L'ambiguïté révélatrice de la courbe quadratrice d'Hippias d'Elis

Alain Bernard

" celui qui met en avant un projet...même s'il propose de construire l'impossible, on peut l'excuser, et il n'a pas de comptes à rendre."

Pappus d'Alexandrie,
Préambule au 3ème livre de la Collection mathématique.

On trouvera dans les pages qui suivent la traduction de quelques passages cruciaux de la Collection mathématique du géomètre Alexandrin Pappus. On pense que Pappus a vécu vers la fin du 2nd siècle ap.JC ou le début du 3ème. Sa collection (*sunagogê*), comme son nom l'indique, apparaît avant tout comme un recueil des travaux mathématiques les plus divers, pour la plupart élaborés très antérieurement à Pappus par ceux qu'il appelle " les Anciens ". L'intérêt de ce texte pour la connaissance de la géométrie antique est donc évident ; corrélativement, on peut se demander si son intérêt dépasse de beaucoup celui d'une compilation. Pappus est-il un auteur sans originalité propre, qui n'a fait que transmettre révérencieusement ce que de plus anciens (et plus habiles) que lui avaient fait, ou bien y a-t-il une cohérence interne à son œuvre qui mérite de retenir l'attention ?

Ici il faut bien mesurer la réponse, car l'influence qu'a eu Pappus sur la postérité, et notamment sur ses lecteurs modernes comme Clavius, Viète ou Descartes est certaine, et cette influence est même déterminante aussi bien du point de vue de la classification des différentes courbes de la géométrie antique (on trouve chez Pappus de longs passages sur la distinction entre problèmes plans, solides et linéaires) que de celui de la compréhension de la méthode à suivre en géométrie. On connaît en effet le célèbre préambule du livre VII (traduit ci-dessous) dans lequel Pappus explique à son fils Hermodore ce qu'on doit entendre par le terme grec d'*analyse*. Si cette même question –celle de l'analyse– a si fort préoccupé les mathématiciens modernes, c'est qu'elle est déjà au cœur des préoccupations de Pappus, et que son texte, en plus d'être une compilation des travaux de mathématiciens anciens, est aussi une sorte de *dispositif* qui inquiète le lecteur au sujet de cette question. Cet aspect inquiétant et suggestif de la Collection est patent, si l'on songe au passage du livre VII que Descartes cite minutieusement au premier livre de sa *Géométrie*, pour décrire ce qu'on connaît depuis sous le nom de *problème de Pappus* : ce problème est effectivement énoncé par ce dernier, et d'une façon telle que cet énoncé excite la curiosité. Qu'on songe encore à tous les efforts déployés (notamment par Michel Chasles) pour reconstituer les fameux livres d'analyse perdus d'Euclide et dont Pappus ne donne que le résumé au livre VII : les gloses se sont multipliées à proportion du caractère énigmatique non seulement de ce que Pappus évoque (les livres perdus), mais encore de cette analyse dont il semble dire qu'elle permet de *trouver* quelque chose en géométrie. Il semble, à lire le début du livre VII, que cette technique d'ana-lyse, de "solution à rebours", résorbe systématiquement l'écart créé par l'énoncé d'un problème.

Il semble. On dirait que. Tout se passe comme si. Qu'en est-il exactement ? Que veulent dire ces mots : problème, théorème, solution (*lusis*), résolution (*analusis*), composition (*sunthesis*) pour Pappus ? Quelle portée leur donne-t-il ? C'est à ces questions qu'entend répondre la présentation et la lecture des textes proposés ci-après. Le but est en fait de montrer que le dispositif suggestif et "excitant" que nous avons évoqué plus haut ne se cantonne pas aux célèbres passages du livre VII qu'on cite tout le temps. Dès les premiers livres, en effet, et en particulier dès le début du livre III, qu'on trouvera ici presque *in extenso*, la question de l'analyse est présente, et elle l'est d'une manière qui est au fond encore plus frappante et intriguante qu'au livre VII : Pappus y met si l'on peut dire "les pieds dans le plat" et parle d'emblée de ce qu'on appelle un *problème*, mieux dit un projet, par opposition à la notion de *théorème*, ou spéculation, spectacle, et ceci relativement à la manière qu'ont les uns et les autres de *chercher* en mathématiques.

Je dis bien : par opposition, car problème et théorème pour Pappus, ne sont pas associés de façon à désigner en bon ordre différents modes d'exposition mathématiques (les théorèmes proposent une déduction, les problèmes une construction), mais il précise très clairement que l'enjeu est ici un désaccord au sein de la horde des mathématiciens chercheurs : les uns sont partisans de la voie *spéculative* ou *théorétique*, les autres au contraire adoptent un mode *projectif* ou *problématique* de recherche. Ces derniers en effet projettent quelque chose, ils se jettent en avant pourrait-on dire sans même *savoir* au préalable si ce geste est légitime. Les tenants de la voie spéculative ont au contraire le privilège de la vue, et s'ils avancent, c'est en *surveillant* simultanément cette avancée du regard (*théoreîn*) ; ils garantissent en quelque sorte leur avancée.

Il est également très clair qu'entre ces deux camps, Pappus choisit celui des spéculateurs, de ceux qui voient ce qu'ils cherchent, comment ils le font ou doivent le faire. Pour Pappus on *doit savoir*, par exemple, que certains problèmes, dits

solides, ne sauraient être résolus que par le moyen de cercles et de droites. C'est ce privilège du regard et d'une connaissance préalable qui permet à Pappus de condamner vigoureusement la construction de l'élève de Pandrosius auquel le préambule du livre III est adressé.

Or, et c'est ici qu'apparaît le génie de Pappus, qui passe de loin le simple talent d'un commentateur érudit, Pappus ne se contente pas de réfuter sèchement la construction de Pandrosius, et avec lui les tenants de la voie projective de recherche. Il faut plutôt dire qu'il les tient en respect, et leur accorde jusque dans sa critique le bénéfice de la primauté de leur geste : c'est ce qu'on entend en particulier dans la citation que j'ai mise en exergue de cette introduction. C'est qu'en effet nous touchons là à un problème délicat : il semble qu'il ne soit pas toujours possible de contrôler à l'avance le chemin qu'on empruntera dans sa recherche, et qu'il reste toujours une part projective, une part d'audace qui outrepasse toute connaissance préalable, et il semble aussi que cette part d'audace nourrisse l'activité du chercheur. Le génie de Pappus est ici d'avoir su maintenir l'écart entre un projet et son contrôle, entre problème et théorème, et d'avoir su le maintenir de telle sorte que ce maintient parcourt toute la *Collection*. Les célèbres passages du livre VII ne sont que les saillants de cette tension permanente.

Il faut en effet y songer : tenir ainsi en respect la part incontrôlée, problématique et aventureuse de la recherche, conduit inévitablement à souligner toujours les limites de ce qu'on sait, et de ce qui est connu en géométrie. Qu'y a-t-il à la limite de ce champ reconnu ? On a cité le problème désigné par Pappus et qui a tant intéressé (entre autres) Descartes. Mais on peut encore mentionner une série de courbes dont Pappus dit lui-même qu'elles ont " *des propriétés nombreuses et étonnantes* ", comme la conchoïde de Nicomède, la spirale d'Archimède ou la quadratrice de Dinostrate. Ces courbes sont mentionnées très tôt dans la *Collection* au titre des courbes qui répondent à la catégorie des problèmes dits linéaires (*grammika*), c'est-à-dire des problèmes qui peuvent être résolus au moyen ... de lignes (*grammai*), sous-entendu autres que droites, cercles et coniques. Déjà dans cette dernière catégorie qui laisse perplexe (car elle paraît tout embrasser) apparaît le caractère *limitrophe* de ces courbes. Ce caractère est encore renforcé quand on examine de près la présentation que fait Pappus de la quadratrice. C'est à son sujet en effet[1] qu'il emploie le qualificatif de mécanique, à l'issue d'une critique qu'il rapporte d'un certain Sporos. Ce qu'il faut entendre par là, c'est que la courbe est "sans démonstration", on ne peut pas anticiper sa génération, du moins à première vue. "Du moins à première vue", car il apparaît peu après qu'en fait Pappus en donne quand même et a posteriori une analyse géométrique : la quadratrice y apparaît comme la projection d'une intersection de surfaces ingénieusement

[1] plus exactement au sujet de sa génération.

combinées. Autrement dit, pour Pappus, la courbe n'est pas "à rejeter" entièrement, mais elle occupe un statut très ambigu, et par là remarquable, à la frontière entre géométrique (analysable, aniticipable) et non géométrique (mécanique, audacieuse, incontrôlée).

Là encore, on peut alors comprendre que la courbe, et cette manière de la qualifier, de la situer à la frontière des choses connues, ait eu tant de succès ensuite : les premiers commentateurs modernes de la quadratrice s'intéressent à la courbe avant tout parce qu'elle mécanique et "non analysable". Tout se passe donc comme s'ils avaient été "piégés" par la lecture de Pappus ; et on peut donc soutenir, inversement, que ce n'est pas là le fruit du hasard, mais que la quadratrice se trouve bien à un endroit crucial du "dispositif suggestif" mis en place par Pappus et dont j'ai parlé plus haut.

Décrire *l'ensemble* de ce dispositif est un travail de longue haleine, et que je poursuis ces temps-ci. Mais le propos n'est pas ici de présenter ce travail, mais bien plutôt d'indiquer d'où il part. En résumé, l'idée est la suivante : pour comprendre la place de la quadratrice chez Pappus *puis* pour sa postérité, il faut se rendre d'abord sensible aux difficultés soulevées d'emblée par la *Collection*, et qui font de ce qui n'est apparemment qu'une compilation savante un *dispositif suggestif* qui désigne sans cesse la limite des choses connues en géométrie.

Le travail d'atelier n'a permis précisément que d'aborder ces questions, et nous n'avons que fort peu parlé de la quadratrice elle-même. Nous avons en fait surtout insisté sur le préambule du livre III, lecture complétée par celle du célèbre passage du livre VII où Pappus décrit l'*analyse* mathématique. Le long (et fastidieux) début du livre III, depuis l'avertissement lancé à l'élève de Pandrosius auquel Pappus s'adresse, jusqu'à l'exposition de la distinction entre les problèmes plans, solides et linéaires, mérite en effet qu'on l'étudie de près pour voir toutes les difficultés que Pappus rencontre dans l'explication de l'erreur de la construction qui lui est proposée.

Nous autres modernes, qui avons en tête (ou en main) différentes techniques évoluées d'analyse (car l'analyse de Pappus a été considérablement renouvelée par les techniques algébriques), sommes à même de donner raison à Pappus et de réfuter la construction proposée. Mais il est préférable d'oublier ici notre privilège pour être attentifs aux arguments qu'emploie Pappus : précisément ces arguments, qui font lourdement appel à l'analyse euclidienne, ne nous paraissent pas probants. Pappus tâche de réfuter la construction à chaque pas, mais en définitive les seuls arguments de poids qu'il ait sont de simples arguments d'autorité : les anciens ont su qu'un problème tel que l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données est solide et non plan, et *par conséquent* cette construction

est impossible. La question peut bien sûr être soulevée (et elle l'a été pendant le travail d'atelier) si Pappus n'avait pas malgré tout une sorte *d'intuition* de la vérité de sa réfutation, même s'il n'avait pas encore les moyens de l'appuyer par une véritable démonstration. Après tout pourquoi pas ? Toutes les spéculations sont possibles, mais ces spéculations sur ce que pouvait être l'intuition de Pappus ne doivent cependant pas nous masquer l'intérêt du texte *pris à la lettre* : pris à la lettre ce que dit Pappus n'est pas véritablement probant mais tout juste suggestif. Du reste Pappus conclut lui-même délicatement sa très longue "réfutation" par un conseil avisé : celui de ne pas accepter tels quels ses arguments, mais de relire ce qu'il a écrit pour s'imprégner des techniques de résolution (d'analyse) que Pappus propose à Pandrosius. Je pense, en d'autres termes, qu'il faut voir cette longue et intriguante "réfutation" comme une sorte d'invitation fait par Pappus à cerner avec lui la difficulté qui le préoccupe, savoir : comment peut-on anticiper sur certains projets mathématiques, et jusqu'à quel point ? Pour Pappus la réponse n'est pas si univoque qu'elle paraît l'être à première vue. C'est même cette équivocité qu'il présente ici et qu'il prolonge par la suite.

Il faut signaler aussi un autre intérêt de la traduction que je propose : il tient à sa forme plus qu'à son contenu, dont il vient d'être question. L'originalité de la forme tient au parti pris de traduction que j'ai adopté, et que j'ai résumé dans le mode d'emploi qui suit, et que je conseille de lire avant d'aborder la lecture proprement dite.

<u>*Mode d'emploi* de la traduction de Pappus d'Alexandrie.</u>

La traduction qu'on lira dans les pages suivantes est fondée sur les principes suivants :

1) on a essayé d'y garder l'ordre des mots en grec ainsi que la signification qu'y ont en propre les termes employés. L'une des difficultés de toute traduction du grec en français est en effet que le français possède déjà tout un vocabulaire "grec", c'est-à-dire translittéré (et non pas traduit) du grec : cf. les termes tels que mathématique, physique, théorème, problème, etc. Cela est d'autant plus dommageable que Pappus lui-même (et il n'est pas le seul à le faire) tâche d'employer certains mots en les décomposant pour bien montrer ce qu'ils veulent dire (cf. pour un exemple le préambule du livre III sur "problème" et "théorème").

Le parti pris est donc ici d'essayer de rendre en français le jeu naturel des mots du grec. On a donc essayé de traduire systématiquement les termes qu'habituellement on ne fait que translittérer. Ainsi "problêma" a-t-il été traduit par projet, pour permettre de rendre visible la proximité problêma/proballesthai, c'est-à-dire projet/projeter.

2) un peu dans le même ordre d'idées, on a tâché de garder l'ordre et la longueur originales des phrases. Cela implique une évidente lourdeur de la traduction; mais cette lourdeur doit être vue comme un avantage pour un travail de lecture approfondie, où il s'agit précisément de "rentrer dans le texte", c'est-à-dire de s'investir dans le travail de sa lecture.

3) même dans les notes, où la traduction est parfois détaillée, je n'ai écrit de mots en caractères grecs; pour ceux qui connaissent la langue, les conventions de translittération sont les suivantes:

ê = , e ou é = , ainsi epistêmê (ou épistêmê) = öpistʃmh
ch = , h = aspiration, ainsi huposcheseis = ÿposcöseij
zd = , ô = , ainsi spoudazdô = spoud£zw

4) conventions typographiques: les passages en petits caractères sont des passages que l'éditeur du texte grec a supposé être interpolés, c'est-à-dire rajoutés au texte original par un commentateur tardif. Les passages en italiques sont des résumés de passages nécessaires à la compréhension, sans qu'il soit cependant besoin de les parcourir en détail. Les mots ou expressions entre crochets sont là pour rendre la phrase plus compréhensible, tout en signalant qu'ils ne figurent pas dans l'original.

5) je n'ai pas traduit moi-même tous les passages qu'on trouvera ci-après ; au contraire, on verra que dans certains endroits je n'ai fait que transcrire la traduction classique de Paul Ver Eecke en la modifiant là où je n'étais pas d'accord, ou bien pour homogénéiser la traduction. Ces passages transcrits sont surtout des passages "techniques".

Sommaire du dossier de lecture.

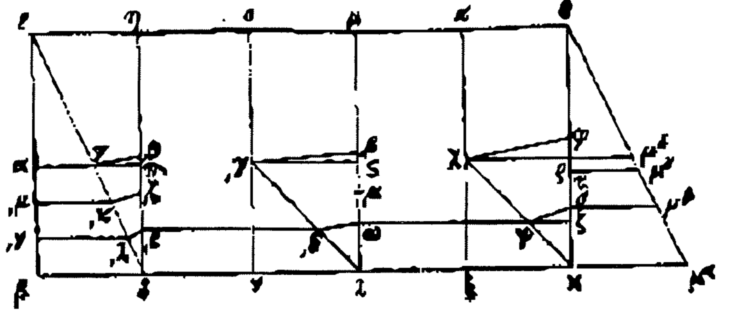
Troisième livre de la *Collection* de Pappus d'Alexandrie
qui comprend des projets géométriques plans et solides.

Ceux qui veulent distinguer plus habilement[2] les [choses] cherchées[3] en géométrie, excellent Pandrosius, estiment qu'on doit appeler *projet*[4], d'un côté, ce en quoi on *projette* de créer quelque chose et de le construire, et *spectacle*[5], d'un autre côté, ce dans quoi, certaines choses ayant été supposées[6], ce qui s'ensuit de ces choses, et en général ce qui les accompagne[7] est *spéculé*[8] ; et parmi les anciens, les uns disaient que tout est projet, les autres que tout est spectacle. Celui qui, d'un côté, met en avant un spectacle, embrassant du regard d'une manière ou d'une autre ce qui s'ensuit [du supposé] juge que c'est ainsi qu'il faut chercher, et il ne l'avancera pas autrement s'il est sain d'esprit ; celui qui, d'un autre côté, met en avant un projet, au cas où, toutefois, il est ignorant [amathe[9]] et ignare[10] en tout, même s'il propose de construire ce qu'il est impossible [de construire], on peut l'excuser[11] et il n'a pas à rendre des comptes. C'est qu'en effet cela aussi, c'est le travail de celui qui cherche : déterminer[12] le possible et l'impossible, et dans le cas du possible, quand et comment et combien de fois c'est possible. Mais si, par contre, il prétend s'y connaître en mathèmes[13], et qu'il projette d'une façon en quelque sorte inexpérimentée, il n'est pas exempt de reproche[14].

Hier, cela étant, quelqu'un de ceux qui prétendent s'y connaître en mathèmes par ton intermédiaire ont déterminé comme des ignorants[15] des propositions de projets. C'est sur ces derniers, et sur des sujets voisins, qu'il fallait que je dise leurs démonstrations dans le troisième livre de cette *Collection*, pour te venir en aide ainsi qu'à ceux qui aiment apprendre[16]. Et pour commencer, cela étant, quelqu'un qui croyait être grand géomètre a déterminé ce projet en ignorant [amathe] : *deux droites étant données tirer deux moyennes proportionnelles en proportion continue*; et c'est ce qu'il a dit savoir par une spéculation plane; et l'homme nous a

2 littéralement "avec plus d'art", **technikoterôs**.
3 **zdêtein**, chercher, **ta zdêtoumena**, "les cherchées". Cf. "zététique" (Viète).
4 **problêma**, en relation avec **pro-ballesthai**, "jeter en avant". Souvent traduit par *problème*.
5 **théôrêma**, en relation avec **théôrein**, voir, contempler; cf. théâtre. Souvent traduit par *théorème*.
6 **hupôkeimenôn**, "qui se tiennent couchées dessous".
7 **to episumbainon**, ce qui "va avec elles"
8 **théôreitai**; "spéculé", donc, pour rappeler la correspondance **théôrêma - théôreisthai**.
9 **amathês**; même racine que **mathêma**, **mathêmata**, **mathêmatikos**, en relation avec **manthanein**, apprendre. L'amathie (**amathia**) est une sorte d'ignorance particulière que Platon, dans le Sophiste, caractérise ainsi: est "amathe" celui qui, croyant savoir quelque chose, *en fait* l'ignore.
10 **idiôtês**, "idiot", qui s'oppose en grec au **technitês**, au spécialiste.
11 le terme grec suggère qu'on peut le comprendre et donc l'excuser.
12 **di-orizdein**; **orizdein**, c'est "terminer", "limiter"; cf. **horos**, la limite, et le français *horizon*.
13 **mathêmata**; difficile à traduire. Quelque chose de relatif à l'apprendre (**manthanein**).
14 **aitia**; "il n'est pas irresponsable".
15 c'est-à-dire comme des "amathes".
16 les "philomathes".

ensuite demandé, après que nous l'aurions examiné, de répondre au sujet de la construction qu'il a faite, laquelle est la suivante:



Soient deux droites αβ, αγ à angles droits entre elles; menons par le point β la droite βδ parallèle à la droite αγ; posons la droite βδ égale à la droite αβ; menons la droite de jonction δγ rencontrant la droite βα [c'est-à-dire cette droite βα prolongée] au point ε; menons par le point ε la droite εθ parallèle à la droite αγ; prolongeons la droite βδ; menons par le point δ la droite δη parallèle à la droite βε et posons les droites δν, νλ, δξ, ξκ égales à la droite βδ [sur le prolongement de cette dernière]. Menons, par les points ν, λ, ξ, κ les droites νο, λμ, ξπ, κθ parallèles à la droite βε; posons la droite κρ égale à la droite βα et coupons la droite κρ en deux parties égales au point σ. Que la droite σθ soit à une droite θτ comme la droite κθ est à la droite θσ, et que la droite θτ soit à une droite θφ comme la droite σθ est à la droite θτ. Découpons sur la droite ξπ une droite χξ égale à la droite αβ, et menons la droite de jonction χκ et la droite de jonction χφ. Menons du point σ la droite σψ parallèle à la droite χφ, et, du point ψ, la droite ψω parallèle à la droite κξ. Que la droite ωμ soit à une droite μ,α comme la droite λμ est à la droite μω, et que la droite ,αμ soit à une droite μ,β comme la droite ωμ est à la droite μ,α. Découpons sur la droite ον une droite ν,γ égale à la droite αβ, et menons la droite de jonction ,γλ et la droite de jonction ,γ,β. Menons du point ω la droite ω,δ parallèle à la droite ,β,γ , et, du point ,δ , la droite ,δ,ε parallèle à la droite λν. Que la droite η,ε soit à une droite η,ζ comme la droite δη est à la droite δ,ε, et que la droite ,ζη soit à une droite η,θ comme la droite ,εη est à la droite η,ζ. Menons la droite de jonction ,θγ , les droites ,ζ,κ et ,ε,λ parallèles à la droite ,θγ et, des points ,κ et ,λ , les droites ,κ,μ et ,λ,ν parallèles aux droites αγ, βδ. Il faudra démontrer que les droites ,μ,κ et ,ν,λ sont les moyennes proportionnelles des droites αγ et βδ.

Telles sont donc les choses qu'il[17] a écrites et qu'il m'a livrées telles quelles sans faire mention d'aucune démonstration du projet proposé. Mais puisque Hierios le philosophe et beaucoup d'autres de ses amis, connus de moi, m'ont demandé de répondre entre-temps à la construction proposée, et que l'autre, de son côté, avait promis[18] qu'il ferait la démonstration, je dois maintenant dire, ni plus ni moins, que ce n'est pas comme il faut, mais d'une manière

17 il s'agit toujours de l'élève "amathe" de Pandrosius.

18 Pappus emploie le terme **epaggeilasthai**, "promettre", "professer"; c'est un terme souvent employé par exemple pour les promesses d'enseignement que faisaient les Sophistes anciens à leurs auditeurs.

inexpérimentée qu'il s'est servi de cette construction.

Ayant en effet divisé en deux la droite ρκ au point σ, et ayant fait que [la droite] θσ soit à θτ comme κθ à θσ, il a aussi fait dans le même rapport τθ à θφ. Mais de toute nécessité ni lui, ni moi ne pouvons trouver le point de section en rapport triple, tel que φ. Tel étant son embarras[19] (et c'est de sa faute), il montre qu'il n'embrasse pas non plus du regard ce qui en découle. Puisqu'il est en effet impossible de déterminer le point de section en rapport triple, tel que φ, sans qu'on ait d'abord supposé le rapport qu'a la droite κθ à θρ, c'est à dire celui qu'a βε à εα, non seulement il essaie lui-même de chercher l'impossible, mais il nous demande aussi de le faire. Le rapport qu'a la droite κθ à θρ ayant été en effet supposé, c'est à dire celui qu'a βε à εα, et la droite κθ étant donnée, la plus petite droite du rapport triple est donnée[20]. Mais le point θ lui aussi est donné; donc l'autre extrémité de la plus petite droite aussi est donnée[21]. Et il est clair qu'il tombe soit entre θ et ρ, soit entre ρ et τ. Nous montrerons en effet aussi que le point τ tombe entre ρ et σ, et tout d'abord que le point φ tombe tantôt entre θ et ρ, et tantôt entre ρ et τ, et cela selon la supposition du rapport qu'a la droite donnée κθ à θρ.

Suivent trois exemples où l'on prend pour le rapport de κθ à θρ des rapports précis: rapport double d'abord, et on obtient que φ tombe entre θ et ρ. Même résultat avec un rapport quadruple. Par contre avec un rapport quintuple on trouve que φ tombe entre τ et ρ. Il poursuit:

Et il est manifeste que tous [les rapports] moindres que le rapport quadruple font une section semblable entre θ et ρ, et que tous ceux qui sont plus grands que la quintuple font le point entre τ et ρ; d'ailleurs nous avons ci-dessous placé un lemme utile pour de telles proportions[22].

Cela étant, et puisque nous avons montré que le point de section, tel que φ, tombe tantôt entre θ et ρ, tantôt entre ρ et τ, et cela n'ayant aucunement été spéculé par lui par la faute que nous avons dite (il dit en effet montrer ce qu'il a proposé, que le point φ tombe entre θ et ρ, ou qu'il tombe entre ρ et τ), il faut observer avant toute chose cela, à savoir que où que soit pris le point φ, que ce soit au dessus ou en dessous de ρ, on n'aura pas que σθ est à θτ, c'est-à-dire κθ à θσ, comme τθ à θρ. Et donc, quand il dirait "que θσ soit à θτ, et τθ à θρ, comme κθ a θσ", il est aussitôt réfuté, prenant ce qui est cherché pour ce qui est concédé.

En effet, si la droite ξκ est prolongée; si la droite $\kappa\mu^{\alpha}$ est posée égale à la droite ξκ; si l'on mène la droite de jonction $\mu^{\alpha}\theta$, et si l'on mène par les points σ, τ et ρ des parallèles à la droite $\kappa\mu^{\alpha}$, on aura réalisé ce que l'on cherche, et cela d'une manière évidente. En effet, la droite $\sigma\mu^{\beta}$ sera à la droite $\tau\mu^{\gamma}$ et la droite $\tau\mu^{\gamma}$ à la droite $\rho\mu^{\delta}$ comme la droite $\kappa\mu^{\alpha}$ est à la droite $\sigma\mu^{\beta}$. Or, la droite $\kappa\mu^{\alpha}$ est égale à la droite βδ, la droite κρ égale à la droite αβ et la droite βε égale à la droite κθ; en sorte que la droite αγ soit aussi égale à la droite $\rho\mu^{\delta}$, et que soient trouvées les deux droites

19 **aporia**, son *aporie*, ce qui signifie précisément "désarroi", "l'état dans lequel on ne peut rien fournir".

20 allusion à Euclide, *Données*, prop. 2.

21 *Données*, 27.

22 allusion à trois lemmes qui suivent et complètent la critique de la construction de l'élève de Pandrosius, et que nous n'avons pas traduits (cf. page 7).

$\sigma\mu^{\beta}$, $\tau\mu^{\gamma}$, moyennes proportionnelles aux deux droites αγ, βδ, c'est-à-dire aux deux droites $\kappa\mu^{\alpha}$, $\rho\mu^{\delta}$; ce que est impossible.

Si on a en effet une droite θκ et sur elle un point ρ, il est impossible, par une spéculation plane, de prendre entre ρ et κ deux points tels que τ et σ, de telle sorte que κθ soit à θσ, comme θσ à θτ, et comme τθ à θρ. De sorte que, même si l'on prend le point ζ à la place de σ, le projet sera impossible, même de cette façon ; il est en effet solide par nature. Et c'est à cause de cela, à ce qu'il me semble, sachant pertinemment qu'il prend ce qu'on cherche pour concédé, qu'il n'a pas l'audace de dire "que l'autre limite de la plus petite droite soit ρ", mais s'il est plus haut, c'est-à-dire entre ρ et θ, le prenant en ϕ, il complète le reste de la construction comme il le veut, et n'en retombe pas moins dans l'embarras initial, et ce à son insu. Il ne se peut pas en effet qu'il écrive volontairement et si longuement ces faussetés pour leurrer ceux qui le lisent[23], mais il se trompe lui-même, comme je le montrerai tout d'abord en procédant[24] d'une manière saine à partir de ce qui est proposé, et en réfutant ensuite sa supposition comme prise d'une manière non saine[25].

Puisque le rapport de la droite κθ à la droite θρ est donc donné, et que la droite θκ est donnée (car il faut que cela soit supposé)[26], il s'ensuit que la droite θρ est donnée aussi[27], ainsi que la droite ρκ[28]. Mais, la droite σρ, moitié de la droite ρκ, est donnée aussi[29], et la droite ρθ aussi est donnée; donc, la droite entière θσ est donnée[30]; en sorte que le rapport de la droite κθ à la droite θσ est donné aussi[31]. De plus, la droite θσ est à la droite θτ comme la droite κθ est à la droite θσ[32], et on a démontré que la droite θσ est donnée; donc, la droite τθ est donnée aussi. Or, pour les mêmes raisons, la droite θϕ sera donnée aussi; en sorte que la différence des droites θρ, θϕ est donnée aussi. Cela étant, que le point ϕ soit trouvé entre les points θ et ρ, comme on l'a aussi montré par des nombres. Et puisque la différence ϕρ est donnée, ainsi que la droite reliant les points ρ, χ qui est égale à la droite ξκ, il s'ensuit que le triangle rectangle ϕχρ est donné d'espèce et de grandeur[33]. En conséquence, l'angle compris sous les droites ρϕ, ϕχ est donné, et est égal à l'angle extérieur compris sous les droites κσ, σψ; donc, si la droite ωψ est prolongée jusqu'au point ζ, le triangle rectangle σζψ sera donné d'espèce.

[Mais il sera aussi donné de grandeur *ici un long passage interpolé qu'on n'a pas traduit*]

...donc, la droite ψζ, parallèle à la droite ξκ et en direction de la droite ψω, est donnée aussi. En conséquence, la droite ωλ, égale à la droite ζκ, est donnée aussi. Et puisque la droite θκ est égale à la droite μλ et que la droite ωλ est plus petite que la droite σκ (car la droite ωλ est égale à la

[23] littéralement "ceux qui tombent sur [sa construction]"

[24] le verbe grec suggère un examen minutieux, pas à pas.

[25] sans doute interpolé.

[26] cf. formulation du problème.

[27] Euclide, *Données*, 2.

[28] *Données*, 4.

[29] *Données*, 7.

[30] *Données*, 5.

[31] *Données*, 1.

[32] par hypothèse.

[33] *Données*, 41.

droite κζ); que la droite σθ est à la droite θτ et la droite τθ à la droite θϕ comme la droite κθ est à la droite θσ; tandis que la droite μω est à la droite μ,α et la droite ,αμ à la droite μ,β comme la droite λμ est à la droite μω, il s'ensuit que la droite μ,β sera plus grande que la droite θϕ (car cela sera aussi démontré dans la suite). En conséquence, la droite restante ,βλ est plus petite que a droite restante ϕκ.

D'autre part, puisque la droite ωλ est donnée (car on a démontré qu'elle est égale à la droite donnée ζκ), et que la droite λμ est donnée aussi (parce que la droite κθ est donnée aussi), il s'ensuit que le rapport de la droite λμ à la droite μω est donné aussi. De plus, la droite ωμ est à la droite μ,α comme la droite λμ est à la droite μω, et la droite ωμ est donnée; donc, la droite μ,α est donnée. Pour les mêmes raisons d'ailleurs la droite μ,β est donnée aussi; de sorte que le point ,β est donné aussi[34]; et que ce point soit supposé où il veut, soit entre les points &, μ où il se trouve maintenant, soit entre les points & et ,α en supposant que la droite &λ est égale à chacune des droites κρ, αβ. Au reste, s'il dit que le point ,β tombe au point &, il n'en prend pas moins ce que l'on cherche pour ce qu'on a concédé. D'ailleurs, il paraît prendre encore une fois la droite donnée de position μλ, sur laquelle est donné un point &, les points ω et ,α entre les deux points [& et λ], et faire en sorte que la droite ωμ soit à la droite μ,α, et la droite μ,α à la droite μ& comme la droite λμ est à la droite μω; ce que personne ne lui concédera. Au reste, les Anciens qui ont recherché cela ont été aussi dans l'embarras de le trouver au moyen des plans, comme je le ferai voir en considérant leurs discours d'une manière comparative[35], et nul ne pourra nous objecter quelque chose lorsque nous lui dirons: " si & est nécessairement le point de section en troisième proportionnelle, montrez nous qu'il ne peut tomber ni entre les points & et ,α ni entre les points μ et & "; car nous avons démontré au début que ce point peut tomber au-dessus et au-dessous du point ρ.[36] Il en est de même si l'on fait dériver la solution du fait que le triangle &,β,γ, est donné d'espèce et de grandeur, même si le point de section ,β est situé entre les points & et ,α , et du fait que le triangle ,δωλ est donné aussi. Enfin, si, comme pour les droites précédentes, la droite δ,ε est donnée aussi, le rapport de la droite δη à la droite ηε, c'est-à-dire de la droite ,εη à la droite η,ζ, c'est-à-dire de la droite ,ζη à la droite η,θ, sera donné aussi. Mais, au contraire, il n'en sera pas ainsi du rapport de la droite δη à la droite η", en supposant maintenant aussi que la droite δ" soit égale à la droite κρ, c'est-à-dire à la droite αβ, même s'il veut que le point ,θ tombe entre les points ,ζ et "; car personne n'aura ainsi d'objections à faire si on nous entend dire: " montrez que ce point ne tombe ni entre les points ", η ni entre les points " et ,ζ ". Mais si, par pure concession, il veut que le point de section en question soit au point ", il prend encore une fois ce qu'on cherche pour ce dont on a convenu. D'autre part, si on ne lui concède pas que la section est au point ", puisque, en faisant la démonstration sur la droite κθ, nous n'avons pas concédé que cette section fût au point ρ, et s'il veut prendre, entre les points ,ε et η un autre point tel que ,ζ , il prend le point ,θ après avoir été induit en erreur je ne sais comment. Mais posons que le point soit,

[34] *Données*, 27.

[35] cf. plus loin pour l'explication de cette allusion.

[36] interpolé: "il tombe en effet d'après la supposition du rapport".

comme il le prétend, distinct du point "; Dès lors menant la droite de jonction ,θγ; menant les droites ,ζ,κ et ,ε,λ parallèles à la droite γ,θ, et menant par les points ,κ et ,λ les droites ,κ,μ et ,λ,ν parallèles à la droite αγ, il montre manifestement qu'il n'a pas compris le projet.

En effet, la droite ,θγ n'étant pas parallèle à la droite εη, l'angle compris sous les droites γ,θ et ,θη est obtus si le point ,θ tombe entre les points η, ", et il est aigu si le point ,θ est entre les points " et ,ζ . Car, l'angle au point " est droit, condition unique suivant laquelle le projet surgit, si, comme nous l'avons déjà dit souvent , il est concédé qu'on puisse prendre, sur la droite δη donnée de position, et le point " étant donné aussi, deux points, tels que ,ε et ,ζ , de manière que la droite η,ε soit à la droite η,ζ et la droite η,ζ à la droite η" comme la droite δη est à la droite η,ε. Or, si cela n'est pas donné, ce qu'il propose sera impossible à trouver par l'intermédiaire des plans, comme ceux qui utilisent le *Canon* de Ptolémée relatif aux lignes droites situées dans le cercle pourront du reste s'en persuader au moyen des nombres mêmes en suivant [la démarche de] notre résolution. D'ailleurs, plutôt que de vouloir trouver de cette manière, il valait mieux en douter[37], comme nous allons le faire pour d'autres propositions; et nous allons exposer maintenant les choses que nous avons différées.

Après avoir exposé quelques lemmes qu'il avait laissés à plus tard pendant la critique de la construction de l'élève de Pandrosius, Pappus reprend:

Telles sont donc les choses que je devais dire au préalable; il te reste à toi, ainsi qu'à ceux qui sont exercés en géométrie, à examiner[38] d'abord ce qu'il a écrit au sujet de la construction, puis ce que nous y avons quant à nous objecté. Mais il me semble bon d'exposer aussi ce que les anciens pensaient du projet susdit, et de dire, tout d'abord, quelques mots sur les projets de géométrie ; et je commencerai ainsi :

De projets de géométrie, les anciens disent qu'il y en a trois genres, et ils appellent les uns *plans*, les autres *solides*, et d'autres encore *linéaires*[39]. Les premiers, en effet, sont ceux qui peuvent être solutionnés[40] par des droites ou des circonférences de cercles, et qui sont dits à juste titre être *plans*; c'est qu'en effet les lignes par lesquelles on résout de tels projets ont leur origine dans le *plan*. Ensuite tous les projets qui sont solutionnés en faisant appel pour leur invention[41] à une ou plusieurs des sections du cône, ceux-là sont appelés *solides*; c'est qu'il est en effet nécessaire, pour leur construction, de faire usage de surfaces de figures *solides*, je veux dire des [surfaces] coniques. En troisième enfin, il reste le genre qu'on appelle *linéaire*; ce sont d'autres *lignes*, en effet, que celles qu'on vient de dire qu'on y utilise pour la construction — elles ont une

[37] Pappus emploie ici le terme *aporein*, "être dans l'embarras", "ne pas pouvoir fournir".
[38] **krinein** : juger.
[39] le grec dit **grammika**, de **grammê**, qui veut dire courbe, ou plutôt dessin (cf. **graphein**, écrire, dessiner).
[40] je distingue *solutionner*, qui existe en français quoique rarement employé, et *résoudre*, ceci pour rendre la différence qu'il y a en grec entre **luesthai** et **ana-luesthai**, **lusis** et **ana-lusis**, "soudre" et "ré-soudre". Cf. plus loin au sujet de la "résolution" ou "analyse" ainsi que l'entend Pappus la trad. du début du livre 7 (p.18).
[41] **heuresin**, cf. **heurein**, trouver, **heurêka,** j'ai trouvé; "trouvaille" serait la traduction la plus proche.

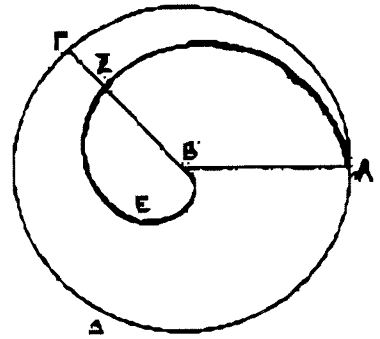
génération plus variée et plus forcée, ainsi celles des hélices[42] et des [lignes] quadratrices[43] et des cochloïdes[44] et des cissoïdes[45], lignes qui ont des propriétés[46] nombreuses et inattendues[47]. Telle étant la différence entre les projets, les anciens géomètres ne furent pas à même de construire en suivant un raisonnement géométrique le problème qu'on a dit des deux droites[48], qui est par nature solide, et puisqu'il n'était pas facile de décrire dans le plan les sections du cône en tant qu'il faut, deux droites inégales étant données, prendre deux moyennes proportionnelles en proportion continue ils l'ont conduit d'une manière admirable en faisant usage d'instruments propres à un usage manuel et à une construction commode, comme on peut le voir à partir des compilations systématiques que nous gardons d'eux, ainsi dans la *moyennatrice*[49] d'Eratosthène et dans les *Mécaniques* de Philon et de Héron ou *Catapultes*. Convenant en effet que le projet était solide, ils ont accompli sa construction seulement de manière instrumentale en accord avec Apollonius de Perge, lequel a aussi conduit sa résolution par les sections du cône, et d'autres encore par les *Lieux solides* d'Aristée; mais personne par celles qui sont appelées, en propre, planes; Nicomède quant à lui a solutionné [le projet] par sa ligne conchoïde, par laquelle il a également fait la trisection de l'angle.

[42] ou *spirales*; le terme hélice est la translittération directe du terme qu'emploie Pappus, **helikes**.
[43] quadratrices ou "quarrantes", c'est-à-dire qui permettent de quarrer le cercle.
[44] littéralement "lignes en forme de conques, de coquille", "coquilloformes".
[45] littéralement "lignes en forme de lierre", "lierroformes".
[46] traduction approximative du grec **sumptôma**, "ce qui tombe avec", d'où nous vient *symptôme*.
[47] **paradoxa**, qui vont contre ou à côté (para) de la **doxa**, de ce à quoi on s'attend.
[48] c'est-à-dire l'insertion de deux moyennes proportionnelles.
[49] en grec **mésolabos**, "machine à tirer des moyennes", ou *mésolabe* (**mesê**, la moyenne, **labein**, prendre).

Extraits du **quatrième livre de la *Collection*** de **Pappus d'Alexandrie**

Ce livre comprend, entre autres choses, la description de la génération et des propriétés de ces lignes "inattendues" auxquelles faisait allusion Pappus dans la classification des problèmes, à avoir la spirale, la quadratrice, la conchoïde, etc. Cette description commence au chapitre 21 avec celle de la spirale, ou hélice dans le plan*:*

Le spectacle[50] de l'hélice décrite dans le plan a d'abord été avancé par Conon de Samos le géomètre, mais c'est Archimède qui l'a démontré en faisant usage d'une superposition admirable. Cette ligne a la génération suivante:



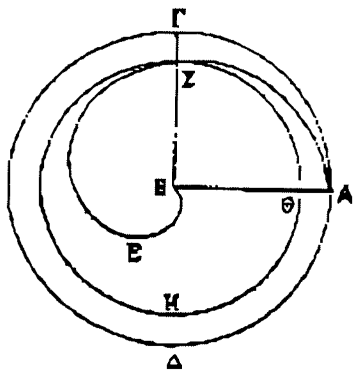
Soit un cercle de centre B, et que la droite [partant] du centre soit BA. Que la droite BA soit mue de telle sorte que le point B reste [fixe], et que [le point] A soit transporté uniformément le long de la périphérie du cercle, et que simultanément à elle, un point quelconque partant de B soit transporté le long d'elle uniformément de telle sorte [qu'elle aille] jusqu'en A, et que dans le même temps le point parti de B parcoure la droite BA et le point A la périphérie du cercle; le point mu selon BA dessinera alors dans son transport une ligne telle que BEZA, et son origine sera le point B, le début du transport sera BA, et la ligne elle-même est appelée une hélice. Et sa principale propriété[51] est la suivante:

Si l'on mène au travers, vers elle, une droite telle que BZ et qu'on la prolonge, la droite AB sera à BZ comme la circonférence entière du cercle sera à la [portion de] circonférence A?G.

Cela est facile à voir à partir de la génération; c'est qu'en effet ce dans quoi, d'un côté, le point A parcourt la circonférence entière du cercle, dans le même, le point B [parcourt] BA, et par ailleurs ce dans quoi le point A [parcourt] la circonférence A?G, dans le même, le point B [parcourt] la droite BZ. Et les mouvements sont eux-mêmes à eux-mêmes uniformes[52], de sorte qu'il y a aussi proportion. Et il apparaît tout aussi clairement que si les droites qu'on mène au travers depuis B vers la ligne comprennent des angles égaux, elles se surpassent l'une l'autre du même.

[50] **théôrêma** comme précédemment (cf. page 1); Ver Eecke traduit "la théorie".
[51] **sumptôma**; cf. plus haut le livre III (page préc.).
[52] littéralement "d'égales vitesses".

Les chapitres suivants exposent quelques propriétés de la ligne: que la figure comprise sous la spirale et la droite initiale de transport est la troisième partie du cercle qui l'entoure (ch. 22); que



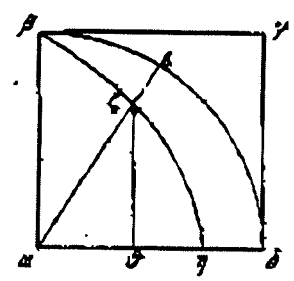
la propriété reste vraie de n'importe quelle portion de spirale, c'est-à-dire [figure ci-contre] que la figure comprise sous la spirale ZEB et la droite ZB est la troisième partie de la figure comprise sous l'arc ZHQ et les droites ZB, BQ (ch.23) ; enfin, que le cube de la droite AB est au cube de la droite BZ comme la figure comprise sous la spirale entière et la droite AB est à celle qui est comprise sous la spirale ZEB et la droite BZ (ch.24). Le chapitre 25 expose une conséquence triviale de ces propriétés.

Dans les chapitres 26 à 29, Pappus décrit " une certaine ligne [qui a] été introduite par Nicomède en vue de la duplication du cube ". Il s'agit de la fameuse ligne conchoïde, *c'est-à-dire "semblable à une coquille", dont Pappus s'emploie ensuite à décrire la génération. Il en donne quelques propriétés (ch.27), puis il montre comment elle peut servir à l'insertion de deux moyennes proportionnelles (ch.28) , et de là à la duplication du cube (ch.29).*

C'est à partir du chapitre 30 qu'il est question de la ligne quadratrice.

XXX En vue de la quadrature du cercle[53] a été adoptée[54] une certaine ligne par Dinostrate, Nicomède et certains autres [auteurs] plus récents ; elle tire son nom de la propriété[55] qui l'accompagne : ils l'appellent en effet *quadratrice* et voici sa génération:

Qu'on pose un carré $\alpha\beta\gamma\delta$ et autour du centre α qu'on trace la circonférence $\beta\varepsilon\delta$; et qu'on meuve la [droite] $\alpha\beta$ de telle sorte que α reste fixe et que β soit transporté selon la circonférence $\beta\varepsilon\delta$; que par ailleurs la [droite] $\beta\gamma$ restant toujours parallèle à $\alpha\delta$ suive le point β transporté le long de $\beta\alpha$; et dans le même temps où $\alpha\beta$ mue régulièrement parcourt l'angle $\beta\alpha\delta$ (c'est-à-dire le point β la circonférence $\beta\varepsilon\delta$), que $\beta\gamma$ elle aussi, suive la droite $\beta\alpha$ (c'est-à-dire que le point β soit porté de long de $\alpha\beta$).



Ce mouvement engendré, les droites $\beta\gamma$, $\beta\alpha$ se coupent l'une l'autre dans le transport selon un point qui les accompagne continuellement, par lequel point est tracée une certaine ligne [qui se trouve] dans le lieu compris entre les droites $\beta\alpha\delta$ et la circonférence $\beta\varepsilon\delta$, toujours inclinée du même côté, et qui est $\beta\zeta\eta$; ligne qui semble être utile pour trouver un carré égal à un cercle

[53] **tetragonismon tou kuklou,** d'où ligne "tétragonisante" ou quarrante, ou encore *quadratrice*.
[54] **paralambanein**, qui sous-entend que ces mathématiciens l'ont reçue, l'ont adoptée de quelqu'un d'autre.
[55] **sumptôma,** ce qui tombe avec.

donné. Par ailleurs sa principale propriété est telle: qu'on mène en travers [une droite] qui rencontre la circonférence, telle que $\alpha\zeta\varepsilon$; comme toute la circonférence sera à [la portion de circonférence] $\varepsilon\delta$, la droite $\beta\alpha$ sera à [la droite] $\zeta\theta$. Cela ressort[56] de la génération de la ligne.

XXXI Mais Sporos a été mécontent de cette ligne, et à juste titre, pour les raisons suivantes:

Tout d'abord, elle prend pour supposition cela à quoi elle paraît être une chose[57] utile. Comment cela est-il possible, en effet : que deux points mus et partant de β, l'un selon la ligne jusqu'en α, l'autre selon la circonférence jusqu'en δ, se co-stabilisent[58] dans le même temps, si on ne sait[59] pas au préalable quel est le rapport de la droite $\alpha\beta$ à la circonférence $\beta\varepsilon\delta$? Car il faut nécessairement que les vitesses des mouvements soient elles aussi dans le même rapport. Par suite, comment une co-stabilisation est elle possible si on use de vitesses indistinctes[60], à moins que cela n'arrive soudain par hasard ? Et cela, comment n'est-ce pas irrationnel ?[61]

Ensuite, quant à l'extrémité [de cette ligne] dont on se sert pour la quadrature du cercle, c'est-à-dire ce selon quoi elle coupe la droite $\alpha\delta$, elle ne sera pas trouvée. Qu'on conçoive ce que nous disons sur le dessin qu'on a proposé[62]. Lorsque les lignes transportées $\gamma\beta$, $\beta\alpha$ se co-stabilisent, elles se superposent[63] à $\alpha\delta$ et elles n'ont plus du tout de section l'une avec l'autre ; la section cesse en effet avant la superposition, laquelle section deviendrait à son tour extrémité de la ligne, extrémité selon laquelle elle tomberait sur la droite $\alpha\delta$. A moins qu'on dise qu'il faille concevoir que la ligne est prolongée, de la même façon que nous établissons les lignes droites, jusqu'à $\alpha\delta$? Mais cela ne découle pas de ce qui a été supposé au début[64], entre autres que le point η soit pris en prenant au préalable le rapport de la circonférence à la droite. Et, sauf si l'on donne ce rapport, il ne faut pas qu'on se fie à la réputation des hommes qui l'ont trouvée, et qu'on admette cette courbe en quelque sorte trop mécanique et utile aux mécaniciens pour beaucoup de projets. Mais tout d'abord, il faut exposer le projet qui est montré[65] par cette ligne.

---

56 à prendre dans le sens quasi esthétique, comme lorsqu'on dit que quelque chose *ressort d'un tableau* : le grec est en effet **phaneron**.

57 "chose" traduit **pragma**, c'est la chose en tant qu'aboutissement d'un acte, d'une **praxis**.

58 le verbe grec dit "revenir ensemble à la position initiale, à une position fixe".

59 le grec dit **mê épistamenon**: l s'agit bien en effet ici de savoir, mais avec une nuance très nette de *maîtrise*, de *domination*, **epi-stasthai**.

60 **akrita**, indéfinies, désordonnées. Cf. **krinein**, distinguer, juger.

61 **touto de pôs ouk alogon;** formule ambiguë, qui désigne aussi bien l'absence de rapport euclidien que l'absence de *fondement* pour ces mouvements.

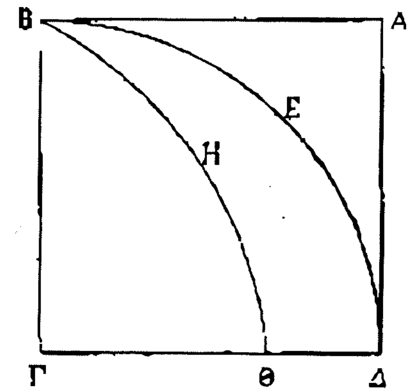
62 **prokeimenê** (posée au préalable) **katagraphê** (*dessin* au sens actif; ce qu'on s'est appliqué à dessiner). Ver Eecke traduit par "représentons-nous les choses que nous avons dites sur la délinéation proposée."

63 même terme que pour la "superposition" euclidienne des figures (cf. *Éléments* I.4): **epharmozdesthai**.

64 **tais hupokeimenais archais**, "des débuts supposés".

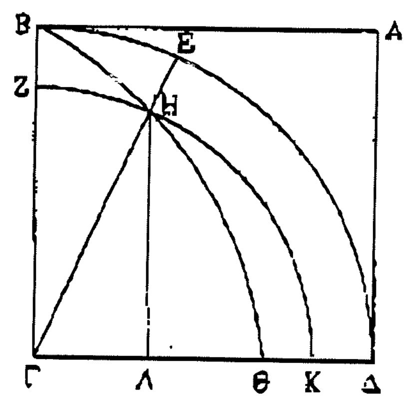
65 démontré, comme le traduit Ver Eecke ? Le grec dit simplement **deiknumenon**, montré.

— Ayant un carré ΑΒΓΔ, l'arc* ΒΕΔ décrit autour du centre Γ et la quadratrice ΒΗΘ étant obtenue comme nous l'avons dit précédemment, on montre que la droite ΒΓ est à la droite ΓΘ comme l'arc* ΔΕΒ est à la droite ΒΓ.



En effet, s'il n'en est pas ainsi, la droite ΒΓ sera à une droite plus grande ou plus petite que la droite ΓΘ.

Qu'elle soit d'abord, si possible, à une droite plus grande ΓΚ. Décrivons, autour du centre Γ, l'arc ΖΗΚ qui coupe la ligne au point Η ; menons la perpendiculaire ΗΛ et prolongeons la droite de jonction ΓΗ jusqu'au point Ε. Dès lors, puisque la droite ΒΓ, c'est-à-dire la droite ΓΔ, est à la droite ΓΚ comme l'arc ΔΕΒ est à la droite ΒΓ , et que l'arc ΒΕΔ est à l'arc ΖΗΚ comme la droite ΓΔ est à la droite ΓΚ (car une circonférence de cercle est à une circonférence comme le diamètre de ce cercle est au diamètre) , il est clair que l'arc ΖΗΚ est égal à la droite ΒΓ. Et puisque, en raison de la propriété de la ligne, la droite ΒΓ est à la droite ΗΛ comme l'arc ΒΕΔ est à l'arc ΕΔ, il s'ensuit que la droite ΒΓ est aussi à la droite ΗΛ comme l'arc ΖΗΚ est à l'arc ΗΚ. Or, on a . montré que ~~l'arc~~ ΖΗΚ est égal à la droite ΒΓ ; donc, l'arc ΗΚ est aussi égal à la droite ΗΛ ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite ΒΓ n'est pas à une droite plus grande que la droite ΓΘ comme l'arc ΒΕΔ est à la droite ΒΓ. .



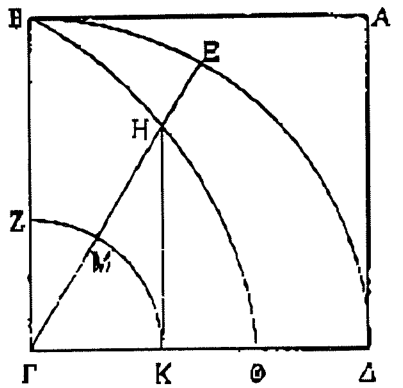
---

* "arc" traduit ici **periphereia**, que nous avons traduit auparavant par "circonférence". Même chose dans toute la suite.

XXXII.

Mais, je dis qu'elle n'est pas non plus à une droite plus petite.

En effet, qu'elle soit, si possible, à une droite ΚΓ. Décrivons l'arc ΖΜΚ autour du centre Γ; menons, à angles droits sur la droite ΓΔ, la droite ΚΗ qui coupe la quadratrice au point Η, et prolongeons la droite de jonction ΓΗ jusqu'au point Ε. Dès lors, pareillement à ce que nous avons écrit précédemment, nous montrerons que l'arc ΖΜΚ est égal à la droite ΒΓ, et que la droite ΒΓ est à la droite ΗΚ comme l'arc ΒΕΔ est à l'arc ΕΔ, c'est-à-dire comme l'arc ΖΜΚ est à l'arc ΜΚ. D'après cela, il est clair que l'arc ΜΚ sera égal à la droite ΚΗ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite ΒΓ ne sera pas à une droite plus petite que la droite ΓΘ comme l'arc ΒΕΔ est à la droite ΒΓ. Or, on a démontré qu'elle n'est pas à une droite plus grande; donc, elle est à la droite ΓΘ même.



Et il est clair aussi que la droite prise comme troisième proportionnelle des droites ΘΓ, ΓΒ sera égale à l'arc ΒΕΔ, et que le quadruple de cette droite sera égal à la circonférence du cercle entier.

· Or, la droite égale à la circonférence du cercle étant trouvée, on voit clairement que l'on construira facilement le carré équivalent au cercle.

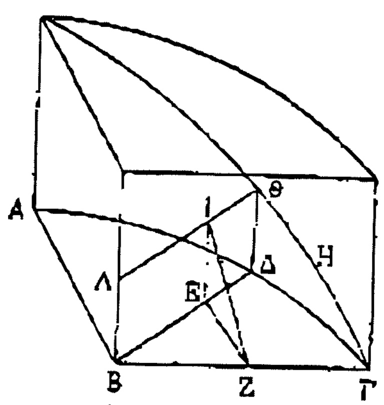
En effet, le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon est le double du cercle, comme Archimède l'a démontré (*).

(*) proposition 1 du traité *De la mesure du cercle* d'Archimède: « Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base. »

XXXIII

La génération de la ligne est, comme on l'a dit, trop mécanique, mais géométriquement, on peut résoudre[1] par les lieux en surface de la manière suivante:

Soit le quadrant de cercle ΑΒΓ donné de position; menons transversalement une droite ΒΔ quelconque, et menons, perpendiculairement sur la droite ΒΓ la droite ΕΖ ayant un rapport donné avec l'arc ΔΓ; [je dis] que le point Ε est dans une ligne.



En effet, qu'on suppose la surface de cylindre droit engendré par l'arc ΑΔΓ, et l'hélice ΓΗΘ, donnée de position, décrite dans cette surface, et soit ΘΔ un côté du cylindre; menons les droites ΕΙ, ΒΛ perpendiculaires au plan du cercle (*), et menons par le point Θ la droite ΘΛ parallèle à la droite ΒΔ. Puisque le rapport de la droite ΕΙ à l'arc ΔΓ est donné en raison de l'hélice, et que le rapport de la droite ΕΖ à l'arc ΔΓ est donné, le rapport de la droite ΕΖ à la droite ΕΙ sera donné aussi. De plus, les droites ΖΕ, ΕΙ sont de juxtaposition (*); donc, la droite ΖΙ est jointe de juxtaposition. Or, cette droite est perpendiculaire sur la droite ΒΓ; donc, la droite ΖΙ est dans un plan sécant ; en sorte que le point Ι y est aussi. Or, ce point est aussi dans une [surface cylindrique] (*) (car la droite ΘΛ se meut entre l'hélice ΘΗΓ et la droite ΑΒ donnée elle-même de position tout en restant continuellement parallèle au plan sous-jacent) ; donc, le point Ι est dans une ligne ; en sorte que le point Ε est aussi dans une ligne.

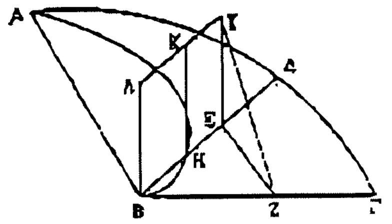
La chose est donc ainsi résolue d'une manière générale, et si le rapport de la droite ΕΖ à l'arc ΔΓ est le même que celui de la droite ΒΑ à l'arc ΑΔΓ, on obtient la ligne quadratrice que nous avons dite plus haut.

1 c'est-à-dire faire une *analyse*, **analuesthai**; pour cette traduction par "résoudre" cf. la traduction du début du livre VII qui suit.
(*) on n'a pas traduit ici une interpolation: "érigées perpendiculaires".
(*) Euclide, *Données*, déf. 15: " une droite est dite donnée de juxtaposition lorsqu'elle est menée par un point donné parallèlement à une droite donnée de position. "
(6) "surface cylindrique" est une reconstitution conjecturale d'une lacune du texte original. Peut-être fallait-il lire (d'après Ver Eecke) "surface plectoïde" comme dans la page suivante.

XXXIV

On peut cependant construire la résolution d'une manière semblable au moyen de l'hélice décrite dans le plan.

En effet, que le rapport de la droite EZ à l'arc ΔΓ soit le même que celui de la droite AB à l'arc AΔΓ et, pendant que la droite AB, mobile autour du point B, parcourt l'arc AΔΓ, qu'un point sur celle-ci, partant du point A, parvienne au point B quand la droite AB a pris la position de la droite BΓ, et que ce point produise l'hélice BHA. Dès lors, l'arc ΓΔA est à l'arc ΓΔ comme la droite AB est à la droite BH, et permutons. Mais, la droite EZ se présente ainsi aussi par rapport à l'arc ΔΓ ; donc, la droite BH est égale à la droite ZE. Menons, perpendiculairement au plan, la droite KH égale à la droite BH ; il s'ensuit que le point K est dans une surface cylindroïde* qui part de la spirale. Mais, ce point est aussi dans une surface conique (car la droite de jonction BK est dans une surface conique inclinée sous un demi-angle droit sur le plan sous-jacent et menée par le point donné B). En conséquence, le point K est sur une ligne. Menons par le point K la droite AKI parallèle à la droite EB, et menons les droites BA, EI perpendiculaires au plan ; il s'ensuit que la droite AKI est dans une surface plectoïde (2) (car elle se meut suivant la droite BA donnée de position et suivant la ligne, donnée de position, sur laquelle se trouve le point K). En conséquence, le point I est aussi dans cette surface. Mais, il est aussi dans un plan (car la droite ZE est égale à la droite EI, parce qu'elle est aussi égale à la droite BH, et la droite ZI, perpendiculaire sur la droite BΓ, est donnée de position) ; par conséquent, le point I est sur une ligne et, par suite, le point E aussi. Et il est manifeste que, du moment que l'angle compris sous les droites AB, BΓ est droit, on obtient la ligne quadratrice que nous avons dite précédemment.



* c'est-à-dire "qui ressemble à un cylindre", "qui a l'aspect (**eidos**, cf. *idée*) d'un cylindre".
(2) "plectoïde", c'est-à-dire littéralement "qui a un aspect *tressé*" (**plektein**, tresser).

Pappus continue en décrivant dans le chapitre 35 une hélice décrite sur la sphère et ses propriétés. Puis il poursuit en revenant au chapitre 36 sur la classification des problèmes en genres :

Couper en trois parties égales un angle rectiligne donné : lorsque les anciens géomètres ont voulu faire cela, ils ont été dans l'embarras pour la raison suivante. Il y a, disons nous, trois genres de projets géométriques, parmi lesquels nous appelons les uns plans, les autres solides, et d'autres encore linéaires. Ceux qu'on peut solutionner par des droites et des circonférences de cercles sont appelés à juste titre *plans* ; c'est que les lignes par lesquelles on trouve de tels projets ont leur génération dans le *plan*; tous les problèmes qu'on solutionne en s'aidant pour leur invention d'une ou encore de plusieurs des sections du cône, ceux-là sont dits *solides* : il est en effet nécessaire de faire usage, pour leur construction, de surfaces de figures *solides* — je veux dire les coniques. En troisième enfin, il reste un certain genre de projets, celui qu'on appelle *linéaire* ; ce sont d'autres *lignes* en effet que celles qu'on a dites qu'on y prend, et elles ont une génération plus variée et plus forcée, qui dérivent de surfaces moins ordonnées et de mouvements plus compliqués. Telles sont, les lignes trouvées dans ce qu'on appelle les lieux en surface[66], et d'autres encore que celles-là, plus variées et plus nombreuses, [trouvées] par Démétrios d'Alexandrie dans ses *Considérations linéaires*, et par Philon de Tyane à partir de l'entrelacement de surfaces plectoïdes, et d'autres de toutes sortes qui ont été trouvées, et qui possèdent des propriétés nombreuses et admirables. Et certaines d'entre elles ont paru mériter une étude plus approfondie d'auteurs récents, et l'une d'entre elle est cette ligne que Menelaüs a appelée "inattendue"[67]. D'autre du même genre sont les hélices, les quadratrices, les cochloïdes et les cissoïdes. Il semble du reste que ce ne soit pas de la part des géomètres pour ainsi dire une légère erreur, lorsqu'un projet plan est trouvé par quelqu'un au moyen de coniques ou de linéaires, et en général quand on solutionne par un genre impropre... (*plus loin:*) Telle étant donc la différence entre les projets, les premiers géomètres, qui cherchaient le projet susdit au sujet de l'angle par les plans, projet solide par nature, n'étaient pas à même de trouver ; c'est que les sections du cône ne leur étaient pas encore familières, et c'est à cause de cela qu'ils étaient dans l'embarras ; mais par la suite il divisèrent en trois l'angle en usant pour l'invention de l'inclinaison ci-dessous décrite...

Pappus continue en décrivant un certain nombre de résolutions à l'aide de coniques du problème de la trisection de l'angle droit. Puis il poursuit au chapitre 45 par ces mots:

Cela étant, [le projet de] couper un angle ou une circonférence donné(e) en trois, est, comme on l'a montré précédemment, solide ; par contre, [celui de] couper un angle ou une circonférence donné(e) dans un rapport donné est linéaire : c'est ce qui est montré par des auteurs

[66] titre d'un ouvrage perdu d'Euclide.
[67] "paradoxale", contraire à l'attente.

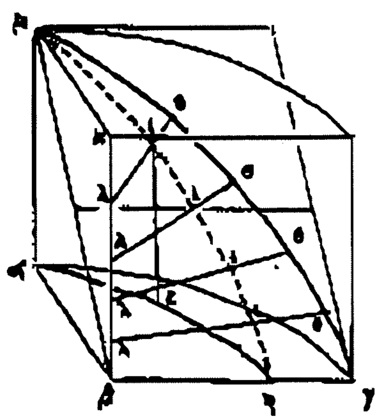
récents, et c'est ce que nous décrirons nous-mêmes de deux manières.

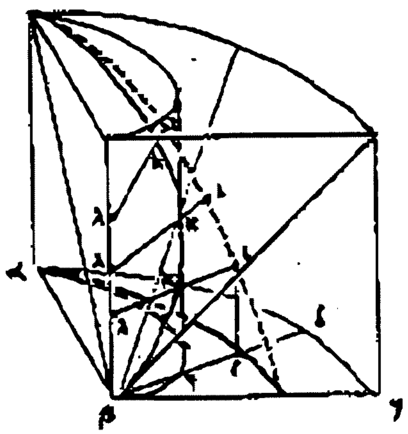
Les deux manières qu'il expose successivement sont par la quadratrice tout d'abord, puis par la spirale d'Archimède. Puis il continue et termine en donnant et en démontrant un certain nombre de problèmes qu'on peut résoudre à partir de là. Ce sont: (1) retrancher des arcs égaux de deux cercles inégaux. (2) Établir un triangle isocèle dont chacun des angles à la base ait un rapport donné avec l'angle restant. (3) Inscrire dans un cercle un polygone équilatéral et équiangle ayant autant de côtés que l'on veut. (4) Trouver un cercle dont la circonférence est égale à une droite donnée. (5) Une droite étant donnée de position et de grandeur, décrire par les extrémités un arc de cercle ayant un rapport donné avec la droite. (6) Trouver des angles incommensurables.

* *

*

Figures correspondant à l'analyse de la quadratrice (ch.33 et 34, pages 14 et 15 ci-dessus):





Septième livre de la *Collection* de Pappus d'Alexandrie
qui contient les lemmes du résolu.

Ce qu'on appelle "le résolu", mon fils Hermodore, c'est, en bref, une certaine matière particulière qui a été conçue après qu'on a créé les Éléments communs, et à l'usage de ceux qui veulent acquérir[68] dans les lignes la faculté de trouver[69] les projets qui leurs sont prétendus[70], et c'est à cela seul qu'elle est instituée utile. Trois hommes en ont traité; Euclide l'auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'ancien, et par les procédés[71] de la *résolution*[72] et de la *composition*[73]. La résolution, plus précisément (?), est une voie qui part de ce qui est cherché comme étant concédé, et qui, passant par les choses qui s'en ensuivent, aboutit à quelque chose de concédé par composition. Car en effet, dans la résolution, d'un côté, après que nous avons supposé ce qui est cherché comme déjà advenu, nous examinons ce hors de quoi cela survient, et à l'inverse, ce qui le précède, jusqu'à ce que, en remontant de cette façon, nous tombions sur quelque chose parmi celles qui sont déjà connues ou bien qui sont de l'ordre du principe ; et un tel procédé, nous l'appelons ré-solution, en tant que "solution en remontant". Dans la composition, on suit une marche contraire : ce qui a été surpris en dernier lieu dans l'analyse, nous le supposons comme déjà advenu, et disposant les choses qui s'ensuivent (et qui alors étaient précédentes) selon un ordre naturel et les composant les unes aux autres, nous en arrivons à la fin à une construction de ce qui est cherché. Et cela, nous l'appelons composition.

Le genre de la résolution est double; il y a d'une part la recherche du vrai[74], qu'on appelle spéculatif[75], et il y a d'autre part le gain[76] de ce qui est proposé, ce qu'on appelle projectif[77]. Cela étant, en ce qui concerne le genre spéculatif, après que nous avons supposé ce qui est cherché comme étant et comme vrai, ensuite, par l'intermédiaire des choses qui en découlent, en tant que vraies et en tant qu'elles sont par supposition, nous parvenons à quelque chose de concédé, et alors de deux choses l'une : si ce concédé est vrai, ce qui est cherché est vrai aussi, et la démonstration sera l'inverse de la résolution; si au contraire nous tombons sur quelque chose concédé comme faux, ce qui est cherché est faux lui aussi. Par ailleurs, et en ce qui concerne le genre projectif, après que nous avons supposé ce qui est proposé comme connu, ensuite, par l'intermédiaire ces choses qui en découlent en tant que vraies, nous parvenons à quelque chose de

68 **analambanein**, littéralement "prendre en remontant" ; Ver Eecke traduit "puiser".
69 littéralement *la puissance trouvante*, **dunamis heuretikê**.
70 même mot que j'ai traduit par "mettre en avant" pour le début du livre III.
71 **ephodos**, qui évoque une démarche minutieuse, pas à pas ; cf ci-dessus note 23.
72 le grec dit **analusis** et on traduit généralement par *analyse* ; mais je traduis par *résolution* pour conserver une correspondance entre ré-solution (**analusis**) et ré-soudre (**analuomai**).
73 le grec dit **sunthesis**, et on traduit généralement par *synthèse* ; mais le sens est bien celui du français (ou plutôt du latin) *com-poser*. De même que précédemment cette traduction possède l'avantage de faire correspondre *composer* et *composition*.
74 **to zdêtêtikon**, "zététique".
75 **theorêtikon**, cf. les remarques sur le début du livre III, note 7.
76 **to poristikon**, le "poristique". **porizdein**, c'est fournir.
77 **problêmatikon**, d'où *projectif*, conformément à notre parti pris de traduction.

concédé, et alors, de deux choses l'une : si ce concédé est possible et qu'on peut le gagner[78], ce que ceux qui s'occupent de mathèmes appellent “donné”, ce qui a été proposé sera également possible, et de nouveau la démonstration sera l'inverse de la résolution ; si par contre nous tombons sur quelque chose qui est concédé impossible, ce projet sera lui aussi impossible.

Là-dessus, la *détermination*[79] est une distinction préalable qu'on fait au sujet de quand, comment et en quelle quantité le projet sera possible.

Ceci, au sujet de la résolution et de la composition.

Bibliographie sommaire.

ARCHIMÈDE *Des Spirales*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

EUCLIDE *Les Éléments*, traduction française libre de Georges Kayas, éd. du CNRS, Paris, 1985.

Les Éléments, vol.1, livres I à V, et vol.2, livres V à IX, traduits du texte de Heiberg et commentés par Bernard Vitrac, avec une introduction générale par Maurice Caveing, PUF, Paris, 1990.

Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F.Peyrard, Paris, 1819 ; et nouveau tirage augmenté d'une introduction de Jean Itard, librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1993.

PAPPUS d'Alexandrie *La Collection Mathématique* en deux tomes, traduction, introduction et notes de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Paris, 1933, et rééd. Albert Blanchard, Paris, 1982.

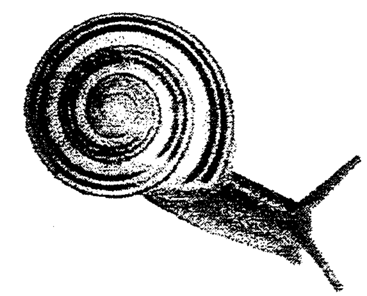
Pappi Alexandrini collectonis quæ supersunt, édition critique du texte grec commentée en latin par F.Hultsch, Weidmann, Berlin, 1876-1878.

PROCLUS de Lycie *Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduction, introduction et notes de Paul Ver Eecke, Bruges, 1948.

78 littéralement qu'il est “gagnable”, **poriston**, cf. **poristikon** plus haut.
79 **diorismos**, *diorisme*. Cf. là encore l'emploi du verbe “déterminer” dans le début du livre III.

Spirales

André STOLL



"Quelle spirale, que l'être de l'homme. Dans cette spirale, que de dynamismes qui s'inversent. On ne sait plus tout de suite si l'on court au centre ou si l'on s'en évade."

BACHELARD, Poétique de l'espace.

1. Introduction

Les spirales ? Elles sont présentes partout. Dans le monde animal ou végétal, admirez la forme superbe d'un nautile ou d'une coquille d'escargot. Admirez également la fleur de la marguerite. Celle-ci est composée d'une centaine de fleurons élémentaires jaunes, disposées en son cœur selon une double gerbe de spirales droites ou gauches. Vous en trouverez également dans les tableaux de Léonard de Vinci, de Dürer et autres artistes peintres, en architecture, en ferronnerie, en mécanique... Sur une pellicule photo, un banal escalier hélicoïdal devient une spirale. En astronomie, nul ne peut ignorer les galaxies en forme de spirale.
Cette figure est présente dans toutes les cultures. Elle est chargée de signification symbolique. C'est un motif ouvert et optimiste. Elle représente les rythmes répétés de la vie, le caractère cyclique de l'évolution.

Paradoxalement pourtant, dans la langue française, on ne parle d'elles que pour évoquer un échec, une crise... la spirale du chômage, la spirale de la violence...
Paradoxalement encore, si ces courbes sont si présentes dans notre environnement, elles sont presque complètement oubliées dans l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ? Difficile de répondre de manière précise à cette question. Certains disent qu'elles sont trop difficiles à tracer. C'est évidemment une fausse raison. D'ailleurs à l'ère des calculatrices graphiques et autres traceurs de courbes cette raison ne peut pas expliquer leurs absences.

Léonard de Vinci : l'Annonciation

Dans l'histoire des mathématiques, ces figures sont intervenues comme solutions de problèmes fondamentaux et extrêmement variés. Et très souvent, elles apparaissent là où on ne les attendait pas !
Où cours de l'exposé ci-dessous, je souhaiterais d'une part présenter quelques spirales en les remettant dans leur contexte historique et d'autre part, montrer ce que l'étude de ces courbes peut apporter à un enseignant de mathématiques.

2. Die "Quadratwurzelschnecke" [1] ou spirale de Théodore de Cyrène.

2.1. De l'incommensurabilité de la diagonale du carré à la spirale de Théodore.

Dans l'ouvrage de *Platon* qui porte son nom, *Théétète* affirme que son maître, *Théodore*, a étudié l'irrationalité des nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$,...jusqu'à $\sqrt{17}$ et qu'il a construit ces nombres devant lui :

[1] Die "Quadratwurzelschnecke": l'escargot de la racine carrée