Gerbert, le pape mathématicien

Henri Plane
Jean-Claude Penin

L'enseignement avant et pendant l'époque de Gerbert.

Charlemagne et Alcuin

Charlemagne sous l'inspiration d'Alcuin (735 - 804) se propose de rénover l'enseignement :

> *Il nous a semblé d'une souveraine utilité que les évêchés et les monastères dont le Christ a bien voulu nous confier le gouvernement, ne se contentent pas de mener une vie régulière et pieuse, mais s'acquittent aussi de la fonction d'enseigner..*
>
> Selon un Capitulaire
> promulgué vers 790

Charlemagne décrète donc la création d'écoles à côté de chaque cathédrale et de chaque monastère.

Structure de l'enseignement

L'enseignement se divisait en 2 parties

- Le Trivium

Il comprenait comme le mot l'indique trois disciplines de base à savoir : la grammaire, la logique et la rhétorique. Dans la pratique, il se limitait à l'apprentissage de la lecture, de l'écriture et du latin.

- Le quadrivium

C'était le niveau supérieur par rapport au précédent qui, comme le mot l'indique, comprenait quatre disciplines : l'arithmétique, la musique, la géométrie et l'astronomie. Cet enseignement n'avait rien à voir avec les disciplines homonymes qu'on trouvera plus tard. C'était un enseignement très simple et concret ; ainsi la géométrie se limitait à quelques notions d'arpentages et la musique se réduisait à la théorie des intervalles musicaux, théorie analogue à celle que l'on trouve chez Théon de Smyrne [5, p. 79].

Les mathématiques en Occident avant l'an mille

Elles se réduisent donc à fort peu de choses. En effet, les seules connaissances mathématiques qui subsistent en Occident avant Gerbert sont celles qui sont parvenues de l'Antiquité latine via quelques écrivains, tel Boèce (philosophe du 4ème siècle qui écrivit une arithmétique et une géométrie élémentaire). Le niveau de ces connaissances n'a rien à voir avec celui qui fut atteint dans l'Antiquité Grecque et celui que l'Europe découvrira à partir du 12ème siècle avec l'arrivée des traductions arabes. A l'époque, les livres sont très rares et les seuls ouvrages traitant de mathématiques se réduisent à quelques fragments en général mal compris. Ainsi à titre d'exemple, circulent quelques extraits des éléments d'Euclide se réduisant en fait à quelques propositions sans démonstration, des textes disparates, recueils de recettes pratiques de calculs d'arpentage, qui ont traversé tant bien que mal le Haut Moyen Age et que l'on attribue, aujourd'hui, à des arpenteurs romains de l'antiquité tardive.

Cet état des choses s'explique par le fait que, pendant le Haut Moyen-Age, toute la connaissance intellectuelle est du ressort de l'église. Or les hommes d'église de cette époque sont plus intéressés par le salut de leur contemporains ou d'autres activités plus concrètes que des recherches scientifiques « curieuses et très oiseuses » comme le fera remarquer Saint-Augustin au 4ᵉ siècle.

Les mathématiques arabes vers l'an mille.

Elles sont arrivées an l'an mille à un état de développement tel qu'il faudra attendre le 15ᵉ siécle pour trouver en occident un état comparable. Les mathématiciens arabes ont totalement assimilé l'héritage gréco-indien. Ils pratiquent l'algèbre, résolvent des équations algébriquement et géométriquement, connaissent la trigonométrie et l'utilise en astronomie.

Vie de Gerbert

Gerbert naît semble-t-il en Aquitaine vers 940, peut-être en Auvergne, d'une famille inconnue.

Voyage en Espagne : 967.

Gerbert part en Espagne en 967 sous la conduite de Borel, Comte d'Urgel (de Barcelone), il y étudie selon P. Riché le quadrivium et y devient très savant en arithmétique, géométrie, astronomie et musique. En réalité on ne sait précisément ce qu'il y a appris. Cependant il est à peu près sûr qu'il n'a pas eu de contact direct avec la science arabe, car dans tous les ouvrages qui lui sont attribués de façon certaine, il n'y a pratiquement aucune référence à des connaissances d'origine arabe.

Voyage à Rome en 970

Quoiqu'il en soit, Gerbert accompagne ensuite le Comte à Rome et il est suffisamment instruit pour impressionner le pape par sa science.

Arrivée à Reims en 970

En 973, il arrive à Reims où il est reçu par l'évèque Adalberon qui lui confie le poste d'écolatre. D'après le moine Richer, il y acquiert une grande renommée pour son enseignement « scientifique ».

Nomination à Bobbio

En 982, Gerbert est nommé abbé de l'abbaye de Bobbio, il découvre là-bas une magnifique bibliothèque dans laquelle il trouve peut-être les manuscrits des arpenteurs romains (agrimensores) : ce sont des textes géométriques à caractère essentiellement pratiques concernant des problèmes de mesures de surfaces. Au bout de quelques mois, il revient à Reims et reprend ses leçons.

Vie politique

En 991 il devient évêque de Reims : le personnage devient politique et n'a vraisemblablement plus le temps de s'occuper de science. En 999, il est nommé Pape sous le nom de sylvestre II et meurt en 1003.

La science de Gerbert

Il est difficile de savoir ce qu'il faut réellement attribuer à Gerbert comme découverte dans le domaine « scientifique ». A côté d'une légende abondante et incroyable faisant de Gerbert un inventeur de plusieurs siècles en avance sur son temps, l'érudit du 19e siécle, Nicolas Bubnov, ne revendique pour Gerbert que quelques textes assez décevants quant à la géométrie et l'astronomie [4, p 597]. Pour ce qui concerne l'arithmétique, Bubnov attribue à Gerbert une lettre à son disciple Constantin, un texte sur la multiplication, un autre sur la division et enfin quelques fragments [1]. Autant dire que tout ceci est bien maigre et contraste mal avec toutes les conclusions optimistes qui ont pu être faites sur la prétendue science de Gerbert.

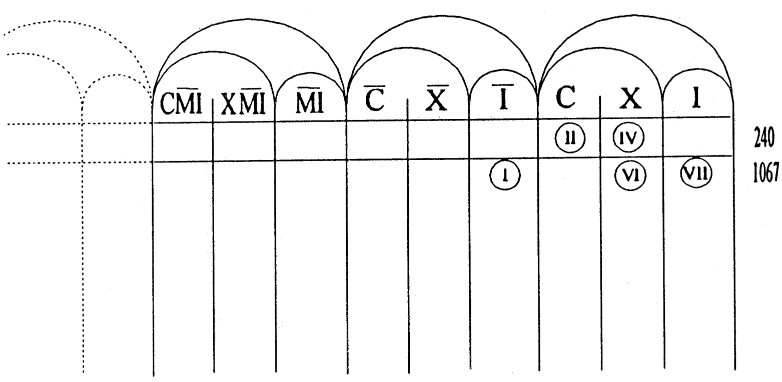
L'arithmétique de Gerbert

On attribue essentiellement à Gerbert d'avoir fait connaître l'abaque à jetons qui permet de faire rapidement les multiplications et les divisions ; peut-être en avait-t-il rapporté l'utilisation de son séjour en Espagne.

La description qui suit est inspirée d'un texte de Bernelinus [2, p. 357], *le livre de l'abaque*. Ce Bernelinus est connu comme ayant été un élève de Gerbert.

> *C'était un tableau divisé en 27 colonnes ou compartiments dans lesquels il disposa neuf chiffres exprimant tous les nombres. Il fit exécuter ces signes en cornes de buffles, au nombre de mille et les répartit dans les 27 compartiments, de telle sorte qu'ils pouvaient donner la multiplication et la division de tous les nombres avec une rapidité étonnante. Le premier compartiment de droite représente les unités, le second les dizaines et ainsi de suite en décuplant. Ces colonnes étaient groupées par 3, par un arc qui les réunissait et chacune était, en outre, terminée par un autre arc dans lequel se trouvait une lettre indiquant la valeur des signes renfermés dans cette colonne : I, unité ; X, dizaines ; C, centaines ; M, mille ; etc.*

Pour remplacer le zéro qu'il ne connaissait pas, Gerbert laissait en blanc la colonne qu'il aurait occupé. Cette absence du zéro imposait la présence des colonnes qui donnaient ainsi à chaque chiffre la valeur qu'il a naturellement, dans notre système actuelle, de par sa position dans le nombre.



Le système de l'abaque est donc un système de numération de position. Les signes que l'on écrivait sur les jetons que l'on plaçait sur l'abaque pouvaient être des chiffres romains, cette numération, d'ailleurs, perdura encore longtemps après Gerbert à qui on doit peut-être l'introduction des signes représentant nos chiffres. Le système de l'abaque était vraisemblablement utilisé essentiellement pour les multiplications et divisions.

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I	
			4	6	8	
				2	4	
				3	2	
			2	4		
		1	6			
		1	8	7	2	Somme partielle
			1	6		
		1	2			
		8				
	1	1	2	3	2	Résultat

La multiplication de Gerbert selon K. Vögel [5]. Elle n'est pas réellement différente de celle que l'on pratique aujourd'hui, ce qui n'est pas le cas de la division.

La division de Gerbert.

Les règles de la multiplication et de la division sont décrites dans l'ouvrage de Gerbert que l'on a parfois intitulé l'*Abacus*. Bubnov qui l'attribue en propre à Gerbert, l'a édité [1,pp. 6-22] et Chasles en a fait une traduction et un commentaire. [2]. Voici ce qu'il dit sur les règles de la division exposées dans l'*Abacus* :

Si les règles de la muliplication sont faciles à comprendre, il en est tout différemment des règles de la division : celles-ci sont d'une parfaite obscurité ; elles semblent ne rien présenter qui ait rapport soit à nos procédès actuels de calcul, soit même à notre système de numération.

Cependant, c'est bien dans ce système qu'elles s'exécutaient ; mais elles différent de nos règles actuelles, et elles ne nous sont plus connues, probablement depuis six siècles.(...)

Exemple : Soit à diviser 86 par 7,
on écrit 7 comme 10 - *3*

$$\begin{array}{c||c} \cancel{86} & 8 \\ 24 & \\ \hline \cancel{30} & 3 \\ 9 & \\ \hline 9 & 1 \\ \cline{2-2} 2 & 12 \end{array}$$

86 = 80 + *6*
80/10 = 8
8×*3* = 24 et 24 + *6* = 30
On recommence avec 30;
30 = 30 + *0*
30/10 = 3
3×*3* = 9 et 0+9 = 9
9 est plus petit que 10, on fait ensuite la division de 9 par 7.

La théorie en est assez simple à comprendre :

86 = q×7 + r
86 = q×(10 - 3) + r
80 + 6 = q×10 - q×3 + r
(80 - q×10) + (6 + q×3) = r, on détermine q pour que la première parenthèse soit nulle, donc q = 8.

0 + (6 + 8×3) = r ce qui donne r = 30. On recommence avec 30 ce qu'on a fait avec 86.

30 + 0 = q'×(10-7) + r'. On trouve de la même façon que précédemment q' = 3 et r' = 9. 9 est plus petit que 10, on divise alors comme on le fait habituellement 9 par 7.

9 = q''×7 + r''. On obtient alors q'' = 1 et r'' = 2.

Finalement il vient :
86 = q×7 + q'×7 + q''×7 + r '' ou
86 = (q + q' + q'')×7 + r''.

Ce qui achève la justification d'une technique qui devient vite délicate pour des nombres plus grands car l'algorithme perd son homogénéité, ce qui explique que cette méthode sera supplantée, quelque temps après, par la technique actuelle.

Quelques exemples.

12637 divisé par 9 = (10 - 1)

~~1~~	2	6	3	7	1	3	9	3
	1						1	1
	~~3~~				1	4	0	4
		3						
		~~9~~						
			9					
		~~1~~	2					
			1					
			3					
			1	3				
			~~1~~	0				
				1				
				1				

1404×9 + 1 = 12636

6006 divisé par 19 = (20 - 1)

6	0	0	6	3	1	5
	3					1
	~~3~~			3	1	6
	1					
		1				
	~~1~~	~~1~~				
		1				
			5			
		2	1			
			1			
			2			

316×19 + 2 = 6006.

La Géométrie de Gerbert

La tradition attribue à Gerbert de grandes connaissances en géométrie et un livre de géométrie. Mais toute la difficulté est de savoir quelles étaient ces connaissances et ce qu'il a écrit exactement ?

A. Olléris : Vers 1867 un certain Olléris publie à Clermont-Ferrand ce qu'il pense être des oeuvres de Gerbert, en particulier il lui attribue une Géométrie en 3 parties assez hétérogènes.

Une première partie élémentaire et verbeuse traitant entre autre des unités de mesure et de quelques exercices utilisant le théorème de Pythagore de façon élémentaire.

Une seconde partie traitant de problèmes pratiques de mesure sur le terrain avec un astrolabe.

Une troisième partie, enfin, constituée de problèmes métriques assez divers.

N. Bubnov : En 1899 l'érudit N. Bubnov publie les oeuvres mathématiques de Gerbert après avoir consulté un nombre impressionnant de manuscrits dans différentes bibliothèques d'Europe. Il attribue péremptoirement à Gerbert seulement la première partie de la géométrie éditée par Olléris et rejette les deux autres parties qu'il attribue à un auteur incnnu qui aurait repris et remanié les textes provenants des manuscrits des arpenteurs romains.

Actuellement on pense que la situation est complexe et que toutes ces attributions ou non attributions restent finalement non prouvées. Quoi qu'il en soit, les connaissances géométriques de Gerbert restent très élémentaires et se ramènent pour les parties techniques à quelques recettes pratiques utilisant de façon simple le théorème de Pythagore. En conclusion, Gerbert a été sans doute moins grand savant qu'on l'a dit et son oeuvre scientifique semble mince [5]. Mais il fut certainement un très bon pédagogue, un initiateur et un assoiffé de connaissances. Afin de satisfaire son appétit de connaissance, il rechercha dans tous les monastères d'Europe les livres des Anciens, plusieurs de ses lettres en sont la preuve. Son attitude préfigure la renaissance culturelle du 12^e siécle

Textes

Le premier texte est une lettre datée de 999 de Gerbert à un de ses éléves, Adelbold, qui était alors évêque d'Utrecht.

Lettre de Gerbert à Adelbold

Explication de la différence des résultats obtenus dans la mesure de la surface d'un triangle équilatéral selon que l'on emploie la méthode géométrique ou la méthode arithmétique.

A Adelbold que j'ai toujours aimé et que j'aimerai toujours, avec l'assurance de toute mon estime, entière et durable.

Parmi les figures géométriques que tu as reçu de nous, il y a un triangle équilatéral dont le côté est de 30 pieds, la cathète[1] de 26 et dont l'aire, calculé à partir du côté et de la cathète, de 390. Si tu mesures ce même triangle mais sans utiliser la méthode de la cathète, en suivant la règle arithmétique[2], c'est-à-dire si, après avoir multiplié un côté par lui-même, tu ajoutes au résultat le nombre qui mesure ce même côté et si, de la somme ainsi obtenue, tu prends la moitié, tu obtiendras une aire de 465. Vois-tu à quel point ces deux règles sont en désaccord ? Mais cette règle géométrique, qui grâce à la cathète mesurait l'aire en 390 pieds[3], a été précisément examinée par moi[4] et j'attribue à la cathète seulement 25 et cinq septième et, pour son aire, 385 et cinq septième. Applique donc cette règle générale qui permet de trouver la cathète de tout triangle équilatéral : retranche toujours du côté la septième partie et attribue à la cathète les 6 parties qui restent.

Afin que tu comprennes mieux ce qui a été dit, je veux te donner un exemple avec de plus petits nombres. Soit un triangle qui a une dimension de sept pieds pour le côté. Je mesure ce triangle selon la règle géométrique. J'enlève un septième au côté, et je donne les six septièmes qui restent à la perpendiculaire. Je multiplie le côté par cette perpendiculaire et je dis : six fois sept font 42, dont la moitié : 21, est l'aire du triangle.

Supposons que tu mesures le même triangle par la règle arithmétique, que tu dises : sept fois sept font 49 et que tu ajoutes le côté pour obtenir 56 et que tu partage en deux pour obtenir l'aire, tu trouveras 28. Voilà que dans une triangle dont le côté conserve la même valeur, les aires sont différentes, ce qui ne peut être.

Mais afin que tu ne restes pas dans l'embarras plus longtemps, je vais te montrer la raison de cette différence. Je crois que tu sais ce que l'on entend par pieds de longueur, pieds carrés et pieds de volume et que pour mesurer des aires, nous avons l'habitude de ne prendre que des carrés, par empilement. Quelle que soit l'importance de la partie de ces carrés qui se trouve en contact avec le triangle, la règle arithmétique compte ces carrés pour des carrés entiers.

---

[1] Cathète : hauteur

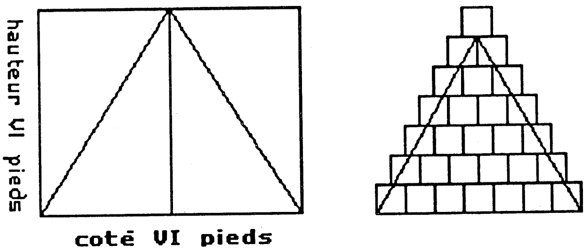
[2] Régle venant peut-être des arpenteurs romains (agrimensores).

[3] Résultat très bon que Gerbert, peut être dans un souci didactique, va écarter.

[4] Est-ce une référence à une oeuvre de Gerbert qui ne nous est pas parvenue ?

Je veux te dessiner ce dont nous parlons afin que ce soit plus clair pour toi.

Voilà donc qu'il y a, dans cette petite figure, 28 pieds carrés, quoiqu'ils



ne soient pas tous entiers. D'où la règle arithmétique qui prend la partie pour le tout et qui considère ces éléments de carrés comme des carrés entiers. Or l'ingéniosité de la méthode géométrique - qui néglige les petites parties qui dépassent des côtés et qui conservent les parties coupées intérieures au triangle - consiste à prendre en compte seulement ce qui est à l'intérieur des côtés. Car, si, dans cette petite figure dans laquelle sept pieds mesurent les côtes, tu cherches la perpendiculaire, tu trouves : six pieds. En multipliant ce nombre par 7, comme lorsque, en le remplissant de petits carrés, tu calcules l'aire d'un rectangle dont la hauteur de de 6 pieds et le côté de 7 pieds, tu obtiens, pour son aire : 42. Si tu divises par 2, il restera 21 pieds pour le rectangle.

Pour mieux comprendre, regarde bien la figure et souviens-toi toujours de moi.

Le deuxième texte est un extrait d'un ouvrage qui remonte au plus tard au 11^{e} siècle. Selon A. Olléris, c'est une partie de l'oeuvre de Gerbert, selon N. Bubnov elle fut écrite avant l'an mille par un auteur inconnu qui aurait repris et remanié les manuscrits des anciens arpenteurs romains;

LIVRE IV

Il faut avertir l'étudiant de la diversité inhérente à la géométrie. Quel profit promet la pratique de cet art, dans la mesure où l'intelligence du lecteur bien que stimulé, par la triple raison[5] de son attirance vers cette discipline, à en recueillir promptement les fruits, approfondira avec plus d'application le développement qui suit ! C'est en effet une description de ces connaissances, scrupuleuse mais riche par la recherche de toute dimension et par la juste adaptation de ses investigations. Cependant, bien qu'elle soit difficile, celui qui se sera donné la peine d'une infatigable application pourra l'acquérir. Et, afin que ces choses soient, comme il a été dit, plus facilement acquises par l'étude, une figure a été adjointe à chaque théorème.

1) Les noms des mesures que nous utilisons sont : le doigt, l'once, la palme, la sexte qui est appelée le dodrant, le pied, la briquette, la coudée, l'enjambée, le pas, la perche de dix pieds qui est appelée aussi la perche (*pertica*), mot proche de portique lequel vient de l'action de porter, le clima, l'acte qui est aussi appelé l'arpant, le jugère, la centurie, le stade, le mille.

Le doigt est la plus petite mesure de terrain.

L'once selon certains vaut trois doigts, selon d'autres, plus vraisemblablement un doigt un tiers.

La palme vaut quatre doigts ou trois onces.

La sexte douze doigts ou neuf onces, ou trois palmes.

Le pied 16 doigts ou 12 onces, ou 4 palmes, ou une sexte un tiers.

La briquette un pied en largeur, 23 en longueur.

La coudée 1 pied et demi ou 2 sextes, ou 6 palmes, ou 18 onces, ou 24 doigts.

L'enjambée vaut 3 pieds.

Le pas 5.

La perche 10.

---

[5] Selon Boéce la pratique de la géométrie se fait au profit de trois choses : le talent oratoire, la santé de l'esprit et enfin l'âme.

Le clima 40.[6]

L'acte en largeur 120, en longueur 120.

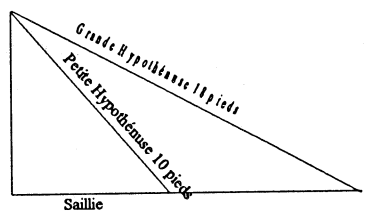
Le jugère qui est la réunion de deux actes, en longueur 240, en largeur 120.

La centurie 200.

Le stade 625 pieds ou 125 enjambées.

Le mille 1000 pas ou 8 stades.

2) Si l'on se donne les trois côtés d'un amblygone[7], à savoir la grande hypothénuse de 18 pieds, la base de 9 pieds et la petite hypothénuse de 10 pieds, on obtient la longueur de la partie saillante sur laquelle tombe la perpendiculaire ainsi : Que l'on soustraie de la valeur de la grande hypothénuse, multipliée par elle-même, les valeurs multipliées par elles-mêmes des deux petites lignes, à savoir la base et la petite hypothénuse ; ensuite que l'on prenne de ce qui surabonde, la moitié, dans laquelle se trouve autant de fois la base qu'il y a d'unités réparties dans la saillie. Quant à la cathète, on l'obtiendra ainsi : Après avoir séparé de la petite hypothénuse multipliée par elle-même, la saillie multiplié par elle-même, que l'on prenne le côté de ce qui reste, qui sera la valeur de la perpendiculaire.

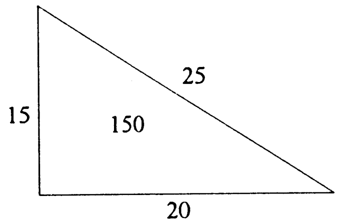


Et si l'on veut trouver l'aire de cet amblygone, que l'on multiplie sa base par la cathète, c'est-à-dire la perpendiculaire ; ensuite que l'on prenne la moitié du résultat qui provient de cette multiplication, qui sans aucun doute est l'aire de l'amblygone.

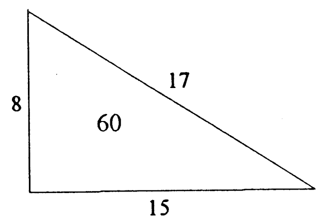
[6] C'est une mesure de surface chez Gerbert : 40 pieds en largeur, 40 pieds en longueur.

[7] Amblygone, mot d'origine grecque : qui a un angle obtus

3) Dans le triangle rectangle dont l'hypothénuse est de 25 pieds, l'aire de 150, on obtient la cathète et la base de cette façon : que l'on multiplie la valeur de l'hypothénuse par elle-même, que l'on ajoute à cette valeur qui s'est accrue, 4 fois l'aire, à savoir 600, cette somme donne 1225 ; le côté de cette valeur sera 35. Ensuite, afin de trouver la différence des deux côtés, à savoir de la cathète et de la base, que l'on multiplie la valeur de l'hypoténuse par elle-même, il viendra 625 ; de là, ayant enlevé 4 fois l'aire, il reste 25, dont le côté sera 5. Ceci, ajouté au côté du nombre trouvé plus haut, donnera 40 ; la moitié déterminera la base. Or, en enlevant le nombre 5 qui avait été ajouté à la quantité ci-dessus de 35, on obtiendra la cathète.

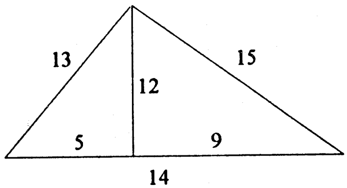


4) Soit donné un triangle dont la cathète et la base prises ensemble font 23 pieds, la surface 60, l'hypothénuse 17, on recherche la différence entre la cathète et la base ainsi : Que la valeur de l'hypothénuse soit multipliée par elle-même, elle s'élèvera à 289 ; de là, si on retire 4 fois la surface, c'est à dire 240 et que du reste, qui surabonde, à savoir 49, on prenne le côté et qu'on l'ajoute à la valeur de la base et de la cathète, on produira 30 pieds ; la moitié de cette valeur sera la base du triangle. Et si on l'enlève de 23, valeur de la base et de la cathète prises ensemble, il reste 8 qui constitue la cathète.



Dans cette figure, lorsque l'on multiplie par elle-même la moitié de la cathète trouvée et que du résultat on enlève 1, on trouve la base, qui, si on lui ajoute 2, devient l'hypothénuse.

5) Soit donné un triangle oxygone[8] dont les côtés ont reçu des valeurs différentes, à savoir, pour la petite hypothénuse 13, pour la base 14, et pour la grande hypothénuse 15 ; si on désire trouver la perpendiculaire de ce triangle et distinguer chacune des parties interceptées, que l'on procède ainsi : avec la valeur de la petite hypothénuse, c'est à dire 13, multipliée par elle-même et de la base, 14, on ajoute le montant de chaque produit, il vient 365. Que l'on en retranche la valeur, multipliée par elle-même, de la grande hypothénuse, c'est-à-dire 225, et du reste qui surabonde, c'est à dire 140, qu'on en prenne la moitié, 70, et qu'on la partage selon la base,



à savoir 14, on trouvera cinq fois 14 dans ces mêmes 70 ; cette dénomination fournira la valeur de la plus petite partie interceptée. Aussi, pour trouver la perpendiculaire : que l'on soustraie du produit de la petite hypothénuse par elle-même, la petite partie interceptée, multipliée par elle-même ; Ceci retranché, le côté de ce qui surabonde sera la perpendiculaire.

Traduction Jean GOUDOUR, Jean-Claude PENIN

[8] oxygone, mot d'origine grecque : acutangle, formé d'angles aigus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bubnov Nicolaus, *Gerberti Opera Mathematica*, Berlin 1899.

[2] Chasles, *Analyse et explication du traité de Gerbert*, Comptes rendus de l'Acad. des Sc., 1843, 1e semestre, T. XVI, N°6.

[3] Olleris A., *Oeuvres de Gerbert*, Clermont-Ferrand, 1867.

[4] Poulle E.,*L'astronomie de Gerbert* dans *Gerberto : scienza, storia e mito, Atti del Gerberti symposium, Bobbio, 25-27 juglio 1983* (Bobbio, Ed. degli Archivi Storici Bobiensi, 1985 ; Archivum Bobiense, Studia, II).

[5] P. Riché, *Gerbert d'Aurillac, le pape de l'an mil*, Paris, 1987

[5] Théon de smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, traduite par J. Dupuis, Paris, 1892.

[6] Vogel K., *l'Aritmetica e la Geometria di Gerberto* dans *Gerberto : scienza, storia e mito, Atti del Gerberti symposium, Bobbio, 25-27 juglio 1983* (Bobbio, Ed. degli Archivi Storici Bobiensi, 1985 ; Archivum Bobiense, Studia).