuscrit médiéval que la régularité et l'unité de la typographie porte à une perfection. Au plan technique, c'est un grand commencement (voir chap. 5).

Si cui sane septuaginta
magis editio placet: hab

Le début de la deuxième colonne précédente: remarquez la forme des lettres (les a par exemple), les lettres plus ou moins espacées, les accents sur les i, le grisé sur le S initial est en couleur....



Une page de la Bible à 42 lignes éditée par Gutenberg en 1454-56 les deux premières lignes écrites à la main et... en couleur

L'imprimerie en Bretagne

Pendant toute cette fin du XV^e siècle, l'imprimerie se développe dans toute l'Europe : 1464 Venise puis l'Italie du nord, 1470 Paris, 1473 les Flandres du nord (Bruges où Jean Brulelou, calligraphe originaire de Pipriac près de Redon, devient imprimeur sous le nom de Jean Brito à partir de 1475), 1474 Séville, 1479 Oxford, 1507 Edinbourg, 1564 Moscou...

Curieusement, dès 1484, plusieurs ateliers d'imprimerie s'installent en Bretagne, dans le fief de l'importante famille des Rohan (il faut aussi noter l'existence dans le centre-Bretagne, de 1463 à 1493, d'un moulin à papier, le moulin du « Gué de L'Isle » sur le Lié) : Robin Fouquet et Jehan Crès sont à Bréhan-Loudéac en 1484, Jehan Calvez à Tréguier en 1485, Jehan Crès à nouveau à Lanténac en 1487. Ces ateliers auront une existence éphémère et, au début du XVI^e, seuls des imprimeurs de Rennes (Pierre Bellesculée, par exemple) et de Nantes continuent à travailler dans l'Ouest.

On connaît les dix incunables (ouvrages imprimés avant Pâques 1501) sortis des presses de Bréhan entre décembre 1484 et fin 1485. Ils ont tous même format, même papier, même nombre de lignes à la page, le caractère utilisé est gothique et l'impression est de bonne qualité. Huit traitent de devoirs moraux et religieux (*Le trépasment de la Vierge, Le songe de la Pucelle, La Vie de Jésus-Christ...*), un des devoirs civiques (*Coutumes de Bretagne*), le dernier est une étude des mœurs. Le *Catholicon* imprimé par J. Calvez à Tréguier en 1499 est un dictionnaire Latin - Breton - Français. J. Brito imprime à Bruges un pamphlet contre le roi de France Louis XI.



L'imprimerie dans la France du nord à la fin du XV^e.



Marque de Jehan Crès imprimeur à Lanténac (1486-1493). Les types qu'il utilisait provenaient vraisemblablement des ateliers de Jean Brito de Bruges.



Marque de Pierre Bellesculée imprimeur à Rennes en 1485 des *Coutumes de Bretagne*.



Marque de Jean Baudouyn, imprimeur à Rennes 1523-1531.

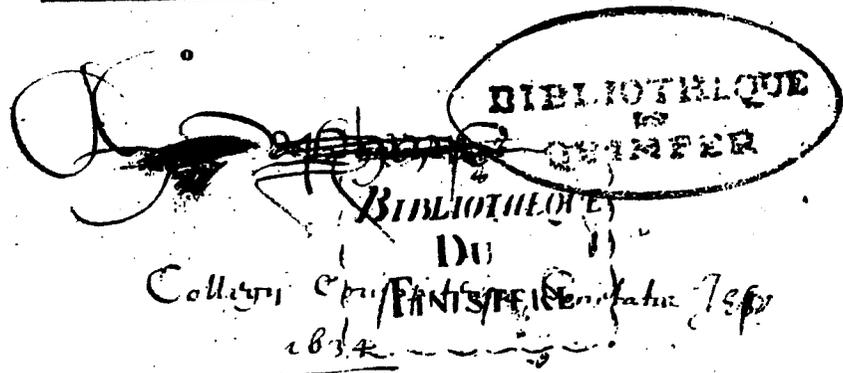
caorum idem). Item zodia grece. l. dicitur animalia vel signa et inde dicitur zodiacus. qz sol intras illum illas proprietates animalium sortitur. Vel quia in eo sunt signa nominibus animalium nūcupata vel quia stelle in signis in figuris animalium sunt disposite et sunt duodecim signa. In b^o Est aries taur^o gemini cancer leobgo Libraqz scorpis arctitenens capricornus et vna Qui tenet et pisces sita sūt hoc ordine signa Item Sol Venus mercurius luna saturnus Jupiter et mars sont plane tes



Hoc opus effeci sans gratia neumatell
olm Juuamey michi sit laus Virtus
gloria sibi Verbo plasmator patri totū
veritati Actorem tibi benedicat Scpte
ra ppi.

Ce finist ce presant libure ndme le ca-
tholicon le quel contient trois langaiges
Scauoir breton françoys & latin le quel
a este pstruit copie et intitule par noble &
venerable Maistre aufferet quoad queue
ray en son temps chanoine de treguier.
recteur de Noerij pres moztay pnuoids
que cestoit Une chose propice et utile de
mettre ces trois langaiges concordens
l'ung a l'autre quat affin e pour instruire
les simples gens a auoir la cognoissance
des bits langaiges ainsi que le libure le
demonstre Et Imprime ala cite de late
guier par Jehan calvez le cinquiesme iour
de novembre. Ray mil cccc. lxxi. vingtz et
six neuf.

En composas vng pas ne fallas tu
Weben vssu hac en continuas



Une page du Catholicon, dictionnaire breton-français-latin de Jean Lagadec imprimé par Jean Calvez à Tréguier en 1499. Il est considéré comme le premier ouvrage imprimé en breton. Le deuxième alinéa à droite est écrit en français.

2. Dessin des caractères : Pacioli, Dürer et les autres...

Les caractères romains supplantent les caractères gothiques dès le milieu du XVI^e siècle. Ce sont les caractères des humanistes italiens et ils sont surtout utilisés pour imprimer des textes de l'antiquité grecque ou latine. Le gothique restera toutefois en usage pour les textes religieux, juridiques, et c'est lui que Luther utilisera pour lancer la Réforme.

Les premiers imprimeurs en caractères « romains » sont Seynheim et Pannartz qui éditent, en 1467, les « epistolae familiares » de Cicéron dans leur nouvel atelier de Rome avec un caractère qui, du coup, s'appellera romain. L'un des premiers graveurs est le français Nicolas Jenson qui crée un caractère qui porte son nom en 1470. L'invention de l'italique, caractérisée par sa cursivité, est attribuée à Aldus Manetius, imprimeur et humaniste vénitien - on lui doit l'édition princeps d'Aristote (1495-1498) - qui commande au graveur F. Griffio un caractère assez étroit pour imprimer des livres en format réduit (de poche ? !). Mais la perfection de cette forme romaine est généralement attribuée au caractère créé par Claude Garamond vers 1530.

Ceci est écrit avec une copie moderne du caractère Garamond.

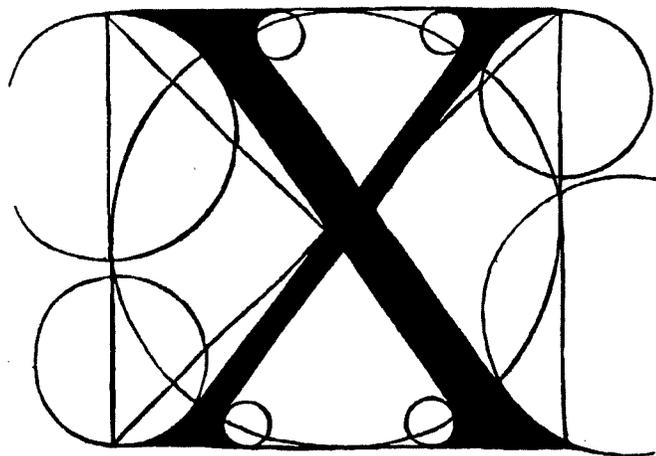
Sur les manuscrits, les lettres sont tracées au pinceau ou à la plume directement sur le parchemin ou le papier. Avec le développement de l'imprimerie, pour la gravure des poinçons, on voit apparaître en Italie, dès la fin du XV^e, des dessins de lettres tracés à la règle et au compas.

Felice Feliciano, de Vérone, proche du peintre Mantegna retrouve dans les inscriptions antiques la construction des majuscules latines et les décrit dans son traité de 1460. Il construit les « antique caractere » à la règle et au compas en les inscrivant dans un carré circonscrit à un cercle. La largeur du trait est de 1/10^e du côté du carré. Son manuscrit est aujourd'hui conservé à la bibliothèque Vaticane. Vingt ans plus tard, Damiano da Moile, de Parme, est l'auteur du premier texte imprimé concernant la construction d'un alphabet romain.

Luca Pacioli (1445-1517), moine et mathématicien italien auteur d'une *Summa* (1494) recensant le savoir mathématique de son temps, publie en 1509 la *Divina Proportione* dans lequel il décrit entre autre un alphabet complet de majuscules romaines. Ce texte est intéressant à double titre. D'une part, il donne un dessin de chaque lettre accompagné d'un petit texte qui en explique la construction. « ... Ces lettres sont composées sans autres moyens que les lignes droite et courbe, ... » (*Divina Proportione*, chap. IX). Les lettres sont tracées dans un carré, les empattements sont dessinés à l'aide d'arcs de cercle et la largeur du trait est de 1/9^e du côté du carré. D'autre part, il indique ses intentions : « ... Je me suis disposé à l'exposer de la manière que j'ai fait, uniquement afin que les copistes et les enlumineurs qui se montrent si insuffisants pour ce genre de travail se rendent compte que, même sans leurs plumes et pinceaux, les deux lignes mathématiques, c'est à dire la courbe et la droite, quoi qu'ils en aient, forment ces lettres à la perfection comme elles font pour toutes choses. » (*Ibid.*, chap. VI) ou encore « ... et que les scribes et les enlumineurs ne se plaignent pas si j'ai rendu public ce nécessaire alphabet : je l'ai fait uniquement pour démontrer que deux lignes essentielles, la droite et la courbe, permettent toujours de faire ce qui est faisable : c'est pourquoi je leur ai placé devant les yeux, sans l'aide de leur plume ni de leur pinceau, le carré et le rond, afin qu'ils se rendent parfaitement compte que tout procède des disciplines mathématiques, bien que les formes des lettres soient arbitraires. » (*Ibid.*, chap. XIX)

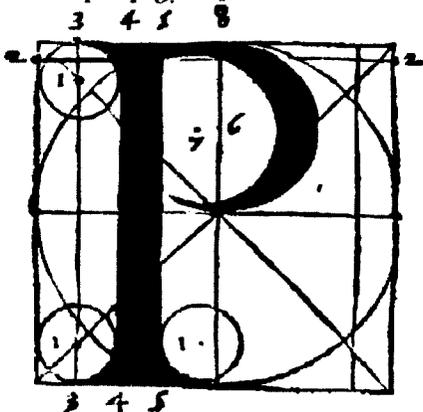
Pacioli fixe là, en quelque sorte, un programme : publier un alphabet construit à la règle et au compas. Dans la première moitié du XVI^e siècle, les travaux vont se multiplier et de nombreux traités paraîtront. Trois d'entre eux peuvent être remarqués : Fanti, Dürer et Tory.

Gismondo Fantì, mathématicien vénitien publie en 1514 *Theorica et Practica de modo scribendi*... qui indique une construction très complète de minuscules et de capitales où points et droites auxiliaires sont désignées par des lettres ou des chiffres



« Questa lettera X. uol tutto el suo quadro incrociato sue gambe nella interseccatione de li diametri. E l'una uol esser grossa la nona parte de l'altezza. L'altra la mita prese di un metralice terminando sue gambe com debira gratia serò do la forza de li tonci piccoli. »

« el quadro disopra: & fa vn tondo che pig mezo. Dipoi pigli el punto del 7. & stringi



« che l'altra punta tochi la linea segnata. 1. & tondo. Dipoi farai vn tondo de vna testa p

« La lettre X de l'alphabet de la divine proportion est imprimée pleine page avec un commentaire. »

« Cette lettre X, tire sa forme entièrement du carré. Ses jambages se croisent à l'intersection des diamètres. L'un doit avoir l'épaisseur d'une des neuf parties de la hauteur, l'autre la moitié prise diamétralement, ses jambages se terminant avec la grâce requise en suivant le tracé des petits cercles. »

« La lettre P décrite par Gismondo Fantì. Remarquez les points numérotés. »

Albrecht Dürer (1471 - 1528), l'un des plus importants peintres de la renaissance allemande a subit ces influences italiennes. S'il est célèbre en particulier pour ses gravures, il a aussi fait œuvre de mathématicien. Il écrit en 1525 *Instructions pour la mesure à la règle et au compas*... où il traite de la perspective, de diverses questions de géométrie et aussi du tracé géométrique des lettres de l'alphabet.

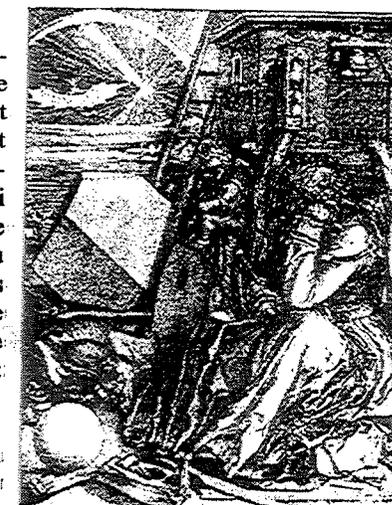


Dürer à 20 ans. Autoportrait 1491.

Il décrit cinq alphabets dont deux sont bien détaillés : un alphabet gothique et un alphabet romain. Il en donne systématiquement les constructions géométriques de chaque lettre avec malgré tout quelques imprécisions dans les tracés comme on le verra dans les activités.

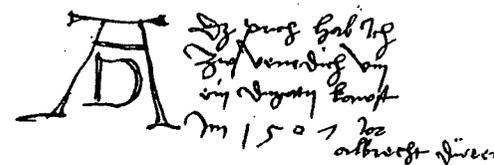
Au plan artistique du dessin des caractères, Dürer ne fait pas œuvre originale. Pour l'alphabet gothique, il reprend le caractère textura, très proche de celui utilisé par Gutenberg. Pour l'alphabet romain, il reprend les travaux des graveurs et géomètres italiens et inscrit ses lettres, dessinées à la règle et au compas, dans des carrés.

Dans le monde de l'imprimerie, ces écrits auront un retentissement énorme. Ils seront largement diffusés, au point que jusqu'au début du XX^e siècle on pensera que Dürer est l'inventeur des caractères gothiques fracturés. Dürer s'inscrit dans la problématique décrite par Pacioli, mais c'est la première fois que sont diffusées à large échelle des règles qui auparavant relevaient des secrets du graveur. Cela permet de rompre avec l'utilisation des patrons découpés en usage au Moyen-âge pour reproduire un dessin. Dürer ne donne plus l'image globale de la lettre mais la procédure mathématique permettant de la construire. La reproduction infinie et exacte (tout en permettant des variantes) des lettres en est grandement facilitée.

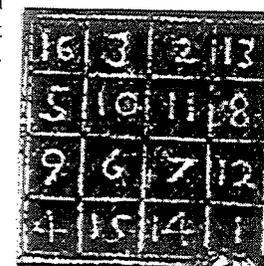


Mélancolie I 1514 gravure au burin, Le Louvre, Paris. Cette gravure énigmatique montre de nombreux instruments de mesure et des objets géométriques ainsi que l'un des premiers carrés magiques représentés en Europe.

Goeffroy Tory, enfin, graveur et typographe qui publie à Paris en 1529 *Champ Fleury ou l'Art et Science de la proportion des lettres* rendra hommage à Dürer d'avoir rendu publiques ses constructions de lettres mais critiquera ses alphabets lettre par lettre. Tory est étroitement lié au milieu humanistes et en particulier à Henri Estienne, important imprimeur parisien dont il sera un des correcteurs. C'est lui qui vers 1530 introduit la cédille, l'apostrophe et les accents. Il faut attendre 1580 et l'éditeur hollandais Louis Elzevier pour distinguer nettement le u et le v, le i et le j.



« Das buch hab Ich zw Venedich um ein Dugatn kawft Im 1507 jor albrecht Dürer ». J'ai acheté ce livre à Venise pour un ducat. Albrecht Dürer, janvier 1507. Inscription sur la page de garde des *Éléments d'Euclide*.

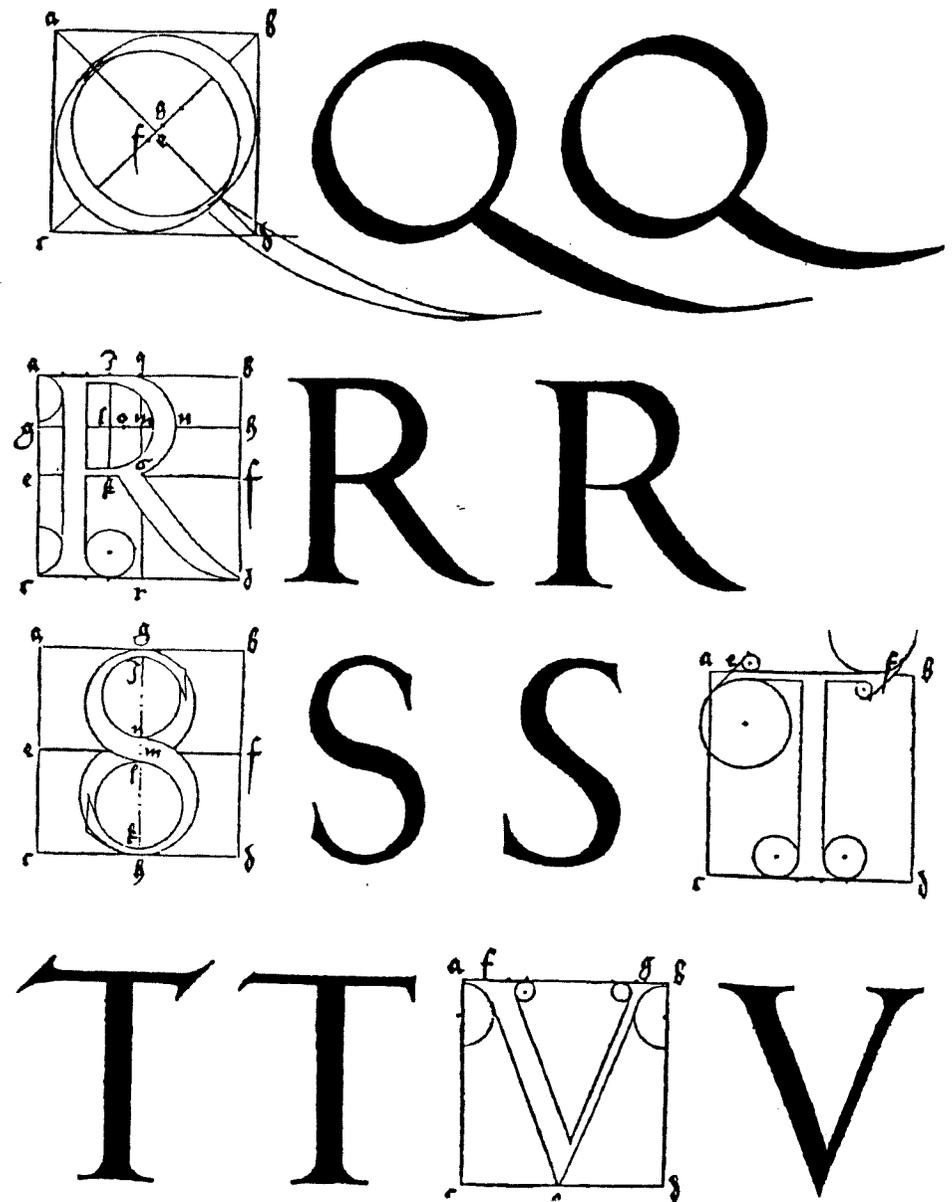


Carré magique : les 2 carrés du milieu de la dernière ligne donne la date de la gravure.

a b c d e f g h
 i k l m n o p
 q r i s t u v
 w x y z z z z

L'alphabet gothique textura détaillé par Dürer. Les caractères gothiques textura sont très proches de ceux utilisés par Gutenberg dans sa Bible. Ils resteront utilisés dans des formes dérivées (gothique fraktur) jusqu'à la fin du XIX^e, surtout en Allemagne.

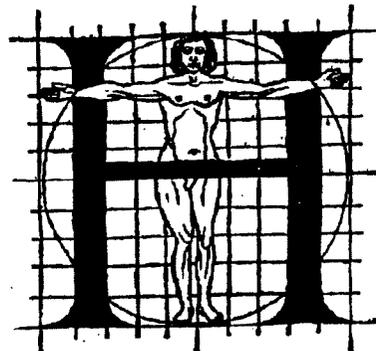
Remarquer le r étroit. D'autres lettres de cet alphabet présentent aussi des variantes, le s et le z par exemple. Elles étaient utilisées, ainsi que des abréviations, pour justifier les paragraphes sans toucher aux espaces. En revanche il n'y a pas de j. L'accent sur le i se transformera progressivement en point.



Une page de l'alphabet de majuscules romaines détaillées par Dürer. Les lettres sont inscrites (ou plutôt tracées) dans des carrés. Ici la largeur du trait est 1/10^e du côté du carré. Les caractères imprimés présentent parfois quelques différences avec le modèle : ce sont les marques des gouges du graveur qui s'est écarté du trait initial.

LE SECOND LIVRE. FEUIL.XIX.

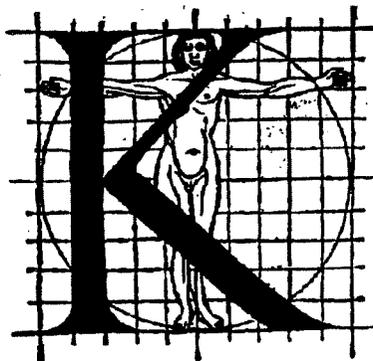
L'Aspiration a doncques son traict sus la ligne centrique & diametrale, iustement au dessus du penyl du corps humain, pour nous monstrer que nosdictes lettres Attiques veulent estre si raisonnablement faictes, quelles desrent sentir en elles avec naturelle raison, toute conuenable proportion, & last architecture, qui requiert que le corps d'une maison ou d'ung Palais soit plus esleue depuis son fondement iusques a sa couverture, que n'est la dicte couverture, qui represente le chef de toute la maison. Si la couverture d'une maison est excessiuement plus grande que le corps, la chose est difforme, si non en Halles & Granches, desquelles la couverture commence pour la plus part bien pres de terre, pour auiter l'impetuosité des grans ventz, & tremblemens de la terre. Doncques noz lettres ne volent craindre le vent des enuyeux maldifans, veulent estre erigees solidement en quadrature, & brisees, comme iay dict, au dessus de leur ligne centrique & diametrale. Excepte le dict A., qui a son traict trauesant iustement assis souz la dicte ligne diametrale.



Ordonnance du traict sus le corps humain.

Notable singulier.

On peut veoir a la figure cy pres designee comme la brisure de la lettre K, est assise sus le point de la ligne trauesant par le centre & penyl du corps humain, ayant les piedz iointes lequel centre come iay tousiours dict, est sus le penyl. La brisure des autres lettres que ie laisse pour ceste heure a faire, les renvoyant en leur rencabece daire, sera tousiours aussi assise sus la dicte ligne centrique & diametrale.



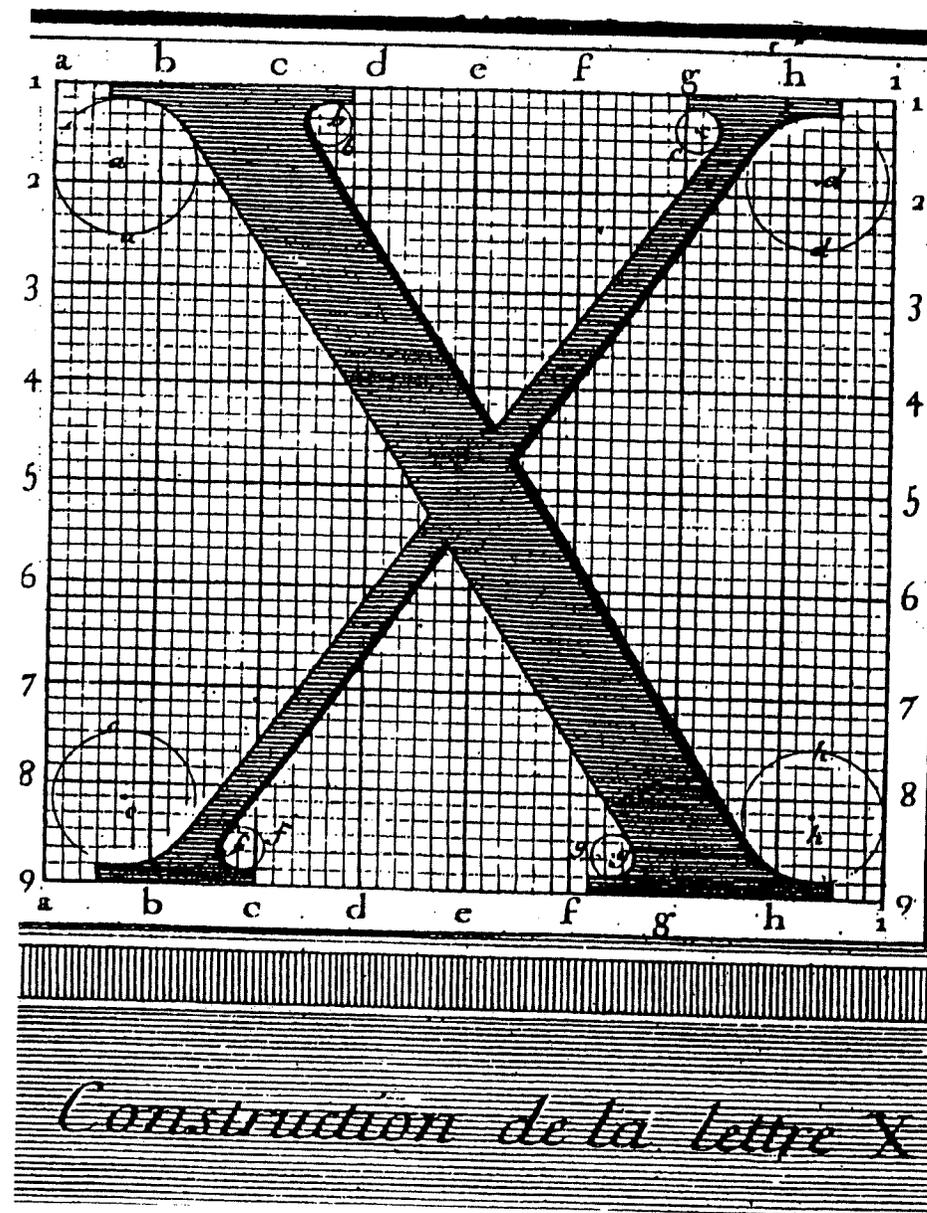
Ordonnance pour la brisure des lettres au corps humain.

Iay dict nagueres ou le traictois de l'aspiration, que noz lettres Attiques veulent sentir l'architecture: & il est vray, considere que A. represente vng pignon de maison, ven qu'il est figure en pignon. L'aspiration H. represente le corps d'une maison, entendu que la partie de dessous la ligne trauesante que iay dicte centrique & diametrale, est pour souz elle constituer Sales & Chambres basses. Et la partie de dessus est pour faire pareillement Sales hautes, ou Chambres grandes, & Chambres moyennes. Le K. a cause de la brisure, nous signifie degrez a monter en droite ligne iusques a vng estage, & dicelluy pour monter aussi en droite ligne.

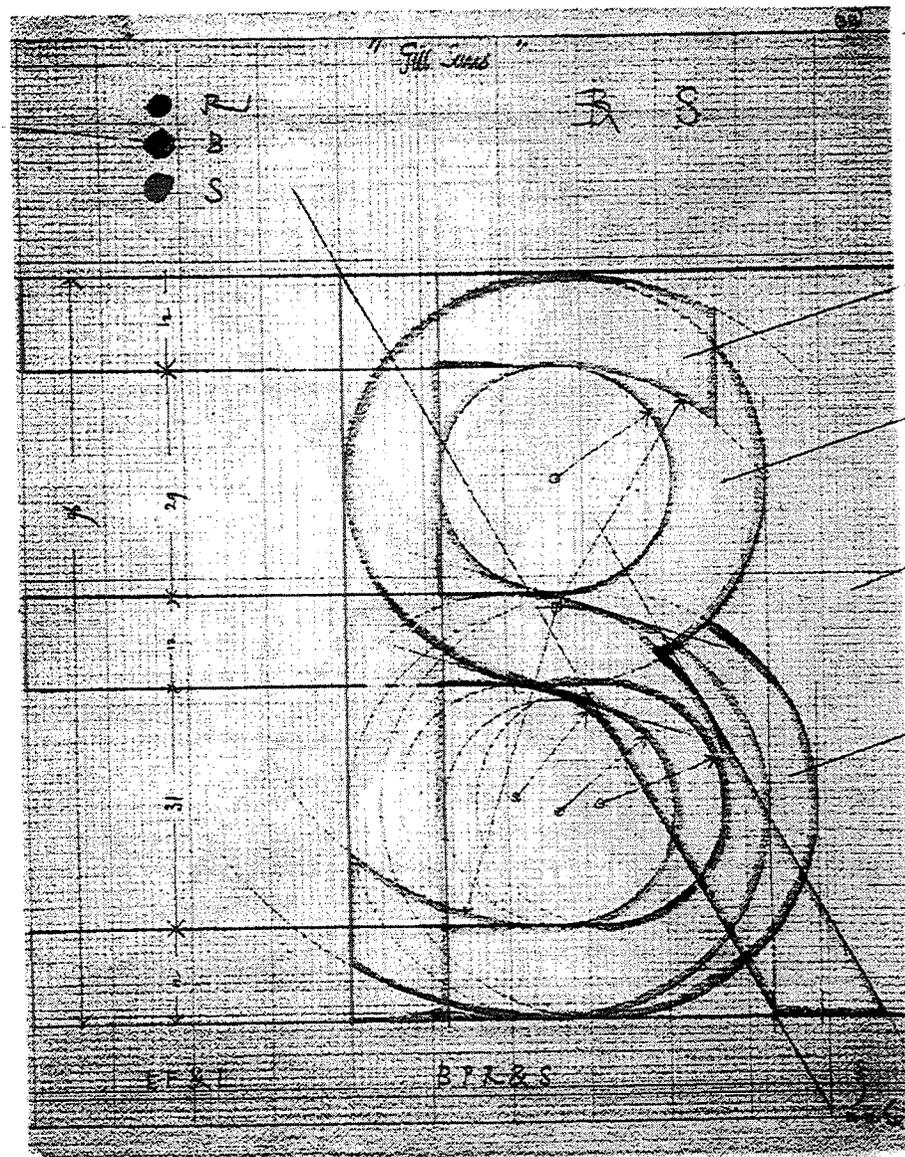
Lettres Attiques veulent sentir l'architecture.

Une page du Champ fleury de Geoffroy Tory (1529). Lire le début des deux premiers paragraphes ou les annotations dans la marge : la référence humaniste est ici explicite.

Cette façon de dessiner les caractères d'imprimerie va se perpétuer jusqu'au milieu du XX^e siècle. Le cercle inscrit a déjà disparu avec Dürer. Mais avec la transformation du carré en quadrillage, l'enjeu mathématique énoncé par Luca Pacioli s'évanouit. L'indication précise de la procédure à suivre pour construire une lettre s'efface au profit d'une grille dans laquelle la lettre est simplement tracée. L'artiste qui livre une belle lettre reprend le dessus et le géomètre est lui-même remplacé par l'artisan graveur.



Le X du caractère Grandjean dit « Romain du Roy » dessiné en 1702.



Esquisses des lettres B, P, R et S du caractère Gill Sans dessinées par l'architecte, dessinateur, sculpteur, graveur... anglais Eric Gill en 1932.

3. Activité : la police *textura* de Dürer

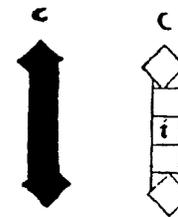
Il s'agit de construire quelques lettres de l'alphabet *textura* détaillé par Albrecht Dürer dans *Instructions pour la mesure à la règle et au compas ...* Les lettres gothiques *textura* sont très proches de celles utilisées par Gutenberg dans sa *bible à 42 lignes*.

Première partie.

1. Lire le texte de Dürer.
2. Construire le « i » à la règle et au compas – et donc sans instrument de mesure... – dans la grille fournie ci-dessous.
3. Dürer indique « Ainsi, les sommets du carré en pointe [supérieur] débordent davantage à gauche qu'à droite ». Vérifier par un calcul que le carré en pointe débordé bien des deux côtés, et davantage à gauche qu'à droite.

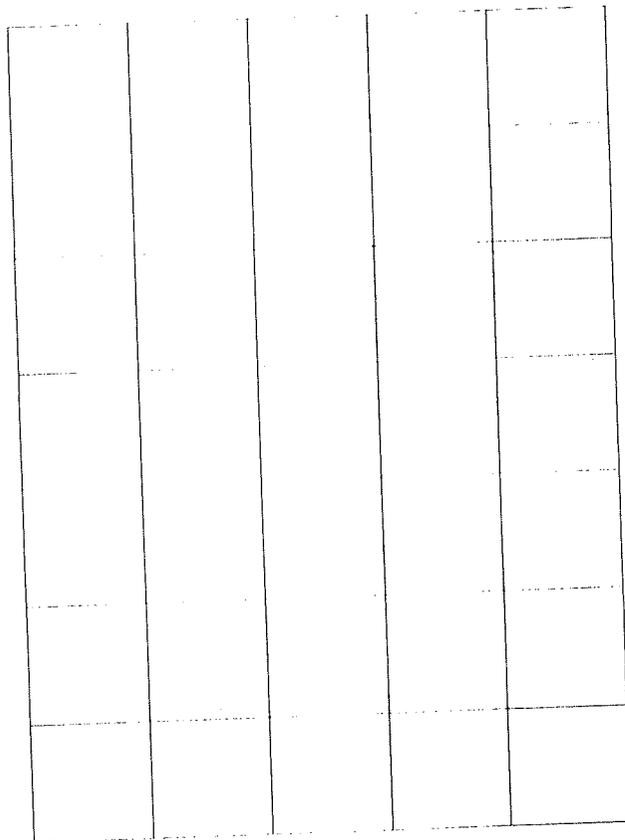
Les lettres de l'ancienne gothique *textura* ont été formées à peu près comme celles que je vais décrire dans la suite, encore qu'on les fasse maintenant d'une manière différente. Bien que l'alphabet débute par la lettre a, j'ai de bonnes raisons de lui préférer la lettre i, car à partir d'elle on peut former pratiquement toutes les autres lettres, soit en y ajoutant soit en y enlevant quelque chose.

Premièrement, forme la lettre i à l'aide de carrés, dont tu en empiles trois verticalement. Divise le côté supérieur du carré supérieur et le côté inférieur du carré inférieur, chacun par deux points en trois segments égaux. Ensuite, place dessus un carré en pointe, c'est-à-dire tel que sa diagonale soit à la verticale sur le premier point du côté du carré. Ainsi, les sommets du carré en pointe débordent davantage à gauche qu'à droite. Ensuite, prolonge de part et d'autre les arêtes des carrés superposés jusqu'au carré en pointe. Procède de même au bas de la lettre, mais place le sommet supérieur du carré sur le deuxième point, le plus à droite, du côté inférieur du carré. Abaisse latéralement les deux arêtes des carrés verticaux jusqu'au carré en pointe. Ainsi est formée la lettre i. Dessine au-dessus, avec une plume plus fine, une petite demi-lune.



A. Dürer. *Instructions pour la mesure à la règle et au compas ...* (1525).
Trad. J. Peiffer, Seuil.

Grille pour le « i ».



Deuxième partie .

1. Lire la suite du texte de Dürer.
2. Terminer la construction du « a » à la règle et au compas dans la deuxième grille fournie. On pourra s'aider des indications suivantes :
 - La hauteur des lettres est fixée par celle du « r » déjà réalisé.
 - Le rectangle en biais a une longueur de un carreau et demi. Il faut donc partager un carré en deux (cf. le partage en 3) pour pouvoir mesurer la diagonale du rectangle en biais. L'une des extrémités de la diagonale est au 1/3 du carré inférieur, l'autre sur la droite qui marque la hauteur des lettres cela positionne la diagonale du rectangle. Il faut maintenant construire le rectangle connaissant sa diagonale et ses deux côtés.
 - Pour finir la casquette du « a » rajouter ou enlever un triangle pour faire le biais.
3. Comparer l'image du « a » que donne Dürer et celle que vous avez tracée. Que remarquez-vous ? La construction des arcs de cercles terminaux est-elle unique ? Que peut-on dire de la fin de la procédure fournie par Dürer ?

u r

...
Item forme la lettre n à partir de deux jambages de la lettre i de sorte que leurs têtes et pieds respectifs se touchent. Ainsi, l'espace compris entre les jambages sera plus étroit qu'un trait de lettre. Mais n'y mets plus de lunule. Donne la même hauteur à toutes les lettres brèves de l'alphabet. [...]

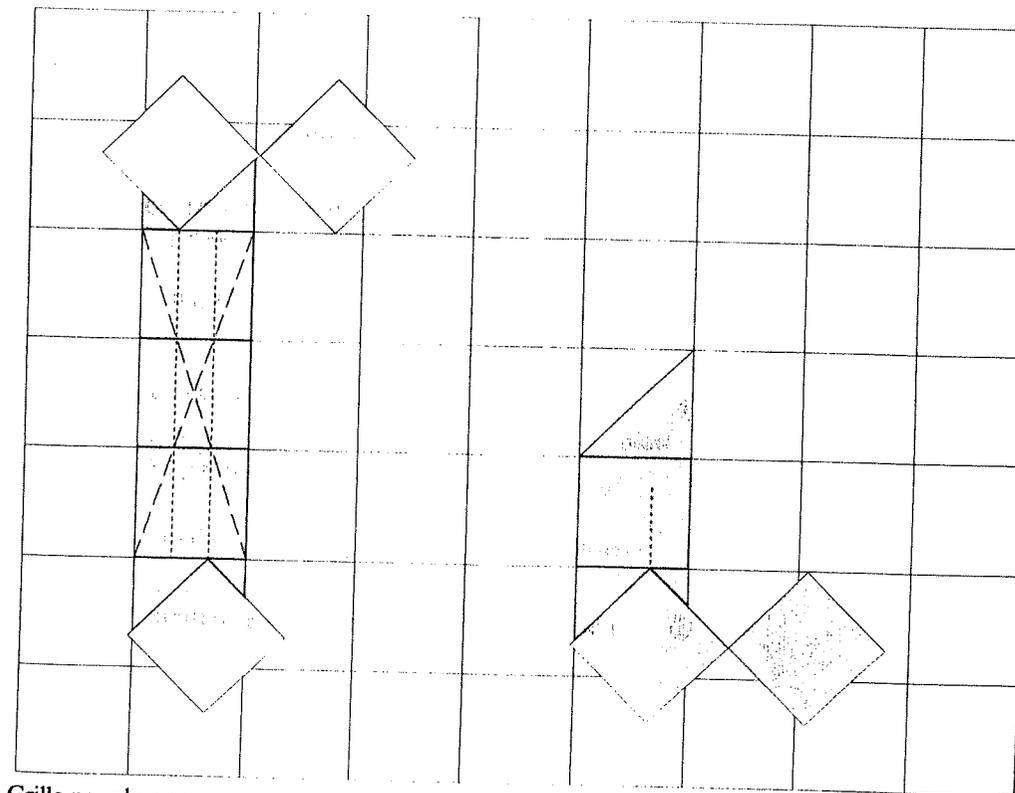
Construis le r comme le i, mais rajoute en tête à droite un carré dont un sommet touche le i.

[...]

Item le a, forme sa moitié inférieure comme le n, mais tronque l'extrémité en haut à gauche du jambage gauche le long de la diagonale du carré médian. Conserve dans le jambage droit les trois carrés empilés, mais incline un peu davantage le carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi-carré, ils atteignent la hauteur de la lettre. Coupe le carré de manière oblique afin que son extrémité inférieure soit plus saillante que son extrémité supérieure. Décris un arc circulaire vers la gauche et vers le bas, qui passe par l'extrémité supérieure du jambage gauche.

a

A. Dürer. *Instructions pour la mesure à la règle et au compas...*(1525). Trad. J. Peiffer, Seuil



Grille pour le « a ».

Le corrigé

1. Fiche technique

Niveau : seconde de lycée général ou professionnel.
 Thème : constructions géométriques.
 Durée : 1h 30.
 Connaissances nécessaires : Géométrie de troisième et calcul de la diagonale du carré.
 Objectif : maîtrise des constructions géométriques.

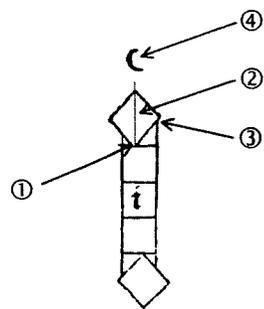
2. Mode d'emploi

La première partie ne pose qu'un seul réel problème : le partage en 3 du côté d'un carré. On peut donner un exercice préparatoire : partager un segment en n parties égales à l'aide du théorème de Thalès. Dans ces conditions cette première partie peut être donnée comme travail d'approche à faire à la maison.

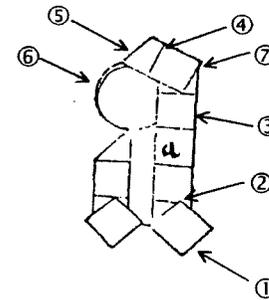
La deuxième partie est plus difficile en particulier pour la construction du rectangle en biais et la fin du texte. Elle demande sans doute à être guidée en classe.

On peut remarquer que tracer une grille ne demande pas d'instruments de mesure

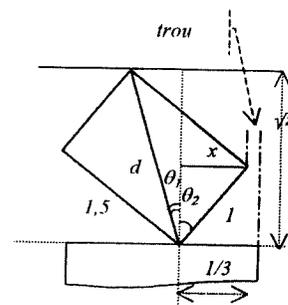
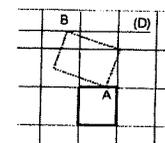
3. Les problèmes types traités et quelques éléments de correction.



- ① **Division d'un segment en n segments égaux.**
Ici on peut diviser le côté du carré en 3 à l'aide du quadrillage. (démonstration à l'aide du théorème de Thalès)
- ② **Perpendiculaire à un segment passant par un point.**
- ③ **Tracé d'un carré connaissant le côté et la diagonale.**
Le carré en pointe dépasse du fût de la lettre de $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \approx 0,041$ unité à droite, de $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \approx 0,373$ unité à gauche (ici $\approx 0,8$ mm et $\approx 7,5$ mm)
- ④ **L'accent sur le i est dessiné « à la main ».**

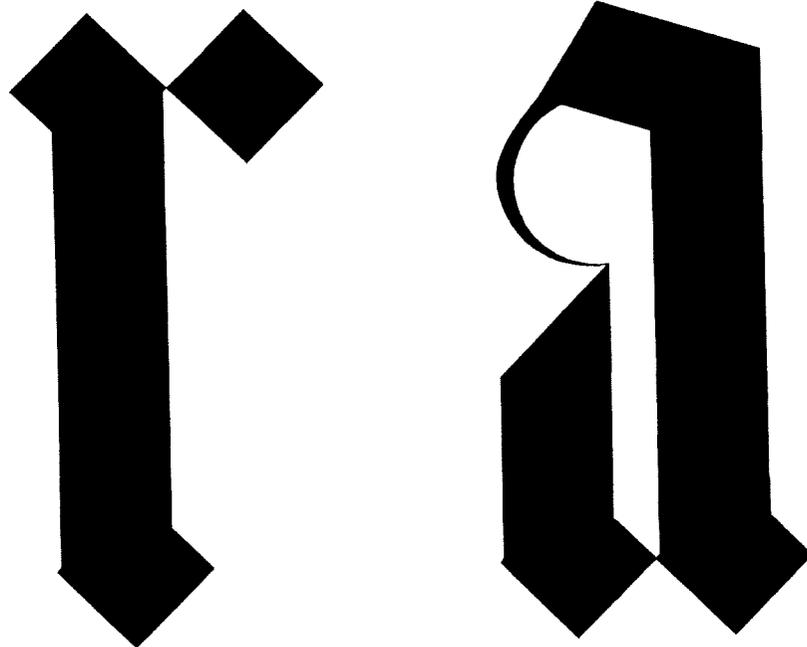
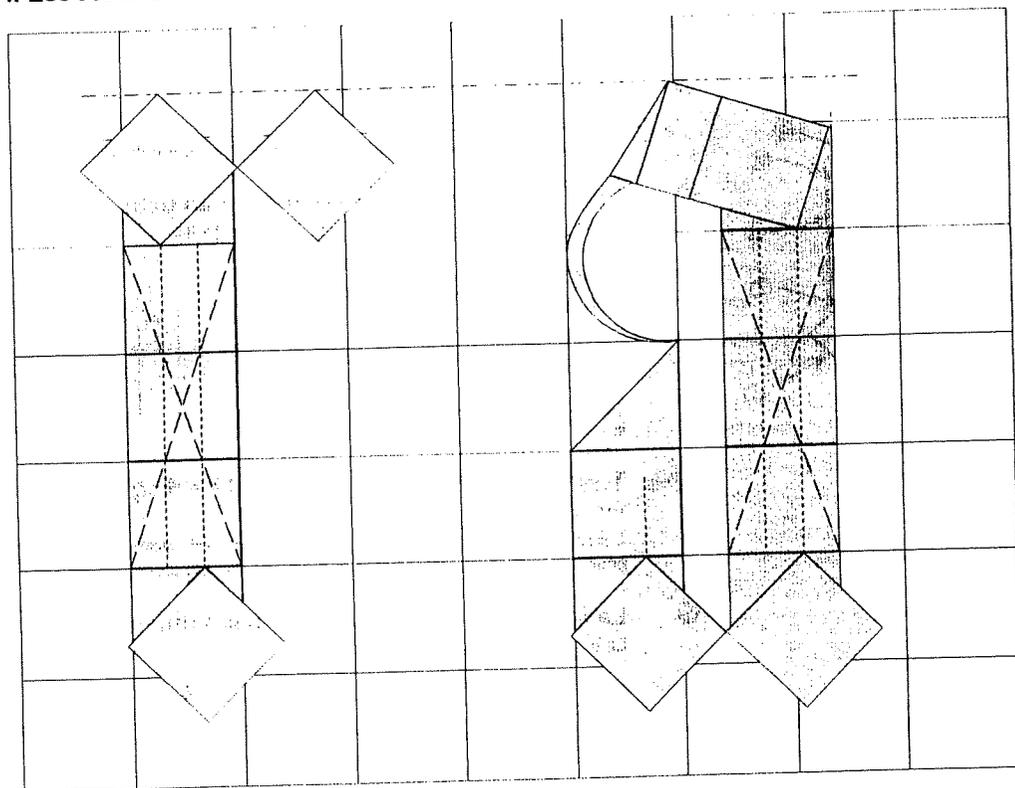


- ① **Tracé du deuxième carré en pointe**
Attention, le quadrillage n'aide plus beaucoup.
- ② **Le sommet du deuxième carré est au 1/3 en partant de la droite.**
Cela permet de placer les angles inférieurs du rectangle de droite.
- ③ **Parallèle à une droite passant par un point.**
Cela permet de tracer les côtés du rectangle de droite.
- ④ **Tracé du rectangle oblique.**
La hauteur totale de la lettre est donnée par le r construit à côté (droite D). La longueur fait un carreau et demi ce qui fixe la diagonale [AB]. Tracé du rectangle connaissant sa diagonale et ses deux côtés
- ④ bis **Tracé d'un rectangle connaissant sa diagonale et un côté.**
Les sommets cherchés sont à l'intersection du cercle ayant la diagonale pour diamètre et du cercle ayant la longueur du côté connu pour rayon.
- ⑤ **La fin de la construction n'est pas unique.**
Le biais est à la fantaisie de chacun.



- ⑦ **Calcul du « trou ».**
On définit θ par $\theta_2 = \theta - \theta_1$
 $x = \sin \theta_2$
 $\sin \theta_2 = \sin \theta \cos \theta_1 - \cos \theta \sin \theta_1$
 $\sin \theta - 3/2d \cos \theta - 1/d \cos \theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{d} \sin \theta_1 = \frac{1}{d} \sqrt{d^2 - 2}$
 $d^2 = 13/4$
 $x \approx 0,308$ unité et le "trou" mesure environ $0,333 - 0,308 = 0,025$ soit ici environ 0,5 mm.

4. Les résultats attendus :



4. Activité : la police romaine de Dürer

Dans les *Instructions pour la mesure à la règle et au compas...* Dürer décrit un alphabet de majuscules romaines, lettres imitées des inscriptions antiques et beaucoup utilisées par les humanistes de la renaissance.

Première partie

Lire le texte sur la lettre D et la construire à la règle et au compas (sans instrument de mesure) sur la grille fournie en annexe.

Deuxième partie

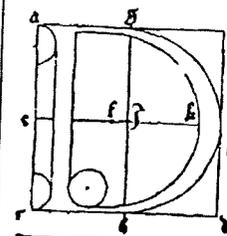
En n'oubliant pas le premier alinéa précédent sur la largeur des traits, lire le texte sur la lettre X - l'inconnue ? - et la construire dans la grille correspondante.

Lettre D

En ce qui concerne le premier alphabet, romain, construis pour chacune des lettres un carré qui la contiendra. Lorsque tu y traceras la lettre, prends pour la largeur du trait plus épais un dixième de côté du carré et pour le trait plus fin un tiers du trait épais. Penses-y pour toutes les lettres de l'a, b, c.

...

Construis la lettre *d* comme suit. Divise son carré *abcd* par une verticale *gh* et une horizontale *ef* en quatre petits carrés et place un *i* au point où elles se coupent. Trace le premier trait épais de la lettre en l'abaissant de la ligne *ab* sur la ligne *cd*, à une distance de *ac* égale à l'épaisseur du trait. Incurve le trait à ses extrémités supérieure et inférieure en prolongeant les empattements jusqu'aux sommets *a* et *c*, comme je l'ai indiqué ci-dessus pour la lettre *b**. Tu t'en serviras pour tous les traits droits des lettres suivantes. Ensuite, en partant de la verticale, trace les deux fines barres qui serviront d'amorce à la panse de la lettre, sous la ligne *ab* et sur *cd* jusqu'à la verticale *gh*. Ensuite, lie ensemble *g*, *i* et *h* à l'aide d'un compas. Ensuite, marque, sur la ligne *ef*, la plus grande largeur de trait en plaçant la lettre *k* un peu à gauche de *i*. Ensuite, ferme le compas d'une largeur de trait¹, pose une de ses pointes sur le point *k* et l'autre sur la ligne *ef* en un point² marqué *l*. Laisse une pointe immobile en *l* et de l'autre décris un arc circulaire partant de *k* et rejoignant en haut et en bas les deux fines barres horizontales de la lettre. L'angle intérieur du haut restera anguleux, mais incurve celui d'en bas suivant un arc de cercle, de la taille de celui utilisé pour arquer l'avant de la lettre à ses extrémités supérieure et inférieure.



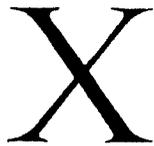
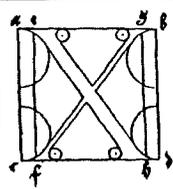
* À la lettre *b* Dürer indique :

Mais incurve les empattements de pied et de tête du fût de la lettre selon un cercle dont le demi-diamètre soit égal à l'épaisseur du trait.

A. Dürer. *Instructions pour la mesure à la règle et au compas...* 1525.
Trad. J. Peiffer, Seuil

1. Il faut comprendre : d'une largeur de trait « plus fin »
2. Autrement dit : $kl = if - \frac{1}{3}$ du trait épais soit ici $kl = 5$ carreaux - $\frac{1}{3}$ carreau.

Lettre X



Forme la lettre *x* comme suit. Trace deux verticales *ef* et *gh* à un dixième de *ab* à droite de *ac* et à gauche de *bd*. Ensuite, construis les deux obliques¹ croisées de la lettre, le trait épais² touchant en haut à gauche le point *e* et en bas à droite le point *h*, mais conçois le trait plus fin² tel qu'il touche en haut à droite le point *g* et en bas à gauche *f*. Incurve alors les extrémités supérieures et inférieures des traits en sorte que les empattements aillent jusqu'aux quatre extrémités *abcd*. Prends pour le demi-diamètre du cercle plus grand un cinquième de *ab* et arque selon ce cercle les quatre angles plus ouverts, mais pour le petit cercle prends un demi-diamètre égal aux deux tiers de la grande largeur de trait.

A. Dürer. Instructions pour la mesure à la règle et au compas...1525. Trad. J. Peiffer, Seuil

1. Bien que le texte de Dürer ne soit pas explicite, on peut penser que la largeur du trait épais² est mesurée comme habituellement, c'est-à-dire perpendiculairement au côté, suivant (*xy*) et non (*zt*). Il s'agit donc ici de construire les barres obliques du X à partir de leurs diagonales *eh* et *gf*.

2. Voir le 1^{er} alinéa de la construction du D : « En ce qui concerne... »



a

b

c

d

Le corrigé

1. Fiche technique

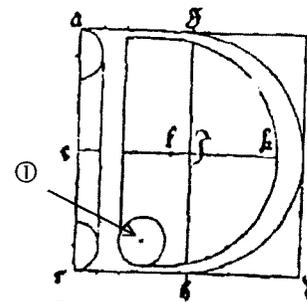
Niveau : seconde de lycée général ou professionnel.
Thème : constructions géométriques.
Durée : 2h.
Connaissances nécessaires : Géométrie de troisième.
Objectif : maîtrise des constructions géométriques.

2. Mode d'emploi

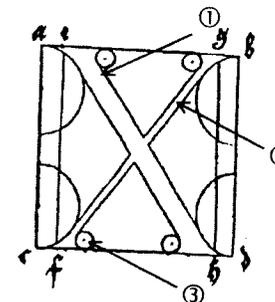
Attention au notations de Dürer : il note *abcd* un carré que nous appellerions *abcd*. La construction du D permet de s'initier au texte de Dürer. On peut demander aux élèves de la faire chez eux. La construction du X, qui pose plus de problèmes sera faite en classe.

3. Les problèmes traités et quelques éléments de réponses.

Le tracé du D



Le tracé du X

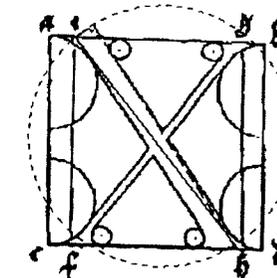


Division d'un segment en 3 segments égaux.
On peut procéder comme précédemment pour la police textura, à l'aide du théorème de Thalès.



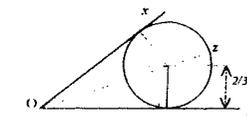
① Tracer un cercle de rayon donné tangent à deux droites perpendiculaires

① ② Tracer un rectangle connaissant sa diagonale et son petit côté.



Les sommets cherchés des rectangles qui constituent les obliques sont à l'intersection du cercle ayant la diagonale pour diamètre et du cercle ayant la longueur du côté connu pour rayon.

③ Tracer un cercle de rayon donné tangent à deux droites données



Oz est la bissectrice de xOy

Les grands cercles ne sont pas exactement tangents aux jambages obliques . (on peut vérifier que l'épaisseur des jambages devrait être de 0,4 au lieu de 1/3 ou 1).

5. Du plomb à l'ordinateur, de Dürer à Bézier

Quatre étapes

Milieu du XV^e : Gutenberg révolutionne le processus de production de l'écrit.

Du manuscrit des moines copistes on passe à la production d'imprimés en masse. D'une bibliothèque constituée par une douzaine de volumes on passe aux milliers de copies des *Thèses* de Luther qui contribuèrent au succès de la Réforme. Les imprimeurs se multiplient partout en Europe. Pourtant le processus de production fixé par Gutenberg évolue peu jusqu'au milieu du XIX^e. Et même si les formes des caractères se diversifient, on les dessine toujours comme Dürer à la règle et au compas.

Avant le XV ^e		TRAJAN CHARLEMAGNE	Uncials
XV ^e	Gothiques Fraktur	Cloister Black	Fette Fraktur
XV ^e -XVI ^e	Humanes	Centaur & italic <small>Jenson</small>	Bembo & italic <small>Bembo 1499</small>
XVII ^e	Garaldes	Garamond & italic <small>Garamond 1542</small>	
XVIII ^e	Réales	Fournier & italic <small>Grandjean 1700... Fournier 1750</small>	Baskerville & italic <small>Baskerville 1757</small>
fin XVIII ^e début XIX ^e	Didones	Bodoni & Bold & Italic	Walbaum & Bold <small>Didot</small>
XIX ^e	Sans Serifs	Helvetica	Gill Sans & Italic <small>Eric Gill 1928</small>

Copies numériques de quelques fontes historiques

Fin du XIX^e : mécanisation et augmentation de la vitesse.

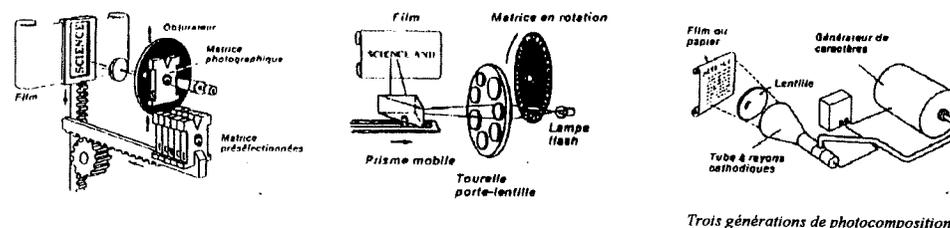
Trois éléments principaux y contribuent : l'apparition des presses rotatives (1868), l'invention de la *Linotype* en 1885, enfin le *pantographe de Benton* en 1885. La Linotype est une machine à composer : à l'aide d'un clavier - comparable à celui d'une machine à écrire inventée en 1873 par Remington - on choisit les caractères qui doivent composer une ligne et celle-ci est ensuite moulée d'un coup. Le façonnage des poinçons était un travail long : chaque caractère dans chaque corps demandait un dessin particulier (soit couramment 800 dessins différents). Linn Boyd Benton par un système de pantographe permet à partir d'un seul dessin d'obtenir tous les poinçons voulus et même de faire de l'ajustement optique (agrandissement des creux dans les petits corps, variation des pleins et déliés, de la chasse, des approches).



1946 : photocomposition et disparition progressive du caractère en plomb.

La photocomposition est une nouvelle technique qui remplace le plomb par des films photographiques pour un nouveau procédé d'impression à plat fondé sur la lithographie : l'offset (elle-même apparue en 1904). Un faisceau de lumière passe à travers un disque où sont découpées les images des lettres et va impressionner un film photographique. Un système de zoom permet d'obtenir les différents corps. La fabrication des lettres change : elles sont désormais photographiées puis gravées

sur les disques. Leur dessin est ajusté pour tenir compte des problèmes de distorsion, de diffusion de la lumière...



Trois générations de photocomposition

1970 : numérisation des caractères et fontes numériques.

La fin des années 60 marque la convergence de trois procédés d'impression (et aussi trois traditions) : celle du **plomb** et de la photocomposition pour l'imprimerie proprement dite, celle des **machines à écrire** et du travail de bureau, et celle de l'**informatique**, des imprimantes d'ordinateurs qui depuis les années 50 sortaient des documents comptables. Le processus de fusion de ces trois techniques se poursuit encore aujourd'hui.

Il se marque en particulier par le passage de caractères imprimés sous la forme d'une image globale (plomb et photocomposition de première et deuxième génération) à des caractères numérisés, c'est-à-dire décrits dans un premier temps par une matrice de points (bitmap), dans un second temps par leur contour - des **courbes de Bézier** - que l'on remplit après coup.

Bitmaps et courbes de Bézier

Tous les organes de sortie, les imprimantes (thermiques, à jet d'encre, laser, photocomposeuses modernes, flasheuses, copieurs) comme les écrans, représentent les caractères sous la forme de bitmaps.

La page ou l'écran est représenté par une grille de points. La dimension d'un point (ou pixel) dépend de la définition (résolution) du périphérique de sortie qui est mesurée en point par pouce (ppp ou dpi). La grille d'un écran comprend en général 72 dpi, celle d'une imprimante laser 300 dpi et celle d'une photocomposeuse 2400 dpi (soit un pixel carré de 0,34, 0,08 ou 0,01 mm de côté). Un bitmap est une matrice de ces points, les uns noircis, les autres non.

Une première technique, utilisée jusqu'à la fin des années 80, dessine les caractères directement sous la forme de bitmaps. Un fichier binaire, sa traduction numérique, ne comprenant que des 0 et des 1 est transmis à l'imprimante qui imprime un point quand elle reçoit un 1 et qui n'imprime rien quand elle reçoit un zéro.

Cette technique présente deux inconvénients majeurs. Les fichiers sont très gros si la définition est grande et d'autre part les bitmaps se prêtent mal aux transformations géométriques : homothétie pour les changements de corps, rotations... et présentent dans ces cas de désagréables effets d'escalier (aliasing), de remplissage des creux...

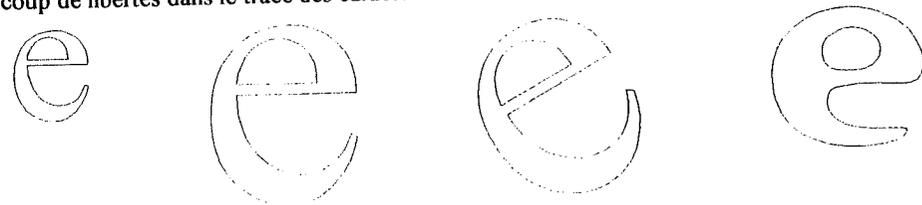


Bitmaps : un même « e » en corps 10, agrandi environ 12 fois dans 3 résolutions différentes 300, 1200, 4800 dpi

Aujourd'hui les polices de caractères sont de véritables programmes informatiques qui comprennent deux parties :

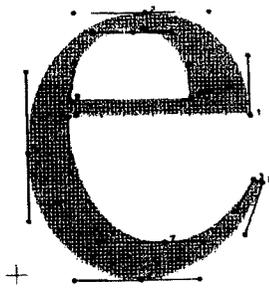
1. une description géométrique du contour du caractère.
2. des algorithmes qui calculent, au dernier moment et suivant le périphérique de sortie, le bitmap qui sera imprimé en tenant compte de corrections diverses (adaptation à la grille, ajustements optiques pour les petits corps par exemple).

Les avantages sont importants : la mise à l'échelle, les rotations, déformations diverses, ne sont qu'affaire de mathématiques : c'est plus rapide, cela ne tient que peu de place en mémoire et permet beaucoup de libertés dans le tracé des caractères...



Pour le tracé des contours, on a d'abord essayé de vectoriser les cercles et droites qui constituent les contours des caractères. Aujourd'hui, on les trace le plus souvent à l'aide de courbes spéciales : les courbes de Bézier.

Une courbe de Bézier est définie par des points de contrôle. Lorsque l'on indique les coordonnées de ces points à un programme spécifique, il peut tracer la courbe. Une lettre est formée par un assemblage de courbes de Bézier et de segments de droites. Les raccordements lissés sont assurés par l'alignement des tangentes.



402 276 moveto	% départ point 1
399 380 334 458 226 458 curveto	% courbe de 1 à 2
102 458 22 356 22 214 curveto	% courbe de 2 à 3
22 95 97 -10 212 -10 curveto	% courbe de 3 à 4
312 -10 390 68 421 158 curveto	% courbe de 4 à 5
405 164 lineto	% droite de 5 à 6
374 109 319 57 253 57 curveto	% courbe de 6 à 7
140 57 92 181 91 276 curveto	% fin contour extérieur
closepath	% départ au point 9
94 308 moveto	% courbe de 9 à 10
103 372 134 424 204 423 curveto	% courbe de 10 à 11
270 423 297 366 300 308 curveto	% fin contour intérieur
closepath) def	%

Un « e » défini par des points de contrôle et les tangentes et le programme PostScript correspondant.

PostScript et True Type

Ce sont les deux formats principaux de polices dites vectorielles. PostScript (1985) est un langage informatique particulier, dit « de description de page » PostScript Type 1 en est sa version dédiée aux caractères d'imprimerie. True Type est plus récent (1990). Tous deux tracent les contours des lettres à l'aide de courbes de Bézier, à 4 points de contrôle pour PostScript, à 3 points pour True Type. Ils se différencient sur la manière de traduire ces contours en bitmaps (*hints*). Si une police True Type est un programme complet qui comprend à la fois les contours et les algorithmes de *hinting*, une police PostScript confie cette dernière tâche à l'imprimante qui doit donc être spécifique et intégrer ce langage.

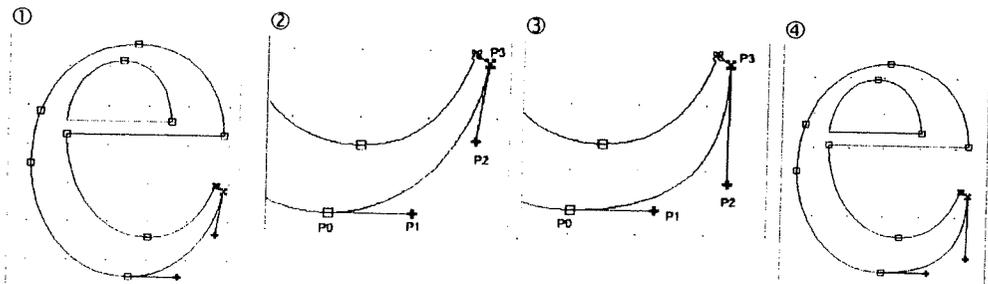
Dürer et Bézier

On peut dire que le dessin du contour des caractères par des procédures mathématisées est au bitmap ce que sont les procédures mathématiques définies par Dürer aux procédés antérieurs du cache ou du pochoir : d'un côté une définition mathématique reproductible et modifiable, de l'autre une image globale aveugle qui se prête mal aux modifications.

En typographie numérique, les courbes de Bézier sont utilisées de deux manières :

Au moment de la conception de la lettre, en plaçant quelques points de contrôle sur le dessin déjà tracé par le créateur de la lettre, on va pouvoir obtenir des courbes de Bézier qui la décriront approximativement. Le contour définitif est obtenu en modifiant directement les courbes de Bézier.

Une fois la lettre entièrement décrite par des courbes de Bézier ce sont leurs propriétés, en particulier les coordonnées des points de contrôles qui sont utilisées pour modifier les lettres : changement d'échelle, rotation, ajustement optique...



① Lorsque l'on affiche une lettre sur un écran d'ordinateur, on peut avec un logiciel de dessin « vectoriel » obtenir le contour de la lettre. Il est formé par la juxtaposition de plusieurs courbes de Bézier. ② On en distingue ici une particulière déterminée par les points de contrôle P0, P1, P2, P3. ③ En modifiant simplement un des points de contrôle, ici P2, on peut modifier de manière subtile le tracé de la lettre ④.

Pierre Bézier

Ces courbes doivent leur nom à Pierre Bézier, ingénieur chez Renault dans les années 60-70.

A cette époque, aussi bien dans l'industrie automobile que dans l'aéronautique on cherche de nouvelles façons de représenter, de mémoriser des formes techniques diverses telles que celles des coques de bateaux, des hélices ou des carlingues d'avion, des carrosseries d'automobiles. On cherche aussi un outil permettant de modifier facilement leur dessin, voire même de créer de nouvelles formes répondant, par exemple, à des critères esthétiques.

Jusqu'alors ces opérations étaient, soit difficiles à mettre en œuvre à partir de cercles et de droites, soit très imprécises ou peu reproductibles. Les carrosseries de voiture étaient faites à partir de maquettes en bois à l'échelle 1/1, les lignes tendues que l'on trouve dans les fuselages ou les ailes d'avion étaient tracées à l'aide de lattes en bois (en anglais « splines ») guidées par des pions enchâssés dans le sol de la salle de traçage. Il y avait donc des problèmes de conservation des modèles, de déformation des maquettes avec le temps...



Pierre Bézier

Les ingénieurs, comme Pierre Bézier, et les mathématiciens, comme Paul de Casteljaou qui travaille chez Citroën sur le même genre de problèmes, cherchent à donner des définitions numériques à des courbes quelconques, susceptibles d'être transmises aux nouvelles machines-outils à commandes numériques.

« Mon objectif, dit Pierre Bézier, est ... de donner une définition numérique d'une courbe tracée à la main afin de fournir à la commande numérique les chiffres dont elle avait besoin »

Les premiers résultats seront obtenus par Pierre Bézier en 1962. Plusieurs types de modèles existent maintenant à côté des courbes de Bézier, en particulier les B-splines et les NURBS, plus récentes.

Aujourd'hui, la plupart des formes des objets techniques et la quasi totalité des courbes dessinées sur ordinateur sont des courbes de Bézier, des B-splines ou des NURBS. Le dernier modèle de voiture Citroën - nom de code N6, la Xsara - est entièrement numérisé. Cela permet, par exemple, d'économiser des voitures en simulant des accidents virtuels. Cela permet encore de programmer de machines-outils qui usinent toutes seules les formes des presses à emboutir. Toutes seules ! Enfin presque, car la finition qui permet d'obtenir une surface très lisse (continuité C^2) est toujours réalisée au papier abrasif et ... à la main au prix de centaines d'heures de travail très qualifié !

6. Activité : courbes de Bézier

I - Équation d'une courbe de Bézier à 3 points de contrôle.

Première approche

Placer un point sur un segment suivant un rapport donné.

Soit $[AB]$ un segment, $t \in [0, 1]$ un nombre réel et O un point quelconque du plan.

On veut placer un point M entre A et B tel que $AM = t AB$ et calculer \vec{OM} en fonction de \vec{OA} et \vec{OB} .

a) Exemple : $t = \frac{1}{4}$

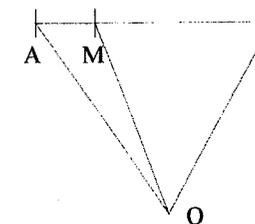
Placer un point M entre A et B tel que $AM = \frac{1}{4} AB$. Calculer \vec{OM} en fonction de \vec{OA} et \vec{OB}

$$\vec{AM} = \frac{1}{4} \vec{AB}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \quad \text{soit} \quad \vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{4} \vec{AB}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{4} (\vec{AO} + \vec{OB}) \quad \text{soit} \quad \vec{OM} = \vec{OA} - \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{1}{4} \vec{OB}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \frac{3}{4} \vec{OA} + \frac{1}{4} \vec{OB}}$$



b) Sur le segment $[AB]$ ci-dessous, placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $t = 0, t = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}, t = 1$.



c) Cas général : montrer que $\boxed{\vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}$

d) Conclusion :

Étant donné 2 points A et B , et un nombre réel $t \in [0, 1]$, il est possible de placer un point M sur $[AB]$, entre A et B , tel que $AM = t AB$.

Quand t varie de 0 à 1, M décrit le segment $[AB]$.

$\vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ est une équation paramétrique, de paramètre t , du segment $[AB]$

Courbe de Bézier pour 3 points non alignés.

a) Construction point par point :

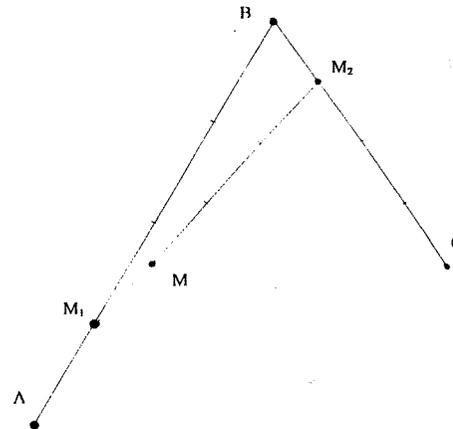
En utilisant la procédure précédente avec $t = \frac{1}{4}$ pour les segments $[AB]$, $[BC]$, $[M_1 M_2]$ on a obtenu le point M.

Placer de même M' avec $t = \frac{1}{2}$:

Placer de même M'' avec $t = \frac{3}{4}$.

Où se trouve le point M si $t = 0$, si $t = 1$?

Tracer une courbe passant par A, M, M', M'', C.



b) Conclusion :

Quand t varie de 0 à 1, M décrit une courbe qui passe par les points A et C et qui est appelée courbe de Bézier.

c) Équation de la courbe

Calculer \vec{OM} en fonction de \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} et de t .

$$\vec{OM}_1 = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$$

$$\vec{OM}_2 = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC}$$

$$\vec{OM} = (1-t)\vec{OM}_1 + t\vec{OM}_2$$

d) Conclusion :

Étant donné 3 points A, B, C et un réel $t \in [0, 1]$, l'ensemble des points M défini par

$$\vec{OM} = (1-t)^2 \vec{OA} + 2t(1-t)\vec{OB} + t^2 \vec{OC}$$

est une courbe de Bézier de degré 2 définie par ses 3 points de contrôle A, B et C.

e) Remarques

- La courbe passe par le premier point de contrôle A et par le dernier C mais pas par le deuxième B.
- Elle est tangente à $[AB]$ en A, à $[BC]$ en C.
- Si $t = \frac{1}{2}$ M est le milieu de la médiane (BM) de $[AC]$.
- Cette courbe est un arc de parabole
- Coordonnées : on choisit un repère et on obtient A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) , C (x_3, y_3) .

Si M (x, y) on peut écrire :

$$\text{pour } t \in [0, 1] \quad \begin{cases} x(t) = (1-t)^2 x_1 + 2t(1-t)x_2 + t^2 x_3 \\ y(t) = (1-t)^2 y_1 + 2t(1-t)y_2 + t^2 y_3 \end{cases}$$

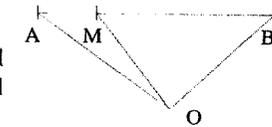
Deuxième approche

Définition 1

1. Étant donné 2 points A et B, et un nombre réel $t \in [0, 1]$, il est possible de placer un point M sur $[AB]$, entre A et B, tel que $AM = t AB$.

Quand t varie de 0 à 1, M décrit le segment $[AB]$.

$\vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ est une équation paramétrique, de paramètre t , du segment $[AB]$



En procédant ainsi, on définit M_1 sur $[AB]$, M_2 sur $[BC]$ puis M sur $[M_1 M_2]$ et alors :

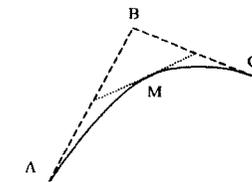
2. Étant donné 3 points A, B, C et un réel $t \in [0, 1]$, l'ensemble des points M défini par

$$\vec{OM} = (1-t)^2 \vec{OA} + 2t(1-t)\vec{OB} + t^2 \vec{OC}$$

est une courbe de Bézier $\mathcal{B}(A, B, C)$ de degré 2 définie par ses 3 points de contrôle A, B et C.

Autrement dit en remarquant que :

$$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = [(1-t) + t]^2 = 1$$



Définition 2

Une courbe Bézier à 3 points de contrôle A, B, C $\mathcal{B}(A, B, C)$ est le lieu du barycentre M du système des points A, B, C pondérés par $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 pour $t \in [0, 1]$

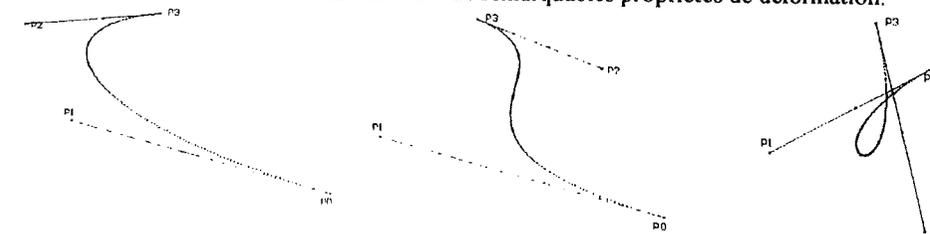
et ainsi $\vec{OM} = (1-t)^2 \vec{OA} + 2t(1-t)\vec{OB} + t^2 \vec{OC}$

Les courbes de Bézier à 4 points de contrôle

Ce sont des courbes de degré 3 (cubiques) définies par

$$\vec{OM} = (1-t)^3 \vec{OA} + 3t(1-t)^2 \vec{OB} + 3t^2(1-t)\vec{OC} + t^3 \vec{OD}$$

Ces courbes sont très utilisées car elles ont de remarquables propriétés de déformation.



Courbe de Bézier à 4 points de contrôle. Position initiale

On déplace les points P_0 et P_2 par rapport à la position initiale.

Les courbes de Bézier à n + 1 points de contrôle.

Ce sont des courbes de degré n. Elles sont définies par $\vec{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \vec{OP}_k(t)$

où les P_k sont les n + 1 points de contrôle ; $B_{n,k}(t)$ sont des polynômes de Bernstein

$$B_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \text{ . Comme précédemment } \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) = [(1-t) + t]^n = 1$$

Elles sont peu utilisées quand $n > 3$ car la modification d'un point de contrôle modifie globalement toute la courbe. Il devient alors difficile de prévoir sa déformation et on préfère utiliser d'autres modèles comme les B.Splines ou les NURBS.

II - Numérisation d'une courbe quelconque

On a défini précédemment ce qu'est une courbe de Bézier à 3 points de contrôle. Une telle courbe est donc un arc de parabole.

On va utiliser ces connaissances pour numériser une courbe quelconque à l'aide d'un logiciel permettant de tracer des courbes paramétrées.

Supposons que nous voulions créer une nouvelle police de caractères. On dessine « à la main » des esquisses des différentes lettres que l'on va ensuite numériser.

1. La numérisation « au sens de Bézier »

Au lieu de conserver dans un fichier informatique les caractéristiques de tous les points d'une courbe, comme le fait une numérisation « bitmap », on choisit quelques points - ici 3 par arc de courbe - qui vont permettre de tracer une approximation de la courbe initiale. On ne conserve dans le fichier des données que les caractéristiques de ces 3 points de contrôle et on confie à un logiciel le soin de calculer, à l'occasion, la position de tous les autres points suivant les équations qui définissent la courbe.

Le fait que l'on n'obtienne qu'une approximation n'est, en général, pas gênant car le bon résultat est celui qui sera travaillée après numérisation. Toutefois, certaines figures géométriques ne sont pas numérisables exactement ; ainsi, il n'existe pas de courbe de Bézier - ou de juxtaposition de courbes de Bézier - qui permette de dessiner exactement un cercle.

2. La procédure de numérisation :

1. Découper la courbe en arcs ayant grossièrement la forme d'arcs de paraboles.

Chaque arc est défini par 3 points : ses deux extrémités et le point de concours des tangentes à l'arc aux extrémités. De plus le dernier point d'un arc est le premier de l'arc suivant.

Exemple : on a ci-contre 2 arcs ($A_1 A_2 A_3$) et ($A_3 A_4 A_5$)

2. Après le choix d'un repère, déterminer les coordonnées des points de contrôles $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$...

3. Reporter dans le logiciel les équations paramétriques des différents arcs numérisés et faire tracer la courbe correspondante.

Exemple : Pour le premier arc $A_1 A_2 A_3$

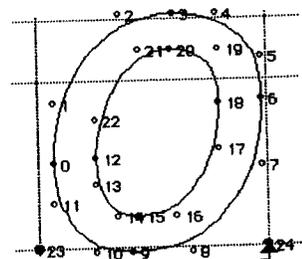
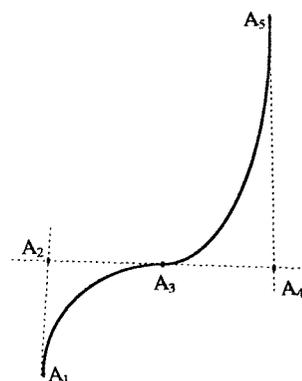
$$x(t) = (1-t)^2 x_1 + 2t(1-t)x_2 + t^2 x_3; \quad y(t) = (1-t)^2 y_1 + 2t(1-t)y_2 + t^2 y_3 \quad \text{pour } t \in [0, 1]$$

Et de même pour les autres arcs définis.

4. Remarque

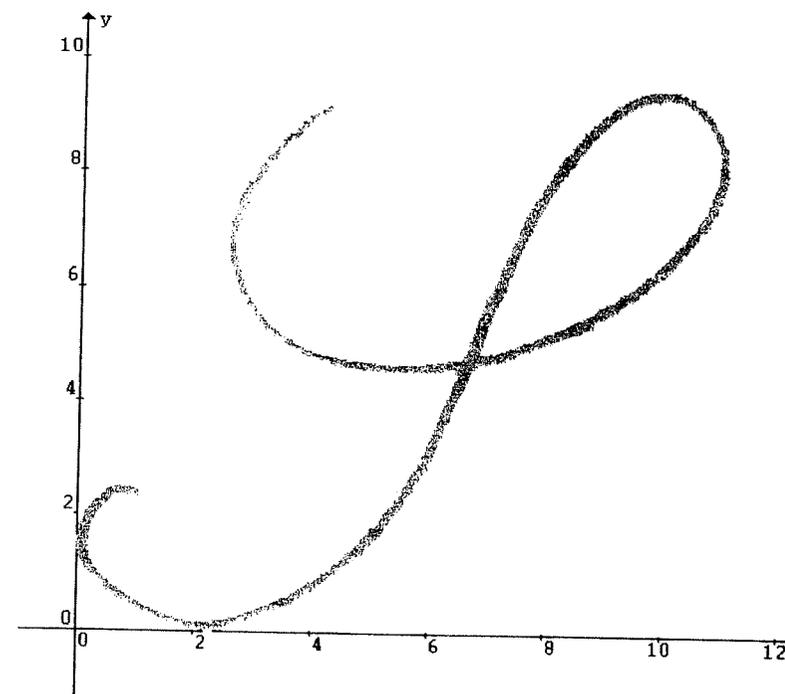
Pratiquement, Microsoft par exemple, préconise de prendre les points de contrôle sur les tangentes horizontales ou verticales. De plus, si la courbe présente des points d'inflexion, il vaut mieux les choisir. Enfin si l'on veut un bon raccordement entre les différentes courbes il faut aligner les tangentes.

Numérisation d'un O majuscule italique True Type Microsoft par des courbes à 4 points de contrôle.



3. Numériser - au sens de Bézier - ce S majuscule en écriture manuscrite anglaise.

1. Placer les points de contrôle.
2. Repérer leurs coordonnées.
3. Les entrer dans le logiciel.
4. Imprimer la courbe numérisée.



Le corrigé

1. Fiche technique

Niveau : première S de lycée. Certaines sections de bac professionnel ou de BTS. Cette activité a été expérimentée dans les BTS de l'industrie graphique.

Thème : courbes de Bézier.

Durée : 1h pour la première partie, environ 1h pour la deuxième.

Connaissances nécessaires : vecteurs ou barycentres et courbes paramétrées.

Objectif : maniement des vecteurs et élargissement de la culture scientifique des élèves.

2. Mode d'emploi

Cette activité comporte deux parties :

1. Travail théorique sur les vecteurs ou les barycentres pour définir les courbes de Bézier. (env. 1h)

Cette partie est abordable en 1S (barycentres et courbes paramétrées). Elle l'est aussi en Bac Pro (vecteurs), si l'on se contente de l'activité pour travailler sur les courbes paramétrées.

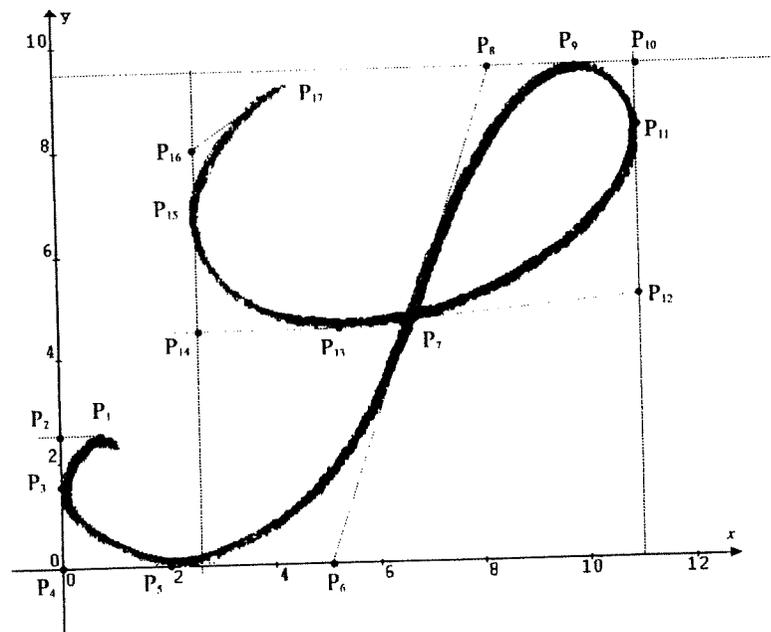
Cette première partie peut-être traitée plus ou moins rapidement suivant le niveau de élèves.

2. La numérisation d'une courbe quelconque. (env. 1 h)

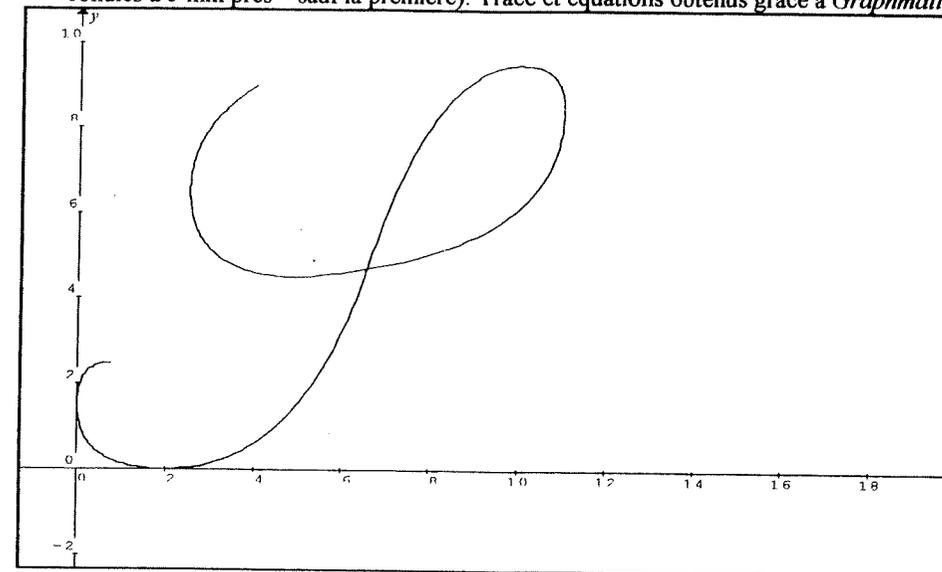
Il faut expliquer ou faire lire les points 1 et 2 et donner le point 3 à faire aux élèves. Il faut disposer d'un ordinateur avec un logiciel adapté au traçage de courbes paramétrées par exemple le « shareware » *Graphmatica*.

3. Le résultat en 3 dessins :

1. Le placement des points de contrôle après avoir tracé des tangentes et en restant dans un rectangle circonscrit (17 points pour 8 courbes à 3 points de contrôle).

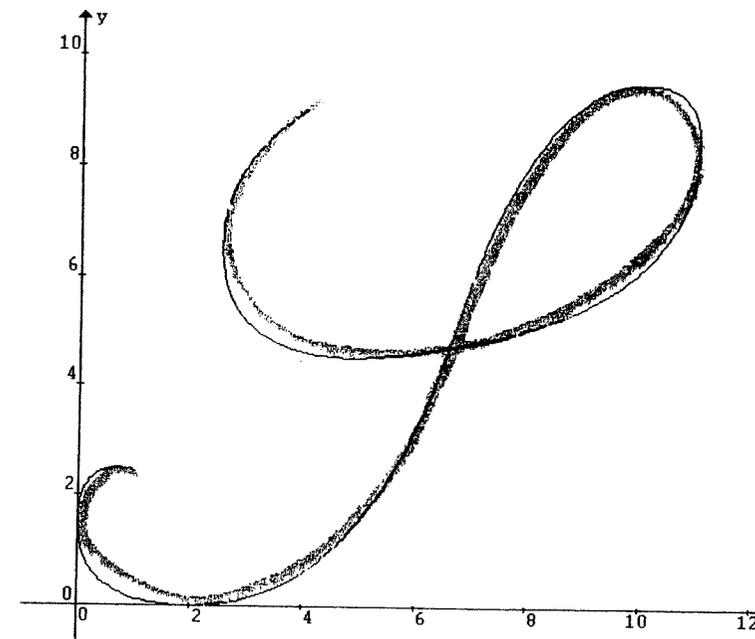


2. Le résultat de la numérisation et les équations correspondantes (les coordonnées sont arrondies à 5 mm près – sauf la première). Tracé et équations obtenus grâce à *Graphmatica*.



$$\begin{aligned}
 x &= 0.75t^2 + 0.2t(1-t) + 0(1-t)^2; y = 2.5t^2 + 2.5*2t(1-t) + 1.5(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 0t^2 + 0.2t(1-t) + 2(1-t)^2; y = 1.5t^2 + 0.2t(1-t) + 0(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 2t^2 + 5.2t(1-t) + 6.5(1-t)^2; y = 0t^2 + 0.2t(1-t) + 4.5(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 5t^2 + 2.5*2t(1-t) + 2.5(1-t)^2; y = 4.5t^2 + 4.5*2t(1-t) + 6.5(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 2.5t^2 + 2.5*2t(1-t) + 4(1-t)^2; y = 6.5t^2 + 8*2t(1-t) + 9(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 6.5t^2 + 8*2t(1-t) + 10(1-t)^2; y = 4.5t^2 + 9.5*2t(1-t) + 9.5(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 11t^2 + 11*2t(1-t) + 5(1-t)^2; y = 8.5t^2 + 5*2t(1-t) + 4.5(1-t)^2 \quad \{0,1\} \\
 x &= 10t^2 + 11*2t(1-t) + 11(1-t)^2; y = 9.5t^2 + 9.5*2t(1-t) + 8.5(1-t)^2 \quad \{0,1\}
 \end{aligned}$$

3. Après ajustement des échelles on peut apprécier la qualité de la numérisation.



7. Bibliographie

Albrecht Dürer, *Géométrie*, édition Jeanne Peiffer, Seuil 1995. Remarquable édition du texte de Dürer.

Jacques André, *Création de fontes en typographie numérique*. IRISA + IFSIC Rennes 1993.

Jacques André, article *Caractères numériques : introduction* dans les Cahiers GUTenberg n°26 mai 1997.

Adolf Wild, article *La typographie de la bible de Gutenberg* dans les Cahiers GUTenberg n°22 septembre 1992.

Luca Pacioli, *Divine Proportion*, Librairie du Compagnonnage 1988. Superbe édition du texte original augmenté d'une traduction.

E. Giusti et C. Mccagni, *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, Giunti 1994.

Pierre Bézier, interview par Jean Cassagne dans Sciences et Vie Micro n° 69, septembre 1992.

Jean-Pierre Pouget, *Modèle de Bézier et modèle B. Spline*. Repères-Irem n°14 et 15, janvier-avril 1994.

Fernand Baudin, article «Le caractère» dans *Métiers graphiques*, AMG Paris 1969.

Lucien Febvre et Henri-Jean Martin, *L'apparition du livre*, Albin Michel 1958-1971.

K. Brookfield, *L'écriture et le livre*, Les yeux de la découverte Gallimard 1993.

Naissance d'un caractère le Grandjean, éditions Promodis 1985.

JL. Dusong et F. Siegwart, *Typographie du plomb au numérique*, Dessain et Tolra 1996.

Fanch Le Hénaff, *Skritur*, Cloître Éditeurs.

Jacques Le Louette, travaux non publiés sur l'imprimerie en Bretagne.

Articles de l'Encyclopedia universalis, documents Internet, manuels de mathématiques, travaux divers...

Les documents de cette lettre sont reproduits des livres précédents.

IV

MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE