LE MANUSCRIT 235,
UN TÉMOIN DE LA GÉOMÉTRIE DE GERBERT AU MONT SAINT-MICHEL.

Jacqueline LEPARMENTIER
Michel LEVARD

Cet article ne traite pas d'analyse, même de loin ; mais pouvait-on organiser une rencontre entre des enseignants soucieux de l'histoire des mathématiques, sans parler de Gerbert d'Aurillac, qui, à Reims, fut aussi un enseignant célèbre en son temps pour sa pédagogie et son savoir encyclopédique ? Nous avons donc répondu favorablement à la demande des organisateurs qui souhaitaient voir quelques ateliers consacrés au mathématicien Gerbert. Le hasard nous avait mis en contact quelques mois plus tôt avec un manuscrit d'astronomie qui contenait aussi un ensemble de textes relatifs à la géométrie pratique que la tradition attribuait à Gerbert. Des latinistes de l'Université de Caen, qui recherchaient le sens de certains passages, nous avaient demandé de leur fournir une traduction et une interprétation de tous ces textes. A la suite de cette traduction, nous nous sommes assez naturellement interrogés sur l'état de la connaissance en géométrie au temps de Gerbert, une époque charnière en histoire des mathématiques puisqu'elle précède immédiatement le retour de la science grecque. Cet article est donc le résultat de notre enquête ; dans une première partie, J. Leparmentier a choisi de présenter le manuscrit, M. Levard poursuit par une discussion sur l'état des connaissances en géométrie du V^{e} au X^{e} siècle et l'article se clôt sur trois extraits du manuscrit d'Avranches.

Présentation du manuscrit 235 d'Avranches.

Le manuscrit 235 de la bibliothèque d'Avranches constitue un témoignage de la diffusion de la culture scientifique à l'époque médiévale. Ce document, actuellement étudié par Mme Jacquemard, chercheur au CERLA [4] de l'Université de Caen, a suscité notre intérêt, notamment pour les extraits de la *Geometria incerti auctoris* (longtemps attribuée à Gerbert) qu'il présente. Je remercie ici Mme Jacquemard d'avoir eu l'amitié de nous confier le fruit de son étude, nous permettant de rédiger cet article.

Avranches 235 est un parchemin de 79 feuillets (de 250 mm sur 145 mm environ) écrit en latin à longues lignes par plusieurs mains aux écritures soignées dont une principale. Les couleurs employées pour les lettrines et les illustrations, le rouge et le vert, sont caractéristiques du scriptorium du Mont Saint-Michel. On peut le dater de l'époque de Robert de Thorigny, abbé de 1154 à 1186 et auteur d'une fameuse Chronique. Le monastère connaissait alors une grande activité et si nous ne possédons pas, comme pour d'autres abbayes normandes, de catalogue contemporain du XII^{e} siècle de la bibliothèque, nous avons une idée de son importance puisqu'elle a mérité le surnom de « Cité des livres ».

Le manuscrit est un florilège de textes scientifiques possédant entre eux une certaine cohérence : ils ont pratiquement tous trait à l'astronomie et à l'utilisation de l'astrolabe. On y trouve plusieurs catégories de textes :

1) des oeuvres complètes ou de larges extraits des *Canones Ptolemei*, qui furent traduits du grec vers le VI^{e} siècle, de la majeure partie du livre 8 relatif à l'astronomie du *De nuptii Philologiae et Mercurii* de Martianus Capella, d'un recueil de jeux mathématiques, les *Rythmimachia* d'Asilo Wirceburgensis, et quatre traités d'astronomie, un *De mensura astrolabii*, le *De componendo viatorum horologio* d'Hermann de Reichenau, un *liber de astrolabio* et le *De astrolabio* d'Aselin de Laon.

2) Des textes plus parcellaires, parfois non identifiés, mais dans lesquels on peut trouver des ensembles d'extraits choisis : la *Geometria incerti auctoris*, des traités d'astronomie que l'on retrouve dans d'autres manuscrits et en particulier dans le manuscrit Ripoll 225 étudié par Millas Vallicrosa [11], et un ensemble de textes regroupés sous le titre *Cetius Faventinus interpolé.*

La *Geometria incerti auctoris* occupe dans le manuscrit du folio 32 verso au folio 38 verso. Les extraits sont illustrés de figures plus ou moins ornées pour faciliter la compréhension du texte. Ce sont pratiquement les seules illustrations du manuscrit.

La *Geometria incerti auctoris* est sans doute d'origine arabe. Elle est connue en Espagne par le manuscrit Ripoll 225 qui contient de nombreux autres textes d'Avranches 235.

Millas Vallicrosa a daté le manuscrit Ripoll 225 du X^{e} siècle. En fait, il semble plus tardif. Toutefois, Gerbert aurait pu avoir accès à un manuscrit plus ancien qui en aurait été la source. En effet, il entretenait des relations suivies avec l'Espagne et dans la lettre 24 [7] du printemps 984 à Lupitus de Barcelone, il écrivit, *je te demande de m'envoyer le livre d'astronomie que tu as traduit...*

Les excerpta sont ceux que Bubnov dans *Gerberti opera mathematica* [3] a analysés comme appartenant à la branche E : les manuscrits de cette branche reproduisent les mêmes chapitres de la *Geometria incerti auctoris* associés aux mêmes interpolations (Chartres 214 - München 14836 - Vat.Reg. lat. 1661 - Paris Bib. Nat. 7377 et Berlin 307). Ces excerpta appartiennent au livre 3 et on les retrouve dans l'édition de Bubnov et pour deux interpolations dans l'édition de Millas Vallicrosa.

En datant le manuscrit Ripoll 225 du X^{e}, Millas Vallicrosa en avait fait la source principale de tous les autres. Or, cette datation avait déjà été contestée en 1931, c'est-à-dire l'année même de la parution de *l'Assaig*, par Van de Vyver [14] qui essaya de prouver que c'était là un manuscrit d'origine française, probablement lotharingienne, du XI^{e} siècle.

Dans les *Apocryphes mathématiques de Gerbert* [1], Guy Beaujouan s'étonne du détour lorrain de la transmission de la science arabe vers la Catalogne. Ripoll 225, suppose-t-il, aurait pu être envoyé en Catalogne en dédommagement d'un manuscrit qui aurait été confié à Gerbert par Lupitus de Barcelone ou ses amis. Dans ce cas, il serait plus tardif que Millas Vallicrosa n'avait voulu l'admettre et il ne serait pas étonnant d'y trouver une partie du *De utilitatibus astrolabii* attribué à Gerbert. Quelle que soit l'hypothèse retenue, Ripoll 225 demeure un important témoin de la présence de la science arabe dans la mouvance de Gerbert et de son école.

Avranches 235 contient plusieurs textes caractéristiques de l'école de Gerbert. Outre la *Geometria incerti auctoris*, source de la géométrie de Gerbert et présente dans les manuscrits du XI^{e} au XIII^{e} siècle, on y trouve trois traités, qui sont rassemblés dans onze manuscrits du XI^{e} et du XII^{e}, le *liber de astrolabio*, le *De compositione astrolabii* et le *De horologio viatorum*, on y trouve aussi un extrait des *Regulae de numerorum abaci rationibus* de Gerbert et un extrait d'un poème didactique de Fulbert de Chartres sur les poids et mesures.

Avranches 235 apparaît donc comme un témoin supplémentaire de l'influence durable de la pensée de Gerbert tout au long des XI^{e} et XII^{e} siècle.

Discussion sur l'état des connaissances géométriques vers le X^{e}.

L'historien Pierre Riché que l'on ne confondra pas avec le moine et historien Richer, un ancien élève de Gerbert, évoque en quelques lignes l'état de la géométrie dans un court paragraphe [13,p.270] où il rappelle une correspondance redécouverte par P. Tannery entre Radolf de Liège et Ragimbold de Cologne, deux maîtres de la première moitié du XI^{e}, réputés pour leur enseignement en géométrie. Un des problèmes envisagés concerne l'angle intérieur dont ils recherchent la signification. Le sujet de la discussion épistolaire a de quoi surprendre, tant la réponse nous semble évidente. C'est aussi un précieux témoin de l'état des connaissances en géométrie peu après la mort de Gerbert en l'an 1003, tant il nous révèle l'importance de la méconnaissance des *Éléments* d'Euclide, même dans ses premières et plus élémentaires propositions.

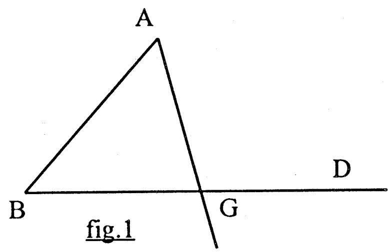


fig.1

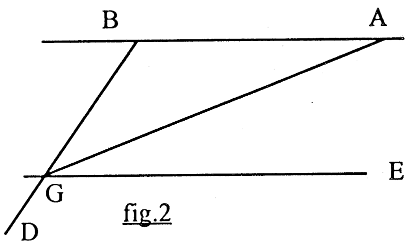


fig.2

L'angle intérieur apparaît, dans les *Éléments*, à la seizième proposition du premier livre, pour la première fois, puis dans les deux suivantes ; il s'agit des angles intérieurs d'un triangle et opposés à un angle extérieur : *l'angle extérieur AGD est supérieur à chacun des angles intérieurs et opposés, GBA et BAG* (fig.1).

On le retrouve ensuite aux propositions 28 et 29 où il équivaut à l'un des angles correspondants déterminés par deux droites parallèles et une sécante : l'angle *extérieur EHB est égal à l'angle intérieur et opposé HΘΔ.* On le retrouve encore à la proposition 32 où il est à la fois l'angle intérieur d'un triangle et l'angle correspondant des propositions 28 et 29 : *l'angle extérieur EGD est égal à l'angle intérieur et opposé ABG* (fig.2).

La proposition 32 établit l'équivalence à deux droits de la somme des angles (intérieurs) d'un triangle et la recherche d'une démonstration de cet énoncé occupa aussi Radolf et Ragimbold [16,p.18]. Que ni l'un, ni l'autre ne soit parvenu à retrouver une preuve de ce résultat élémentaire montre un peu plus la pauvreté des connaissances en géométrie et la méconnaissance complète des démonstrations du premier livre des *Éléments* jusqu'au XIè siècle.

Passons rapidement sur la lettre d'Adelbold dans laquelle il expose à Gerbert son embarras d'avoir trouvé deux valeurs différentes à l'aire d'un même triangle équilatéral de côté 7. La réponse de Gerbert est discutée dans un autre article de ce livre[1] ; je souhaite simplement faire remarquer que l'on trouve encore à la fin du Xè siècle des gens cultivés qui se permettent de calculer l'aire d'un triangle, comme les agrimensores romains le faisaient parfois, en assimilant celui-ci à un triangle arithmétique, en l'occurrence au septième triangle dont la somme, 1+2+3+4+5+6+7, exprimerait aussi, selon Adelbold, la mesure de l'aire d'un triangle équilatéral de côté 7.

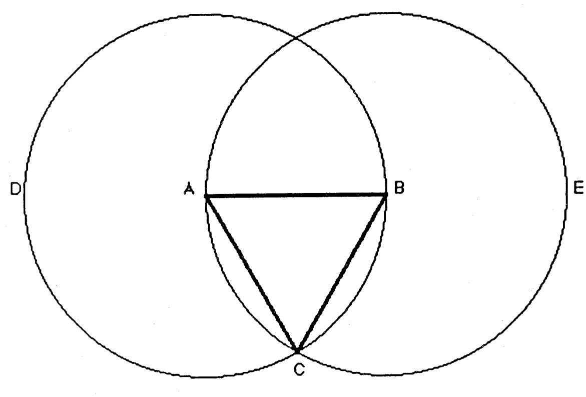
La décadence des mathématiques se laisse apercevoir encore dans la mise en forme de la partie démonstrative des textes. Le modèle proposé par Euclide au IVè siècle avant J. C., appliqué pendant l'Antiquité, rappelé par Martianus Capella vers le IVè siècle de notre ère et longuement discuté par Proclus d'Alexandrie au siècle suivant n'est plus suivi en Occident pendant la période qui s'étend de la fin de l'empire romain jusqu'à la redécouverte et la traduction, au XIIè siècle, des mathématiques grecques. Plusieurs causes ont pu concourir à cet abandon ; le désordre politique et l'insécurité consécutifs à la chute de l'empire comme la rupture des relations avec l'empire d'Orient ont influé sur la transmission des savoirs ; l'ignorance de la langue grecque pendant tout le Haut Moyen Âge a aussi sa part dans cette évolution. Les *Éléments* d'Euclide, hors quelques définitions et certains énoncés, ne connaissaient pas de traduction latine à la fin de l'empire romain ; ils furent donc ignorés pendant cinq siècles. Le commentaire savant de Proclus explique le premier livre des *Éléments* [12]. En particulier, il décompose en ses éléments rhétoriques le texte propre au discours mathématique, les commente et les fait apparaître, en exemple, dans la première proposition. Mais ce livre, rédigé en langue grecque, n'a pas connu de traduction latine pendant le Haut Moyen Âge. Les éléments rhétoriques discutés par Proclus n'étaient pas pour autant ignorés des savants de cette époque ; Martianus Capella les place dans la bouche de la Géométrie, un personnage allégorique des « noces » [9,p.255, ou 10].

[1] NdE : cf l'article de H.Plane & J.C.Pénin *Gerbert, le pape mathématicien de l'an Mille.*

Malheureusement pour les mathématiciens, si l'ouvrage est présent un peu partout pendant tout le Moyen Âge, il ne traite pas de géométrie. Pour en donner une idée en quelques mots, disons qu'il est une encyclopédie romanesque et très superficielle des arts libéraux dont le VIè livre, celui de la Géométrie, développe son sujet en s'attachant à l'étymologie du mot, la mesure de la terre, et traite principalement de géographie réservant moins de 15 % du texte à un court *exposé des règles de l'art*. Dans ce contexte, le discours de Capella sur la composition de l'exposé d'une proposition mathématique se limite à une correspondance entre les termes grecs et latins ; aux premiers traduits par « la proposition », « la détermination », « la construction », la démonstration », et « la conclusion » correspondent dans le même ordre et en latin les mots shematis propositio, determinatio quaestionis, dispositio argumentorum, demonstratio comprobatioque sententiae et conclusio. Après « la détermination », Proclus ajoutera « l'exposition » à cette liste. Comme le tout est dépourvu d'exemple, on imagine assez bien le désappointement des lecteurs antérieurs au XIIè et on devine même le désintérêt du plus grand nombre à la lecture d'une liste de mots vidés de leur signification proprement mathématique. Ci-dessous et dans une traduction personnelle, je donne le point de vue de Proclus sur la division rhétorique des parties de la première proposition des *Éléments* [6,p.137]. Cet exemple offrira au lecteur le moyen de comparer l'expression d'une proposition euclidienne à celle des textes du manuscrit d'Avranches.

Proposition 1

Construire un triangle équilatéral sur un segment donné. (la proposition)



Soit AB le segment donné. (= l'exposition)

Il nous faut construire un triangle équilatéral sur AB. (= la détermination)

Soient BCD le cercle de centre A et de rayon AB et ACE celui de centre B et de rayon BA. Les cercles se coupent en bas au point C. Soient CA et CB les segments reliant C aux points A et B. (= la construction)

Puisque A est le centre du cercle CDB, AC est égal à AB ; de même, puisque B est le centre du cercle CAE, BC est égal à BA. On a montré aussi que AC est égal à AB ; chacun des deux, CA et CB, est donc égal à AB ; or les égaux à un même troisième sont égaux entre eux ; CA est donc égal à CB ; ainsi, les trois longueurs CA, AB et BC sont égales entre elles. (= la démonstration)

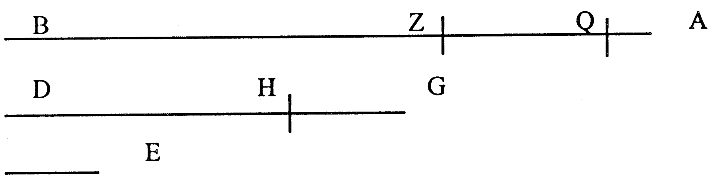
Le triangle ABC est donc équilatéral et il est construit sur AB, le segment donné. [On a donc construit un triangle équilatéral sur un segment donné](= la conclusion) ; ce qu'il fallait faire.

On voit bien que la démonstration est au cœur de la proposition euclidienne ; aucune mesure ou considération particulière qui en restreindrait la généralité ; aucun exemple pour accompagner l'énoncé d'une de ses applications. La proposition euclidienne s'adresse à un lecteur initié à la science mathématique grecque. Que restait-il, au début du Moyen Âge, du discours démonstratif de la mathématique grecque ? Au V^{e} siècle, le philosophe romain Boèce avait formé le projet de traduire les grandes oeuvres grecques. Nous lui devons la traduction de l'arithmétique du mathématicien Nicomaque de Gerasa qui vivait au II^{e} siècle de notre ère. En fait, l'omniprésence du discours philosophique dans l'œuvre arithmétique de ce néo-pythagoricien grec, que l'on surnommait, tout de même, l'Euclide de l'arithmétique, et l'absence de la forme démonstrative des propositions telle qu'elle pouvait se voir dans les *Éléments* ainsi que la substitution d'une preuve qui s'appuie sur des exemples particuliers à la démonstration même de la proposition nous mettent en présence d'un livre qui se tourne résolument vers la philosophie. On sait qu'il acquit très tôt une grande renommée et qu'elle était toujours vivante trois siècles plus tard. Peut-être est-ce la raison qui conduisit Boèce à sa traduction ; peut être aussi le choisit-il pour sa forme pédagogique qui le rendait propice à une initiation à la philosophie pythagoricienne. Le lecteur pourra se rendre compte par lui-même de la différence entre le style euclidien et celui du

Gérasénien à la lecture de la première proposition du septième livre des *Éléments* et de la dix-huitième proposition du premier livre de *l'Institution Arithmétique* de Boèce. Ces deux propositions exposent le moyen de reconnaître les nombres premiers entre eux par la méthode des divisions successives ou réciproques : ils sont premiers entre eux quand le dernier reste non nul est l'unité.

<u>Proposition 1</u>

Lorsqu'étant donnés deux nombres inégaux AB et GD** (avec AB > GD)**, en retranchant successivement le plus petit GD du plus grand AB, autant de fois que cela est possible, jusqu'à ce que l'on arrive à un reste AZ inférieur à GD et en continuant ainsi** (en retranchant AZ de GD etc.)**, il n'arrive jamais qu'un reste divise son précédent, jusqu'à ce que l'on obtienne un reste égal à l'unité, alors les deux nombres AB, GD sont premiers entre eux.



Soient deux nombres inégaux AB > GD. Soustrayons GD de AB autant de fois que cela est possible et soit AZ le reste (AZ < GD), puis soustrayons AZ de GD autant de fois que cela est possible et soit GH le reste (GH < AZ) ; continuons ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne un reste AQ = 1. Je dis que les nombres AB et GD sont premiers entre eux, c'est-à-dire que seule l'unité les divise.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que ces deux nombres possèdent un diviseur commun E.

Le nombre GD mesurant BZ laisse un reste AZ < GD. De même, AZ mesurant DH laisse un reste HG < AZ et finalement le nombre HG mesurant ZQ laisse un reste AQ = 1.

Le nombre E mesure GD et GD mesure BZ ; E mesure donc BZ et il mesure aussi AB tout entier. Donc E mesure le reste AZ. De même AZ mesure DH ; donc E mesure aussi DH, et il mesure DG tout entier. Il mesure donc aussi le reste GH. Or GH mesure aussi ZQ, et par conséquent E mesure ZQ. Comme il mesure aussi ZA tout entier, il mesurera aussi le reste AQ, c'est-à-dire l'unité, ce qui est impossible.

Aucun nombre ne mesure donc les nombres AB et GD, qui sont ainsi premiers entre eux.

<u>Proposition 18</u>

Comment trouver les nombres qui sont seconds et composés en eux-mêmes, mais premiers et non composés relativement à d'autres.

Quant à la méthode qui permet de découvrir de tels nombres, si l'on nous propose les mêmes nombres et si l'on demande de reconnaître s'ils sont commensurables par une certaine mesure ou si vraiment l'unité est seule à les mesurer l'un et l'autre, voici le procédé. Deux nombres inégaux étants donnés, il faudra retrancher le plus petit du plus grand ; si le reste obtenu est encore plus grand, en retrancher encore le petit ; s'il est plus petit, le retrancher du plus grand, et procéder ainsi jusqu'à ce qu'un terme soit mis à ces soustractions réciproques par l'unité ou par un nombre qui sera nécessairement impair, si les deux nombres proposés sont impairs ; quant au nombre restant, tu verras qu'il est égal à lui-même. Donc, si c'est l'unité qui est le terme de ces soustractions réciproques, on dira nécessairement que les nombres sont premiers entre eux et qu'il n'y a entre eux aucune autre commune mesure que l'unité. [...] Mettons que l'on nous propose deux nombres et que l'on nous demande de reconnaître s'ils sont mesurés par une commune mesure ; soient 9 et 29 ces nombres. Voici comment nous allons faire la soustraction réciproque ; retranchons du plus grand le plus petit, c'est-à-dire de 29 le nombre 9, il restera 20. De ce nombre 20, retirons à nouveau le plus petit, c'est-à-dire 9, il restera 11.De ce nombre, je retire à nouveau 9, il reste 2. Si je retire ce nombre du nombre 9, il reste 7 ; et si je retranche encore ce nombre 2 du nombre 7, il reste 5 ; et de 5 encore 2, cela fait 3 ; si l'on diminue encore ce nombre de 2, il ne reste plus pour finir que l'unité. De même, si du nombre 2 je soustrais 1, le terme de la soustraction se trouvera dans l'unité : telle est la seule mesure de ces deux nombres 9 et 29, et il n'y en a point d'autre. Ces nombres, donc, nous les appellerons premiers entre eux.[...]

La comparaison est facile ; on ne reconnaît absolument pas la structure euclidienne dans le texte de Boèce. Les mathématiciens de l'empire romain ne nous ont pas transmis leur point de vue sur l'arithmétique de Nicomaque. Ils avaient sous les yeux les deux textes, dans la même langue qu'ils lisaient puisque cette science ne s'étudiait qu'en grec. En fait la comparaison ne se posait sûrement pas. En revanche, entre le V^{e} et le X^{e} siècle, l'*Institution Arithmétique* était un des livres, peu nombreux, dans lequel on pouvait lire des mathématiques. Pour eux aussi, la comparaison ne se pose pas mais pour un tout autre motif : elle est impossible. Le livre de Boèce, qui ne présente même pas la trame d'une proposition mathématique, a-t-il été étudié comme un livre de mathématique ? Peut être, car il transmet des résultats d'arithmétique. A-t-il influencé la rédaction des mathématiques ? Sans doute, car la tradition faisait défaut. Quelle est la part de l'influence de Boèce sur la rédaction d'un Gerbert ? Quelle est celle de ses autres lectures et en particulier celle des agrimensores ? Certes, la rédaction de la géométrie du manuscrit d'Avranches est plus proche du style de Boèce que de celui d'Euclide, mais l'admiration de Gerbert pour le Romain Boèce, même si elle ne peut être négligée, ne suffit pas pour trancher la question...

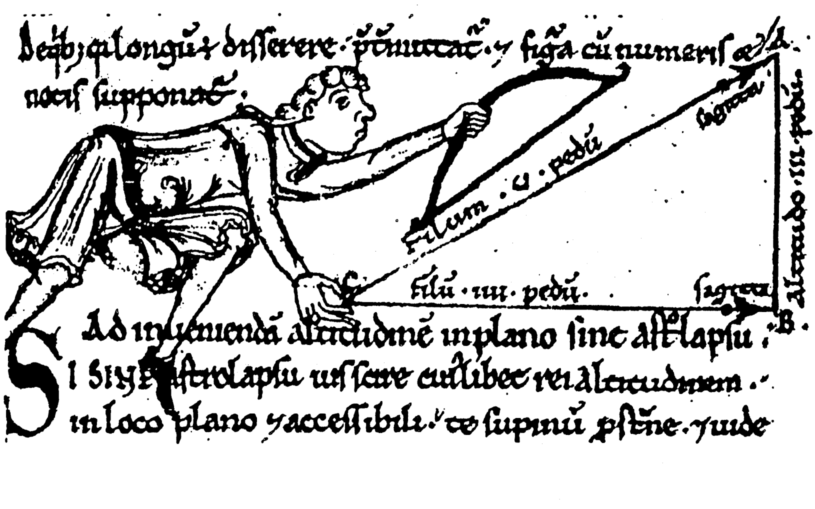
Présentation des textes mathématiques du manuscrit d'Avranches.

Les dix-neuf propositions mathématiques du manuscrit peuvent, à l'exception de deux d'entre elles, se lire en latin dans le livre de Bubnov [3]. Elles ne sont pas l'œuvre de Gerbert, comme Olleris le croyait, ni la géométrie d'un seul auteur, une geometria incerti auctoris, comme Bubnov le supposait mais plutôt une geometria incertorum auctorum, l'œuvre de plusieurs, comme on peut s'en rendre compte par une lecture suivie de l'ensemble. Les textes exposent différentes méthodes qui permettent de mesurer différentes longueurs, telles des hauteurs, des distances, la profondeur de puits ou pour une proposition la profondeur en un lieu d'une rivière ou de la mer. A qui destinait-on ces textes ? Sûrement pas à des mathématiciens, serait-on tenté de répondre. Les auteurs, en effet, évitent l'explication mathématique qui pourrait fonder les méthodes et proposent à la place et systématiquement un exemple numérique illustré d'un schéma ; on reconnaît là un procédé familier aux utilisateurs des mathématiques comme les arpenteurs ou les ingénieurs militaires. L'exemple est choisi pour représenter l'application la plus simple de la méthode, celle qui conduit à un minimum de calculs et non pas pour illustrer la situation physique la plus probable. En sacrifiant ainsi la clarté à la facilité, certains exemples, qui correspondent à une utilisation trop particulière, jettent un voile sur les méthodes qu'ils veulent expliquer au point d'interdire à l'utilisateur toute initiative sur le terrain. D'ailleurs, à la lecture des textes, on a souvent l'impression qu'ils sont destinés à un public dépourvu de connaissance en mathématiques et en particulier dans celle des proportions, la clé pourtant de la plupart des méthodes.

Pour éviter de donner trop d'ampleur à cet article, je n'y inclurai pas les sept textes discutés en atelier. Je joindrai seulement trois textes, les deux premiers et le douzième de la partie mathématique du manuscrit : ils se comprennent facilement, n'ont donc pas besoin d'être commentés et donnent une idée du niveau mathématique de l'ensemble. Les deux premiers présentent une particularité graphique qui inévitablement les distingue de tous les autres. Si tous les textes sont accompagnés d'un schéma qui illustre l'explication de la méthode exposée, ces deux-là sont en plus agrémentés d'un personnage. Le manuscrit ne comporte que trois représentations humaines. On vient d'en voir deux, la troisième les précède immédiatement et clôt un ensemble de textes relatifs à l'astronomie. Il est plus difficile de découvrir l'intention derrière cette distinction, car, les deux premiers textes n'exposent pas des méthodes qui pourraient se distinguer par leur performances. À l'IREM de Basse-Normandie, nous avons testé le second texte, qui s'est révélé, sans nous surprendre, beaucoup trop dépendant de notre morphologie. Il est donc assez surprenant de voir une méthode aussi farfelue agrémentée d'un dessin qui la souligne. La raison est peut-être beaucoup plus simple et sans rapport avec le contenu mathématique de ces deux textes : leurs sujets se prêtent assez bien à l'illustration. Le douzième texte m'intéresse pour sa simplicité qui nous le fait comprendre sans effort , pour sa permanence que l'on constate chez les ingénieurs de la Renaissance [8,p.53] et parce qu'on le retrouve accompagné d'une démonstration dans un manuscrit du début du XII^e^ siècle.

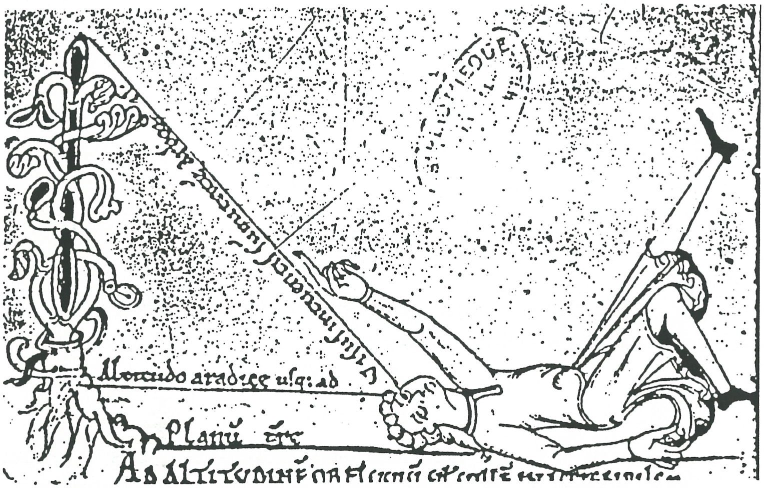
<u>Pour mesurer une hauteur avec des flèches et un fil. (1^er^ texte)</u>

Si tu veux rechercher avec soin la hauteur de quelque chose, tu pourras la rechercher de cette façon en empruntant à l'archer un peu de son adresse. Prends un arc, des flèches et un fil et quand tu auras fixé un bout du fil à la pointe de la flèche, garde l'autre bout dans ta main, puis avec l'arc décoche la flèche qui se fichera au sommet de la hauteur à mesurer. Après cela, que le bout d'un autre fil soit lié à une autre flèche de la même manière ou bien à un javelot, et que celui qui a été choisi soit lancé vers la base de la hauteur et qu'il la frappe comme auparavant le sommet. Ceci fait, retire l'un et l'autre des fils et examine avec soin de combien de pieds ou de coudées est chaque mesure. Ensuite, que la mesure de chaque fil soit multipliée par elle-même et que l'on évalue chacun des produits. Que le plus petit soit soustrait du plus grand, il restera le produit d'un nombre ; que le côté du carré en soit *cherché attentivement. Une fois la recherche achevée avec soin et attention, annonce, le problème étant résolu, que la hauteur dont on s'enquiert mesure autant de pieds ou de coudées qu'on en peut placer dans le côté de ce carré. Et pour que la hauteur, dont nous parlons, soit connue de manière plus concrète que les fils soient figurés avec des notations et des nombres. Soit AB la hauteur recherchée ; que la longueur AC du premier fil, celui qui toucha le sommet de la hauteur, soit mesurée par 5 pieds; que la longueur CB de l'autre fil, celui qui frappa le pied de la hauteur, soit limitée par 4 pieds. Après cela, que le nombre 5 du premier fil multiplié par lui-même produise 25 et que le nombre 4 du second fil multiplié par lui-même produise 16. Ensuite, une fois le plus petit nombre, c'est-à-dire 16, ôté du plus grand, c'est-à-dire 25, il restera 9 dont le côté du carré est 3 parce que 3 multiplié par lui-même produit 9. L'altitude AB sera donc de 3 pieds. Mais parce qu'il peut arriver que le côté restant du carré ne puisse parfois être trouvé en nombre entier, une subtilité de l'ordre des poussières doit nécessairement être appliquée: on peut passer cela sous silence parce que l'exposé de ce cas serait trop long et on considère une figure avec des nombres et des notations .*



Pour trouver la hauteur dans un plan sans astrolabe. (2ème texte)

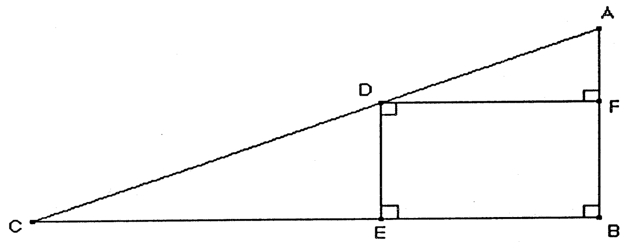
Sans astrolabe, si tu veux connaître la hauteur de quelque chose dans un lieu plan et accessible, couche-toi sur le dos de sorte d'être étendu par terre, bien droit, de la tête aux pieds et que la chose dont tu cherches à connaître la hauteur soit placée du côté de la tête. En regardant vers l'arrière, avance et recule jusqu'à en apercevoir le sommet. La hauteur sera comme la distance comprise entre sa base et ta tête. Cela se comprendra mieux si on l'expose au moyen d'une figure.



Remarque:
L'auteur fonde sa méthode sur l'hypothèse d'une rotation de l'oeil vers le haut d'un angle de 45 degrés par rapport à sa position ordinaire ; sous cette hypothèse, le triangle déterminé par l'oeil, la base et le sommet est isocèle rectangle.

Pour mesurer une étendue plane avec une perche. (12ème texte)

Qu'un homme chargé de la visée se place au bout d'une étendue plane à mesurer et se donne une perche plus petite que sa taille ; qu'il plante l'instrument face à lui en des lieux divers jusqu'à apercevoir l'autre bout du plan dans l'alignement du sommet. Ceci fait, du haut de la perche et à angles droits, mener une ligne jusqu'à l'homme et marquer le lieu du corps où elle aboutira. Comparer la partie du corps *comprise entre la marque et l'oeil avec la ligne menée à angles droits. Le rapport de cette partie à la ligne orthogonale sera proportionné au rapport du corps entier à toute l'étendue du plan. Pour l'exemple, soit AB la taille de l'homme chargé de la visée, BC l'étendue à mesurer, DE la canne avec laquelle on mesure et DF la ligne menée à angles droits.. Le rapport de AF à FD sera proportionné à celui de AB à BC. Supposons que AF forme la quatrième partie de FD, AB forme aussi la quatrième partie de BC, comme c'est figuré ici.*



Remarque :

Sous l'hypothèse d'une étendue plane (et de niveau !), BC, les triangles ABC et AFD sont semblables ; d'où :

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BC}$$

Au début du XII[e], on retrouve cette proposition dans la *Practica geometria* de Hugues de St. Victor ; mais, cette fois, elle est accompagnée d'une démonstration. L'extrait suivant est donné dans la traduction de J. de Siebenthal.

Les deux triangles ainsi formés étant rectangles et ayant une hypoténuse commune, ils sont l'un et l'autre dans le même rapport. Rapport qui n'a rien d'autre que le triangle i.e. la stature du menseur, sur sa base, qui est la surface à mesurer, et ce rapport est donné par le plus petit triangle, qui est la partie de la baguette debout se trouvant au-dessus de son point de contact avec la baguette couchée, sur sa base, i.e. la baguette couchée.[14, §5, p.8]

L'existence d'une démonstration dans un texte de géométrie appliquée est la marque d'une transition par rapport à la géométrie de la fin du X[e] siècle et d'une évolution de la pensée médiévale vers la renaissance des mathématiques grecques.

Bibliographie :

[1] Beaujouan : Les Apocryphes mathématiques de Gerbert, in Actes de Gerberti Symposium, Bobbio 1983

[2] Boèce, Institution arithmétique, Les Belles Lettres, Paris 1995

[3] Bubnov : Gerberti opera mathematica, Berlin 1899.

[4] Centre d'Étude et de Recherche sur L'Antiquité de l'université de Caen

[5] Euclide, Les Éléments, traduction de G. J. Kayas, éd. du CNRS

[6] Euclide, Les Éléments, traduction de B. Vitrac, vol. 1, P.U.F. 1990

[7] Havet, Lettres de Gerbert, Paris 1889

[8] Les Cahiers de Science & Vie, hors série n° 34 (L. de Vinci), août 1996

[9] Martianus Capella, edidit J. Willis, bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum, Teubneriana 1983

[10] Martianus Capella, Les règles de l'art géométrique dans les noces, traduction et commentaires par M. Levard, IREM de Basse-Normandie, Caen

[11] Millas Vallicrosa, Assaig d'histoire de les idees fisiques i mathemàtiques a la Catalunya medieval, Barcelone 1931

[12] Proclus de Lycie, traduction de P. Ver Eecke, Bruges 1948

[13] Riché : Écoles et enseignement dans le haut Moyen Âge, Picard 1989.

[14] de Siebenthal, Les mathématiques dans l'occident médiéval, éditions Terre haute, chez l'auteur, Lausanne, 1993

[15] Van de Vyver, Les premières traductions latines de traités arabes sur l'astrolabe (X-XIe), in 1er congrès international de géographie historique, II mémoires, Bruxelles 1931.

[16] Van de Vyver, L'évolution scientifique du Haut Moyen Âge, in Archeion, vol. XIX, Paris 1937.