

**LA PULSATION ENTRE LES CONCEPTIONS
OPTIQUES, ALGÈBRIQUES, ARTICULÉES, ET PROJECTIVES,
DES OVALES CARTÉSIENNES¹**

Évelyne BARBIN et René GUITART

« On ne saurait avoir trop de moyens différents de décrire une même courbe, parce que chacun exprime une propriété caractéristique de la courbe, d'où dérivent naturellement plusieurs autres propriétés, qui n'apparaissent pas aussi aisément dans les autres modes de description. »

CHASLES, *Aperçu historique*, p. 351

Descartes avait une double conception des courbes géométriques, comme équation *et* comme mouvement « bien réglé », dont nous disons qu'on peut en trouver un accomplissement cohérent dans le théorème de Kempe de 1875. Dans sa double visée, il introduit les *ovales* comme les courbes solutions d'un problème d'optique lié aux réfractions, en fournissant les équations *et* les moyens de construire ces courbes par un mouvement. Dans les années 1820, Quételet montre que ces mêmes ovales interviennent dans un autre problème d'optique en un sens dual de celui envisagé par Descartes, lié à l'étude des caustiques, et, également, il montre comment ces ovales apparaissent comme projection de l'intersection de deux cônes. En 1875, Cayley exhibe un système articulé, très simple, permettant de tracer les ovales, considérées à l'époque dans la classe plus vaste des *cartésiennes*. La même année, Kempe montre qu'en général les courbes algébriques sont précisément celles qui sont localement traçables par systèmes articulés.

Dans son *Aperçu historique* de 1837, Chasles consacre une note de trois pages aux ovales cartésiennes², introduites exactement deux siècles auparavant par Descartes, dans le Livre II de *La géométrie*. De la note de Chasles est tirée la citation que

¹ Cet article donne un panorama plus vaste sur l'histoire des ovales que celui qui était proposé dans l'atelier du Colloque. Cet article paraîtra également dans les *Actes de la septième université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques* (Nantes, juillet 1997).

² CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), 3^e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1889, p. 350-353.

nous plaçons en épigraphe à cet article. Nous indiquons par là que les ovales offrent un cas typique pour saisir le trait pulsatif du travail du mathématicien sur un objet mathématique : un objet, loin d'être défini une fois pour toutes, est remis à sa disposition de plusieurs façons, qui se soutiennent et ne sont pas nécessairement à dissocier ou à classer. Ce qui peut paraître « naturel » dans les déductions des propriétés qu'effectue le mathématicien à partir de la description choisie n'est que le témoin de cette « nature pulsative » particulière du travail mathématique. De fait, à la pluralité des descriptions correspond une autre, celle des démonstrations. L'histoire des ovales fournit plusieurs exemples où des mathématiciens produisent, à partir de descriptions initiales différentes, des démonstrations différentes d'une nouvelle propriété des ovales. Accorder le caractère de « naturel » à une démonstration signifie que celle-ci semble nécessaire à la compréhension de ce qu'elle prouve. Ainsi, avec la production de diverses démonstrations, « naturelles » à divers titres, la compréhension de l'objet sur lequel porte la propriété, non seulement s'accroît, mais se complexifie. Du coup, la compréhension de ce qui est « un » réclame l'appréhension d'une multiplicité comme totalité, et la capacité de circulation dans cette totalité.

Ici il s'agit donc des ovales comme d'un lieu où la pensée mathématique en acte pulse³, dans l'ouverture de différents registres (optique, algébrique, articulé, projectif), et du repérage de ceci dans l'histoire. Ce qui constitue une lecture de la cohérence⁴ du mathématicien Descartes, dont nous pensons que l'ovale reste l'objet décisif.

1. La recherche cartésienne des courbes optiques

Lors de son séjour à Paris en 1626, Descartes fréquente le cercle des savants qui gravitent autour de Mersenne et qui se préoccupent beaucoup à cette époque du problème de l'anacastique, c'est-à-dire la recherche du profil du dioptré qui transforme un rayon lumineux cylindrique en un faisceau conique. La recherche de l'anacastique est proposée à titre d'exemple pour « éclaircir » la Règle VIII des *Règles pour la direction de l'esprit* rédigées vers 1628. La lecture du propos nous permet de voir comment Descartes pense résoudre le problème de l'anacastique à cette époque : il faut être à la fois mathématicien et physicien. Pour trouver la solution, il faut connaître la manière dont le rayon pénètre dans le corps diaphane, donc la nature de

³ Pour une description constituée détaillée de l'idée de « pulsation », voir GUITART, *La Pulsation Mathématique*, 180 p., à paraître. On trouvera dans ce livre, au n° 68, une proposition de pratique en histoire des mathématiques intitulée « histoire de la pulsation », dont nous considérons le présent article comme une première mise en œuvre significative.

⁴ Sur ce point, spécifiquement sur la question de la double conception des courbes, à la suite de notre développement, on se reportera ici à notre conclusion. On pourra lire aussi ce que nous avons déjà avancé à ce sujet, en particulier en liaison avec la philosophie de Descartes, la question de la méthode et le statut de l'évidence, dans BARBIN, *La révolution mathématique du 17ème siècle. Méthode et invention du courbe*, thèse d'habilitation, vol. I, Université de Lille I, 1997, ouvrage à paraître, et dans GUITART, *op. cit.*

l'action de la lumière. Il écrit qu'il est « facile » de remarquer que la ligne cherchée dépend du rapport que gardent les angles de réfraction avec les angles d'incidence.

Un fragment du journal de Beeckman⁵, daté du 8 octobre 1628, nous apprend que Descartes a exploré les réfractions à l'aide d'un triangle de verre dont la paroi lm était couverte d'un écran percé en un point o (fig. 1). Il a alors annoncé que l'on peut connaître toutes les réfractions connaissant une réfraction pour un seul point o, grâce à une règle exprimée par l'égalité des rapports de quatre segments :

$$\frac{ab}{hg} = \frac{cd}{if}$$

où ae et ce sont deux rayons incidents égaux, eg et ef sont leurs rayons réfractés égaux, ab, cd, if et hg sont des parallèles à la paroi st du verre (fig. 2). Ainsi, la réfraction ne dépend que de la nature du milieu où elle se fait, et nous reconnaissons dans chacun des deux rapports le rapport des sinus de l'angle d'incidence et de l'angle de réfraction. Par conséquent, en octobre 1628, Descartes est en possession de ce que l'on appelle aujourd'hui « la loi des sinus » et que nous continuerons à appeler ici, avec lui, « la mesure des réfractions ».

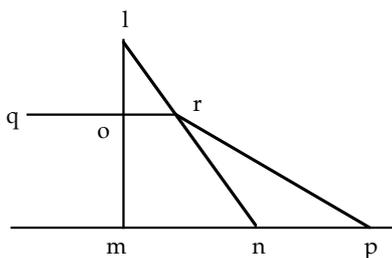


FIG. 1

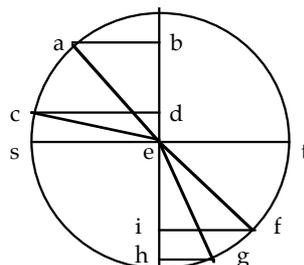


FIG. 2

Il annonce aussi que l'anacastique est une hyperbole, mais il ne fournit pas de démonstration et il charge Beeckman d'en trouver une. Celle-ci, approuvée par son ami, figure dans son journal⁶ à la date du 1^{er} février 1629.

Le problème technique de la taille des verres est partie intégrante de la recherche. Dans sa lettre du 13 novembre 1629 au lunetier Ferrier, Descartes donne des directives précises pour tailler les différentes sortes de verre, concave ou convexe, et il explique comment construire des machines adéquates. Avec les questions techniques, se posent aussi des questions mathématiques qui intéressent la conception cartésienne des courbes. En effet, les verres sont taillés à l'aide de roues et il ne faut pas que la taille entame trop le verre. La taille des verres à l'aide de roues demande

⁵ DESCARTES, *Œuvres*, A.T., tome X, p. 335-337.

⁶ DESCARTES, *op. cit.*, p. 341-342.

de voir la courbe taillée comme une enveloppe de cercles – pour parler avec un terme mathématique de la fin du XVII^e siècle –, et de comparer la courbure de la courbe taillée en un point avec la courbure du cercle qui taille le verre, courbure qui dépend du rayon du cercle (fig. 3). Cette façon technique de produire la courbe est à rapprocher de la méthode des cercles tangents, que nous présenterons plus loin.

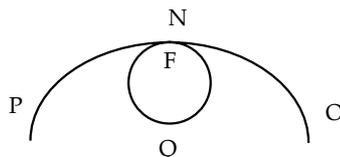


FIG. 3

Dans cette même lettre, Descartes explique précisément à Ferrier comment tailler un verre anacastique. Il considère un triangle de verre GHF sur lequel arrive un rayon incident ID perpendiculaire à GH qui doit sortir en passant par un point A. Il prend C, K, L et B les points de AE tels que : l'angle CDF égale l'angle FDA, CK = CD, AL = AD et BL = BK (fig. 4). Il écrit alors que le rapport de AB à BC est constant. Cette propriété découle de la règle de la mesure des réfractions, bien qu'il ne la mentionne pas⁷. En effet, pour montrer⁸ que le rapport de AB à BC est constant, menons les perpendiculaires ED à GF, CM et AN à ED (fig. 2).

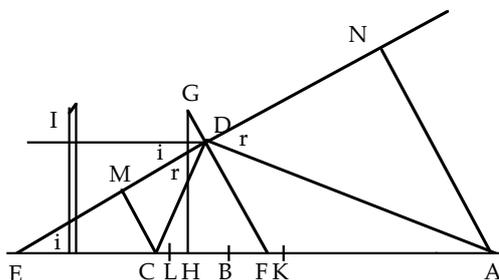


FIG. 4

La mesure des réfractions est égale :

- au rapport $\frac{CM}{CD} : \frac{CM}{CE} = \frac{CE}{CD}$, dans les triangles CMD et CME,
- au rapport $\frac{AN}{AD} : \frac{AN}{AE} = \frac{AE}{AD}$, dans les triangles AND et ANE.

⁷ Costabel explique ce silence par le secret que veut garder Descartes sur la règle des sinus, dans COSTABEL, La réfraction de la lumière et la *Dioptrique* de Descartes, in *Démarches originales de Descartes savant*, Vrin, Paris, 1982, p. 68-69.

⁸ Voir aussi COSTABEL, Descartes et la mathématique de l'Infini, *Historia Scientiarum*, n° 29, 1985, p. 43.

En particulier on a donc $\frac{CE}{CD} = \frac{AE}{AD} = n$, d'où

$$AD - CD = \frac{1}{n} (AE - CE) = \frac{1}{n} AC = \frac{1}{n} (AB + BC).$$

Par ailleurs, par construction des points L, K et B, nous avons aussi

$$AD - CD = AL - CK = AL - LB + BK - CK = AB - BC,$$

d'où $AD - CD = AB - BC$. De là résulte que $n(AB - BC) = AB + BC$, et donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{n+1}{n-1}.$$

L'égalité $AD - CD = AB - CB$ indique que le point D est sur l'hyperbole de foyers A et C et de sommet B, et Descartes peut donner une construction point par point de l'anacastique à Ferrier. La conclusion est relativement aisée, car la solution est une courbe géométrique connue des Anciens. Il en est de même pour l'ellipse dont Descartes annonce à Beeckman⁹ qu'elle est aussi une courbe anacastique dans une lettre du 17 octobre 1630. En revanche, le problème des ovals va obliger Descartes à sortir du cadre de la géométrie grecque.

Dans le discours huitième de *La dioptrique*, Descartes démontre que l'ellipse puis l'hyperbole sont des courbes anacastiques, et le traitement est identique pour les deux courbes. En particulier, les deux démonstrations mathématiques suivent le même raisonnement. Pour « mieux faire concevoir » l'hyperbole, Descartes commence par donner la manière utilisée par les jardiniers pour la dessiner.

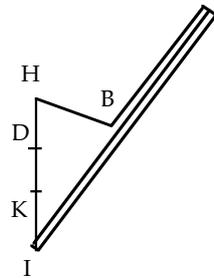


FIG. 5

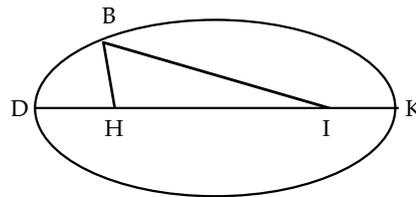


FIG. 6

Il faut une règle qui passe par un point fixe I et une corde plus courte que la règle attachée à l'une des extrémités de la règle et à un point fixe H. Dans la position initiale la règle passe par H et la corde longe la règle, quand la règle va tourner de part et d'autre de I, alors le point B de la corde qui longe toujours la règle va décrire une

⁹ DESCARTES, *Œuvres*, tome I, p. 163.

partie d'hyperbole (fig. 5). En échangeant les rôles de I et H, le point B décrit une autre partie d'hyperbole. De la même façon, pour « mieux comprendre la nature » de l'ellipse, Descartes donne le tracé des jardiniers qui consiste à faire tourner une corde entre deux points fixes H et I (fig. 6).

L'hyperbole est tracée à l'aide d'une construction « bien réglée »¹⁰ qui permet d'exhiber une relation simple, à savoir que tous les points B de l'hyperbole sont tels que $BI - BH$ est constant et égal à la longueur de la règle moins celle de la corde, c'est-à-dire encore, égal en position initiale à $DI - DH$, avec D l'un des sommets de l'hyperbole, ou encore égal à DK , avec K l'autre sommet de l'hyperbole. Ce faisant, Descartes ne fait pas seulement que donner une version « populaire » de l'hyperbole, il déconstruit l'hyperbole, objet « composé » défini dans la géométrie grecque comme intersection d'un cône et d'un plan, en prenant pour définition de la courbe ce qui était pour les Anciens une de ses propriétés, à savoir une relation arithmétique « simple » entre objets « simples » qui sont des segments : $BI - BH = DK$.

Dans *La dioptrique*, Descartes examine des systèmes composés de deux verres hyperboliques. En particulier, en accolant deux verres hyperboliques, il obtient un système optique qui permet de réfracter un faisceau incident venant d'un point i en un faisceau convergent en un point I (fig. 7).

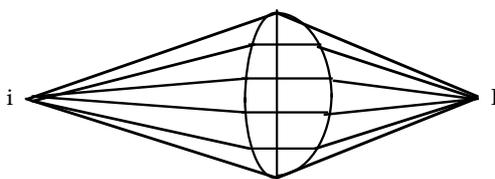


FIG. 7

Il montre qu'un système de deux verres elliptiques peut réaliser le même phénomène, il montre que l'on peut aussi prendre un système constitué d'un verre elliptique et d'un verre hyperbolique. Le problème des ovales consiste à trouver la forme d'un unique dioptré qui aurait le même effet.

2. Les trois définitions cartésiennes des ovales

Le fragment *Ovales Opticæ quatuor* des opuscules posthumes de Descartes édités en 1701 concerne la recherche sur les ovales¹¹. Il est daté par Paul Tannery de 1629 et il constitue les traces d'une recherche d'un intérêt historique majeur puisque, d'une part, la courbe cherchée n'est pas une courbe connue des Anciens et qu'il faut produire de nouveaux moyens de la désigner, et d'autre part, le problème est un pro-

¹⁰ Voir plus loin la définition des courbes géométriques par Descartes au Livre II de *La géométrie*.

¹¹ DESCARTES, *Œuvres*, tome X, p. 310-313.

blème inverse de tangence¹². La recherche des ovales intéresse donc à la fois la constitution cartésienne de la conception du courbe et celle de la méthode des cercles tangents. Le fragment permet de suivre de près les tentatives et la manière dont Descartes résout le problème¹³.

Dans la première partie du fragment, il part d'une définition algébrique de la courbe dépendant d'un paramètre. Ce qui laisse supposer, qu'à ce moment de la recherche de l'ovale, il la pense d'une certaine façon apparentée à l'ellipse. Pour savoir précisément comment est décrite algébriquement la courbe, il faudrait chercher des cercles tangents en chaque point de la courbe, et donc résoudre un problème inverse de tangence. L'ambition de chercher une courbe connaissant des cercles tangents en chaque point peut paraître à nos yeux extrêmement audacieuse. Mais, nous avons vu plus haut, qu'elle correspond bien à un geste technique que Descartes a traité : celui du lunetier qui taille le verre avec des roues dont les rayons doivent être bien déterminés. Descartes écrit ensuite une relation géométrique qui correspond à la règle de la mesure des réfractions, puis il mène un calcul identique à celui de la méthode des cercles tangents de *La géométrie*, y compris dans le choix de la lettre *e*. Ceci indique qu'il aurait forgé cette méthode avec la recherche des ovales. Mais, la courbe n'étant pas déterminée, le calcul ne peut pas aboutir.

Dans la deuxième partie du fragment, Descartes donne une construction « bien réglée » de la courbe : il faut une règle qui passe par un point fixe *R* et une corde attachée en un point fixe *C*, passant de *C* à *E*, puis à *B*, et de *B* revenant à *E*, et se prolongeant ensuite « à l'infini » vers *H*, de telle sorte que le point *E* décrit la courbe selon que s'ouvre davantage l'angle *ERC* (fig. 8). Puis il donne des expressions algébriques pour *ER*, *EB* et *EC*.

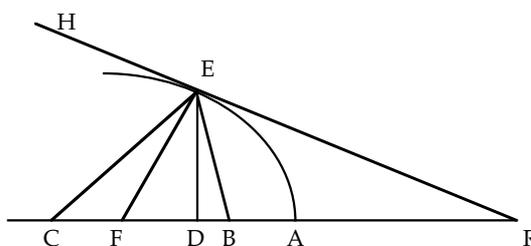


FIG. 8

Comment Descartes a-t-il obtenu cette construction « bien réglée » ? Elle semble être une composition des deux constructions de jardiniers, celle de l'ellipse et celle de l'hyperbole. En effet, pour une ellipse de foyers *C* et *B*, la corde irait direc-

¹² Et non pas un « problème inverse de tangentes », puisqu'il s'agit ici de cercles tangents.

¹³ Voir BARBIN, *La révolution mathématique du 17ème siècle. Méthode et invention du courbe*, *op. cit.*

tement de C à B en passant par E, tandis que pour une hyperbole de foyers B et C, la corde irait directement de B à H en passant par E. Ainsi, les deux constructions s'engrènent en laissant la corde libre de tourner autour de E et de B, de sorte qu'au cours du mouvement les ellipse et hyperbole en jeu varient, tout en gardant les mêmes foyers, dont un commun. Cette remarque indique que Descartes utilisait les constructions de jardiniers alors qu'il travaillait sur l'ovale, et qu'il en a tiré parti pour la déterminer. Pourquoi cette composition ? On peut avancer une hypothèse en la rapprochant de l'assemblage de verres qui est exposé dans *La dioptrique*. En effet, un assemblage de deux hyperboles peut réaliser le même effet que la courbe cherchée, mais aussi un assemblage d'une hyperbole et d'une ellipse. La date du fragment n'est pas suffisamment précise pour indiquer si Descartes sait à cette époque que l'ellipse est anaclastique (nous avons dit qu'il l'annonce à Beeckman en octobre 1630), mais qu'il le sache ou non, il compose les deux constructions pour déterminer l'ovale. Notons toutefois que la construction semble irréalisable telle qu'elle est énoncée, puisque la corde n'est pas de longueur fixée. Mais Descartes en donne une description précise dans *La géométrie* de 1637.

Le problème des ovales est traité dans le livre II de l'ouvrage, intitulé *De la nature des lignes courbes*, qui débute par une double conception des courbes géométriques, à partir d'une construction « bien réglée » et à partir d'une équation. La conception de la courbe comme équation fournit une méthode pour trouver les cercles tangents à une courbe dont on connaît une équation. Descartes donne trois applications de la méthode, puis il écrit : « Au reste afin que vous sachiez que la considération des lignes courbes ici proposée n'est pas sans usage, et qu'elles ont diverses propriétés, qui ne cèdent en rien à celles des sections coniques, je veux encore ajouter ici l'explication de certaines Ouales, que vous verrez être très utiles pour la Théorie de la Catoptrique, et de la Dioptrique »¹⁴. Le traitement des ovales occupe toute la fin du livre II. Il ne s'agit pas simplement de donner un exemple de la méthode des cercles tangents, mais de montrer au lecteur la pertinence de la conception de la courbe proposée dans ce livre. D'une part, parce que les ovales ont un intérêt mathématique propre et méritent donc autant d'attention que les coniques. D'autre part, parce que ces courbes sont utiles pour l'optique, là où justement les coniques s'avèrent insuffisantes. Descartes parle d'ovales au pluriel parce qu'il va distinguer et classer les ovales selon quatre types qui correspondent à des propriétés différentes. Nous nous bornerons ici à examiner l'ovale du premier type¹⁵, dont vont être données trois descriptions.

L'étude débute par une construction point par point de l'ovale. Considérons un axe avec trois points F, A et G, un axe AR tel que $AR = AG$. Pour chaque point 5 de AG, on considère le point 6 de AR tel que le rapport de A6 à A5 soit celui « qui me-

¹⁴ DESCARTES, *Discours de la méthode*, 1637, rééd. Fayard, Paris, 1987, p. 379.

¹⁵ Pour un traitement des quatre types d'ovales, voir BAUDOIN, *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert, Paris, 1938, p. 10-12.

sure les réfractons » ; alors les points d'intersection de deux cercles (F, F5) et (G, R6) sont des points de l'ovale (fig. 9). Ensuite sont données, par des procédés analogues, les constructions point par point des autres types d'ovales qui résultent des positions relatives des points A, F, G et R.

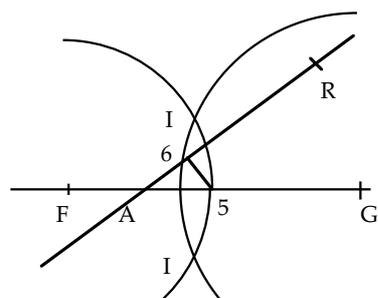


FIG. 9

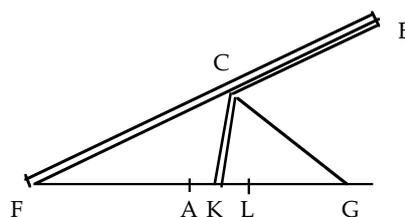


FIG. 10

Puis Descartes écrit qu'on « pourrait encore trouver une infinité d'autres moyens pour décrire ces mêmes ovales »¹⁶, et il donne une construction « bien réglée » assez semblable à celle du fragment des *Excerpta Mathematica*. Il considère un axe avec trois points A, F, G, tels que A est le milieu de FG, le point L tel que le rapport de LG sur FL « mesure les réfractons » et le point K milieu de AL. Puis il fait tourner une règle FE autour de F, à laquelle est attachée une corde en E qui va de E à C, point de la règle, puis de C à K, puis de K à C, puis de C à G, auquel elle est aussi attachée (fig. 10). Alors le point C va décrire une ovale.

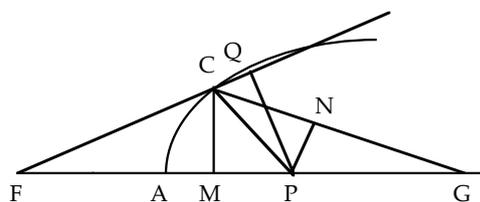


FIG. 11

Enfin, après avoir énoncé les différentes propriétés optiques des arcs des quatre types d'ovales, Descartes remarque¹⁷ (fig. 11) : « Mais il ne faut pas que j'omette la démonstration de ce que j'ai dit, et à cet effet, prenons par exemple le point C à discrétion en la première partie de la première de ces ovales ; puis tirons la droite CP, qui coupe la courbe au point C à angles droits, ce qui est facile par le problème précédent ; car prenant b pour AG, c pour AF, $c + z$ pour FC ; et supposant que la pro-

¹⁶ DESCARTES, *op. cit.*, p. 382.

¹⁷ DESCARTES, *op. cit.*, p. 386.

portion qui est entre d et e , que je prendrai ici toujours celle qui mesure les réfractations du verre proposé, désigne aussi celle qui est entre les lignes $A5$ et $A6$, ou semblables, qui ont servi pour décrire cette ovale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour GC : on trouve que la ligne AP est $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$ ».

Descartes ne donne pas le calcul qui conduit à l'expression de AP . Ce calcul résulte de la méthode des cercles tangents que Descartes a exposée dans le cas où la courbe est définie par une équation algébrique. Ici l'ovale n'est pas définie par une équation, mais par un système de deux équations :

$$FC = c + z \quad \text{et} \quad GC = b - \frac{e}{d}z.$$

Il est intéressant de remarquer qu'il est inutile d'exhiber l'équation de l'ovale, qui serait de degré quatre, pour obtenir le résultat annoncé par Descartes. En effet, en écrivant deux fois le théorème de Pythagore dans les triangles CFM et CGM , on peut écrire y égale à AM en fonction de z . À partir de quoi on peut procéder de manière analogue à la situation où l'équation de la courbe est donnée.

Il reste ensuite à vérifier que la courbe est bien la courbe optique cherchée, à savoir une courbe telle que des rayons partant de F et allant en un point C de la courbe se réfracteront au point G . Pour cela, Descartes démontre que

$$\frac{PQ}{PN} = \frac{FP \times CG}{GP \times CF},$$

avec PN et PQ perpendiculaires à CF et CG (fig. 11), en utilisant la similitude des triangles rectangles PQF et CMF , et celle des triangles rectangles PNG et CMG . Puis il calcule le second membre de cette équation à l'aide de l'expression de AP , et vérifie qu'il est bien égal au rapport de d sur e .

Ainsi, sont fournies trois descriptions de l'ovale : une construction point par point, une construction « bien réglée » et une définition algébrique. Descartes choisit de donner d'abord une construction point par point, puis la définition algébrique lorsqu'il veut démontrer la propriété optique. La première et la troisième descriptions sont équivalentes. En revanche, il est loin d'être immédiat que la construction « bien réglée » soit équivalente aux deux autres, et cependant Descartes n'en dit rien. Il a pourtant, au début du livre II de l'ouvrage, pris soin de montrer comment déduire l'équation d'une courbe à partir d'une construction bien réglée. Si les calculs sont ici un peu longs, il aurait pu aussi passer sous silence la construction « bien réglée ». La présence de cette construction manifeste à la fois la volonté de dire les voies qui ont conduit à la résolution, car elle a joué un rôle heuristique dans la recherche cartésienne, et la nécessité de tenir à la voie d'accès aux courbes que constitue la construction bien réglée.

Nous pouvons donner les grandes lignes du calcul qui conduit de la forme algébrique à la construction « bien réglée ». Plaçons nous dans le cas particulier qui est celui de la construction, à savoir $AF = AG = c$. Nous avons $CF = c + z$ et $CG = c - \frac{e}{d}z$, et nous introduisons le point K de la construction qui vérifie $AK = \frac{c}{2} \frac{d-e}{d+e}$. Dans le triangle CFG nous avons la relation¹⁸ :

$$KG \times CF^2 + KF \times CG^2 - FG \times CK^2 = KG \times KF \times FG,$$

dans laquelle on remplace KG par $c - AK$ et FK par $c + AK$, puis CF, CG et AK par leurs expressions algébriques. On obtient après simplification :

$$CK = \frac{1}{2} \frac{d+e}{d} z + \frac{c}{2} \frac{d-e}{d+e}.$$

Or $CF - CG = \frac{d+e}{d} z$, d'où $CG + 2CK - CF = 2AK$. Cette égalité est bien celle qui définit les points C décrits par la construction « bien réglée », car nous avons $CE + CG + 2CK = \text{corde}$, ou $CG + 2CK - CF = \text{corde} - \text{tige}$, et en position initiale, quand le point A est décrit, nous avons $\text{corde} - \text{tige} = 2AK$.

Descartes ne montre pas l'équivalence entre les différentes descriptions de l'ovale, mais, comme nous allons le voir, pour lui, toute construction « bien réglée » décrit une courbe géométrique qui pourra être exprimée algébriquement.

3. La double conception cartésienne des courbes géométriques et la méthode des cercles tangents

Le problème des ovales consiste en la recherche de courbes inconnues, à savoir les courbes qui réalisent un certain effet optique. Bien des problèmes auxquels s'est intéressé Descartes avant la publication de sa *Géométrie* consistent en la recherche de courbes inconnues, mais les ovales ont joué un rôle majeur dans la double conception du courbe proposée au livre II de l'ouvrage et dans l'invention de la méthode des cercles tangents exposée au même livre. C'est dans la pratique mathématique même de Descartes, aux prises avec la résolution du problème des ovales que nous pouvons comprendre la cohérence de la double conception du courbe¹⁹ et l'imbrication de celle-ci avec la méthode des cercles tangents. De cette méthode est déduite une méthode pour trouver les tangentes à une courbe, mais la procédure mathématique qui permet d'affirmer cette déduction ne doit pas occulter le propos de

¹⁸ Relation dite aujourd'hui de Stewart, obtenue en appliquant plusieurs fois le théorème de Pythagore.

¹⁹ Cette double conception, dont nous disons qu'elle est cohérente, est analysée tout au contraire en terme de contradiction, et même de conflit dans BOS, On the Representations of Curves in Descartes' *Géométrie*, *Archive for History of exact sciences*, vol. 24, n° 4, 1981, p. 295-298. Vuillemin parle d'une opposition entre la construction mécanique et la construction graphique des courbes de Descartes dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, 1960, PUF, Paris, p. 86.

Descartes. Obtenir des cercles tangents et obtenir des droites tangentes à une courbe ne sont pas équivalents : il faut cesser d'en faire l'amalgame²⁰ pour lire le travail mathématique de Descartes et pour apprécier à sa juste valeur l'importance²¹ qu'il accorde à l'application de sa méthode aux ovales dans le livre II de la *Géométrie*.

Au début du livre II, Descartes explique qu'il appelle géométriques les courbes que l'on peut « imaginer décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers sont entièrement réglés par ceux qui les précèdent »²², et qu'il appelle « mécaniques » les autres. Après avoir donné un exemple, celui des courbes décrites par le compas cartésien, il poursuit en écrivant que pour comprendre ensemble et distinguer entre elles les courbes géométriques, il « ne sache rien de meilleur que de dire » que les points d'une courbe géométrique « ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par une équation, en tous par une même »²³.

Même si la conception par mouvements bien réglés manque à nos yeux de précision, il n'y a pas lieu d'imaginer dans la double conception cartésienne du courbe un conflit ou une contradiction, de voir dans la conception de la courbe à partir du mouvement un archaïsme quelconque²⁴, ou encore de voir dans la conception algébrique un triomphe de la métaphysique²⁵. Il n'y a d'ailleurs pas de conflit ou de contradiction pour Descartes. Après avoir énoncé la conception équationnelle de la courbe, il calcule l'équation d'une courbe construite par mouvements bien réglés et il écrit : « Et en quelque autre façon, qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte »²⁶. Il s'agit donc, tout au contraire, de comprendre la coexistence des deux approches et la cohérence de la double conception du courbe au sein de la pratique géométrique et de la méthode cartésiennes.

Or, la recherche de l'ovale est exemplaire pour comprendre la coexistence des deux approches dans la pratique géométrique de Descartes. En effet, certaines courbes auxquelles le géomètre ou le physicien s'intéresse sont décrites par des mouvements et, à partir du moment où elles le sont de manière précise et exacte, il ne doit pas les exclure de sa recherche. Mais, par ailleurs, certains problèmes conduisent

²⁰ Cet amalgame est une constante dans les travaux historiques.

²¹ Bos ne consacre qu'une quinzaine de lignes aux courbes optiques dans son étude historique des courbes dans *La géométrie*, BOS, *op. cit.*, p. 318-319.

²² DESCARTES, *Discours de la méthode*, p. 349

²³ DESCARTES, *op. cit.*, p. 351.

²⁴ C'est ainsi que Serfati interprète les deux définitions de la courbe in SERFATI, Les compas cartésiens, *Archives de philosophie*, tome 56, Cahier 2, 1993, p. 197-230. La conception par mouvement n'a rien d'archaïque au XVII^e siècle, elle est d'ailleurs, selon Descartes lui-même, en rupture avec les Anciens.

²⁵ C'est oublier le rôle du mouvement dans la philosophie cartésienne.

²⁶ DESCARTES, *Discours de la méthode*, *op. cit.*, p. 354.

à des situations où l'approche algébrique est nécessaire pour leurs résolutions. C'est de manière toute pragmatique qu'on pourrait comprendre la possibilité de l'équivalence entre les deux approches : « on pourra toujours trouver une équation » écrit Descartes²⁷. En effet, bien qu'avec son étude générale de la nature du courbe, il dépasse la simple notion de courbe des Anciens pour élaborer un concept de courbe, il s'agit toujours pour lui de résoudre des problèmes concernant telle ou telle courbe.

Mais il y a plus : il y a pour lui l'évidence qu'on pourra toujours trouver une équation. C'est donc aussi sur le terrain de la méthode qu'il faut interroger la coexistence et la cohérence de la double conception du courbe. Or, par rapport au double souci de limitation et d'ordre de la méthode cartésienne, la double conception du courbe est parfaitement cohérente puisque l'une des approches limite ce que l'autre ordonne. D'une part, la construction bien réglée permet relativement facilement de limiter le champ des courbes au-delà duquel il est inutile de s'aventurer. En revanche, la définition équationnelle est plus délicate à mettre en œuvre pour rejeter une courbe, puisque c'est seulement si nous n'avons pas d'équation que nous pourrons conclure²⁸. D'autre part, la construction bien réglée semble n'être d'aucun secours pour ordonner les courbes selon leurs complexités, d'autant qu'une courbe peut être ainsi décrite de plusieurs façons, car il faudrait classer les mouvements simples puis encore les façons dont ils s'enchaînent. En revanche, la définition équationnelle, en un sens canonique, donne à voir immédiatement la complexité de la décomposition en droites : elle peut être lue, selon Descartes, avec le degré de l'équation.

La définition équationnelle permet de donner une méthode pour trouver un cercle tangent à une courbe en un point de la courbe. Mais la méthode des cercles tangents demande de penser également le mouvement de deux points qui se rapprochent. En effet, elle consiste à écrire l'équation dont les racines sont les abscisses (ou les ordonnées) des points d'intersection de la courbe et d'un cercle dont le centre P appartient à un axe AG (fig. 12). Cette équation est obtenue à partir de l'équation de la courbe et de l'équation du cercle, écrite en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle CMP. Descartes désigne par C et E deux points d'intersection de la courbe et du cercle (fig. 13), et il écrit : « Plus ces deux points, C et E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines; et enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joints en un ; c'est-à-dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe CE sans la couper »²⁹. Pour trouver le cercle tangent, il suffit d'écrire algébriquement que le cercle et la courbe doivent se toucher en un point, à savoir que cette équation doit avoir une racine double. Ainsi, le principe de la méthode repose sur le mouvement, tandis que son effectuation dépend de l'algèbre.

²⁷ Il s'agit ici de se situer au sein de la pratique géométrique de Descartes.

²⁸ N'oublions pas que la distinction cartésienne entre courbe géométrique et courbe mécanique n'est pas la distinction ultérieure entre courbe algébrique et courbe transcendante.

²⁹ DESCARTES, *op. cit.*, p. 374.

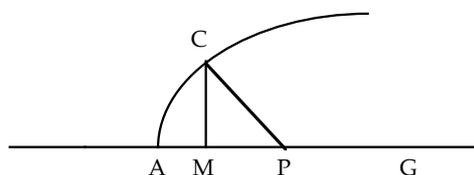


FIG. 12

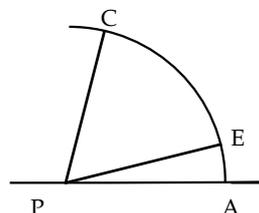


FIG. 13

Nous avons déjà indiqué que cette méthode n'est pas équivalente à celle de trouver la tangente à une courbe. Précisons ce point, en relation avec la double conception du courbe. Remarquons d'abord qu'en donnant un cercle tangent, on en dit plus sur la courbe qu'en donnant une tangente. En effet, donner une tangente ne peut rien permettre de présumer de sa concavité (fig. 14), tandis que donner un cercle tangent peut indiquer une concavité de la courbe puisque Descartes traite toujours la situation où le cercle sera dans la concavité de la courbe (fig. 15 a).



FIG. 14

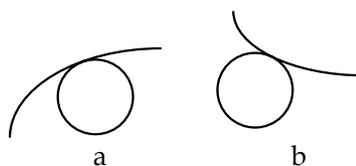


FIG. 15

Or, pour traiter des courbes optiques, Descartes s'intéresse à la détermination de la concavité et de la convexité d'une courbe, d'une part, parce qu'elles indiquent des modes de réfraction différents, et d'autre part, parce que tailler des verres concaves est plus délicat que de tailler des verres convexes. Précisément, la taille de verres concaves doit se faire avec des roues plus petites, car il faut faire tourner une roue sans qu'elle entame trop le verre. Autrement dit, tailler un verre demande de penser la courbe, pas seulement en un point, mais autour de ce point, et de l'imaginer comme résultante de mouvements circulaires. Ainsi, la méthode des cercles tangents est liée à une conception dynamique de la courbe qui correspond aux préoccupations optiques de Descartes.

4. Réfraction et calcul infinitésimal. Le problème des caustiques

Dans le livre I de ses *Principia mathematica* de 1686, Newton utilise les nouveaux principes du calcul infinitésimal pour résoudre le problème des ovals³⁰. Cette application montre l'efficacité du calcul newtonien, calcul qui est fondé sur le mou-

³⁰ NEWTON, *Principia*, 1686, trad. anglaise de 1729, rééditée par Cajori, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1966, p. 231-232.

vement. En effet, le problème est résolu en quelques lignes, et cela conduit à une nouvelle description des ovales.

Il s'agit de déterminer la courbe CDE telle que les rayons émergent du point A se réfractent au point B (fig. 16). Newton examine deux points D et E de la courbe et les perpendiculaires EF et EG aux rayons, puis il suppose que le point E « s'approche et se fond » avec le point D. Il écrit alors que le « rapport ultime » de l'accroissement DF de AD sur la diminution DG de DB est égal au rapport du sinus de l'angle d'incidence sur le sinus de l'angle de réfraction. En effet, quand E se rapproche de D, la portion de courbe DE peut être assimilée à la tangente à la courbe au point D. Par conséquent, l'angle entre le rayon incident AD et la normale DQ est égal à l'angle DEF, et l'angle entre le rayon réfracté DB et la normale DQ est égal à l'angle DEG. Or le rapport des sinus des angles DEF et DEG est égal au rapport de DF sur DG.

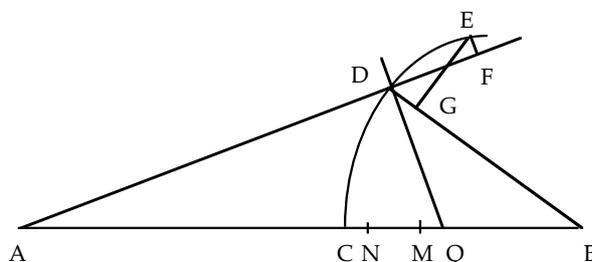


FIG. 16

Par la loi de réfraction, le rapport du sinus de l'angle d'incidence sur le sinus de l'angle de réfraction est donné. Newton écrit que ce rapport est encore égal au rapport de l'accroissement CM de AC sur la diminution CN de BC. Autrement dit, en considérant que le point D est l'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle de centre B et de rayon BN, un point de l'ovale est tel que le rapport de ses « distances » aux deux cercles fixes (A, AC) et (B, BC) est constant et égal au rapport de réfraction.

La notion de caustique est introduite par Tschirnhaus en 1682 : il considère des rayons parallèles qui se réfléchissent sur une courbe AB, alors les rayons réfléchis sont les tangentes d'une courbe AF qu'il appelle la courbe caustique³¹ (fig. 18). Cinq ans plus tard, Johann Bernoulli s'intéresse à la courbe caustique en remarquant qu'elle généralise la notion de foyer des Anciens, comme point de l'axe vers lequel convergent des rayons réfléchis. Il utilise alors la notion d'infiniment petit pour déterminer les points de la caustique comme points d'intersection de deux rayons réfléchis distants d'une longueur infiniment petite. De cette façon, il relie l'idée de caustique à celles de centre de courbure et de développée d'une courbe. La théorie des

³¹ TSCHIRNHAUS, *Acta Eruditorum*, nov. 1682. Voir aussi CHASLES, *op. cit.*, 1837, p. 110-115.

développées et des développantes a été introduite par Huygens dans son *Horologium Oscillatorium* de 1673. Huygens considère un fil qui s'enroule sur une ligne courbe AC « de telle manière que la partie libre du fil reste toujours tendue », le point D décrit alors une courbe AE appelée la développante de la courbe AC tandis que AC est appelée la développée de AE³² (fig. 17).

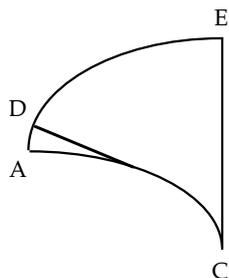


FIG. 17

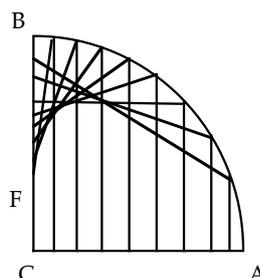


FIG. 18

Au début des années 1690, les recherches des caustiques par réflexion, mais aussi par réfraction, font l'objet des travaux menés simultanément par Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli et le Marquis de l'Hospital³³. Le premier considère les caustiques secondaires par réflexion comme développées de courbes qu'il appelle anticaustiques et dont il donne une construction géométrique³⁴. Le second démontre ainsi qu'une caustique par réflexion d'une cycloïde est une cycloïde. Le troisième consacre deux chapitres de son traité de 1696, *Analyse des infiniments petits*, à l'application du calcul différentiel de Leibniz au problème des courbes caustiques par réflexion et par réfraction³⁵.

En 1692, Leibniz publie un opuscule³⁶ intitulé *Construction à partir d'une infinité de courbes ordonnées et concourantes, de la courbe tangente à chacune d'elles ; nouvelle application pour ce faire de l'analyse des infinis*, dans lequel il propose une généralisation du problème des développées, à savoir le problème des enveloppes d'une courbe qui consiste à trouver une courbe tangente à une famille de courbes. Ce problème va conduire Leibniz à de nouvelles notions comme « coordonnées », « constante », « variable », « paramètres » et « fonction », c'est-à-dire à mettre en

³² HUYGENS, *Œuvres complètes*, tome XVIII, p. 188. Sur les circonstances qui ont conduit Huygens à cette théorie, voir BARBIN, Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens, in *Les mathématiques dans la culture d'une époque*, IREM de Strasbourg, 1987, p. 143-163.

³³ Voir RADELET-DE GRAVE, Les lois de la réflexion et de la réfraction comme exercice de calcul, in *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, 1998, p. 117-137.

³⁴ BERNOULLI, Lineae cycloïdales, Evolutae, Anti-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae, Earum usus & simplex ratio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque, *Acta Eruditorum*, mai 1692, p. 207-213.

³⁵ DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 2^e éd., Montalant, Paris, p. 104-130.

³⁶ LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1989, p. 210-221.

place le dispositif général d'une théorie des courbes. Dans un opuscule, publié deux ans plus tard et intitulé *Nouvel emploi du calcul différentiel appliqué à différentes constructions possibles d'une courbe à partir d'une propriété de ses tangentes*³⁷, il traite l'exemple suivant : trouver une courbe tangente à une famille de cercles qui répond à la « loi commune » : $x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + ab$. Dans cette équation a est constant et b est variable, il faut « la différencier selon b » : $2b db = 2x db + a db$. Cette équation permet d'obtenir $b = x + a/2$. En remplaçant b par cette valeur, on obtient l'équation de la courbe cherchée : $y^2 = ax + a^2/4$.

5. La description polaire des lignes aplanétiques de Quételet

La description de Newton ci-dessus est celle que, de fait, Quételet reprend et élargit dans son étude des lignes aplanétiques au début du XIX^e siècle. La terminologie « aplanétique » se réfère directement aux propriétés optiques des ovales³⁸. L'intérêt du mathématicien belge pour les lignes aplanétiques est lié au problème optique des caustiques. Dans son mémoire de 1829, intitulé « Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires », Quételet ne se borne pas aux lignes et appelle aplanétiques les surfaces à deux foyers « telles que les deux rayons vecteurs, menés de chacun de leurs points aux deux foyers, étant pris chacun avec une quantité constante, sont dans le rapport de réfraction »³⁹.

Soient a et b les rayons de deux sphères ayant pour centres les deux foyers F et F' , et soient ρ et ρ' les deux rayons vecteurs MF et MF' menés d'un point M de la surface aplanétique, alors $\rho - a$ et $\rho' - b$ sont les portions de rayons vecteurs extérieurs aux deux sphères (fig. 17). En notant n l'indice de réfraction, nous avons :

$$\frac{\rho - a}{\rho' - b} = n.$$

En considérant que le cas $n = -1$ correspond à celui de la réflexion, Quételet va traiter en même temps réfraction et réflexion.

En prenant $r = a - bn$, il obtient l'équation bi-polaire (1) : $\rho - \rho'n = r$. En se limitant aux sections méridiennes des surfaces aplanétiques, en notant c la distance des deux foyers et α l'angle que le rayon vecteur FM forme avec le diamètre FF' (fig. 19), il obtient, partant plutôt de l'équation $\rho' - \rho n = r$, l'équation polaire (2) d'une ligne aplanétique :

$$\rho^2 - 2\rho \frac{c \cos \alpha + nr}{1 - n^2} = \frac{r^2 - c^2}{1 - n^2}.$$

³⁷ LEIBNIZ, *op. cit.*, p. 231-281.

³⁸ Car « aplanétique » signifie « sans aberration », du grec $\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta\sigma$, errant. Ces lignes sont aussi appelées « stigmatiques » dans les traités classiques de praticiens tels CHRETIEN, *Calcul des combinaisons optiques*, 5^e éd., Masson, Paris, 1980, p. 90.

³⁹ QUETELET, Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome V, 1829, p. 31.

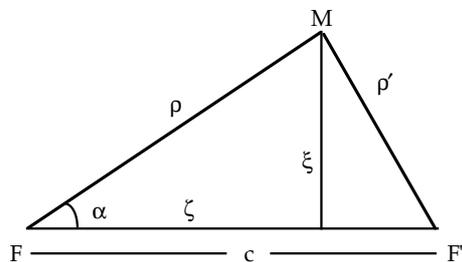


FIG. 19

Ces descriptions permettent facilement, d'une part, de voir de nombreuses courbes comme des cas particuliers des lignes aplanétiques et, d'autre part, de montrer diverses propriétés. Ainsi, si on admet que n peut prendre des valeurs quelconques, positives, ou négatives, l'équation polaire permet de remarquer que l'ellipse (avec $n = -1$) et l'hyperbole (avec $n = 1$) sont des cas particuliers de lignes aplanétiques. Quételet indique plusieurs propriétés des lignes aplanétiques qui peuvent se déduire de leur équation polaire.

La première propriété énonce que, l'équation étant du second degré, la courbe aplanétique se compose en général de deux branches, tantôt unies, tantôt séparées. En fait l'une correspond à l'équation bi-polaire $\rho' - \rho n = r$, l'autre à l'équation $\rho' - \rho n = -r$. En effet⁴⁰, l'allure générale d'une ovale complète consiste en deux branches contenues l'une dans l'autre ; l'ovale intérieure est convexe en forme d'œuf, et l'ovale extérieure est convexe ou cordiforme. Dans le cas particulier où l'une des branches est réduite en un point, l'autre est le limaçon de Pascal. En effet, dans le cas où $r = c$, l'équation (2) devient une équation du premier degré qui est l'équation du limaçon :

$$\rho - 2 \frac{c \cos \alpha}{1 - n^2} - \frac{2nc}{1 - n^2} = 0.$$

Quételet remarque que le produit de deux racines de l'équation polaire étant constant, le produit des rayons vecteurs menés dans une même direction d'un même foyer aux deux branches de la courbe est constant. Ainsi, les deux ovales, intérieure et extérieure, s'échangent, avec la terminologie ultérieure de Kelvin, dans une transformation par rayons vecteurs réciproques ou inversion, de pôle un foyer.

En examinant l'expression de la somme de ces racines, Quételet en déduit que si l'on porte bout à bout deux rayons vecteurs menés dans une même direction d'un même foyer aux deux branches de la courbe, alors l'extrémité décrit une épicycloïde (de fait, un limaçon).

⁴⁰ Voir BAUDOIN, *op. cit.*

Dans le cas particulier où, dans l'équation polaire, $r = 0$, les deux branches de la courbe se confondent et forment un cercle, que Quételet appelle « cercle diamètre » et dont l'équation est :

$$\rho^2 - 2\rho \frac{c \cos \alpha}{1 - n^2} + \frac{c^2}{1 - n^2} = 0.$$

L'apparition des deux branches, inaperçues de Descartes, et réalisée par le passage à l'équation polaire, est importante dans l'examen de la classification des ovales qu'il a proposée. Notons de plus que c'est seulement en considérant l'ovale comme constituée de ses deux branches que l'ovale est une courbe algébrique, au sens moderne du terme.

Les deux dernières propriétés énoncées par Quételet sont particulièrement intéressantes, de par les résultats énoncés, mais aussi pour les démonstrations produites. Nous allons d'abord examiner la description des lignes aplanétiques comme projection d'intersections de cônes, qui passe par une démonstration algébrique chez Quételet, et qui donne l'occasion à Chasles de donner une description plane purement géométrique de l'ovale. Nous examinerons ensuite la description des ovales comme enveloppe d'une famille de cercles centrés sur le cercle diamètre, dont la démonstration mêle géométrie et optique.

6. Les ovales comme projection d'intersections de deux cônes et la description géométrique de Chasles

Au début du XIX^e siècle, à la suite des travaux de Monge, la géométrie projective se développe et renouvelle l'intérêt pour la description des coniques par intersections de cônes de la géométrie grecque. Quételet est témoin de son époque en écrivant : « Les lignes aplanétiques peuvent être considérées comme les projections orthogonales de l'intersection de deux cônes de révolution du second degré qui ont leurs axes perpendiculaires au plan des lignes aplanétiques ; les deux foyers sont les projections des sommets des deux cônes »⁴¹. Il le « déduit de manière très simple de l'équation en coordonnées rectangulaires des lignes aplanétiques » (fig. 19) obtenue à partir de l'équation bi-polaire (1) : $r = \sqrt{\xi^2 + (\zeta - c)^2} - n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$, qui peut être écrite sous la forme $\sqrt{\xi^2 + (\zeta - c)^2} = r + n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$. Quételet remarque que chacun des deux membres de l'équation peut être regardé comme « primitivement égal à une troisième ordonnée que l'élimination a fait disparaître » :

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi^2 + (\zeta - c)^2} &= \eta \quad \text{ou} \quad \xi^2 + (\zeta - c)^2 = \eta^2, \\ r + n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} &= \eta \quad \text{ou} \quad n^2(\xi^2 + \zeta^2) = (\eta - r)^2. \end{aligned}$$

⁴¹ QUETELET, *op. cit.*, p. 35.

La première équation obtenue est celle d'un cône C_1 ayant son sommet dans le plan des ξ, ζ et de coordonnées $\xi = 0, \zeta = c$. La seconde équation est celle d'un cône C_2 ayant son sommet sur l'axe des η à la distance r du plan des ξ, ζ . L'angle que forment les génératrices du cône C_1 avec l'axe est égal à 45° , et la tangente de l'angle que forment les génératrices du cône C_2 avec l'axe est l'inverse de l'indice de la réfraction.

Quételet examine la situation lorsque r varie. Quand $r = 0$, alors les sommets des deux cônes sont dans le plan des ξ, ζ et la ligne aplanétique est le « cercle diamètre » d'équation : $\xi^2 + (\zeta - c)^2 = n^2(\xi^2 + \zeta^2)$. Au fur et à mesure que r varie, n restant fixe, le sommet du cône C_2 « se meut » sur l'axe des η , les lignes d'intersection des deux cônes changent, et les projections orthogonales donnent toutes les lignes aplanétiques qui ont des foyers communs pour un rapport de réfraction donné. Quand $r = c$, avec c la distance des deux foyers, alors le sommet du cône C_2 se trouve sur la surface du cône C_1 , et la ligne aplanétique « présente généralement un nœud par l'union de ses deux branches ».

Quételet examine également le cas où $n = -1$, c'est-à-dire celui de la réflexion. Dans ce cas, l'angle que forment les génératrices du cône C_2 avec l'axe est égal à 45° , donc les génératrices des deux cônes sont parallèles, de plus leur ligne d'intersection est plane, et la projection orthogonale sur un plan perpendiculaire aux axes est une section conique qui a pour foyers les projections des sommets des deux cônes.

Dans la note XXI de son *Aperçu historique*, Chasles signale la manière dont Quételet forme « les ovales de Descartes ou lignes aplanétiques », en notant que cette manière permet d'obtenir les deux portions d'une ovale. Puis il remarque qu'il existe une autre manière de décrire les ovales par une construction géométrique qui évite de considérer des lieux ou des surfaces. Cette construction présente également l'avantage de donner les deux portions d'une ovale, et Chasles la juge « plus expéditive » que celle de Descartes. Il énonce que « Étant donnés deux cercles dans un plan ; si, autour d'un point fixe, pris sur la droite qui joint leurs centres, on fait tourner une transversale qui rencontre les cercles chacun en deux points ; les rayons menés des centres des deux cercles à leurs points de rencontre par la transversale, respectivement, se couperont en quatre points, dont le lieu géométrique sera une ligne aplanétique complète, ayant ses deux foyers situés aux centres des deux cercles »⁴².

Chasles considère donnés deux cercles de centres O et O' , un point A sur la droite OO' et une transversale aux cercles passant par A qui coupe les deux cercles en quatre points. Notons M et M' deux de ces points d'intersection, il s'agit de montrer que le point d'intersection P de OM et de $O'M'$ appartient à une ovale de centres O et O' (fig. 20).

⁴² CHASLES, *op. cit.*, p. 351.

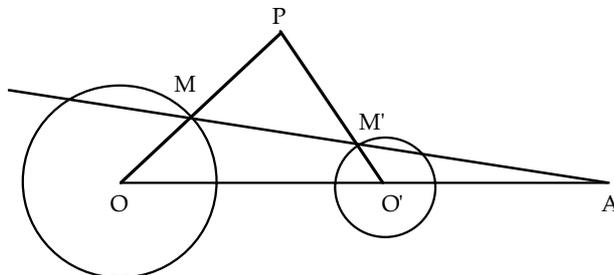


FIG. 20

Il applique le théorème de Ptolémée, dit aussi de Ménélaus, au triangle POO' et à la transversale $AM'M$. Ce théorème est l'extension du théorème de Thalès à la géométrie perspective. Son recours est devenu familier aux géomètres du XIX^e siècle, depuis la théorie des transversales de Carnot. Nous avons :

$$\frac{AO}{AO'} \times \frac{M'O'}{M'P} \times \frac{MP}{MO} = 1.$$

En posant $OM = R$, $O'M' = R'$, $PO = r$ et $PO' = r'$, nous obtenons :

$$\frac{AO}{AO'} \times \frac{R'}{r' - R'} \times \frac{r - R}{R} = 1.$$

En posant $\frac{AO}{AO'} \times \frac{R'}{R} = \frac{1}{h}$, nous avons finalement l'équation bi-polaire $r - R = h(r' - R')$, qui indique que P est bien sur une ovale de foyers O et O' .

Chasles remarque que, de fait, un troisième point O'' existe, sur l'axe OO' de symétrie de l'ovale, qui est tel que la dite ovale admette aussi, tant vis-à-vis de O et O'' que de O' et O'' , une équation bi-polaire de même forme linéaire. Les trois points O , O' et O'' , uniques, sont appelés les trois foyers de l'ovale. Chasles pense être le premier à exhiber un troisième foyer, mais, de fait, la construction « bien réglée » de Descartes fait apparaître les trois foyers F , K et G (fig. 10).

Deux des foyers d'une ovale sont intérieurs à l'ovale intérieure et le troisième est extérieur à l'ovale extérieure. Désignons par C ce troisième foyer, B celui qui lui est le plus proche et A le dernier. Lorsque le foyer C est rejeté à l'infini, l'ovale devient une ellipse de foyers A et B , et lorsque le foyer A est rejeté à l'infini, l'ovale devient une hyperbole de foyers B et C . Tandis que, lorsque les foyers B et C sont confondus, l'ovale devient un limaçon de Pascal : en se confondant, B et C pincent entre eux les deux branches de l'ovale, créant ainsi un point nodal.

La description géométrique de Chasles permet de démontrer aisément que les ovales peuvent être obtenues comme projections d'intersections de cônes droits quelconques. En effet, soient deux cônes droits de sommets S et S' , d'axes parallèles SO

et $S'O'$, de bases C et C' deux cercles de centre O et O' dans un plan orthogonal Π à SO et $S'O'$ (fig. 21). L'intersection A de SS' avec Π est sur OO' . Soient I un point appartenant à l'intersection des deux cônes, M le point d'intersection de SI avec C , M' le point d'intersection de $S'I$ avec C' , et P l'intersection de OM et $O'M'$.

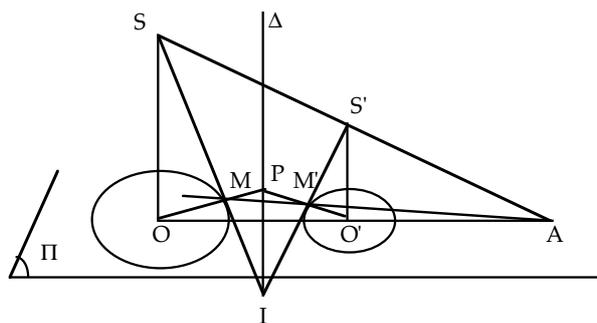


FIG. 21

Il s'agit de montrer que P est la projection orthogonale de I sur Π et que P appartient à une ovale. En effet, la droite d'intersection Δ des deux plans des triangles SOM et $S'O'M'$ est perpendiculaire à Π , et les points I et P appartiennent à ces deux plans, donc à Δ . Les points A , M' et M sont alignés car ils appartiennent au plan Π et au plan SIS' . Faisons varier le point I sur l'intersection des deux cônes, alors la droite $AM'M$ tourne autour de A et le point P décrit une ovale d'après la construction géométrique de Chasles.

Nous obtenons aussi de cette façon un autre résultat énoncé par Chasles, à savoir que, si Q est l'intersection des tangentes des deux cercles C et C' aux points M et M' , alors PQ est la tangente à l'ovale au point P . En effet, la tangente à l'ovale au point P est la projection de la tangente à la courbe d'intersection des deux cônes au point I , or cette tangente est la droite d'intersection des plans tangents aux deux cônes au point I . Le plan tangent au cône de sommet S en I contient SI et MQ , et le plan tangent au cône de sommet S' contient $S'I$ et $M'Q$. Par conséquent, IQ est l'intersection des plans tangents aux deux cônes au point I , et la projection PQ de IQ est la tangente à l'ovale.

La démonstration obtenue grâce à la construction de Chasles conduit à un résultat plus général que celui de Quételet⁴³, puisqu'elle ne suppose pas que l'angle formé par la génératrice d'un des cônes avec l'axe soit égal à 45° . Chasles annonce dans sa note un résultat encore plus général, puisqu'il ne suppose pas que les axes des deux cônes soient parallèles. En effet, si les axes se rencontrent en un point, alors un troi-

⁴³ Un échange sur ces questions a lieu entre Quételet et Chasles dans *Correspondance mathématique et physique*, publiée par Quételet, tome V, 1829, p. 1-16, 109-116, 116-120, 189-190 et 190-193.

sième cône, ayant pour sommet ce point et passant par la courbe d'intersection des deux premiers, rencontrera le plan de leurs bases suivant une ovale.

En 1864, De Trenquelléon, élève de l'École Normale, démontre le résultat de Quételet et Chasles de manière élémentaire⁴⁴. Il considère deux cônes C et C' d'axes parallèles, dont les bases circulaires dans un plan P perpendiculaire aux axes ont pour rayons R et R' , et dont les hauteurs sont h et h' . Soit M un point d'intersection des deux cônes, par lequel passe un plan parallèle à P qui coupe les axes en des points à des distances r et r' de M . Soit d la distance de M au plan P (fig. 22), d'après le théorème de Thalès nous avons : $\frac{h}{h-d} = \frac{R}{r}$ et $\frac{h'}{h'-d} = \frac{R'}{r'}$, par conséquent

$$r \frac{h}{R} - r' \frac{h'}{R'} = h - h',$$

et le projeté de M sur P est donc bien sur une ovale.

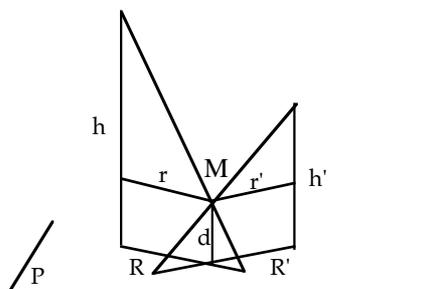


FIG. 22

Au début de sa note, Chasles indique que Quételet a démontré que les caustiques secondaires, produites par réflexion ou par réfraction dans un cercle éclairé par un point lumineux, sont les ovales de Descartes. La notion de caustique secondaire est introduite par Quételet, pour résoudre le problème optique des caustiques. Mais nous allons voir que le résultat optique démontré par Quételet se traduit par une propriété géométrique des ovales.

7. La théorie des caustiques secondaires de Quételet

Les caustiques secondaires sont des développantes des caustiques. Au début du XIX^e siècle, en reliant systématiquement les idées de développée et de caustique, les mathématiciens abordent le problème des caustiques d'une nouvelle façon. Vers 1815, le mathématicien Gergonne énonce la conjecture suivante : « Les courbes caustiques fort compliquées pourraient très-bien n'être que les développées d'autres

⁴⁴ DE TRENQUELLEON, Sur l'intersection de deux cônes, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, tome III, 1864, p. 539-540.

courbes plus simples ». Dix ans plus tard, Quételet⁴⁵ et Gergonne⁴⁶ énoncent et démontrent un théorème général qui confirme le bien-fondé de la conjecture du second, à savoir que si des rayons émis normalement à une courbe (A) se réfractent sur une courbe (S), les rayons réfractés seront normaux à une surface (A') enveloppe de cercles centrés sur (S) et de rayons R tels que

$$\frac{R}{OF} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

et le rayon réfracté en O (fig. 23) et son symétrique par rapport à la tangente en O à (S) passent par les points de contact a'₁ et a' (fig. 24) du cercle centré en O et de l'enveloppe (A'). Quételet appelle la courbe (A') la caustique secondaire de (A) à travers (S).

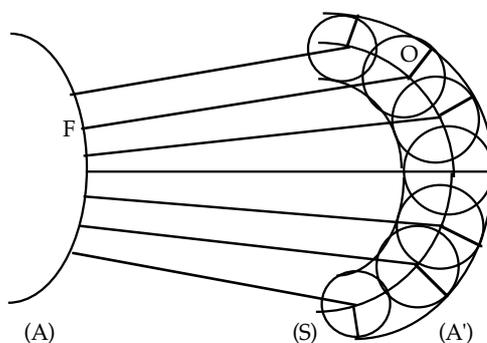


FIG. 23

Vers 1825, Sturm et Quételet démontrent indépendamment que la caustique d'une source ponctuelle par réfraction à travers une circonférence est la développée d'une ovale. Nous allons examiner la démonstration purement géométrique que Quételet donne de ce résultat en 1829, en énonçant que « les lignes aplanétiques sont les caustiques secondaires par réfraction dans le cercle ». Cette démonstration repose sur la figure géométrique par laquelle Quételet traduit la loi de réfraction, et qui permet de voir la caustique secondaire comme enveloppe de cercles. Il est intéressant de remarquer que les formulations géométriques de la loi de réfraction par Descartes (fig. 2) et par Quételet (fig. 23) ne sont pas identiques et de saisir ainsi l'importance de la formulation géométrique dans les démonstrations des résultats d'optique.

La figure géométrique de la réfraction est la suivante (fig. 24). Soient F le foyer d'où part le rayon lumineux, O le point rayonnant où le rayon se réfracte sur la

⁴⁵ QUETELET, Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome III, 1825, p. 12.

⁴⁶ GERGONNE, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, in *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1825-26, p. 307-314.

courbe (S), (C) le cercle centré sur la tangente OT à (S) et passant par F, a₁ l'intersection du rayon réfracté avec le cercle (C), et a' le symétrique de a₁ par rapport à OT, alors

$$\frac{OF}{Oa'} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

En effet, soit SO le diamètre du cercle (C), alors l'angle d'incidence FON est égal à l'angle FSO et l'angle de réfraction a'OM est égal à l'angle OPa', et par conséquent

$$\frac{OF}{Oa'} = \frac{\sin FSO}{\sin OPa'} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

De plus, a' et son symétrique a₁ par rapport à OT sont sur le cercle (O, Oa') et la caustique secondaire (A') est tangente au cercle (O, Oa') (fig. 25).

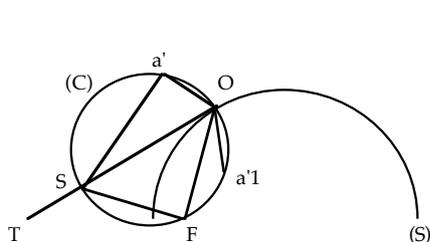


FIG. 24

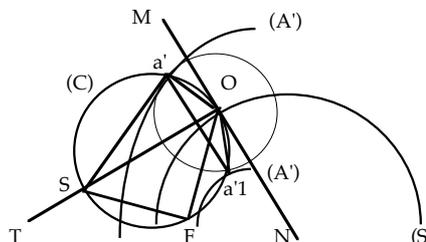


FIG. 25

La figure géométrique de la réfraction permet à Quételet de démontrer que les lignes aplanétiques sont les caustiques secondaires du cercle. Considérons cette figure (fig. 25) avec maintenant (S) un cercle de centre t, et soit A le symétrique de F par rapport à OT (fig. 26).

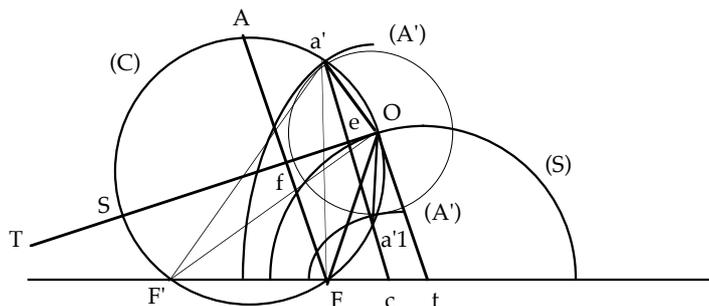


FIG. 26

Quételet démontre que a'a₁ passe par un point fixe c du diamètre de (S). En effet, nous avons $\frac{OF}{Oa'} = \frac{\sin i}{\sin r}$ et $\sin i = \sin OFf = \frac{Of}{OF}$ et $\sin r = \sin Oa'e = \frac{Oe}{Oa'}$, donc

$\frac{Of}{Oe} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$ est constant. Or $\frac{Ft}{ct} = \frac{Of}{Oe}$, d'où ct est constant et c est fixe. Quételet en déduit que lorsque O varie sur (S) , le cercle (C) passe par un point fixe F' situé sur le prolongement du diamètre de (S) passant par F et son centre appartient à la médiatrice de FF' . En effet, la puissance de t par rapport au cercle (C) est constante et égale à $tO^2 = tF \times tF'$, donc tF' est constant et F' est fixe. Quételet peut en conclure que (A') est une ligne aplanétique de foyers F et F' . En effet, les triangles FOt et $OF't$ sont semblables car ils ont un angle commun et les angles $OF't$ et FOt sont égaux comme angles inscrits dans le cercle (C) , donc : $\frac{F'O}{FO} = \frac{F't}{Ot}$. En considérant la puissance de t par rapport à (C) , nous avons : $\frac{Ot}{Ft} = \frac{F't}{Ot}$, donc le rapport $\frac{F'O}{FO}$ est constant. Par ailleurs, $\frac{F'O}{FO} = \frac{\sin F'SO}{\sin FSO} = \frac{\sin F'a'O}{\sin Fa'O}$, donc le rapport $\frac{\sin F'a'O}{\sin Fa'O}$ est constant. Par conséquent, un rayon incident émanant de F' se réfractera sur le point a' de (A') selon la direction $a'F$, et (A') est donc une ligne aplanétique de foyers F et F' .

Comme nous l'avons dit plus haut, le cercle (S) est nommé « cercle diamètre » de la ligne aplanétique par Quételet. La propriété optique de cette ligne lui permet donc d'énoncer une nouvelle propriété, à savoir que le cercle diamètre est le lieu des centres de tous les cercles qui, touchant l'une des branches de la ligne aplanétique, sont en même temps tangents à l'autre. Il remarque également que le cercle (C) fournit une construction « extrêmement simple » des caustiques secondaires et de ses normales. En effet, pour mener une normale au point a' , il suffit de construire un cercle passant par a' et par les deux foyers F et F' , alors la normale est Oa' , avec O le point d'incidence.

Dans sa note, Chasles ressaisit des travaux de Quételet le trait caractéristique suivant : une ovale est l'enveloppe d'une famille de cercles centrés sur un cercle et orthogonaux à un cercle.

Considérons, dans un plan, une courbe A d'où partent perpendiculairement des rayons lumineux qui se réfractent sur un dioptré B , et les rayons lumineux réfractés perpendiculaires à des courbes C . D'après Descartes et Quételet, nous avons⁴⁷ donc deux faits « duaux » :

1. Si A est un cercle, pour que C soit un cercle, il faut que B soit une ovale.
2. Si A et B sont des cercles, alors une courbe C est une ovale.

Ainsi, doublement, les ovales interviennent dans l'optique qui s'origine de la loi de réfraction de Descartes. Historiquement, l'émergence de cette doublure est sous condition de la reprise au début du XIX^e siècle par Quételet et Gergonne du souci de la fin du XVII^e siècle avec les caustiques et les enveloppes. Quételet dans cette veine

⁴⁷ Pour des preuves analytiques, voir, par exemple, BOUASSE, *Optique Géométrique Supérieure* (1817), 2^e éd., Delagrave, Paris, 1926, p. 44 et p. 118.

apporte à la mathématique des ovales un nouvel éclairage, utilisant l'optique et les enveloppes comme outil de son analyse géométrique, au demeurant synthétique.

8. Les deux branches de l'ovale

Les travaux de Quételet sont repris un peu plus tard, dans des recherches qui insistent de deux façons sur la question des deux branches de l'ovale.

En 1847 et en 1853, Cayley⁴⁸ reprend les calculs de 1826-27 des théorèmes de St-Laurent⁴⁹ sur les caustiques du cercle. Il calcule d'abord l'équation de la caustique secondaire, considérée comme enveloppe de cercles, et il l'identifie à l'équation d'une ovale. D'où il déduit, par échange bien organisé des rôles des trois foyers de l'ovale dans les écritures (à ce moment, il renvoie à un article précédent sur la Théorie des Groupes), qu'une même caustique par réflexion dans un cercle peut être considérée comme produite par six différents systèmes de point radian, cercle et indice de réflexion.

Ceci est repris dans deux mémoires⁵⁰ de 1857 et 1867, où, en admettant des valeurs imaginaires pures comme paramètres d'une ovale, Cayley étudie, dessine et classe par leurs formes les cartésiennes, courbes plus générales que les ovales dont nous parlerons plus loin. Pour lui, la caustique est « géométriquement » l'enveloppe de paires de rayons réfractés (le vrai, et son symétrique par rapport à la normale, qu'il appelle faux rayon réfracté : avec les notations de Quételet, Oa'_1 est le rayon réfracté et Oa' le faux rayon réfracté (fig. 25)), et il faut manipuler une seule équation (du second degré) pour chacune de ces paires. Ceci correspond aux deux branches de l'ovale (ou de la cartésienne), caustique secondaire dont l'une des branches est orthogonale aux rayons réfractés et l'autre aux faux rayons réfractés.

Ces travaux de Cayley constituent une reprise et une poursuite en calcul des idées géométrico-optiques de Quételet. Pour Cayley, l'ovale a « géométriquement » deux branches pour cause d'algébricité : si l'on veut de l'ovale une équation algébrique polynomiale en (x, y) , on ne peut exclure une branche ou l'autre.

Comme nous l'avons vu, Quételet fournissait une raison algébrique au fait que les deux branches de l'ovale s'échangent par une certaine inversion. Désormais, l'existence de cette inversion peut expliquer géométriquement la tenue ensemble des deux branches de l'ovale. Ainsi, en 1862, Mannheim établit que la propriété pour

⁴⁸ CAYLEY, On the caustic by reflection at a circle, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. II, 1847, p. 128-130, et CAYLEY, On a property of the caustic by refraction on the circle, *Philosophical Magazine*, vol. VI, 1853, p. 427-431.

⁴⁹ DE ST-LAURENT, Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVII, 1826-27, p. 128-134 et Recherches sur la caustique par réflexion relative au cercle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVIII, n° 1, 1827, p. 1-18.

⁵⁰ CAYLEY, A memoir upon caustics, et A supplementary memoir on caustics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CXLVII, 1857, p. 273-312, et vol. CLVII, 1867, p. 7-16.

une courbe d'être invariante globalement par une certaine inversion est vraie pour les courbes d'équation polaire⁵¹ : $r^2 - 2r F(w) + \alpha = 0$. Nous savons, avec Quételet, que les ovales répondent à une forme particulière de cette équation. Notons que c'est aussi le cas des cartésiennes. Le résultat de Mannheim peut évidemment être démontré par le même calcul que celui de Quételet pour le cas des ovales. Toutefois, Mannheim en fournit une démonstration géométrique⁵². Deux ans plus tard, Moutard introduit le terme d'anallagmatique pour désigner une courbe invariante globalement par une certaine inversion, et il démontre qu'une telle courbe est l'enveloppe d'une famille de cercles centrés sur une courbe donnée et orthogonaux à un cercle fixe⁵³. Nous avons vu que cette propriété était soulignée par Chasles à propos des résultats de Quételet sur les ovales. Finalement, et en accord avec le théorème général de Quételet et de Gergonne sur la détermination des caustiques, les anallagmatiques sont identiques aux caustiques secondaires.

Ainsi, et pour plusieurs raisons, toute ovale complète est une courbe anallagmatique. L'inversion va être un outil nécessaire pour la conception des systèmes articulés, et en particulier de celui pour décrire les ovales.

9. Le théorème de Kempe et le système articulé de Cayley pour les ovales

À la fin du XIX^e siècle on appelle *système articulé* un jeu d'un nombre fini de tiges rectilignes rigides articulées entre elles ou à des points fixes par des liaisons rotoïdes. Le système est dit plan si tous ses éléments sont dans un même plan. Un point attaché à l'une des tiges parcourra une courbe, dite tracée par le système, lorsque le système est mis en mouvement. Le plus simple de ces systèmes est le compas, constitué d'une tige attachée à un point fixe ; dans ce cas la courbe tracée par un point attaché à la tige est un cercle. On peut considérer un système articulé comme un système de compas « géométriquement » solidaires (et pas seulement « mécaniquement » solidaires), une sorte de compas de compas ou de « compas composé » comme l'écrit Peaucellier⁵⁴. On exclut *a priori* des liaisons mécaniques autres, telles que celles décrites par contact libre de deux courbes, par roulement, glissant ou non, par glissières, par fils souples, etc. Outre le compas, on connaît depuis 1631 le pantographe du Père Scheiner qui permet d'agrandir ou de diminuer les figures en proportion. En revanche, les mécanismes décrits par Descartes et qu'il appelle

⁵¹ MANNHEIM, Application de la transformation par rayons vecteur réciproques à l'étude des anti-caustiques, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XX, 1860, p. 220-222, et Sur les arcs de courbes planes ou sphériques considérées comme arcs de cercles, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1862, p. 121-135.

⁵² Voir BROCARD et LEMOIGNE, *Courbes Géométriques Remarquables (courbes spéciales) Planes & Gauches*, tome I (1919), rééd. Blanchard, 1967, p. 3-4.

⁵³ MOUTARD, Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1864, p. 306-309, et Sur les surfaces anallagmatiques du 4^{ème} ordre, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1864, p. 536. Voir aussi BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Comte-Jacquet, Bar-le-Duc, 1897, p. 2.

⁵⁴ PEAUCELLIER, Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie (à Nice), in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, tome III, 1864, p. 414-415.

« compas », la description des jardiniers des coniques, la construction des ovales par tiges et fils souples (fig. 10), et aussi les descriptions mécaniques par roulement de la spirale ou de la cycloïde, ne sont pas de tels systèmes articulés. La classe de tous ces systèmes, plus vaste que la classe stricte des systèmes articulés, nous l'appellerons la classe des mécanismes.

La première question, la plus étonnante, est la suivante : peut-on, avec un système articulé, c'est-à-dire par une combinaison rigide d'un ensemble fini de mouvements circulaires, produire exactement un mouvement rectiligne ? Pendant longtemps, dans la lignée d'Aristote, les mécaniciens ont pensé qu'il était impossible d'engendrer ainsi du droit avec du circulaire. Pour des besoins techniques, en particulier ceux des machines à vapeur comme les locomotives, il a donc été cherché à le faire approximativement, et un mécanisme remarquable de précision, après d'autres, est proposé par Tchebitcheff en 1850. Un mécanisme encore plus précis est inventé dix ans plus tard par Roberts. Mais, en 1864, Peaucellier donne un mécanisme plan exact⁵⁵, remarquablement simple, basé sur l'inversion inventée par Kelvin et appelé depuis inverseur de Peaucellier, que nous décrivons comme suit (fig. 27).

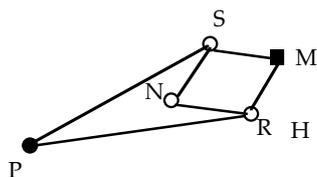


FIG. 27

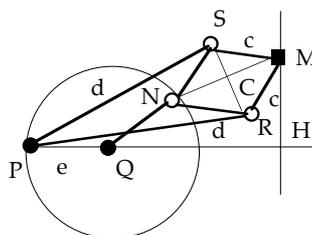


FIG. 28

Le mécanisme est constitué de six tiges MR, RN, NS, SM, de même longueur c , puis PS, PR de même longueur d . Ajoutons ensuite une tige QN de longueur e , en demandant que les points d'articulations P et Q soient fixes dans le plan, à la distance e l'un de l'autre (fig. 28). Alors, lorsque le système est mis en mouvement, le point M se déplace sur une droite perpendiculaire à PQ. En effet, si C est le centre du losange MRNS, et si l'on pose $NC = CM = m$ et $SC = CR = n$, on a, avec le théorème de Pythagore : $PC^2 = d^2 - n^2 = d^2 - (c^2 - m^2)$, et les points alignés P, N, M sont tels que :

$$PN \times PM = (PC - m) \times (PC + m) = PC^2 - m^2 = d^2 - c^2.$$

Alors, puisque, pendant le mouvement, le point N se déplace sur le cercle de centre Q et de rayon e , cercle qui passe par P, le point M, inverse de N dans l'inversion de

⁵⁵ Annoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1864. Un système à trois dimensions est donné par Sarrus en 1853. Le système de Peaucellier a été redécouvert indépendamment par Lipkine, élève de Tchebitcheff, en 1871. Il a été vulgarisé et étendu par Sylvester, en particulier avec la « scalene-cell » dont se sert Cayley pour les traçages de cartésiennes que nous présentons ci-après.

pôle P et de puissance $d^2 - c^2$, se déplace sur l'inverse du cercle de centre Q passant par P, qui est une droite perpendiculaire en H à PQ, avec

$$PH = \frac{d^2 - c^2}{2e}.$$

Ensuite, Hart puis Kempe en 1875 ont fourni des systèmes articulés traçant la médiatrice d'un segment donné, la perpendiculaire à son extrémité d'un segment donné. Il suffit d'ajouter à l'inverseur « traceur de droites » et aux pantographes « dilateurs », les « translateurs » et les « diviseurs d'angles » pour avoir un outillage complet. Avec ceci, en réduisant une équation algébrique $P(x, y) = 0$ à sa forme trigonométrique linéarisée, Kempe⁵⁶ démontre en 1875 ce que subodorait Peaucellier, à savoir que l'« on peut toujours trouver un système articulé dont un point décrive une (portion d'une) courbe algébrique donnée à l'avance »⁵⁷, et, réciproquement, la courbe tracée par un système articulé est toujours une portion d'une courbe algébrique.

D'après ce théorème de Kempe, il est impossible de décrire un système articulé pour les courbes transcendentes, comme la spirale ou la cycloïde, mais il est possible d'obtenir un système articulé pour toutes les courbes algébriques, avec un mécanisme qui peut être fort compliqué. Cependant, des systèmes simples, avec seulement quelques tiges, ont été inventés pour de nombreuses courbes algébriques telles que la lemniscate de Bernoulli, par Watt en 1784, ou les coniques⁵⁸. En 1875, Cayley⁵⁹ fournit un mécanisme très simple, avec une tige coulissante, pour tracer les « cartésiennes », et en particulier les ovales, et il donne aussi⁶⁰ un véritable système articulé « remarquablement simple » (fig. 30). Une cartésienne est, pour un pôle bien choisi, caractérisée⁶¹ comme une courbe d'équation polaire :

$$r^2 + (A \cos \theta + N)r + B = 0.$$

En considérant l'équation polaire des lignes aplanétiques, ou ovales cartésiennes, utilisée par Quételet, nous voyons que ces courbes rentrent (avec $\rho = r$ et $\alpha = \theta$) dans la classe plus générale des cartésiennes. Notons que Chasles commet une erreur en pro-

⁵⁶ KEMPE, A general Method of describing Plane Curves of the nth degree by Linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, VII, vol. VII, 1875-76, p. 213-216 et *How to draw a Straight Line*, 1877. Pour une rédaction détaillée d'une preuve, voir KÆNIGS, *Leçons de cinématique professées à la Sorbonne*, Hermann, Paris, 1897, ou aussi D'OCAGNE, *Cours de géométrie*, École Polytechnique, 1913-14.

⁵⁷ Nous donnons ici l'énoncé de KÆNIGS, *op. cit.*, p. 271. On trouve aussi dans l'ouvrage de Kœnigs son extension du résultat aux courbes gauches et surfaces algébriques, démontrée en 1895, p. 302.

⁵⁸ Se reporter à CUNDY and ROLLETT, *Mathematical Models*, Oxford University Press, 1951.

⁵⁹ CAYLEY, On the mechanical description of a cartesian, in *The quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1875, p. 321-328.

⁶⁰ CAYLEY, On the scalene transformation of a plane curve, *The quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1875, p. 328-330.

⁶¹ Voir CAYLEY, On the mechanical description of a cartesian, *op. cit.*

posant une construction pour l'ovale qui de fait produit une cartésienne qui n'est pas une ovale⁶².

Le système articulé de Cayley est fondé sur une « cellule-scalène » (fig. 29) qui généralise la « cellule-isocèle » MNPRS de Peaucellier (fig. 27). Cayley indique que cette cellule, et nombre des propriétés de la transformation associée, sont sans aucun doute familière à Sylvester, et il la décrit comme un système de trois paires de tiges égales PA et QA, PB et QB, PC et QC, jointes ensemble et capables de tourner aux points P, Q, A, B, C ; les trois longueurs PA, PB, PC (notées l, m, n) étant entre elles inégales. Il note r' et r les distances (variables) BA et BC. Il donne la relation, qui s'établit de même que dans le cas de l'inverseur de Peaucellier, en utilisant le théorème de Pythagore :

$$r^2 + \left(r' - \frac{l^2 - m^2}{r'} \right) r + m^2 - n^2 = 0.$$

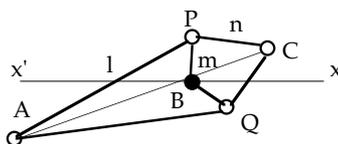


FIG. 29

Si B est fixe, et x'Bx est un axe fixé, il pose $\angle xBC = \angle x'BA = \theta$, et il considère la transformation, appelée « transformation scalène », qui associe C à A. Si A est mobile sur un cercle de rayon h centré sur l'axe x'Bx à une distance γ de B, on a :

$$r'^2 - 2\gamma r' \cos \theta + \gamma^2 - h^2 = 0,$$

d'où se déduit, en posant $r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$, et $\lambda = \frac{l^2 - m^2}{\gamma^2 - h^2}$, que le point C se meut sur la courbe d'équation

$$\{x^2 + y^2 + (1 - \lambda)\gamma x + m^2 - n^2\}^2 = (1 + \lambda)^2 \{h^2(x^2 + y^2) - \gamma^2 y^2\},$$

qui peut être mise sous la forme : $\{x^2 + y^2 + Ax + B\}^2 = ax^2 + ey^2$. Ceci est l'équation générale, référée à un point bien choisi sur son axe pris comme origine, de la « quartique bicirculaire symétrique » générale, qui peut ainsi être tracée. Ensuite, les « foyers axiaux » de la quartique en question étant les points sur l'axe, dont les abscisses t sont déterminées par l'équation :

$$e(t^2 + At + B)^2 - a(t^2 - B)^2 - aet^2 = 0,$$

⁶² CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, p. 350-353.

l'équation de la quartique référée à l'un de ces foyers F pris comme origine devient :

$$\{x^2 + y^2 + (A + 2t)x + B + t^2\}^2 = ax^2 + ey^2 + 2atx + t^2.$$

Si cette courbe est inversée, de pôle F et de puissance k^2 , l'équation de la transformée s'obtient en remplaçant, dans la dernière équation, x et y par $\frac{k^2x}{r^2}$ et $\frac{k^2y}{r^2}$, avec maintenant $r^2 = x^2 + y^2$. Cayley conclut alors que « nous avons, comme il peut être vérifié, l'équation d'une cartésienne ».

En effet, pour Cayley la vérification va de soi, car les cartésiennes sont aussi des courbes algébriques du quatrième degré admettant les points cycliques comme points de rebroussement. Tous calculs faits, cela s'exprime par le fait qu'une cartésienne est une courbe admettant, dans des axes orthonormés bien choisis une équation de la forme, avec $R \geq 0$ et $R' \geq 0$:

$$[x^2 + y^2 + 2ah^2x + a^2h^4 + R^2 - h^2(R^2 + a^2 - R'^2)]^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Les ovales sont les cartésiennes admettant trois foyers réels alignés. L'équation ci-dessus est celle d'une ovale si et seulement si on a $R > a + R'$ et $a \geq R + R'$.

Comme l'inversion en question peut être réalisée mécaniquement par une cellule-isocèle de Peaucellier, nous avons donc un appareil complet (fig. 30) pour tracer une cartésienne, qui est donc ainsi donnée comme inverse d'une quartique bicirculaire symétrique, elle-même obtenue par transformée scalène d'un cercle.

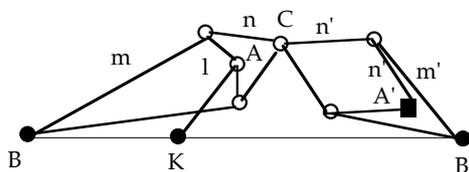


FIG. 30

Les points fixes sont les points alignés B, K et B' ; le point B' est choisi de sorte à être un foyer axial de la quartique bicirculaire symétrique que parcourt C lorsque A tourne autour du point fixe K au cours du mouvement. Par conséquent, le point A' parcourt une cartésienne.

Ainsi, dans un usage algébrique précis de l'aller et retour entre coordonnées polaires et coordonnées rectangulaires, en souci de la mise en système articulé, Cayley produit une nouvelle conception géométrique de l'ovale, comme inverse de transformée scalène de cercle. On a là une description à coup sûr « bien réglée » et simple de l'ovale. En fait, c'est une description d'une portion d'une branche de l'ovale, l'autre branche pouvant s'obtenir par inversion, en ajoutant donc un autre inverseur de Peaucellier.

Considérons un système mécanique formé de plusieurs corps solides liés, nous avons à distinguer⁶³ entre système holonome et système non-holonome. Un système holonome est un système pour lequel tout déplacement infinitésimal représenté par un changement infinitésimal dans les coordonnées est en général un déplacement possible. Tandis que, dans un système non-holonome, des équations ont à être satisfaites par les incréments infinitésimaux des coordonnées correspondant à un déplacement infinitésimal possible ; ainsi, le nombre de degrés de liberté mécanique du système est moindre que le nombre de variables indépendantes. On peut dire aussi que, dans un système holonome, les dérivées par rapport au temps (vitesses, accélérations, etc.) sont éliminables dans l'expression des conditions de contacts ou, plus généralement, de liens. D'une certaine façon, dans la constitution d'un système holonome, il n'y a pas de conditions proprement cinématiques, et pour cette raison nous pouvons qualifier alors les mouvements de purement géométriques, au sens où le géométrique serait, dans la mécanique, l'évanouissement du conditionnement cinématique proprement dit. Il s'agit là de mouvement où la nature propre du lien ne dépend pas de relations entre les « tendances au mouvement » des diverses variables. Ainsi le lien est, dans sa nature, indépendant du temps, intemporel.

Mais ce géométrique-là n'est pas encore celui de Descartes, car sous le terme de « géométrique », celui-ci veut isoler encore le cas où l'expression du lien, indépendante du temps, prend de plus une forme finie, *i. e.* algébrique. Dans ce cas, nous parlerons de système holonome algébrique. L'exemple évident de système holonome algébrique est le système articulé au sens strict tel que nous en avons parlé ici. Sont holonomes algébriques aussi (quoique non articulés) les mécanismes proposés par Descartes pour ses « compas », pour tracer les coniques, pour tracer les ovales. Ne sont pas holonomes algébriques les mécanismes par roulement pour tracer la spirale ou la cycloïde.

Précisons un peu dans le cas des liaisons de roulement. Dans ce cas les conditions de roulement se traduisent par des équations différentielles linéaires du premier ordre, et si les équations sont complètement intégrables, c'est-à-dire peuvent se remplacer par un système équivalent d'équations finies, on dira, avec Delassus⁶⁴, que le système est semi-holonome. Autrement, le système sera dit véritablement non-holonome. Les mécanismes pour la spirale ou la cycloïde sont semi-holonomes. Par contre le système constitué d'une sphère assujettie à rouler sur un plan est non-holonome.

Nous l'avons noté, le paradigme – ou l'exemple évident et majeur – de l'holonome algébrique est l'articulé, et le théorème de Kempe établit l'équivalence, au plan

⁶³ Voir, par exemple, WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University press, 1904, p. 33-34.

⁶⁴ DELASSUS, Sur les liaisons de roulement, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 5^e série, tome I, 1922, p. 379-383.

des courbes considérées localement, entre l'articulable et l'algébrique. Ainsi la prétention de Descartes à ce que la construction « bien réglée » soit équivalente à l'algébrique trouve une cohérence solide pour nous dans l'idée de « mouvements algébriques », pour parler comme Kœnigs⁶⁵ et Darboux⁶⁶, dans la suite du théorème de Kempe.

10. Conclusion

L'ovale, objet crucial de la pensée de Descartes à propos du courbe, est sans cesse un « objet physique », nous l'avons rencontré avec Descartes et puis Quételet lié à la question de la réfraction de deux façons duales. La nature « mathématique » de l'ovale comme courbe est à cerner, et ceci s'effectue dans une tension maintenue dès l'origine par Descartes avec sa double conception du courbe géométrique, entre mouvement « bien réglé » et équation.

À tout le moins nous avons le résultat suivant : il n'est pas nécessaire de supposer une incohérence ou une erreur ou un flottement de la part de Descartes touchant à sa conception du courbe. Plus précisément, au contraire, c'est sous condition de poser la rigueur de cette double conception comme une sorte de « thèse en acte » chez Descartes qu'une lumière utile peut s'élaborer, sur l'activité pulsative du mathématicien Descartes entre optique, mécanique et algèbre, et géométrie à la grecque. L'économie de son invention, dont nous avons rendu compte justement dans cette question de l'ovale, en dépend, et a sa cohérence propre. Ce qui est aussi compatible avec la philosophie de la méthode cartésienne.

Notre thèse est aussi que Descartes, dans sa distinction entre « mécanique » et « géométrique » touche à quelque chose de parfaitement cohérent et important, qui est semblable aux distinctions postérieures entre non-holonome, semi-holonome, holonome, holonome algébrique, articulable. Dans notre interprétation, les mouvements « bien réglés » seraient précisément les mouvements algébriques. Ainsi s'organise, autour du théorème de Kempe, et plus spécifiquement dans le cas de l'ovale avec le mécanisme « simple » de Cayley, la cohérence cartésienne « pour nous » que nous annonçons en introduction.

Nous avons vu⁶⁷ que c'est sous condition, – souvent au cours d'un même article –, de multiples va-et-vient et changements de soucis, de techniques, de cadres connus ou en élaboration, et dans l'œuvre même de mise à jours ou de création de ces cadres ou disciplines (géométrie à la grecque, plane et/ou spatiale, algèbre, équations bi-polaires, polaires et rectangulaires, calcul infinitésimal, théorie des enveloppes, caustiques, optique géométrique, mécanique et systèmes articulés), que, par

⁶⁵ KŒNIGS, *Leçons de cinématique professées à la Sorbonne*, Hermann, Paris, 1897, p. 306-307.

⁶⁶ DARBOUX, note III, Sur les mouvements algébriques, dans KŒNIGS, *op. cit.*, p. 352-389.

⁶⁷ D'une façon non-exhaustive. Nombres d'autres exemples et problèmes seront développés dans BARBIN et GUITART, *Histoires d'Ovales*, livre à paraître.

chaque mathématicien, et *a fortiori* par la communauté des mathématiciens, s'est constitué l'objet mathématique « ovale ». Cet objet n'est présent à la pensée mathématique que par la donation historique de cette polysémie constitutive. C'est aussi la mise en acte de cette pulsation qui a permis l'émergence de « nouvelles » propriétés. Ainsi apparaissent la deuxième branche et son rapport à la première, le troisième foyer, deux choses ignorées ou non mises en valeur par Descartes, et qui améliorent véritablement notre compréhension et notre capacité de classification. C'est aussi par là que nous comprenons ce que l'objet étend (coniques, limaçons) et les classes plus larges où il s'inclut (anallagmatiques, cartésiennes).

Toute cette histoire, repliée dans l'abréviation intégrale que constitue n'importe quelle définition rigoureuse de l'ovale, constitue le sens de l'ovale ; prendre acte de cette histoire constitue une initiation aux méthodes géométriques.

BIBLIOGRAPHIE

- BARBIN, Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens, in *Les mathématiques dans la culture d'une époque*, IREM de Strasbourg, 1987, p. 143-163.
- BARBIN, *La révolution mathématique du 17ème siècle. Méthode et invention du courbe*, thèse d'habilitation, vol. I, Université de Lille I, 1997, ouvrage à paraître.
- BARBIN et GUITART, *Histoires d'Ovales*, livre à paraître.
- BAUDOIN, *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert, Paris, 1938.
- BERNOULLI, Lineae cycloïdales, Evolutae, Anti-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae, Earum usus & simplex ratio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque, *Acta Eruditorum*, mai 1692, p. 207-213.
- BOS, On the Representations of Curves in Descartes' Géométrie, *Archive for History of exact sciences*, vol. 24, n° 4, 1981, p. 295-338.
- BOUASSE, *Optique Géométrique Supérieure* (1817), 2^e éd., Delagrave, Paris, 1926.
- BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Comte-Jacquet, Bar-le-Duc, 1897.
- BROCARD et LEMOIGNE, *Courbes Géométriques Remarquables (courbes spéciales) Planes & Gauches*, tome I (1919), rééd. Blanchard, 1967.
- CAYLEY, On the caustic by reflection at a circle, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. II, 1847, p. 128-130.
- CAYLEY, On a property of the caustic by refraction on the circle, *Philosophical Magazine*, vol. VI, 1853, p. 427-431.
- CAYLEY, A memoir upon caustics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CXLVII, 1857, p. 273-312.
- CAYLEY, A supplementary memoir on caustics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLVII, 1867, p. 7-16.
- CAYLEY, On the mechanical description of a cartesian, in *The quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1875, p. 321-328.
- CAYLEY, On the scalene transformation of a plane curve, *The quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1875, p. 328-330.
- CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), 3^e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- CHRETIEN, *Calcul des combinaisons optiques*, 5^e éd., Masson, Paris, 1980.
- COSTABEL, *Démarches originales de Descartes savant*, Vrin, Paris, 1982.

- COSTABEL, Descartes et la mathématique de l'Infini, *Historia Scientiarum*, n° 29, 1985, p. 37-49.
- CUNDY and ROLLETT, *Mathematical Models*, Oxford University Press, 1951.
- DARBOUX, note III, Sur les mouvements algébriques, dans KENIGS, *Leçons de cinématique professées à la Sorbonne*, Hermann, Paris, 1897, p. 352-389.
- DE LASSUS, Sur les liaisons de roulement, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 5^e série, tome I, 1922, p. 379-383.
- DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 2^e éd., Montalant, Paris, 1716.
- DE ST-LAURENT, Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVII, 1826-27, p. 128-134.
- DE ST-LAURENT, Recherches sur la caustique par réfraction relative au cercle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVIII, n° 1, 1827, p. 1-18.
- DESCARTES, *Œuvres*, éd. Adam et Tannery, I et X, Cerf, Paris, 1897-1913, rééd. Vrin, Paris, 1996.
- DESCARTES, *Discours de la méthode*, 1637, rééd. Fayard, Paris, 1987.
- DE TRENQUELLEON, Sur l'intersection de deux cônes, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, tome III, 1864, p. 539-540.
- D'OCAGNE, *Cours de géométrie*, École Polytechnique, 1913-14.
- GERGONNE, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, in *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1825-26, p. 307-314.
- GUITART, *La Pulsation Mathématique*, 180 p., à paraître.
- HUYGENS, *Œuvres complètes*, tome XVIII, Publication de la Société hollandaise des Sciences, Nijhoff, La Haye, 1888-1950.
- KEMPE, A general Method of describing Plane Curves of the nth degree by Linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, VII, vol. VII, 1875-76, p. 213-216.
- KENIGS, *Leçons de cinématique professées à la Sorbonne*, Hermann, Paris, 1897.
- LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1989.
- MANNHEIM, Application de la transformation par rayons vecteur réciproques à l'étude des anticaustiques, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XX, 1860, p. 220-222.
- MANNHEIM, Sur les arcs de courbes planes ou sphériques considérées comme arcs de cercles, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1862, p. 121-135.
- MOUTARD, Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1864, p. 306-309.
- MOUTARD, Sur les surfaces anallagmatiques du 4^{ème} ordre, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1864, p. 306-309 et p. 536-541.
- NEWTON, *Principia*, 1686, trad. anglaise de 1729, rééditée par Cajori, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1966.
- PEAUCELLIER, Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie (à Nice), in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, tome III, 1864, p. 414-415.
- QUETELET, Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome III, 1825, p. 3-35.
- QUETELET, Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome V, 1829, p. 5-52.
- RADELET-DE GRAVE, Les lois de la réflexion et de la réfraction comme exercice de calcul, in *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, 1998, p. 117-137.
- SERFATI, Les compas cartésiens, *Archives de philosophie*, tome 56, Cahier 2, 1993, p. 197-230.
- TSCHIRNHAUS, *Acta Eruditorum*, nov. 1682.
- VUILLEMIN, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, 1960, PUF, Paris.
- WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University press, 1904.