Fin de la Table des Matières.

TRAIT

Le concept de rang dans les systèmes d'équations linéaires

Jean-Luc DORIER

L'algèbre linéaire et la théorie des espaces vectoriels trouvent leurs origines dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. C'est dans ce cadre que se sont constitués les concepts élémentaires tels que l'indépendance linéaire et le rang. La géométrie et le calcul vectoriel ont également eu un rôle moteur décisif, mais dans ce cadre c'est le calcul par les coordonnées qui a été le plus productif, ce qui ramène l'étude des problèmes linéaires à des équations numériques linéaires (cf. Dorier 1997, 1ère partie).

Il a existé des techniques d'élimination ou de substitution pour résoudre des systèmes d'équations linéaires dès l'antiquité (dans les civilisations orientales ou occidentales). Cependant jusqu'au milieu du 18e siècle, celles-ci restèrent à l'état d'outil, ce qui intéressait les mathématiciens de l'époque était avant tout de résoudre des équations et malgré une volonté de classification de ces équations, celles-ci n'étaient pas prises pour un objet d'étude en soi indépendamment de leur résolution.

Une notion aussi élémentaire que celle de dépendance linéaire ne s'est pas vraiment dégagée avant la fin du 19e siècle. On la verra cependant au centre d'un texte d'Euler datant de 1750, mais sous un aspect bien particulier lié au cadre des équations. Euler ne traite que d'exemples et n'a pas de notations à double indice pour désigner des coefficients de façon littérale dans l'écriture d'un système. Une telle notation introduite par Cramer la même année sera à la source du développement de la théorie des déterminants. Cette théorie dominera l'étude des systèmes d'équations linéaires jusqu'au début du 20e siècle (on l'aura alors généralisée à des systèmes en une infinité d'équations et d'inconnues dans ce qui constitue la préhistoire de l'analyse fonctionnelle, cf. (Dorier 1996)).

L'émergence du concept de rang a demandé plus d'un siècle et demi de maturation. Il a fallu dépasser le stade de la recherche de méthodes de résolution pour déboucher sur une étude plus qualitative des systèmes linéaires. De plus, la dualité est au cœur de l'émergence du concept de rang, non pas une dualité théorisée, comme elle le sera par la suite dans la théorie des espaces vectoriels, mais une dualité qui s'autorise déjà à considérer n-uplets et équations comme des objets identiques quant à la linéarité. C'est cette longue maturation que nous avons voulu esquisser dans cet atelier, à travers la présentation essentiellement de trois textes :

- Euler (1750) : la dépendance des équations et une première approche intuitive de la notion de rang.

- Rouché (1880)[1] (introduit par les textes de Leibniz (1693) et de Cramer (1750)) : une règle généralisant la règle de Cramer à tous les systèmes linéaires et donnant une vision partielle et contextualisée du rang.
- Frobenius (1875-79) : le rang comme objet théorique dans une vision duale.

1. Leonhard Euler (1750)

Dans son texte intitulé, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes,* datant de 1750, Euler traite du paradoxe dit de Cramer[2]. L'étude du problème le mène à remettre en cause le fait qu'un système de n équations linéaires en n inconnues détermine toujours une solution unique, fait qui, semble-t-il, était à l'époque implicitement admis de tous. Euler commence par examiner ce problème pour n=2 ; il donne comme exemple les deux équations :

$$3x - 2y = 5 \text{ et } 4y = 6x - 10\ ;$$

Voici ce qu'il en dit :

"On verra qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnues x et y, puisqu'en éliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle-même et on obtient une équation identique, dont on est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la première $3x - 2y = 5$ doublée, n'en diffère point. " (Euler 1750, 226).

Il ne s'agit pas ici de croire que ce que dit Euler est une révélation pour les mathématiciens de l'époque. Mais le fait que deux équations puissent être identiques, cet "accident" pour reprendre le terme employé par Euler, n'était pas digne d'intérêt. Jusque là on n'avait pas cherché à faire une théorie des équations linéaires, mais à mettre en place des techniques pratiques de résolution. C'est en cela que le texte d'Euler est une nouveauté, il porte sur les équations linéaires, mais n'a pas pour but d'en donner de résolution, il propose une approche plutôt descriptive et qualitative.

---

1 La date est ici tardive, mais ce travail est en fait représentatif de travaux qui se sont élaborés dans les quarante ans qui ont précédé. En ce sens ce texte est plus "ancien" que celui de Frobenius, même s'il est postérieur en date. Nous l'avons choisi parce qu'il représentait une synthèse de cette phase antérieure, et aussi parce qu'il était en français.

2 Le paradoxe de Cramer vient de la confrontation de deux résultats que l'on tenait pour vrais à l'époque :

a) Deux courbes algébriques (appelées lignes courbes par Euler) se coupent en autant de points que le produit de leurs ordres, et il existe des cas où tous ces points sont finis, réels et distincts.

b) Une courbe algébrique d'ordre n est définie, à un coefficient multiplicatif près, par un polynôme en deux variables de degré n, donc comportant $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients, il suffit donc de $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ points pour déterminer une courbe algébrique d'ordre n.

Le paradoxe apparaît dès que $n \geq 3$, car alors $n^2 \geq \frac{n(n+3)}{2}$, il semble donc que deux courbes d'ordre n peuvent avoir en commun autant ou plus de points qu'il suffit pour déterminer entièrement une seule d'entre elles.

Regardons maintenant de plus près ce que dit Euler. Ce qui nous semble important, c'est que, bien qu'elle "saute d'abord aux yeux", ce n'est pas l'identité des équations qui est le critère pour signifier l'indétermination du système, mais une résolution par élimination. Ce qui prouve que la résolution reste la préoccupation majeure.

Pour n=3, Euler donne deux exemples : un, où deux équations sont identiques et un autre, où une équation est le double de la somme des deux autres. Dans les deux cas, il n'y a pas de tentative de résolution, et Euler conclut :

"Ainsi quand on dit que pour déterminer trois inconnues, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations diffèrent tellement entr'elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres." (ibid., 226)

Pour n=4, Euler rajoute que, dans certains cas, deux inconnues peuvent rester indéterminées, et il donne l'exemple des quatre équations suivantes :

$$\begin{gathered} 5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0\,, \\ 2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0\,, \\ x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0\,, \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0\,, \end{gathered}$$

"elles ne vaudroient que deux. car ayant tiré de la troisième la valeur de

$$x = -13y + 14z - 15v - 16$$

et l'ayant substituée dans la seconde pour avoir :

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \quad \text{et} \quad x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}\,,$$

ces deux valeurs de x et de y étant substituées dans la première et la quatrième équation conduiront à des équations identiques[3], de sorte que les quantités z et v resteront indéterminées." (ibid., 227)

Ici donc, à nouveau, la démonstration repose sur une résolution par élimination et substitution. Euler ne mentionne pas les relations linéaires entre les équations, pourtant assez apparentes : (1) - (2) = (4) et (1) - 2x(2) = (3) (par exemple). Pour finir, il conclut par un énoncé général :

"Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres." (ibid., 228)

Pour un lecteur moderne, "être comprise dans" ou "être renfermée dans" traduit immédiatement une relation de dépendance linéaire. Pourtant une lecture minutieuse de ce que fait Euler nous montre, qu'à ses yeux, cela traduit plutôt un "accident" dans la fin d'une résolution par élimination et substitution, qui fait que certaines inconnues restent indéterminées. Bien sûr il nous montre, à quelques reprises, que la raison en vient de relations linéaires entre les équations, mais ce n'est pas le critère qu'il retient comme décisif. Ce faisant, il s'inscrit tout à fait dans la ligne de ce qui prédominait à l'époque, la résolution. La différence entre les propriétés de "dépendance linéaire" et "être comprise (enfermée) dans" peut sembler mince, mais nous verrons plus loin qu'elle a eu des incidences importantes. En effet, le point de vue d'Euler le lie au cadre des équations alors que la dépendance linéaire est un concept plus large, valable à la seule condition qu'on puisse faire des combinaisons linéaires. Aussi, pour bien marquer la différence,

---

3 Attention, Euler ne veut pas simplement dire que les deux équations sont identiques l'une à l'autre, mais que chacune est identique, c'est-à-dire, toujours vraie.

nous appellerons *dépendance inclusive*, cette propriété pour une équation "d'être comprise (enfermée) dans" d'autres. Jusque vers la deuxième moitié du 19e siècle, le concept de dépendance inclusive, plutôt que celui de dépendance linéaire, est à l'œuvre dans le cadre des équations linéaires.

Néanmoins, l'explicitation par Euler de cette "exception" dans les systèmes carrés et de ses conséquences est une nouveauté qui marque un changement de point de vue assez radical dans l'approche des systèmes d'équations linéaires. D'autant qu'Euler n'en reste pas là ; déjà, avec l'exemple précédent des quatre équations, il entrevoit la complémentarité entre le nombre de relations de dépendance des équations et le nombre d'indéterminations dans les inconnues : "Il peut même arriver que deux équations soient déjà comprises dans les deux autres et alors il n'y aura que deux équations qui restent dans le calcul et par conséquent deux inconnues resteront indéterminées." Ceci est, en quelque sorte, une première approche "empirique" des liens entre le nombre d'équations indépendantes, la taille de l'ensemble de solutions et le nombre de paramètres pour le décrire, qui seront plus tard modélisés via les concepts de rang et de dualité. Plus loin, à la fin de son article, Euler donne une explication sur le paradoxe quand n=4, qui renferme une idée du même ordre :

> "Quand deux lignes du quatrième ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entr'elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre, ces 16 points seront toujours tels que trois ou plusieurs des équations qui en résultent sont déjà comprises dans les autres. De sorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13 ou 12 ou encore moins et partant pour déterminer la courbe entièrement on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points." (ibid., 233)

En conclusion nous retiendrons que l'analyse que propose Euler des relations de liaison entre équations linéaires reste pragmatique et ne débouche pas sur une quelconque théorie de la dépendance et en tout cas sûrement pas de la dépendance linéaire. Cette approche a toutefois l'avantage de mettre en relief des idées simples, intuitives, qui fournissent une étude qualitative pertinente du paradoxe de Cramer, qui avait préoccupé plusieurs mathématiciens de haut niveau.

2. Eugène Rouché (1880)

En 1750 également, Gabriel Cramer publie son *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques.* Si on exclut une lettre de Gottfried Wilhelm Leibniz au Marquis de l'Hôpital, datée du 28 avril 1693, mais qui ne sera publiée et connue qu'en 1850 (Leibniz 1850, 2:238-240), c'est dans ce texte de Cramer qu'on trouve une des premières notations permettant d'écrire un système d'équations linéaires avec des coefficients indéterminés :

" Soient plusieurs inconnues $z, y, x, v,$ *&c.* & autant d'équations

$$\begin{array}{l} A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c. \\ A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c. \\ A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c. \\ A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c. \\ \qquad\qquad \&c. \end{array}$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, *&c.* ne marquent pas comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémière, seconde, troisième, quatrième &c. équation. De même Z^1, Z^2, *&c.* sont les coëfficients de z ; Y^1, Y^2, *&c.* ceux de y ; X^1, X^2, *&c.* ceux de x ; V^1, V^2, *&c.* ceux de v ; &c. dans la prémière, seconde, &c. équation." (Cramer 1750, 657)[4]

De la résolution dans le cas n=3, il induit l'énoncé d'une règle générale de calcul permettant de trouver la solution d'un système carré, à l'aide de ce qu'on appellera plus tard les déterminants.

> "L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnues en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ *&c.* toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les n premiers chiffres rangés en toutes les manières possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [1x2x3 =] 6 termes, composés des trois lettres ZXY, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes + ou -, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements : s'il est pair ou nul, le terme aura le signe + ; s'il est impair, le terme aura le signe -. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2X^3$ il n'y a aucun dérangement : ce terme aura donc le signe +. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe +, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1, & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1 aura le signe -.
>
> Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous les termes, Z en A. Et la valeur d'y est la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière semblable la valeur des autres inconnues."[5] (ibid., 658)

Ce traité marque le début de la théorie des déterminants, qui va devenir bientôt le cadre incontournable pour l'étude des systèmes linéaires.[6] Du même coup, le type d'approche amorcé par Euler tombera en désuétude. La théorie des déterminants devint rapidement, à la suite de Cramer, le cadre de nombreuses recherches, dont très peu, dans un premier temps, avaient pour objet une forme d'approche

---

[4] Dans sa lettre de 1693, Leibniz utilise ce qu'il appelle des "nombres feints de deux characteres, le premier [marquant] de quelle equation il est, le second [...] à quelle lettre il appartient", ainsi il note la première équation 10 + 11x + 12y = 0, la deuxième 20 + 21x + 22y = 0, etc.

[5] Cramer évoque alors brièvement les cas où le dénominateur serait nul, en disant que si tous les numérateurs sont nuls le problème est indéterminé (mais il ne propose pas de méthode de résolution dans ce cas) et que si un de ces numérateurs n'est pas nul le problème est impossible.

[6] L'approche contemporaine des déterminants comme formes n-linéaires alternées est récente et la quasi totalité des résultats de cette théorie ont été démontrés bien avant. La première approche théorique, essayant de donner aux déterminants une définition, qui ne soit pas qu'une règle de calcul, est due à Cauchy (qui a introduit le terme de déterminant), dans un mémoire présenté à l'Académie en 1812 et publié en 1815 (Cauchy 1815).

qualitative des systèmes linéaires. On s'attacha, outre à trouver une meilleure formulation de la règle de calcul de Cramer, à calculer des déterminants particuliers (Vandermonde, etc.), rivalisant dans la dextérité à calculer. D'ailleurs, même si les déterminants s'avérèrent être un outil précieux pour l'étude des systèmes d'équations linéaires, force est de reconnaître qu'ils engendrèrent aussi une certaine complexité liée à la technicité de leur utilisation. Ce fait a indéniablement eu pour conséquence de masquer certains aspects intuitifs dans l'étude des équations linéaires, marquant ainsi un changement important d'approche, par rapport au travail d'Euler.

En fait ce n'est qu'à partir de la fin de la première moitié du 19e siècle, que se développe de façon significative l'étude qualitative des systèmes linéaires, toujours dans le cadre de la théorie des déterminants. Dans ce contexte, c'est le concept de rang et les premiers résultats de dualité qui vont être élaborés.[7] L'étude des systèmes carrés dont le déterminant principal s'annule a conduit, dans un premier temps, à mettre en évidence la notion de mineur de plus grand ordre non nul, qui, assortie des notions d'inconnues principales et secondaires, permit de donner des règles de résolution faisant apparaître l'ordre d'indétermination du système, dans des cas autres que celui de Cramer. Par ailleurs, le plus grand ordre de mineur non nul se trouva ainsi naturellement attaché au nombre d'équations réellement indépendantes dans le système. Cependant, l'approche restait orientée vers une résolution effective, donc la question de la mise en évidence d'invariants associés à ce nombre ne se posait pas. De plus, la dépendance "inclusive" restait le concept en œuvre sur les équations, masquant ainsi la similitude avec la dépendance sur les n-uplets de solutions. Ainsi, le traitement asymétrique des relations de dépendance entre solutions et entre équations interdisait tout raisonnement de dualité, que la technicité des outils utilisant des déterminants rendait par ailleurs inaccessible.

Cette première phase dans l'étude des systèmes se caractérise donc par l'énoncé d'une règle la plus générale possible permettant la résolution de n'importe quel système d'équations linéaires. On doit à Rouché un énoncé particulièrement compact, publié en 1880 dans le *Journal de l'École Polytechnique* ; ce texte marquera la fin de cette première phase et sera également à l'origine de l'enseignement de la règle de Rouché et Fontenay, encore très populaire dans l'enseignement des années 1970.

> " Malgré les travaux assez nombreux[8] qui ont suivi la publication de ma Note dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (29 novembre 1875), l'étude complète du système de n équations linéaires à m inconnues n'a pas encore reçu la forme la plus simple et précise dont elle est susceptible : comme dans la plupart des théories inachevées, le nombre des cas que l'on distingue et la diversité apparente des conclusions relatives à chacun d'eux laissent dans l'esprit une confusion regrettable. Je me propose de développer ici les principes que je m'étais borné, faute d'espace, à indiquer dans les *Comptes rendus*, et de montrer qu'on peut tout réduire à un seul théorème qui, par sa simplicité extrême et son entière généralité, mérite, ce me semble, d'attirer l'attention.

[7] Il serait trop long, dans le cadre de cet article, de retracer en détail cette évolution ; pour plus de détails, on pourra consulter (Dorier 1993).

[8] MÉRAY, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, décembre 1875, MANTION, *Théorie des déterminants* : BIEHLER, *Nouvelles Annales*, juillet 1880 ; etc.

I.

Soit

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^m x_m = k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^m x_m = k_n \end{cases}$$

un système quelconque de n équations linéaires à m inconnues, m pouvant être supérieur, égal ou inférieur à n.

Du Tableau rectangulaire

$$\text{(T)} \qquad \left\| \begin{matrix} a_1^1 & \ldots & a_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^m \end{matrix} \right\|$$

formé avec les coefficients des inconnues, on peut déduire divers déterminants en prenant les éléments communs à un certains nombre d'horizontales et à un nombre égal de verticales.

Nous supposerons d'abord que l'un au moins des éléments du Tableau (T) soit différent de zéro ; nous reviendrons plus tard sur le cas où ces éléments seraient tous nuls, et il suffira alors de quelques mots pour faire entrer ce cas particulier dans notre théorème général.

Dans cette hypothèse, il existera toujours, parmi les déterminants déduits du Tableau (T), au moins un déterminant qui soit différent de zéro et dont l'ordre soit supérieur ou égal à celui de tout autre déterminant non nul. S'il en existe plusieurs jouissant de cette double propriété, on choisira l'un d'eux à volonté.

Nous donnerons au déterminant ∂ ainsi choisi le nom de *déterminant principal* du système (I), et nous désignerons par p son ordre, qui ne peut évidemment surpasser le plus petit des deux nombres m et n. On peut d'ailleurs, par une disposition convenable des équations proposées (I), supposer, sans introduire aucune restriction, que ∂ soit le déterminant

$$\partial = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & \ldots & a_p^p \end{vmatrix}$$

formé avec les éléments communs aux p premières horizontales et aux p premières verticales du Tableau (T).

En *bordant* le déterminant principal ∂ *à la partie inférieure* par les éléments homologues de l'une des horizontales non employées du Tableau (T) et *à droite* par les termes tout connus correspondants, on obtient n-p déterminants d'ordre p+1,

$$\partial_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^p & k_1 \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & \dots & a_p^p & k_p \\ a_{p+\alpha}^1 & \dots & a_{p+\alpha}^p & k_{p+\alpha} \end{vmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n\text{-}p),$$

que nous appelons les *déterminants caractéristiques* du système (I).

Cette définition des déterminants caractéristiques est en défaut lorsque p est égal à n, car toutes les horizontales du Tableau (T) figurent alors dans le déterminant ∂. Nous conviendrons cependant de dire que, dans ce cas encore, le système (I) a des déterminants caractéristiques, mais que ces déterminants sont nuls et de l'ordre n+1.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition qui renferme tout la théorie des équations linéaires.

II.

Pour que n équations linéaires à m inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants caractéristiques du système soient tous nuls.

Dans cette hypothèse, le système a une solution unique ou est indéterminé suivant que l'ordre de ses déterminants caractéristiques surpasse ou non le nombre des inconnues.

(Rouché 1880, 221-223)

Suit la démonstration de ce théorème (4 pages) qui utilise la théorie des déterminants et essentiellement la linéarité du déterminant et le développement par rapport à une ligne ou une colonne avec le fait qu'un déterminant ayant deux lignes ou deux colonnes identiques est nul. Rouché précise ensuite comment obtenir les solutions dans les deux cas de compatibilité :

"Soit donc d'abord p=m [...] le système a une solution unique donnée par la règle suivante, qui est une généralisation de la règle de Cramer :

Le dénominateur commun des valeurs des inconnues $x_1, \dots, x_m$ *est le déterminant principal du système, et chaque numérateur s'obtient en remplaçant dans ce déterminant principal, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée par les termes tout connus correspondants.*

Enfin si p est $\leq m$, le système est indéterminé [...] les inconnues $x_{p+1}, \dots, x_m$ [restent] arbitraires ; aussi dit-on que l'indétermination est de l'ordre m-p. La règle relative à ce cas est la suivante :

Les inconnues dont les indices sont ceux des verticales qui concourent à la formation du déterminant principal s'expriment en fonction des autres inconnues, qui restent arbitraires, sous la forme de fractions ayant pour dénominateur le déterminant principal ; chaque numérateur est le déterminant déduit du déterminant principal en y remplaçant par les expressions $k_1 - a_1^{p+1} x_1 - \dots - a_1^m x_m, \dots, k_p - a_p^{p+1} x_1 - \dots - a_p^m x_m$ *, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée.* " (ibid., 227-228)

Dans ce type d'approche, le rang apparaît de façon implicite comme la valeur p de l'ordre du déterminant principal, mais ce nombre n'est interprété ni comme le nombre maximal d'équations indépendantes, ni comme le nombre minimal d'équations permettant de déterminer l'ensemble de solution. De même, dans le cas

de la compatibilité, m-p apparaît bien comme l'ordre d'indétermination, mais il n'est pas relié à la dimension de l'ensemble des solutions, que ce soit sous l'aspect nombre de générateurs ou sous l'aspect nombre de solutions indépendantes. Par ailleurs, l'aspect d'invariant n'est quasiment pas abordé, le choix du déterminant principal n'est pas remis en question, pas plus que l'invariance de p si on considère tous les systèmes ayant le même ensemble de solutions. Ces remarques n'ont pas pour but de mettre en évidence des faiblesse dans l'approche de Rouché, mais plutôt que la problématique de résolution du système ne permet pas de dégager le concept de rang autrement que de façon implicite et partielle. Pour en venir à un concept plus théorique, il faudra un changement de problématique et d'approche. De plus, dans le texte de Rouché, on retrouve comme dans celui d'Euler la conception de *dépendance inclusive*. En effet, si p<m, c'est-à-dire si les équations sont dépendantes, le système est indéterminé, ce qui se caractérise par le fait que certaines inconnues garderont des valeurs arbitraires.

Nous allons voir à présent comment Frobenius est passé à une approche basée sur la dépendance linéaire qui lui a permis de dégager le concept de rang sous tous ses aspects de façon explicite.

3. Georg Ferdinand Frobenius (1875-79)

C'est dans un texte de 1875, intitulé *Über das Pfaffsche Probem*, que Frobenius montra pour la première fois une façon nouvelle de considérer l'étude des systèmes d'équations linéaires. Pour s'en faire une idée précise, nous donnons ci-dessous in extenso notre traduction des deux premières pages de la partie du texte, où il traite cette question, en intercalant nos commentaires.

"Sur les équations linéaires et les formes bilinéaires alternées

§. 3.

Sur les systèmes associés d'équations linéaires homogènes.

Soient m équations linéaires homogènes indépendantes

(10.) $a_1^{(\mu)} u_1 + \dots + a_n^{(\mu)} u_n = 0$, ($\mu = 1, \dots m$)

en les n (> m) inconnues $u_1, \dots u_n$. Soit

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$$

une relation linéaire quelconque entre ces inconnues, on peut alors la calculer à partir des équations du système (10.). (Frobenius 1875, 264)

Frobenius limite son propos aux systèmes homogènes, c'est parce que c'est la linéarité qui l'intéresse. Il ne cherche pas à exposer une méthode pour résoudre un système et donc les conditions de compatibilité ne l'intéressent pas. Par ailleurs, il ne considère que des systèmes d'équations indépendantes, mais il explique tout de suite que n'importe quelle autre équation linéaire vérifiée par les solutions de (10.) peut être "calculée" (*rechnen*) à partir des équations de ce système, la suite nous confirmera que Frobenius pense là à la dépendance linéaire, "calculée" signifie donc qu'elle s'obtient comme combinaison linéaire des équations du système. Ainsi si les équations ne sont pas indépendantes, une d'entre elle est combinaison linéaire des autres et on peut donc l'enlever sans changer le système, et ainsi de suite jusqu'à avoir un système d'équations indépendantes. Il est donc raisonnable de supposer que Frobenius considérant cette simplification comme évidente se limite à des équations indépendantes par seul souci de ne pas alourdir son exposé.

"On pourrait aussi remplacer ce système par m combinaisons linéaires indépendantes de ses équations. Les déterminants d'ordre m, calculés sur le tableau des coefficients $a_\alpha^{(\mu)}$, et qui à cause de l'indépendance des équations ne sont pas tous nuls, seraient, par une telle transformation, tous multipliés par le même facteur non nul." (Frobenius 1875, 264)

Le résultat énoncé ici date au moins de Arthur Cayley (1843) et n'est donc pas nouveau. Mais Frobenius semble suggérer que le système des m nouvelles équations indépendantes obtenues par combinaisons linéaires est équivalent au premier. Ce résultat n'est cependant pas démontré, il va être une conséquence de ce qui suit. Il contient déjà l'idée de base (des équations), d'invariance du nombre d'éléments dans toutes les bases et de changement de base ! Du pont de vue dual, c'est aussi la question de la représentation des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ qui est en jeu. Par rapport à ses prédécesseurs, et en tout cas par rapport à Rouché, c'est un point de vue original que d'envisager des systèmes équivalents en faisant des combinaisons linéaires des équations.

"Soient $A_1, \ldots A_n$ et $B_1, \ldots B_n$ deux solutions *particulières* quelconques des équations (10.), alors $aA_1 + bB_1, \ldots, aA_n + bB_n$ est aussi une solution. Plusieurs solutions particulières

$$A_1^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)} \quad (\chi = 1, \ldots k)$$

seront dites *indépendantes* ou *différentes*, si les $c_1 A_\alpha^{(1)} + \ldots + c_k A_\alpha^{(k)}$ ne peuvent s'annuler pour tous les $\alpha = 1, \ldots n$, sans que les $c_1, \ldots, c_k$ soient tous nuls, en d'autres termes, si les k formes linéaires $A_1^{(\chi)}u_1 + \ldots + A_n^{(\chi)}u_n$ sont indépendantes." (ibid., 264)

Frobenius donne ici une définition tout à fait moderne de l'indépendance linéaire et montre tout de suite que la définition s'applique de la même façon aux solutions et aux équations. Il relie donc implicitement cette définition à l'idée de dépendance inclusive mais aussi au critère utilisant les déterminants (les équations sont indépendantes si et seulement si tous les mineurs de plus grand ordre du système ne sont pas nuls) qu'il utilisera beaucoup dans la suite. De ce fait la linéarité va être le moteur de son raisonnement et la notion de base sera sous-jacente dans toute la suite, tout autant dans son aspect de plus grand nombre d'objets indépendants que de système générateur, pour des équations comme pour des solutions. Par ailleurs, équations et n-uplets étant, à son point de vue, des objets identiques pour la linéarité, Frobenius pourra utiliser la dualité. C'est donc sur cette définition de l'indépendance linéaire, essentielle pour son propos, que va s'appuyer toute l'argumentation autour du rang.

Frobenius commence par montrer comment exhiber une sorte de base canonique de solutions :

"Comme les déterminants d'ordre m des quantités $a_\alpha^{(\mu)}$ ne sont pas tous nuls, on peut donc choisir les quantités $U_\alpha^{(\mu)}$, de sorte que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ & \ldots & \\ a_1^{(m)} & \ldots & a_n^{(m)} \\ U_1^{(1)} & \ldots & U_n^{(1)} \\ & \ldots & \\ U_1^{(n-m)} & \ldots & U_n^{(n-m)} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul. Désignons alors par $A_\alpha^{(\nu)}$ les coefficients de $U_\alpha^{(\nu)}$ dans D, ainsi

$$(11.)\ a_1^{(\mu)}A_1^{(\nu)} + \ldots + a_n^{(\mu)}A_n^{(\nu)} = 0, \quad (\mu = 1, \ldots m\,;\ \nu = 1, \ldots n\text{-}m),$$

d'où il découle que

$$(12.)\ A_1^{(\nu)}, \ldots, A_n^{(\nu)}, (\nu = 1, \ldots n\text{-}m)$$

sont n-m solutions des équations (10.)." (ibid., 264)

L'existence des quantités $U_\alpha^{(\mu)}$ n'est pas démontrée. En procédant par itération, il est facile de voir que ce résultat se ramène à construire une équation linéaire homogène indépendante de k équations linéaires homogènes indépendantes données en $n(>k)$ inconnues. Or comme un système de moins d'équations linéaires homogènes que d'inconnues admet une solution non nulle, il suffit pour répondre à la question de prendre une équation linéaire homogène ne s'annulant pas en une de ces solutions non nulles. Ce résultat avait d'ailleurs déjà été établit par Henry Smith (1861)[9]. Sans être vraiment explicite, le résultat utilisé par Frobenius faisait donc partie à l'époque d'un domaine déjà connu. La suite est élémentaire et repose d'une part sur le développement d'un déterminant par rapport à une ligne et d'autre part sur le fait élémentaire qu'un déterminant ayant deux lignes identiques est nul.

Frobenius montre ensuite que ces solutions sont indépendantes :

"Soient $\chi, \ldots \lambda, \rho, \ldots \sigma$ une permutation positive des nombres $1, \ldots n$, alors le
déterminant d'ordre m, $\sum \pm a_\chi^{(1)} \ldots a_\lambda^{(m)}$ et le déterminant d'ordre $(n$-$m)$ $\sum \pm$
$A_\rho^{(1)} \ldots A_\sigma^{(n-m)}$ des deux systèmes d'éléments $a_\alpha^{(\mu)}$ et $A_\alpha^{(\nu)}$ seront appelés des
déterminants *complémentaires*. D'après un théorème connu le dernier
déterminant est le produit du premier par D^{n-m-1}. Les déterminants d'ordre m
du système $a_\alpha^{(\mu)}$ sont donc proportionnels aux déterminants complémentaires
d'ordre $(n$-$m)$ du système $A_\alpha^{(\nu)}$. Comme les déterminants d'ordre m du
système $a_\alpha^{(\mu)}$ ne sont pas tous nuls, et comme D n'est pas nul, les déterminants
d'ordre $(n$-$m)$ du système $A_\alpha^{(\nu)}$ ne sont pas tous nuls, et donc les n-m solutions
(12.) sont indépendantes." (ibid., 265)

Frobenius utilise ici un résultat assez technique sur les déterminants qui avait
été démontré avant lui et faisait partie à l'époque des "résultats classiques" (bien que
pas tout à fait élémentaire)de théorie des déterminants.

[9] On trouve dans ce texte de nombreuses idées nouvelles sur les systèmes linéaires, comme la notion de
système fondamental de solutions, qui correspond à l'idée de base. Pour plus de détails sur ce texte
et ses liens avec celui de Frobenius voir (Dorier 1993, 175-179).

Puis Frobenius montre que le système ne peut avoir plus de n-m solutions indépendantes. Ce résultat était certainement explicite dans beaucoup de travaux antérieurs, mais Frobenius est le premier à en donner une démonstration, montrant par là même, qu'il en saisit l'importance. Ce résultat est en effet essentiel pour mettre en rapport les notions d'indépendance et de générateurs et surtout pour montrer l'invariance du nombre d'éléments dans une base de solutions.

"Mais les équations (10.) ne peuvent avoir plus de n-m solutions différentes. En effet, soient $B_1^{(\nu)}, \dots B_n^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \dots n$-m+1) n-m+1 solutions, et $c_1 B_\alpha^{(1)} + \dots + c_{n-m+1} B_\alpha^{(n-m+1)} = B_\alpha$, alors $B_1, \dots B_n$, est aussi une solution. Supposons que le déterminant d'ordre m du système $a_\alpha^{(\mu)}$, $M = \Sigma \pm a_1^{(1)} \dots a_m^{(m)}$ soit non nul. On peut trouver des constantes $c_1, \dots \dots$, c_{n-m+1}, de sorte que n'importe quelles n-m des quantités $B_1, \dots B_n$ soient toutes nulles, parce que n-m équations linéaires homogènes en n-m+1 inconnues $c_1, \dots c_{n-m+1}$, ont toujours une solution. Ainsi si on fait $B_{m+1} = \dots = B_n = 0$, alors il découle des m équations linéaires $a_1^{(\mu)} B_1 + \dots + a_m^{(\mu)} B_m = 0$, avec le déterminant M non nul, que également $B_1 = \dots = B_m = 0$. En conséquence les (n-m+1) solutions $B_1^{(\nu)}, \dots, B_n^{(\nu)}$ ne sont pas indépendantes. Donc m équations linéaires homogènes indépendantes en n inconnues ont exactement n-m solutions différentes, et de plus m équations linéaires homogènes quelconques en n inconnues ont au moins n-m solutions différentes." (ibid., 265)

La démonstration s'appuie donc sur le fait essentiel qu'un système homogène ayant plus d'inconnues que d'équations admet une solution non nulle. Remarquons que ce résultat est aussi une des façons classiques de montrer l'invariance du nombre d'éléments dans une base d'un espace vectoriel de dimension finie. C'est que la démarche de Frobenius est proche de ce type d'approche. En effet la question est ici de savoir si on pourrait trouver une base de moins d'éléments (plus ce n'est pas possible, Frobenius dit clairement qu'il ne peut y avoir plus de n-m solutions indépendantes). Or, s'il y avait une base de n-m-1 éléments (ou moins) la démonstration ci-dessus s'adapterait facilement pour montrer qu'alors il ne pourrait y avoir plus de n-m-1 solutions indépendantes, ce qui est contradictoire avec ce qui précède. Ainsi même si la question de l'invariance du nombre d'éléments dans une base de solutions n'est pas explicitement posée, elle est tout à fait accessible avec ce que fait Frobenius.

"Soient $c_1, \dots c_{n-m}$, des *constantes arbitraires*, alors

$$A_1 = \Sigma c_\nu A_1^{(\nu)}, \ \dots, A_n = \Sigma c_\nu A_n^{(\nu)}$$

sera appelée la *solution générale* des équations (10.). On peut obtenir d'elle toute solution particulière, en donnant aux constantes arbitraires des valeurs déterminées. Ainsi soient $B_1^{(\nu)}, \dots B_n^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \dots n$-m) n-m solutions différentes quelconques, alors $B_\alpha^{(\nu)} = c_{\nu,1} A_\alpha^{(1)} + \dots + c_{\nu,n-m} A_\alpha^{(n-m)}$, et les déterminants d'ordre (n-m) du système $B_\alpha^{(\nu)}$ diffèrent des déterminants correspondants pour le système $A_\alpha^{(\nu)}$ seulement à un facteur multiplicatif non nul près $| c_{\rho,\sigma} |$. Ils sont donc proportionnels aux déterminants complémentaires d'ordre m du système $a_\alpha^{(\mu)}$." (ibid., 265).

La notion de base de solutions est donc implicitement clarifiée. Une base de solutions est constituée de n'importe quelles n-m solutions indépendantes, qui constitue de fait une famille génératrice et sur laquelle toute solution reçoit une décomposition unique.

Frobenius passe alors à un résultat de dualité essentiel :

"Si à partir de maintenant on considère les quantités (12.) comme (n-m) solutions différentes quelconques de (10.), alors

$$(13.)\ A_1^{(\nu)} u_1 + \dots A_n^{(\nu)} u_n = 0$$

sont (n-m) équations linéaires homogènes indépendantes en les inconnues $u_1, \dots, u_n$ et d'après les relations (11.)

$$(14.)\ a_1^{(\mu)}, \dots, a_n^{(\mu)} \ (\mu = 1, \dots m)$$

sont m solutions différentes de celles-ci. Les deux systèmes d'équations linéaires homogènes (10.) et (13.), et de même le système de leurs coefficients $a_\alpha^{(\mu)}$ et $A_\alpha^{(\nu)}$ seront appelés *associés* [*zugeordnet*] ou *adjoints* [*adjungirt*]. Entre leurs solutions générales il existe la relation :

$$(11^*.)\ A_1 a_1 + \dots + A_n a_n = 0.$$

Les coefficients de l'un des systèmes d'équations sont des solutions de l'autre. Les déterminants d'ordre m du système $a_\alpha^{(\mu)}$ sont proportionnels aux déterminants complémentaires d'ordre (n-m) du système associé $A_\alpha^{(\nu)}$." (ibid., 265-266).

Grâce à la notion de système associé, Frobenius renverse le rôle des équations et des solutions, les équations de départ deviennent une base des solutions du système associé, c'est-à-dire dont les équations ont pour coefficients les composantes d'une base de solutions du système de départ. On peut ainsi relier tous les systèmes ayant le même ensemble de solutions, ils apparaissent tous comme constitués exactement de m équations linéaires indépendantes, pas moins, et ne peuvent être constitué de plus de m équations indépendantes.

En termes modernes Frobenius établit ainsi que la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension m dans un espace vectoriel de dimension n est n-m. De plus, pour les équations ou pour les solutions, c'est-à-dire dans un espace ou son dual, la dimension d'un sous-espace caractérise le cardinal d'une base ou le nombre maximal de vecteurs indépendants ou le nombre minimal de générateurs. Ainsi tous les aspects du rang (ou de la dimension) sont dégagés (au moins implicitement).

Pourtant dans ce texte, Frobenius ne donne pas de nom à l'ordre maximal de mineur non nul (i.e. au rang), il le fera quatre ans plus tard :

"Quand dans un déterminant, tous les mineurs d'ordre (m+1) s'annulent, mais que ceux d'ordre m ne sont pas tous nuls, j'appelle *rang*[10] du déterminant la valeur de m.". (Frobenius 1879, 1)

Frobenius s'est ainsi complètement dégagé de la problématique de résolution des équations. Son approche met la linéarité au centre de l'étude des systèmes d'équations linéaires. Cette linéarité porte aussi bien, et de manière identique, sur les équations que sur les n-uplets de solutions. Ainsi par dualité, il dégage tous les aspects du rang.

---

10 Dans l'original en allemand, Frobenius utilise le même terme de *Rang*.

Rapidement, les mathématiciens de l'époque se rendirent compte de l'intérêt d'un tel concept, qui non seulement évitait de lourdes périphrases, mais aussi permettait un traitement beaucoup plus simple et clair de nombreux problèmes, comme le montra Frobenius lui-même lors de résolutions de problèmes d'équations différentielles ou dans l'étude des formes quadratiques et bilinéaires.

Cependant, comme on le voit dans la définition ci-dessus, le concept de rang restait intrinsèquement lié à la théorie des déterminants, non seulement dans sa définition, mais aussi dans les démonstrations des théorèmes qui en déterminaient les propriétés. En 1886, Alfredo Capelli et Giovanni Garbieri, dans leur *Corso di Analisi Algebrica,* montrèrent qu'un système de rang k est toujours équivalent à un système triangulaire comportant exactement k termes diagonaux non nuls. Ils utilisèrent une méthode d'élimination faisant intervenir des coefficients qui sont des mineurs du système. Même si cette démonstration utilisait encore des résultats techniques mettant en œuvre des déterminants, le résultat atteint permettait de mettre en évidence un nouvel invariant lié au rang, qui joue un rôle important dans les méthodes de calcul par pivots, qui prendront leur essor plus tardivement, indépendamment des déterminants, notamment en analyse numérique et en programmation linéaire.

4. Conclusion

Ainsi l'étude des systèmes d'équations linéaires a permis de dégager les premiers concepts "théoriques" liés à la linéarité : *rang* et *dualité*, deux concepts clefs de l'algèbre linéaire. Dans cette évolution, l'unification des notions de linéarité communes aux équations et à leurs solutions a joué un rôle essentiel. Les débuts de la théorie du linéaire se sont donc fondés sur la possibilité commune aux équations et aux n-uplets, d'être les éléments d'une combinaison linéaire, ceci constitue un pas important dans le sens d'une unification et donc vers le concept moderne de vecteur. Frobenius, mettant en correspondance la linéarité des équations avec la linéarité de leur ensemble de solutions, donne d'un même élan les bases théoriques pour les concepts de vecteur et de dualité. D'autre part, dans ce contexte, le rôle, bien que crucial, joué par les déterminants a parfois gêné une approche plus intuitive de certaines questions, mais il n'est pas question ici de juger de la pertinence de concepts qui se sont imposés historiquement. Néanmoins, du point de vue didactique, si l'analyse historique légitime les choix de transposition où l'étude des systèmes d'équations linéaires prend une place importante en début d'enseignement de l'algèbre linéaire, elle inciterait par contre à trouver un autre cadre d'approche que la théorie des déterminants (cf. Dorier 1997, 2° partie, chap. IV). On peut en effet se demander comment les questions de rang et de dimension seraient apparues, si les déterminants n'avaient pas existé et en particulier, si, alors, on n'aurait pas pu rester plus proche d'une démarche intuitive telle que celle d'Euler. Le fait que les méthodes de résolution par pivot ait pris plus récemment une importance croissante et aient actuellement, en de nombreux endroits, supplanté les déterminants dans les méthodes de résolution effective est une autre raison qui peut pousser à introduire l'algèbre linéaire avec l'étude des systèmes d'équations linéaires et la méthode dite du pivot de Gauss.

Bibliographie

Capelli, Alfredo et Garbieri, Giovanni (1886) : *Corso di Analisi Algebrica,* extraits in (Muir 1890-1923, 4:102-103).

Cauchy, Augustin-Louis (1815) : Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, *Journal de l'École Polytechnique* **10** ; rééd. in *Œuvres complètes*, 2 séries, 26 vol., Paris: Gauthier-Villars, 1882-1956, 1(1e série):91-169.

Cayley, Arthur (1843) : Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions, *Cambridge Mathematical Journal* **4**, 119-127 ; rééd. in*Collected Mathematical Papers*, 13 vols., Cambridge: University Press, 1889, 1:55-62 ; extraits in (Muir 1890-1923, 2:14-17).

Cramer, Gabriel (1750) : *Introduction à l'analyse des Courbes algébriques*, Genève: Cramer et Philibert.

Dorier, Jean-Luc (1993) : L'Émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* (2e série) **3** , 159-190.

Dorier, Jean-Luc (1996) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'Histoire des Mathématiques* **2**, 265-307.

Dorier, Jean-Luc (éd.) (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditeur.

Euler, Leonhard (1750) : Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **4**, 219-223 ; rééd. in *Opera omnia*, 3 series - 57 vols., Lausanne: Teubner - Orell Füssli - Turicini, 1911-76, 26:33-45.

Frobenius, Georg Ferdinand (1875) : Über das Pfaffsche Problem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **82**, 230-315 ; rééd. in*Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., ed. J-P. Serre, Berlin/Heidelberg/New-York: Springer, 1968., 1: 249-334.

Frobenius, Georg Ferdinand (1879) : Über homogene totale Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **86**, 1-19 ; rééd. in*Gesammelte Abhandlungen*, 1:434-453.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1850) :*Leibnizens Mathematische Schriften*, éd. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin: Julius Pressner ; rééd., *Œuvres Mathématiques de Leibniz*, Paris: Librairie de A. Frank Editeur, 1853.

Muir, Thomas (1890-1923) : *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* , 4 vols., London: MacMillan ; rééd., New-York: Dover Publications, 1960.

Rouché, Eugène (1880) : Notes sur les équations linéaires , *Journal de l'École Polytechnique*, 48°Cahier, Tome XXIX, 221-228 ; extraits in (Muir 1890-1923, 3:91-92).

Smith, Henry John Stanley (1861) : On Systems of Linear Indeterminates, Equations, and Congruences, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **151**, 293-326 ; rééd. in *Collected Mathematical Papers* ; rééd. New-York: Chelsea Publishing Company, 1965, 1:367-409 ; extraits in (Muir 1890-1923, 3:83-84).

De Dürer à Bézier : dessin des caractères d'imprimerie.

(Activités à l'usage des lycées)

L'atelier propose une série d'activités sur le dessin des caractères d'imprimerie. Il s'agit de décrire ces caractères afin de pouvoir les mémoriser, les reproduire, les déformer. Les premières portent sur les travaux de Dürer (1525), les suivantes présentent sur des exemples accessibles aux élèves les rudiments sur les courbes de Bézier et leurs nombreuses applications.

Loïc LE CORRE*

Introduction

Conserver la mémoire d'un tracé : l'exemple du dessin des caractères d'imprimerie.

L'écriture manuscrite est – souvent – très belle, si le scribe a du talent, s'il forme bien ses lettres, s'il manie le calame, le pinceau ou la plume avec dextérité, s'il sait adapter le dessin de chaque lettre à celui de ses voisines, s'il sait justifier ses lignes c'est à dire adapter leur longueur à celle de la page en employant éventuellement des abréviations. Elle a un gros inconvénient : toutes les lettres doivent être dessinées une à une et le dixième « a » de la page est à dessiner comme le premier. C'est évidemment très lent et le risque de mal faire est grand.

Pour que chaque lettre soit bien dessinée – toujours le même tracé – le scribe applique une procédure. Il ne dessine pas sa lettre au hasard mais le *ductus*, la séquence de mouvements de la plume qui trace la lettre, est codifié au moins par la pratique. C'est le *ductus* qui définit la structure géométrique de la lettre, ses pleins et ses déliés, son contraste, ses empattements, sa tension.

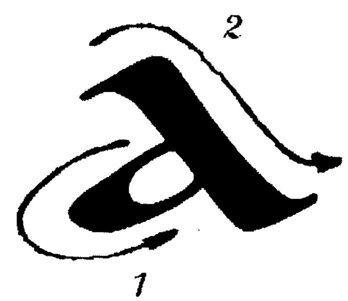

Figure 1 : lettre « a » caroline calligraphiée (IX^e^ siècle)

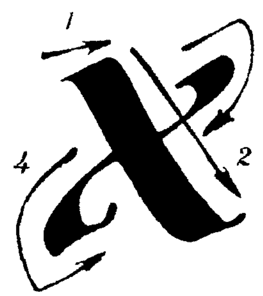

Figure 2 : lettre « x » onciale calligraphiée (V^e^ siècle)