concédé, et alors, de deux choses l'une : si ce concédé est possible et qu'on peut le gagner[78], ce que ceux qui s'occupent de mathèmes appellent "donné", ce qui a été proposé sera également possible, et de nouveau la démonstration sera l'inverse de la résolution ; si par contre nous tombons sur quelque chose qui est concédé impossible, ce projet sera lui aussi impossible.

Là-dessus, la *détermination*[79] est une distinction préalable qu'on fait au sujet de quand, comment et en quelle quantité le projet sera possible.

Ceci, au sujet de la résolution et de la composition.

Bibliographie sommaire.

ARCHIMÈDE *Des Spirales*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

EUCLIDE *Les Éléments*, traduction française libre de Georges Kayas, éd. du CNRS, Paris, 1985.

Les Éléments, vol.1, livres I à V, et vol.2, livres V à IX, traduits du texte de Heiberg et commentés par Bernard Vitrac, avec une introduction générale par Maurice Caveing, PUF, Paris, 1990.

Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F.Peyrard, Paris, 1819 ; et nouveau tirage augmenté d'une introduction de Jean Itard, librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1993.

PAPPUS d'Alexandrie *La Collection Mathématique* en deux tomes, traduction, introduction et notes de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Paris, 1933, et rééd. Albert Blanchard, Paris, 1982.

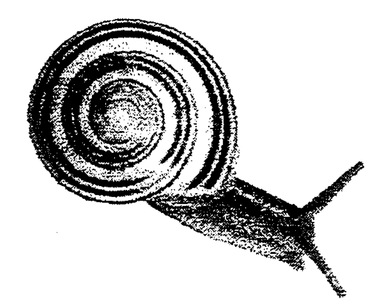
Pappi Alexandrini collectonis quæ supersunt, édition critique du texte grec commentée en latin par F.Hultsch, Weidmann, Berlin, 1876-1878.

PROCLUS de Lycie *Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduction, introduction et notes de Paul Ver Eecke, Bruges, 1948.

78 littéralement qu'il est "gagnable", **poriston**, cf. **poristikon** plus haut.
79 **diorismos**, *diorisme*. Cf. là encore l'emploi du verbe "déterminer" dans le début du livre III.

Spirales

André STOLL



"Quelle spirale, que l'être de l'homme. Dans cette spirale, que de dynamismes qui s'inversent. On ne sait plus tout de suite si l'on court au centre ou si l'on s'en évade."

BACHELARD, Poétique de l'espace.

1. Introduction

Les spirales ? Elles sont présentes partout. Dans le monde animal ou végétal, admirez la forme superbe d'un nautile ou d'une coquille d'escargot. Admirez également la fleur de la marguerite. Celle-ci est composée d'une centaine de fleurons élémentaires jaunes, disposées en son cœur selon une double gerbe de spirales droites ou gauches. Vous en trouverez également dans les tableaux de Léonard de Vinci, de Dürer et autres artistes peintres, en architecture, en ferronnerie, en mécanique... Sur une pellicule photo, un banal escalier hélicoïdal devient une spirale. En astronomie, nul ne peut ignorer les galaxies en forme de spirale.
Cette figure est présente dans toutes les cultures. Elle est chargée de signification symbolique. C'est un motif ouvert et optimiste. Elle représente les rythmes répétés de la vie, le caractère cyclique de l'évolution.

Paradoxalement pourtant, dans la langue française, on ne parle d'elles que pour évoquer un échec, une crise... la spirale du chômage, la spirale de la violence...
Paradoxalement encore, si ces courbes sont si présentes dans notre environnement, elles sont presque complètement oubliées dans l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ? Difficile de répondre de manière précise à cette question. Certains disent qu'elles sont trop difficiles à tracer. C'est évidemment une fausse raison. D'ailleurs à l'ère des calculatrices graphiques et autres traceurs de courbes cette raison ne peut pas expliquer leurs absences.

Léonard de Vinci : l'Annonciation

Dans l'histoire des mathématiques, ces figures sont intervenues comme solutions de problèmes fondamentaux et extrêmement variés. Et très souvent, elles apparaissent là où on ne les attendait pas !
Où cours de l'exposé ci-dessous, je souhaiterais d'une part présenter quelques spirales en les remettant dans leur contexte historique et d'autre part, montrer ce que l'étude de ces courbes peut apporter à un enseignant de mathématiques.

2. Die "Quadratwurzelschnecke" [1] ou spirale de Théodore de Cyrène.

2.1. De l'incommensurabilité de la diagonale du carré à la spirale de Théodore.

Dans l'ouvrage de *Platon* qui porte son nom, *Théétète* affirme que son maître, *Théodore*, a étudié l'irrationalité des nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ jusqu'à $\sqrt{17}$ et qu'il a construit ces nombres devant lui :

[1] Die "Quadratwurzelschnecke": l'escargot de la racine carrée

THEETETE. - *Théodore [...] avait fait, devant nous, les constructions relatives à quelques-unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérés selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix-sept pieds : il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.*
[Platon: Théétète 147d]

Comment ? Pourquoi Théodore s'est-il arrêté à $\sqrt{17}$? Nous ignorons les réponses à ces questions. Depuis plus de 2 millénaires, les mathématiciens et les historiens se posent ces questions et, encore de nos jours, les spéculations continuent.

> **THÉODORE DE CYRÈNE** (fin V ième - déb. IV ième siècle avant J.C.)
> Mathématicien grec, qui enseignait à Cyrène. Platon fait de lui un des personnages de la trilogie du Théétète , en le présentant à la fois comme ami de Socrate et comme ami de Protagoras (un disciple de Pythagore). Dans le catalogue d'Eudème conservé par Proclus, Théodore est cité après Hippocrate de Chios. Il figure également dans la liste de Jamblique comme pythagoricien. C'est, en tout cas, de la grande découverte pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (racine carrée de 2) qu'il est parti pour étudier ce que nous appelons actuellement l'irrationalité des racines carrées des nombres de 3 à 17.

Une réponse, pleine d'imagination, a été donnée, il y a environ 70 ans par un mathématicien allemand, J.H. Anderhub. Celui-ci imagina que Théodore construisit $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ à l'aide d'une suite de triangles rectangles dont l'un des côtés de l'angle droit mesure une unité et l'autre côté de l'angle droit est l'hypoténuse du triangle rectangle précédent, le premier triangle étant rectangle et isocèle. Il est aisé de démontrer à l'aide du théorème de Pythagore que les hypoténuses des triangles ainsi construits mesurent $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$

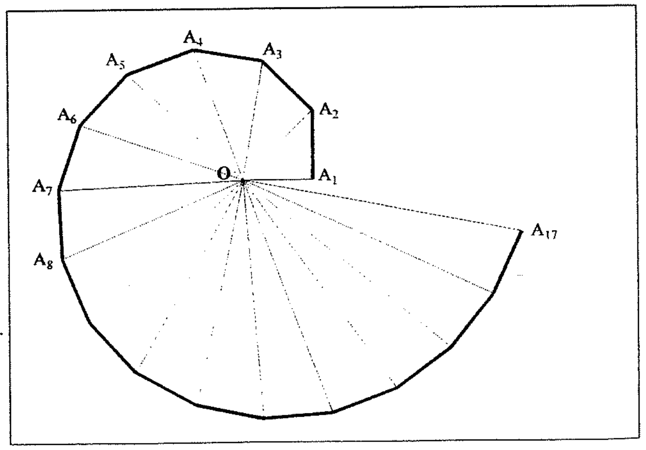
J.H. Anderhub observa que $\sqrt{17}$ est l'hypoténuse du dernier triangle rectangle avant que la figure ne se superpose à elle-même. En poursuivant la construction, nous obtenons une spirale que J.H. Anderhub dénomma "die Quadratwurzelschnecke" c'est-à-dire "l'escargot de la racine-carrée" pour rappeler que l'hypoténuse du n-ième triangle est $\sqrt{n+1}$. En l'honneur de Théodore de Cyrène, elle est aussi appelée "la spirale de Théodore" Il se pourrait ainsi que cette spirale, tout en étant une découverte récente, soit la plus ancienne des spirales.

2.2. Construction de la spirale de Théodore.

La spirale de Théodore est une spirale discrète.

Pour la tracer, nous construisons un triangle rectangle et isocèle (OA_1A_2) puis, par récurrence, les points A_3, A_4, A_5,... tels que :

- les angles $\widehat{OA_nA_{n+1}}$ sont droits : $\widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_3} = \widehat{OA_3A_4} = \ldots$
- les côtés $[A_nA_{n+1}]$ ont tous même longueur : $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$

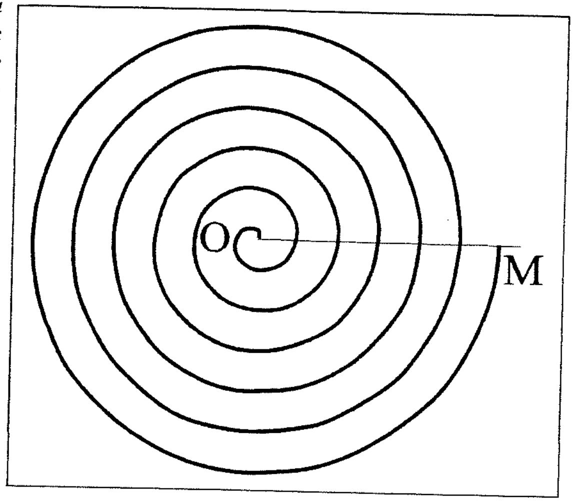


3. La spirale d'Archimède.

Il est fort probable que c'est en cherchant les solutions des problèmes de la trisection de l'angle et/ou de la quadrature du cercle qu'Archimède eut l'idée d'introduire la spirale qui porte désormais son nom. Celle-ci mériterait à elle seule un long exposé. Aussi, me contenterais-je de ne donner que quelques résultats concernant la spirale d'Archimède.

3.1. Définition.

Dans le "Traité des spirales", Archimède nous donne la définition suivante:
*"Lorsqu'une [*demi*] droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale."*

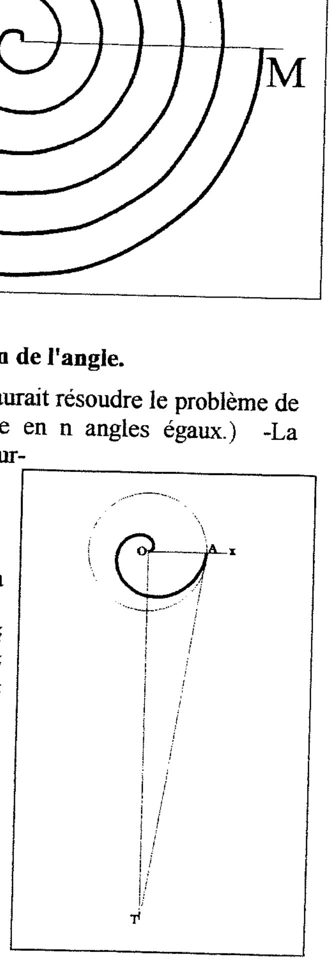


Il est tout à fait remarquable que si la définition que nous donne Archimède est purement mécanique, ses démonstrations quant à elles sont purement géométriques!
Archimède a-t-il utilisé la mécanique pour découvrir les résultats concernant la tangente et d'autres propriétés de la spirale? La réponse nous est inconnue. Toutefois, replaçant le traité de la spirale dans l'ensemble de son œuvre, cela est fort possible.

3.2. La spirale d'Archimède et le problème de la trisection de l'angle.

Si on savait construire cette spirale à la règle et au compas, on saurait résoudre le problème de la trisection de l'angle (En fait, on saurait partager un angle en n angles égaux.) -La construction qui ne présente pas de difficulté, est laissée au lecteur-

3.3. Tangente à la spirale d'Archimède et quadrature du cercle.



Poursuivant la lecture du traité des spirales, nous trouvons la proposition suivante:
"Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle."
Sur la figure ci-dessous, cette proposition se traduit par : soit T le point d'intersection de la tangente à la spirale en A et de la perpendiculaire à (OA) en O ; Alors la longueur OT est égale à la circonférence du cercle de centre O et de rayon OA
Ainsi la construction d'une tangente à la spirale est un problème

En prenant comme unité de mesure la longueur commune des côtés $[A_nA_{n+1}]$, il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que la longueur du segment $[OA_n]$ est $\sqrt{n}$:

$$OA_1 = \sqrt{1},\quad OA_2 = \sqrt{2},\quad OA_3 = \sqrt{3},\quad OA_4 = \sqrt{4},\quad OA_5 = \sqrt{5},...$$

2.3. Pour les enseignants : quelques sujets de réflexion.

La construction de la spirale de Théodore est, sans aucun doute possible, à la porté d'un élève de collège. En faisant preuve d'un peu d'imagination, elle peut susciter des questions dont le niveau peut atteindre voire dépasser le niveau d'une classe préparatoire. En voici quelques-unes :

2.3.1. Spirale de Théodore et nombres complexes

Dans le repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$, on appelle z_n l'affixe du point A_n.

Montrer que $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$ .et retrouver le résultat ci-dessus c'est à dire : $|z_n| = \sqrt{n}$.

Montrer qu'un argument de z_n est, pour $n \geq 2$: $\arg(z_n) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \arctan\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

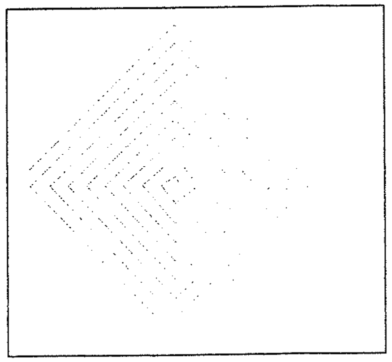
2.3.2. Ecrire un programme de construction de n points de la spirale de Théodore à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2.3.3. De fait, la spirale de Théodore est une spirale discrète. Construire une spirale (S), continue, passant par tous les points (A_n) et vérifiant : M un point quelconque, M' le point déduit de M par la construction de Théodore, alors M' est également sur (S)

2.3.4. Au dix-septième point, la spirale a fait un tour complet (presque). Calculer le nombre de tours lorsque $n = 10^9$ (par exemple).

2.3.5. Généralisons !

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité (En langage des nombres complexes, ceci correspond à la transformation $z \longrightarrow z + i\dfrac{z}{|z|}$). Généralisons en prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté A_nA_{n+1} quelconque (Soit une transformation de la forme



$z \longrightarrow z + b\dfrac{z}{|z|}$ où b est un nombre complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation $z \longrightarrow az + b\dfrac{z}{|z|}$ où a et b sont deux nombres complexes quelconques.

Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple a et b dépendant de n. Les résultats sont parfois spectaculaires. La figure ci-contre a été obtenue en prenant: $a = b = \exp\left(i\,\pi/2\right)$, (nombre de points: 40)

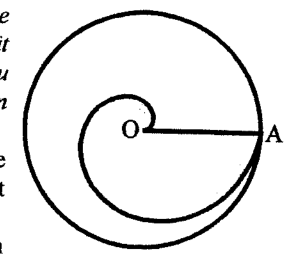
équivalent au problème de la rectification (donc de la quadrature) du cercle.

La démonstration que nous donne Archimède de ce théorème offre un bel exemple de la méthode géométrique des Anciens. Elle présente certes des longueurs, mais celles-ci sont nécessaires. Elle est remarquable par sa rigueur et se trouve dégagée de tout usage de considération d'infini.

3.4. Aire d'un segment de spirale.

Après avoir étudié la tangente à la spirale, Archimède s'intéresse à l'aire d'un segment de spirale. Il énonce la proposition suivante:

"Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite."



(Sur la figure ci-contre cette proposition se traduit par : l'aire de la surface hachurée est le tiers de l'aire du disque de centre O et rayon OA)

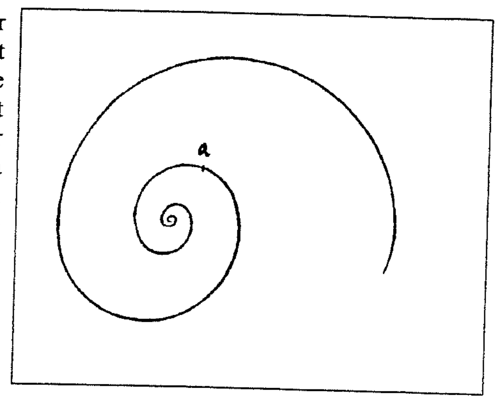
Pour démontrer ce théorème, Archimède partage le cercle en un certain nombre de secteurs angulaires. Il encadre alors l'aire à calculer par deux aires dont la différence est aussi petite que l'on voudra. Puis par un double raisonnement par l'absurde, il en déduit le résultat.

3.5. Longueur d'un segment de spirale au 17 ième siècle.

Au XVII-ième siècle, à l'aide des indivisibles, les mathématiciens (notamment Torricelli, Roberval...) démontrent que le problème de la rectification d'un arc de la spirale d'Archimède est équivalent à la rectification d'un arc de parabole

La méthode des indivisibles étant contestée, Blaise Pascal démontre le résultat ci-dessus à l'aide de la méthode des Anciens: " *[...] et sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens afin que la chose pût être désormais ferme et sans dispute.*

4. Les spirales de "Albrecht Dürer "



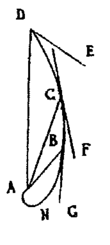
Dans son livre intitulé "Underweysung der messung [...] im jar M.D.X.X.V.", Albrecht Dürer nous montre comment construire quelques spirales dont "une ligne en escargot utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux", une spirale servant à fabriquer une crosse d'évêque,.une spirale qui nous fait penser à la spirale d'Archimède et une spirale sans début ni fin :

"On peut concevoir une ligne éternelle qui s'enroule continûment autour d'un centre et qui décrit aussi à l'autre extrémité des révolutions de plus en plus amples, sans jamais s 'arrêter. On ne peut réaliser cette ligne à la main, à cause de ses infinies grandeur et petitesse. Car comme son début et sa fin n'existent pas, ils sont introuvables et concevables mentalement seulement. Mais je veux la représenter ci-dessous, tant qu'il est possible, avec un début et une fin. Je commence avec un point a et je

décris la ligne à l'aide d'arcs de cercle comme si elle s'enroulait autour d'un centre, et à chaque révolution j'ôte une moitié de l'ampleur de la ligne. Je procède de même avec la ligne partant de a et allant vers l 'extérieur. À chaque révolution, j'ajoute une moitié de l'ampleur. Ainsi cette ligne, plus elle s'enroule, plus elle se resserre, et plus elle se déroule, plus elle se desserre, sans jamais s 'arrêter, ni en son centre, ni en son contour, comme j 'en ai donné, afin de me faire comprendre, une représentation ..."
Les enseignants qui sont à la recherche d'exercices portant sur les suites (notamment les suites adjacentes, les suites et les séries géométriques) sauront tirer le plus grand profit de cette construction d'Albrecht Dürer.

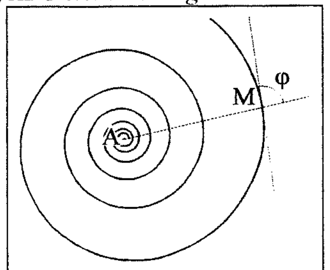
5. La spirale admirable aussi appelée la spirale de Descartes, la spirale de Bernoulli, la spirale de Gregory, la spirale équiangle, la spirale proportionnelle, la spirale logarithmique, la spirale exponentielle...[2]

5.1. La spirale de René DESCARTES.



Dans une lettre datant du 12 septembre 1638 et adressée au père Mersenne en réponse à une question de celui-ci, Descartes écrit : *"...pour cete spirale, elle a plusieurs proprietez qui la rendent assez reconnoissable. Car si A est le centre de la terre & que ANBCD soit la spirale, ayant tiré les lignes droites AB, AC, AD, & semblables, il y a mesme proportion entre la courbe ANB & la droite AB, qu'entre la courbe ANBC & la droite AC ou ANBCD & AD, & ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux"*

Il est très remarquable que Descartes connaisse la proportionnalité de l'arc de la spirale à son rayon. C'est d'autant plus remarquable que celui-ci était convaincu qu'il n'était pas possible de rectifier une courbe quelconque.



Spirale logarithmique d'équation $\rho(\theta) = e^{\alpha\theta}$ avec α=0,088, soit l'angle $\varphi \approx 85°$.

En langage actuelle, la propriété caractéristique que donne Descartes de cette spirale est: $\dfrac{s}{\rho} = a$ (*) où s désigne l'abscisse curviligne du point générique M (s est la longueur de l'arc ANBM), ρ le rayon vecteur (ρ=AM) et a une constante.
Avec les outils mathématiques dont nous disposons, l'équation (*) s'intègre facilement en:

$$\rho = k.e^{\alpha\theta} \text{ où } \theta \text{ est l'angle polaire, k une constante et } \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

On en déduit facilement que l'angle φ formé par le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et la tangente vérifie: $\tan\varphi = \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{a^2 - 1}$ soit $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$ et par suite, cet angle ne dépend pas de M.

[2] C'est le mathématicien Pierre VARIGNON (1654-1722) qui dénomma cette spirale "spirale logarithmique", nom sous lequel elle est connue à l'heure actuelle.
J. BERNOULLI l'appela "la spirale admirable" pour ses nombreuses propriétés (voir la conclusion)

5.2. Une propriété de la spirale logarithmique énoncée par J. BERNOULLI.

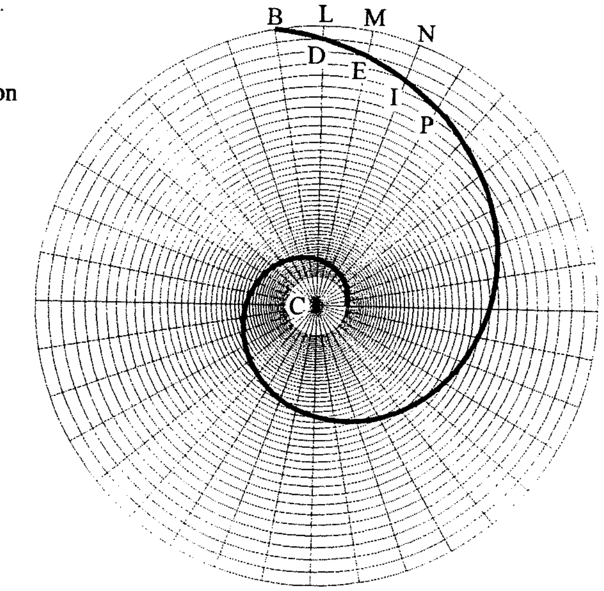
"Si sur le plan du cercle BCH se trouve une courbe BDEIPC que coupent, sous un même angle oblique, les rayons CB, CL, etc. menés à partir du centre C du cercle, cette courbe est dite spirale logarithmique puisque si on choisit des arcs LM, MN etc. infiniment petits et égaux c'est à dire arithmétiquement proportionnels aux arcs BL, BM, BN, les rayons DC, EC, IC sont géométriquement proportionnels par les triangles semblables DCE, ECI etc."
Cette propriété de la spirale logarithmique nous permet de la construire à la manière de Albrecht Dürer. (voir la figure ci-dessous).

Les angles sont égaux:

$$\widehat{BCL} = \widehat{LCM} = \widehat{MCN} = ...$$

Les côtés sont en progression géométriques:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CI} = \frac{CI}{CP} = ...$$



5.3. La rectification de la spirale logarithmique par Torricelli.

Soit à rectifier l'arc de spirale logarithmique $\overset{\frown}{AI}$ de centre O et tel que OA > OI; (voir la figure ci-dessous pour les notations)
Sur cet arc, reportons les points, en nombre pair, B, C, D,E... de telle sorte que:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = ... = \widehat{HOI}$$

et sur les segments [OA] et [OB] les points I' et J tels que:

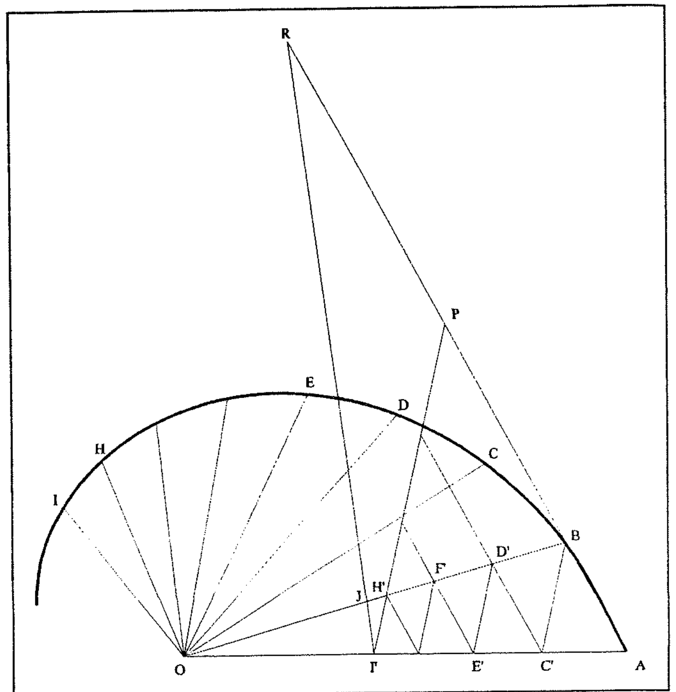
$$OI' = OJ = OI.$$

Appelant R le point d'intersection des droites (I'J) et (AB), la longueur du segment [AR] est la somme des longueurs des segments [AB], [BC], [CD],..., [HI]:

$$AR = AB + BC + CD + DE+...+HI$$

En effet:
Reportons alternativement sur les segments [OB] et [OA] les points C', D', E',... tels que:

$$OC'=OC, OD'=OD, OE'=OE,...,OH'=OH$$



Par définition de la spirale logarithmique, les triangles (AOB), (BOC), (COD), (DOE),...,(HOI) sont semblables.
En particulier, en écrivant les rapports de similitude de (AOB) et (COD), on a:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{OC'}{OD'}$$

Et, par suite, les droites (AB) et (D'C') sont parallèles.
De la même manière, on démontre que les droites (BC'), (D'E'),...,(H'I') sont parallèles ainsi que les droites (AB), (D'C'), (F'E'),...
Appelant P le point d'intersection des droites (I'H') et (AB), on en déduit que:
$I'P = I'H' + ... + E'D' + C'B'$
et $AP = AB + D'C' + E'F' + ...$
Or, les triangles (C'OB) et (COB) sont égaux. D'où BC = BC'.
De même, on a: C'D' = CD, D'E'= DE,...
Et:

$$I'P = IH + ... + ED + CB \quad \text{et} \quad AP = AB + DC + EF + ...$$

Enfin, le triangle (RPI') est isocèle car:

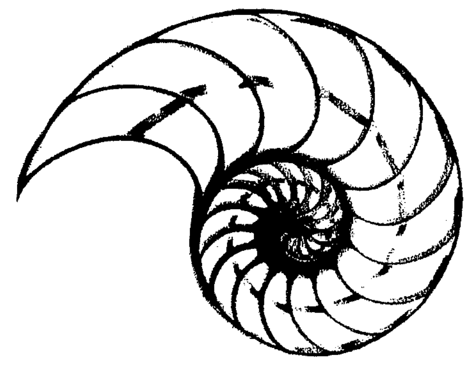
(*) $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{B}C' = O\hat{H}'I'$

(**) le triangle (OJI') est isocèle donc $O\hat{I}'J = O\hat{J}I'$ et aussi: $H'\hat{J}I' = JI'\hat{A}$
(*) et (**) impliquent que les deux triangles (H'JI') et (AI'J) sont semblables et, par suite l'égalité des angles: $R\hat{I}'P' = P\hat{R}I'$ et des longueurs $I'P = IP$.
Finalement: $AR = AP + AR = AB + BC + CD + DE + ... + HI$

Si à présent on augmente indéfiniment le nombre de points sur l'arc $\overset{\frown}{AI}$, la droite (AB) devient la tangente à la spirale en A et la droite (I'J) la perpendiculaire à (OA) en I'.

<u>Théorème</u>: la longueur de l'arc de spirale logarithmique $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur du segment [AR] de la tangente à la spirale en A où R est le point d'intersection de la tangente avec la perpendiculaire à (OA) en I' tel que OI' = OI.

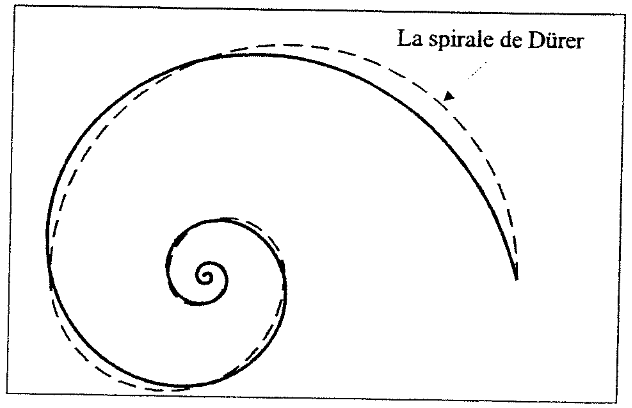
5.4. Une spirale logarithmique dans la nature: le nautile.



Petit nautile deviendra grand: Quand la chambre qu'il occupe est trop petite, le nautile en secrète une nouvelle qu'il sépare de la précédente par une cloison. Sa coquille qui est symétrique par rapport à son plan médian, dessine une spirale logarithmique parfaite.
Un exercice: reproduisez la coquille ci-dessus en l'agrandissant ou en la réduisant (dans le rapport k); Moyennant une rotation (d'angle ψ), cette reproduction se superposera avec l'original. Trouvez une relation entre k et ψ.

5.5. Bref retour à la spirale sans début ni fin de Albrecht Dürer.

Sur la figure ci-dessous, nous avons représenté simultanément la spirale de Dürer et une certaine spirale logarithmique -le lecteur se fera un plaisir de trouver l'équation polaire de cette spirale-



6. La spirale hyperbolique.

6.1. Jean Bernoulli et le problème des forces centrales.

6.1.1. De quel problème s'agit-il précisément ?

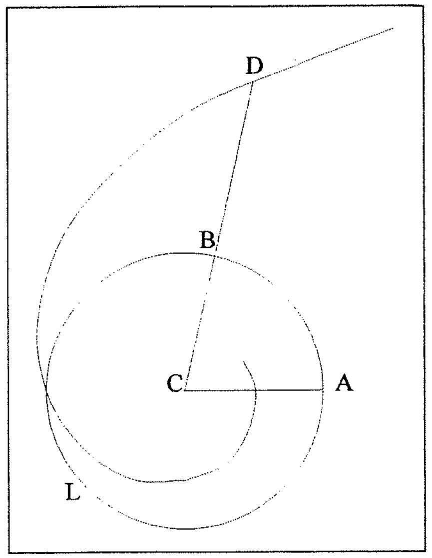
Rappelons, pour commencer, qu'on dit qu'un corps mobile M est soumis à une force centrale lorsque à chaque instant la force qui s'applique au point M et qui donne naissance au mouvement du point M est dirigée vers un point fixe O de l'espace. Cette propriété peut aussi se traduire par : l'accélération du point M est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le problème des forces centrales consiste à trouver de quelle manière un mobile M doit décrire une courbe (C) donnée de telle sorte que l'accélération du point M soit, à chaque instant, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Dans le problème inverse, la force centrale est donnée et il s'agit de trouver la courbe décrite par le corps soumis à cette force.
L'origine de ce problème est la détermination de la trajectoire des planètes. En effet, le point fixe est le soleil, le corps mobile est une planète et la force centrale est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette planète au soleil. Bien entendu, cette force est

dirigée à chaque instant vers le soleil. Nous savons que dans ce cas la trajectoire est une ellipse.

J. Bernoulli, pour montrer l'efficacité des nouvelles méthodes de calcul inventées par Leibniz, généralise le problème au cas des forces centrales inversement proportionnelles au cube de la distance du point M au point O.

Dans une lettre datée du 28 octobre 1710 et adressée à Pierre VARIGNON, Jean BERNOULLI écrit: *"[mes] lettres contenant mes solution du probleme inverse des forces, dont il ne paroit encore aucune solution dans le public. Mr Newton luy même suppose bien que, comme une section conique fait les forces centrales vers le foyer en raison reciproque des quarrés des distances, ainsi toute courbe où les forces centrales se trouvent dans cette raison, sera une section conique [...] car de même que de ce que dans la spirale logarithmique, les forces centrales vers le centre de la spirale sont en raison reciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que toute courbe où cette loy des forces se trouve soit une spirale logarithmique, pouvant y avoir d'autres courbes et même d'algebraiques qui ont la même loy des forces..."*

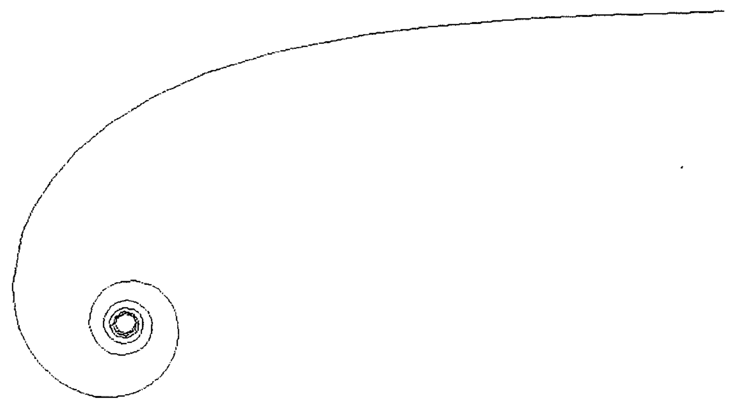


Ultérieurement, s'étant rendu compte qu'il avait "oublié" une solution, il écrit à nouveau à Pierre VARIGNON (lettre du 10 janvier 1711) : *" ... un corps pour se mouvoir dans une spirale logarithmique requiert les forces centrales, en raison réciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que cette loy des forces etant supposée, la courbe trajectoire sera de necessité une spirale logarithmique, vu qu'une autre spirale d'une nature toute differente, repond aussy à la même loy des forces; c'est la spirale que l'on peut appeller hyperbolique, dont voici la construction: Du centre C d'un cercle ABL, soit tiré par quelque point de la circonference B la droite CBD, en sorte que le rectangle entre la droite CD et l'arc AB commençant d'un point fixe A, soit toujours constant, le point D sera dans la spirale Hyperbolique DEF, la quelle a cela de commun avec la spirale logarith. que l'une et l'autre repond à la raison reciproque des cubes des distances pour les forces centrales..."*

Ainsi, Jean Bernoulli est amené à introduire une courbe qu'il appelle "spirale hyperbolique". Il la définit par la relation : $CD.\overset{\frown}{AB} = \lambda$ (*) où λ est une constante.[3]

Actuellement, nous traduisons la relation (*) par $\rho = \frac{\lambda}{r}\frac{1}{\theta}$ où θ désigne l'angle polaire $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)$ et ρ la distance CD.

[3] Remarquons que Pierre Varignon avait déjà étudié cette courbe dans un mémoire publié en 1704. Toutefois, J. Bernoulli est probablement le premier à utiliser la loi des aires pour définir et construire la spirale hyperbolique.

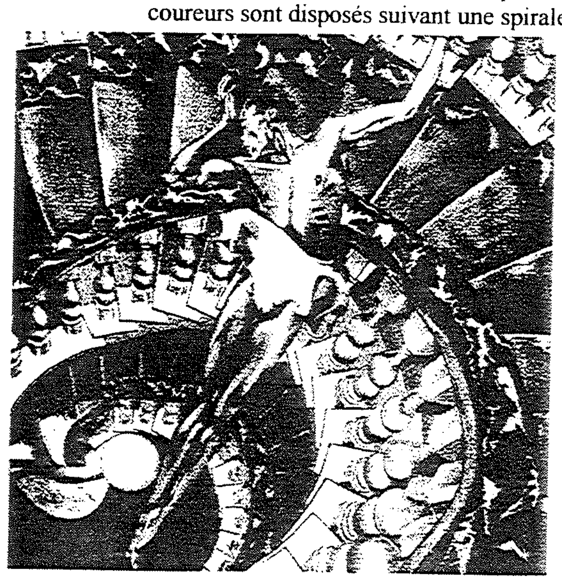


6.2. Trois autres situations où l'on rencontre une spirale hyperbolique.

6.2.1. La projection stéréographique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une spirale hyperbolique (voir photo ci-dessous).

6.2.2. L'image d'une spirale d'Archimède par inversion est une spirale hyperbolique.

6.2.3. Sur un stade d'athlétisme, au départ d'une course de 200 m ou de 400 m, les coureurs sont disposés suivant une spirale hyperbolique.



La représentation ou la photo d'un escalier hélicoïdal est une spirale hyperbolique.
(tableau de Bernard Sanna dit "Ben", professeur au lycée Louis Couffignal de Strasbourg)

7. La développante du cercle et la spirale de Norwich

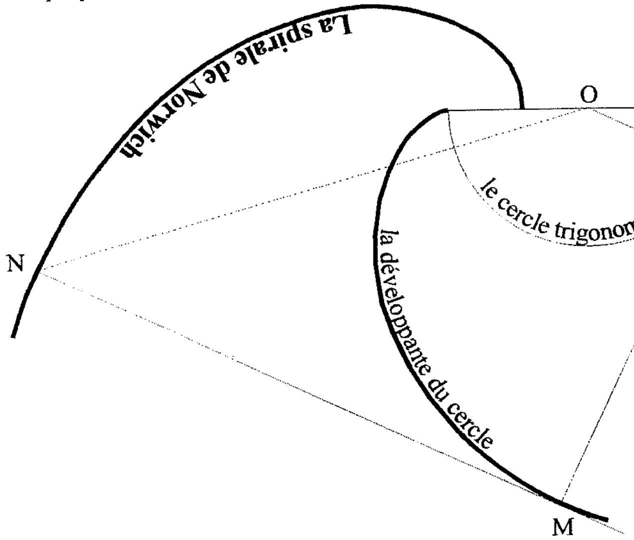
7.1. La développante du cercle.

Cette courbe s'obtient très simplement de la manière suivante: prendre une bobine de fil, attacher un crayon au bout du fil, fixer solidement la bobine sur le plan de travail, dérouler le fil en prenant soin de laisser tendu. Le crayon marquera une superbe spirale que l'on appelle habituellement "développante du cercle"
Léonard de VINCI préconisa de donner cette forme aux dents des engrenages.

7.2. La développante de la développante du cercle: la spirale de Norwich.

Enroulons à présent notre fil sur la développante du cercle. En le déroulant (prendre soin de le laisser tendu), nous obtenons une nouvelle spirale appelée "**spirale de Norwich**". Celle-ci doit son nom au mathématicien anglais J.J. SYLVESTER qui l'a dénommée ainsi suite à un meeting qui eu lieu en 1868 dans la ville de Norwich.

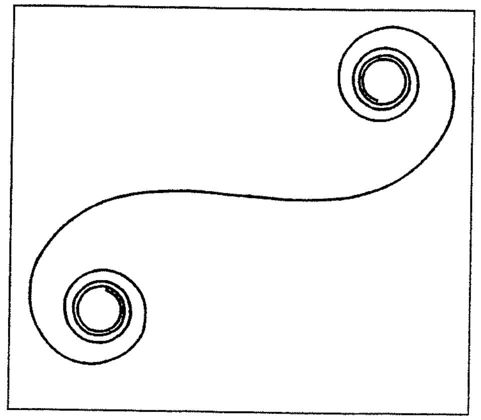
Une propriété remarquable de cette spirale:
En tout point de cette spirale, le rayon vecteur est égal au rayon de courbure. Sur le dessin ci-dessous, cette propriété se traduit par: NO=NM.



8. La spirale de CORNU ou clothoïde.

En étudiant les problèmes de la diffraction de la lumière, Alfred CORNU (1841-1902), un physicien français, fut amené à introduire une courbe dont le rayon de courbure en un point quelconque M est inversement proportionnel à l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{OM}$.
Cette courbe qui est une spirale et qui porte désormais son nom a pour équations, en coordonnées paramétriques:

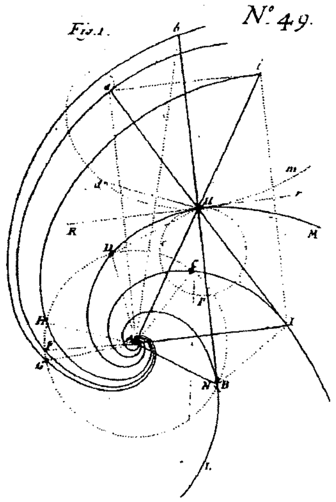
$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(u^2)du \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)du \end{cases}$$



Cette courbe est utilisée actuellement dans les travaux publics - dessin des bretelles de raccordement d'autoroutes par exemple - Elle permet de négocier les virages à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

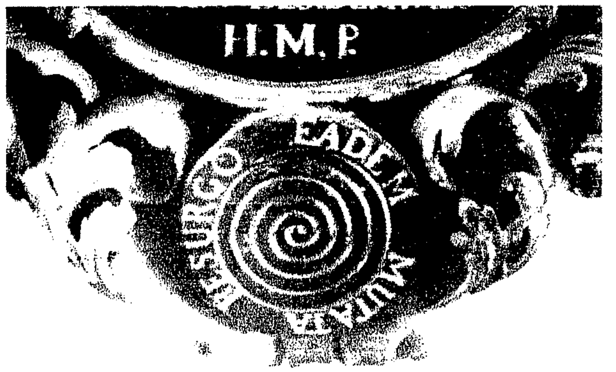
9. Conclusion

Pour finir, je ne peux résister au plaisir de donner la conclusion du chapitre XLIX que Jacques Bernoulli consacre à la spirale logarithmique dans son ouvrage "Acta eruditorum".



Après avoir montré de nombreuses propriétés de cette courbe - qu'il appelle "la spirale admirable" -, J. Bernoulli conclut de la manière suivante:

Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter ARCHIMEDE, j'ordonnerai volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe: "Eadem numero mutata sesurgo" c'est-àdire : "Elle ressuscitera identique à elle-même".



Détail de la pierre tombale de J. Bernoulli à Bâle. Remarquez que, contrairement au souhait de J. Bernoulli, le sculpteur a gravé une spirale d'Archimède et non une spirale admirable. (photo André Stoll)

10.Bibliographie

Fragments d'histoire des mathématiques II -Brochure APMEP n°65 -1987 -

ARCHIMEDE - Traduction Charles MUGLER - Edition "Les Belles Lettres" Tome II 1971.

ALBRECHT DURER - Géométrie - Traduction Jeanne PEIFFER - Editions du Seuil 1995.

Blaise PASCAL - Oeuvres Complètes - Bibliothèque de la Pléade - Editions Gallimard 1954.

P. J. DAVIS - Spirals from Theodorus to chaos - Editions A K PETERS Wellesley, Massachusetts 1993.

Brochure IREM de Strasbourg - Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique - 1996 -

Dr Gino LORIA - Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven. LEIPZIG 1902.

René DESCARTES - Œuvres de René DESCARTES - Editions Vrin - Tome 2 - 1996.

Jacob BERNOULLI - Opera - Acta eruditorum, 1692 - vol XLII et vol XLIX - Traduit du latin par Marga BUFFARD/André STOLL

PLATON - Théétète - Edition "Les Belles Lettres" Tome VIII 1963.

Revue du Palais de la découverte - numéro spécial 45 - Courbes mathématiques - 1995.

Dictionnaire des symboles.- Jean CHEVALIER et Alain GHEERBRANT- Editions Robert Laffont/Jupiter- Collection Bouquins- 1993.

Quelles sont les lignes courbes que l'on peut recevoir en géométrie ?

Jean-Pierre Friedelmeyer

Cette question, posée par René Descartes (1596-1650) au début du Livre II de sa *Géométrie*, accompagne en réalité toute l'histoire des mathématiques. Courbes mécaniques opposées aux géométriques, courbes transcendantes opposées aux algébriques, courbes tracées d'un mouvement libre de la main et donc " *ne suivant aucune loi* ",[1] courbe de Peano, courbes fractales, chaque génération de mathématiciens a eu la tentation d'exclure certaines courbes de son champ d'étude, comme ne correspondant pas à son idéal de rationalité ou à ses possibilités d'investigation. Ce qui nous instruit en profondeur sur cet idéal mais aussi sur sa remise en cause, sur ces possibilités supposées comme sur l'élargissement dont elles sont susceptibles. Ce qui peut également rejoindre des questions d'ordre pédagogique relatives aux courbes que nous " pouvons recevoir " dans nos classes.

Erreur significative : dans la présentation générale des ateliers de l'Université d'Eté de Nantes le mot ***ligne*** avait été oublié dans la transcription de la citation de Descartes. Cet oubli dit bien que, si l'on n'y prend garde, nous ne sommes jamais assez circonspect dans la lecture des textes anciens dont les mots sont compris et interprétés spontanément, dans leur acception actuelle. Or l'historien doit s'imposer tout un travail de distanciation et de retour aux sources pour que n'interfèrent pas les connaissances et les conceptions actuelles avec celles des époques du passé. *Il est essentiel* - disait Koyré - *d'intégrer dans l'histoire d'une pensée scientifique la manière dont elle se comprenait elle même et se situait par rapport à ce qui la précédait et l'accompagnait.*[2] Or le concept de ***courbe*** est un de ceux qui s'est le plus modifié et enrichi au fil de l'histoire, et d'abord dans sa nature grammaticale même. Jusqu'au milieu du XVIII^{ème} siècle, le mot ***courbe*** était uniquement utilisé comme adjectif du mot ***ligne***, caractérisant une qualité de nature physique et opposée à la qualité ***droit.*** Rappelons comment Euclide ouvre le Livre I des *Eléments* avec les quatre définitions suivantes :

Déf.1 : Le point est ce dont il n'y a aucune partie.
Déf.2 : Une ligne est une longueur sans largeur.
Déf.3 : Les limites d'une ligne sont des points.
Déf.4 : Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.[3]

On conçoit que ces définitions ne soient guère exploitables car elles ne sont pas assez précises pour être mathématiquement productives, pour permettre d'initier un raisonnement mathématique à partir d'elles. C'est pourquoi historiquement on n'a pas étudié la *ligne* en général, mais seulement des lignes particulières. Ces lignes sont définies comme des *lieux* (des " ensembles de points ", dirions nous aujourd'hui) jouissant de certaines propriétés. Ou alors elles correspondent à l'intersection de surfaces, ou encore à la trajectoire d'un point dont le mouvement est bien spécifié. De **physique**, de sensible, l'objet ***ligne courbe*** devient **géométrique**, idéalisé, conceptualisé, la plupart du temps à partir de relations entre grandeurs. Plus tard ces relations donneront lieu à des ***équations*** [4]qui permettront de soumettre les lignes

[1] Voir plus loin le texte n° 7, d'Euler.
[2] A. Koyré, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, p.14.
[3] Traduction B. Vitrac, Euclide, *les Eléments*, p. 151 - 154.
[4] Le mot *équation subit lui-même une évolution sémantique au fil de l'histoire, passant du statut de simple égalité à celui de formulation algébrique d'un problème au moyen d'une inconnue, puis de relation entre des coordonnées, les deux derniers sens continuant à cohabiter.*