

ETONNANTES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Jean-Claude PENIN

Elles prirent leurs racines dans les tentatives de rectification de l'ellipse au 17^{ème} siècle, et furent plus tard développées par les travaux de 4 mathématiciens du début du 19^{ème} siècle : Abel, Gauss, Jacobi et Legendre. Nous nous proposons de donner un panorama historique de cette période jusqu'aux premiers développements de ces fonctions et de montrer qu'elles furent étudiées moins pour leurs applications pratiques que par la fascination que leurs propriétés exercèrent sur les mathématiciens, leur laissant ainsi espérer, grâce à elles, des développements prometteurs dans la plupart des domaines : Analyse (théorie des fonctions d'une variable complexe) ; Algèbre (théorie des équations algébriques, groupes, corps) et géométrie (courbes Elliptiques). Comme il était impossible, dans un exposé d'environ deux heures, de développer une histoire complète des fonctions elliptiques, nous avons choisi d'évoquer quelques faits, qui nous ont paru marquant, et d'arrêter notre exposé à l'époque où ces fonctions commencèrent à être étudiées au moyen de la théorie de Cauchy des variables complexes¹.

SOMMAIRE

La rectification des courbes.

Quelques célèbres irréductibles.

Les découvertes de Giulio Carlo, comte Fagnano

Les vœux d'Euler.

Recherches des intégrales elliptiques.

Classements et travaux d'Adrien Marie Legendre.

Transformations d'intégrales.

Relation de A. M. Legendre et échelle des modules.

Trigonométrie elliptique.

Recherches d'Abel sur la multiplication et la division des arguments des fonctions elliptiques.

Principe de double périodicité.

Recherches de Jacobi.

Fonctions H et Θ de Jacobi.

Pour Finir.

Bibliographie.

¹ Pour une histoire complète on pourra se référer à [4].

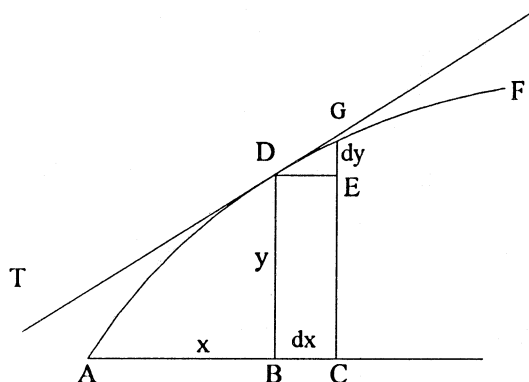
La rectification des courbes

[...] la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même je crois ne le pouvant être par les hommes.

Descartes, La Géométrie.[3, p. 39]

Les tentatives (17^{ème} siècle)

En possession des nouvelles méthodes du calcul infinitésimal, les mathématiciens tentent de rectifier les courbes, c'est à dire d'obtenir par le calcul la longueur d'un arc quelconque d'une courbe donnée.



Soit donnée ADF, une courbe, TDG sa tangente en D, on pose $AB = x$ et $BD = y = f(x)$, en supposant que CG soit une ordonnée infiniment voisine de BD et que DE soit parallèle à AB on a : $BC = DE = dx$ et $EG = dy$. La différentielle de l'aire A sous la courbe est donnée par $dA = DECB = ydx$, quant à la différentielle de l'arc $AD = L$ c'est le petit arc de courbe infiniment petit DG qui coïncide avec l'hypothénuse du petit rectangle DEG :

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En terme de dérivée :

$$L' = \frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Intégrer **L'** s'appelle **rectifier** la courbe ADF (rectifier vient du latin *rectificare* qui signifie « redresser »).

Grâce aux principes posés par Wallis dans son *Arithmétique des infinis*, William Neil, un de ses élèves, rectifie la parabole semi-cubique ($x^3 = ay^2$) et, en 1658, Wren rectifie la cycloïde et prouve ainsi la fausseté de la remarque de Descartes [9, p. 119]. Dans le même ordre d'idée, à la même époque, Van Huraet montre que la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole²

Flou théorique : Qu'appelle-t-on rectifier une courbe ?

En effet, rectifier une courbe, signifie-t-il l'exprimer à partir d'expressions reconnues implicitement comme élémentaires, ce qui à l'époque correspond aux expressions rationnelles, auxquelles on a adjoint les racines n^{ièmes}, ou bien, signifie-t-il l'exprimer à partir d'expressions admises comme non élémentaires, (on parlait de *transcendantes* à l'époque), ce qui revenait à les traduire en termes de quadrature ou même de rectification d'autres courbes (confère plus haut Van Huraet avec la rectification de la parabole). Ainsi, Jacques Bernoulli déclare que si on réduit le problème à la quadrature de l'hyperbole (donc à l'utilisation d'un logarithme), on peut considérer le problème comme résolu. Par contre, Huyghens souligne l'ambiguïté de certaines quadratures, que selon les cas on suppose connues ou non connues. Derrière ce « flou » se cache la question de savoir qui sont ces « bonnes fonctions outils » et le problème d'en marquer précisément la place.

Peu de courbes sont rectifiables !

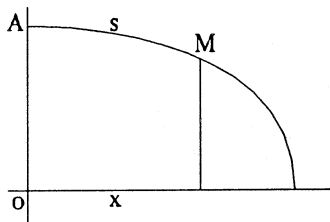
Or, même en admettant les fonctions circulaires et leurs inverses, ainsi que les fonction logarithme et exponentielle comme « bonnes à tout faire », la plupart des courbes ne se laissent pas rectifier et résistent aux efforts des mathématiciens, donnant ainsi, d'une certaine façon raison à Descartes.

² Déterminer la Quadrature d'une courbe, c'est calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire, en termes modernes, calculer entre deux bornes l'intégrale de la fonction, admettant cette courbe comme représentation graphique.

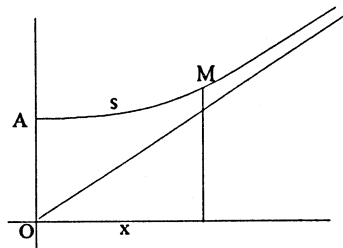
Fonctions elliptiques

Quelques célèbres irréductibles

Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$
 $e < 1$



Hyperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
 $e > 1$



La longueur de l'arc AM est donnée par s

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - t^2 e^2}{a^2 - t^2}} dt$$

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 + t^2 e^2}{a^2 - t^2}} dt$$

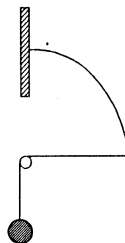
Résolutions des difficultés précédentes par les mathématiciens.

En fait, les mathématiciens du 17ème siècle ne s'attardèrent pas sur les intégrales réfractaires que les aléas de la recherche géométrique pouvaient leur fournir. Jacques Bernoulli face à l'équation différentielle de la courbe élastique avoua qu'il ne pouvait la traiter autrement que par la méthode des séries proposée par Leibniz, Mercator développa le logarithme en sa célèbre série et Newton, dans la *méthode des Fluxions*, ne procéda pas autrement.

La courbe élastique de Jacques Bernoulli

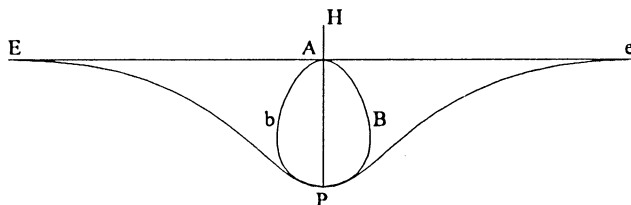
La courbe élastique est la courbe produite par un ressort plié. Elle conduisit son inventeur à l'équation différentielle :

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$



L'isochrone paracentrique de Leibniz

C'est la courbe le long de laquelle doit tomber un corps afin de s'éloigner d'un point donné proportionnellement au temps. Elle prend son origine en A, et coupant son axe en P, elle remonte vers l'horizontale, qu'elle touche en E.



Leibniz montra que l'équation de la courbe dépendait de l'intégrale :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$$

Jusque là, les mathématiciens n'avaient pas compris que toutes ces intégrales irréductibles, qu'ils qualifiaient de transcendantes, appartenaient en fait, à une même famille que l'on désignera plus tard comme étant celle des *intégrales elliptiques*.

Les Découvertes de Giulio Carlo, comte Fagnano

Fagnano étudia la rectification de diverses courbes, constata qu'il ne pouvait rectifier ni l'ellipse, ni l'hyperbole, cependant il remarqua que l'arc de lemniscate qu'il ne pouvait pas non plus rectifier s'écrivait comme somme d'un arc d'ellipse et d'un arc d'hyperbole plus une quantité algébrique. Comme quoi, cette dernière quantité transcendante pouvait s'exprimer à partir d'autres, qu'il fallait peut-être estimer plus simples ou plus fondamentales.[8, Tome 3, p.159]

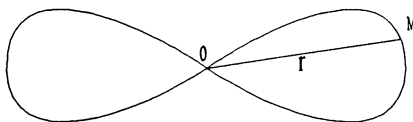
La Lemniscate

Son équation est

$(y^2 + x^2)^2 = x^2 - y^2$, ou en polaires $r^2 = \cos 2\theta$. La différentielle de l'arc étant :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

on a $ds = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$



Fonctions elliptiques

Ce qui, exprimé en fonction du rayon vecteur donne $ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$.

Fagnano travailla sur cette expression pour aboutir à la relation :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0 \quad \text{admet comme solution} \quad x^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Fagnano interprète cette équation, comme somme de deux intégrales transcendentes dont la somme est constante pourvu que x et y vérifient une relation algébrique.

En effet, si on laisse de côté la rigueur analytique moderne, on peut poser qu'une solution de l'équation différentielle ci-dessus est $y = F(x)$, cette équation peut donc s'intégrer directement, puisque c'est une équation séparée :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \pm \int_0^x \frac{dF(x)}{\sqrt{1-F(x)^4}} = 0 \quad \text{et par changement de variable}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

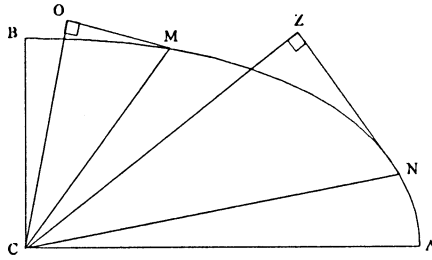
La partie gauche s'interprète comme une somme ou une différence d'arcs de lemniscate et la partie droite comme une constante.

Cette équation différentielle et celles qui suivent, sont à l'origine de la théorie des fonctions elliptiques. En effet, il apparut ici une problématique, à la fois géométrique et analytique, relativement bien circonscrite, qui va par son intérêt, pousser plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle à l'étudier : *Déterminer des relations simples entre des intégrales transcendentes, dont les bornes satisfont des relations algébrique*. Ainsi L. Euler donna une solution plus générale à la question précédente [2, Tome 2, p.569] :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = Cte \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 - 2xy\sqrt{1-c^4}$$

Une propriété de l'ellipse

Un autre résultat de Fagnano est relatif à l'ellipse.



$$\text{Arc BM} - \text{Arc AN} = \text{OM} = \text{NZ}$$

La différence de deux arcs transcendants est algébrique et peut même se construire avec la règle et le compas. Cette propriété traduit une solution de l'équation :

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}dx + \sqrt{\frac{1-e^2y^2}{1-y^2}}dy = e^2d(xy)$$

qui en termes d'intégrales s'écrit :

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-e^2t^2}{1-t^2}}dt + \int_0^y \sqrt{\frac{1-e^2t^2}{1-t^2}}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-e^2t^2}{1-t^2}}dt = e^2xy$$

et dont une solution est [4, p. 294] :

$$e^2x^2y^2 - (x^2 + y^2) + 1 = 0$$

Ce qui est remarquable dans ces recherches, et en a été le moteur à mon sens, c'est le désir d'exprimer algébriquement (au sens du livre premier de la Géométrie de Descartes) des relations simples (linéaires au sens moderne du mot) entre des quantités que l'on sentait inexprimables (transcendantes selon le terme de l'époque) algébriquement.

Fonctions elliptiques

Les voeux d'Euler

Euler va s'intéresser aux équations différentielles précédentes et en généraliser certaines. La trigonométrie classique nous donne les solutions de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ qui sont $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c$,

puisque l'on sait que $\text{Arcsin } x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

De même l'équation $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$ a pour solution $\frac{x+y}{1-xy} = c$,

puisque l'on sait que $\text{Arctan } x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

Euler, s'inspirant des travaux de Fagnano étudie le cas d'une équation différentielle avec polynôme bicarré :

L'équation $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$ avec $P(x) = A + Cx^2 + Ex^4$, qu'il écrit

sous forme intégrale : $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$

Guidé par l'analogie avec les fonctions de la trigonométrie, il montre qu'elle admet pour solution : $y = \frac{x\sqrt{P(c)} + c\sqrt{P(x)}}{A - Ec^2x^2}$

L'analogie de cette dernière relation avec les formules de la trigonométrie classique pousse Euler à émettre un vœu relativement à ces intégrales et fonctions :

« Il semble surtout que l'on devrait utiliser ici une notation appropriée par laquelle les arcs de natures elliptiques pourraient être représentés aussi convenablement dans les calculs que jusqu'à maintenant l'ont été les arcs logarithmiques et circulaires qui ont été introduits dans les calculs afin d'accroître considérablement l'analyse. »

Recherches des intégrales « elliptiques »

Les mathématiciens du 18^{ème} siècle, dans des recherches que l'on peut qualifier de relativement marginales, vont reconnaître un certain nombre d'intégrales « transcendentes » comme réductibles à des arcs d'ellipses ou d'hyperboles. Nous avons déjà cité Fagnano et Euler. Ainsi Mac Laurin dans la seconde partie de son traité des fluxions [8, Tome 3, p.159] réduit à des arcs d'ellipses et d'hyperboles un assez grand nombre d'intégrales :

Intégrales elliptico-hyperboliques selon Mac Laurin :

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{1\pm x^2}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1\pm x^2}}, \quad \frac{dx}{(1\pm x^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{dx}{(1\pm x^2)^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2cx\pm b^2}}$$

selon D'Alembert [Ouv. cité]

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

a, b, c positifs ou négatifs avec $b^2 - 4ac > 0$

Landen va montrer que que l'on peut écrire tout arc d'hyperbole comme somme de deux arcs d'ellipse. Il faudrait encore citer les travaux de Riccati, d'Euler et enfin de Lagrange qui introduit la forme générale des intégrales elliptiques et montre qu'on peut les réduire à :

$$\text{une somme d'expressions élémentaires} + \int \frac{N(x)dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}}$$

N(x) étant une fraction rationnelle

Toutes ces recherches sont secondaires, « beaucoup plus ingénieuses qu'utiles » comme le dira Montucla. Néanmoins, au cours du 18^{ème} siècle s'amorcent des tentatives de rationalisation³ et de classement de toutes ces intégrales que l'on ne sait pas⁴ exprimer à partir des fonctions élémentaires. Il y a, à cette époque, une grande quantité de résultats que Legendre va tenter, tant bien que mal, de classer et d'étudier.

³ Dans le sens d'établir la filiation effectivement « elliptiques » de ces intégrales en cherchant à les exprimer en termes de rectification d'arc d'ellipse, ou au pire, d'arc d'hyperboles.

⁴ Parce qu'on n'a pas encore trouvé le moyen de les intégrer, cf la phrase de Montucla ...

Fonctions elliptiques

Classement et travaux d'Adrien Marie Legendre

Legendre affirme avoir travaillé sur les arcs d'ellipse depuis 1786. Dans son *mémoire sur les transcendentes elliptiques* (1793) il dit :

Je me propose de comparer entre elles toutes les fonctions comprises sous cette dénomination, de les classer en différentes espèces, (que la nature des choses a introduite dans la théorie des fonctions elliptiques) de réduire chacune à la forme la plus simple dont elle est susceptible, de les évaluer par les approximations les plus promptes et les plus faciles ; enfin de former de l'ensemble de cette théorie une sorte d'algorithme qui put servir à étendre le domaine de l'analyse de façon que cette théorie puisse être appliquée avec presque autant de facilité que celle des fonctions circulaires et logarithmique, ce qui était l'objet des vœux et des espérances d'Euler.

Legendre part de l'intégrale générale :

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{a + bx + dx^2 + cx^3 + dx^4}}; \quad \text{avec } P(x) \text{ une fraction rationnelle.}$$

Il montre qu'elle se ramène à une partie algébrique plus une somme des trois espèces d'intégrales :

1^{ère} espèce $F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}};$

2^{ème} espèce $E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 t} \, dt;$ C'est l'arc de l'ellipse

3^{ème} espèce $\Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 + n \sin^2 t) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}}$

c est le module avec $0 < c < 1$, φ est l'amplitude

Il reconnaît que ce classement est un peu arbitraire car, si F et E peuvent se réduire à des arcs d'ellipse et donc ainsi mériter, selon une « tradition » dont nous avons donné quelques idées, le nom de fonctions elliptiques, il croit que ceci n'est pas en général vrai pour Π , mais il adopte tout de même cette dénomination pour cette dernière, à cause de la « grande analogie qu'on trouvera entre cette fonction et celle des arcs d'ellipse ».

Les recherches de Legendre vont porter d'abord [7, Tome 1, p. 19] sur l'intégrale de première espèce : $F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 t}}$; dans laquelle

il pose $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}$. Il montre que seules les fonctions de première espèce vérifient une équation remarquable, qu'il appelle **Transcendante** (puisque entre intégrales transcendantes), et dont les amplitudes sont reliées entre elles par des relations algébriques en cosinus et sinus de ces mêmes amplitudes :

$$\begin{aligned} F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu) \quad \text{si} \quad & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta(\mu) = \cos \mu \\ & \cos \mu \cos \varphi + \sin \mu \sin \varphi \Delta(\psi) = \cos \psi \\ & \cos \mu \cos \psi + \sin \mu \sin \psi \Delta(\varphi) = \cos \varphi \end{aligned}$$

Généralité de ces relations

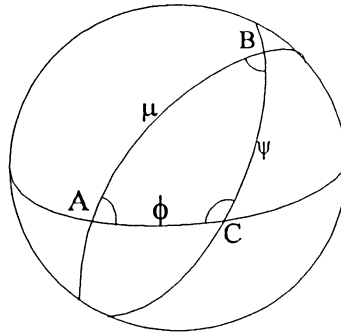
Si dans F on fait le changement de variable : $x = \sin t$ on obtient :

$$F(\varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

$$F(\varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2(1+c^2)+c^2 x^4}}$$

L'équation transcendante de Legendre est un autre aspect du théorème d'addition d'Euler avec le polynôme bicarré sous le radical.

Selon Lagrange ces égalités ne font que traduire des relations de la trigonométrie sphérique



En effet il suffit de poser

$$\cos A = \Delta(\psi)$$

$$\cos B = \Delta(\varphi)$$

$$\cos C = -\Delta(\mu)$$

pour obtenir :

$$\cos \mu \cos \varphi + \sin \mu \sin \varphi \cos A = \cos \psi$$

$$\cos \mu \cos \psi + \sin \mu \sin \psi \cos B = \cos \varphi$$

$$\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos C = \cos \mu$$

Fonctions elliptiques

Legendre insiste sur la « permanence » de ces relations. Ainsi dans le Tome 3 [7, p. 90] où, après les travaux d'Abel et de Jacobi, il utilise les fonctions elliptiques dans le domaine complexe, il remarque, en parlant des relations précédentes, *ce théorème fondamental d'où se déduit un grand nombre de propriétés des fonctions elliptiques*. En étudiant l'existence de ces relations dans la trigonométrie sphérique, il note [7, Tome 1, p. 21] : « Mais, nous le répétons, ces constructions ne peuvent s'étendre que jusqu'aux limites des triangles sphériques, tandis que l'analyse ne connaît aucune borne ».

Pour Legendre il ne fait aucun doute que ces relations manifestant leur véracité, bien que limitée, dans différents domaines des mathématiques, ne peuvent donc qu'être l'expression d'un théorème fondamental et universel : on peut donc sans crainte les étendre au domaine complexe.

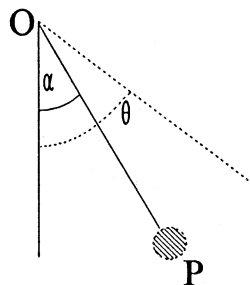
Présence des intégrales elliptiques en mathématiques et en physique

Dans le premier tome de son ouvrage sur les intégrales elliptiques [7, Tome 1, p.329 et suiv.], Legendre cite un certain nombre d'exemples mathématiques et physiques où apparaissent des intégrales elliptiques.

*Rectifications de quelques courbes usuelles.

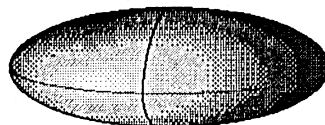
*Le temps du pendule simple :

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

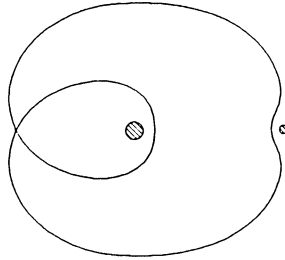


*L'aire du cône oblique

*L'aire de l'ellipsoïde



★Mouvement d'un corps sous l'attraction gravitationnelle de deux centres fixes matériels.

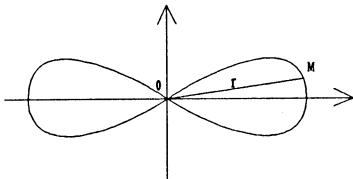


Mais tous ces exemples, issus de situations diverses, malgré leur élégance, présentent, il faut bien le reconnaître, des caractères artificiels et donnent l'impression d'avoir été créés pour la cause. En fait, les intégrales elliptiques n'apparaissent pas plus souvent que d'autres transcendentes. Inspiré par Euler, Legendre voyait dans ces nouvelles transcendentes, qui possèdent d'élégantes propriétés algébriques, (cf. *l'équation transcendante*) de nouveaux outils, analogues aux fonctions trigonométriques, logarithmes et exponentielles.

Transformations d'intégrales

Relation de Gauss (1777 - 1855) et Moyenne Arithmetico-Géométrique (AGM)

Dès la fin du 18^{ème}, Gauss s'intéresse aux fonctions elliptiques, recherches qu'il poussera assez loin mais qu'il ne publiera pas. A partir de l'arc de lemniscate il obtient par des changements de variables successifs, une suite d'intégrales semblables et dont les coefficients suivent une loi remarquable.



$$\frac{L}{4} = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

$$r = \sin \varphi$$

$$dr = d\varphi \cos \varphi$$

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi}}$$

Fonctions elliptiques

en posant $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ et avec $\sin \varphi = \frac{2b_n \sin \psi}{(a_n + b_n) \cos^2 \psi + 2a_n \sin^2 \psi}$

$$\frac{L}{4} = \dots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2 \psi + b_{n+1}^2 \sin^2 \psi}} = \dots$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \text{ qui a pour limite } \text{AGM}(1, \sqrt{2}) \cong 1,198140234$$

Cet algorithme est très performant car sa convergence est quadratique, et il

obtient en 1799 :
$$\frac{L}{4} = \frac{\pi}{2 \text{AGM}(1, \sqrt{2})}$$

Relation de A. M. Legendre et échelle des modules

Legendre poursuit des recherches analogues car il a pour objectif de construire des tables pour ses fonctions elliptiques, [7, Tome 2]. Il forme donc [7, Tome 1, p. 79] une infinité de fonctions elliptiques de première espèce qui diffèrent les unes des autres, tant par le module que par l'amplitude, mais qui ont la propriété fort remarquable d'être entre elles dans des rapports constants.

En posant $\begin{cases} \varphi_0 = \varphi \\ c_0 = c \end{cases}$ et avec $\sin(2u - t) = c_n \sin(t)$

il arrive à

$$\frac{1+c_n}{2} \int_0^{\varphi_n} \frac{dt}{\sqrt{1-c_n^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\varphi_{n+1}} \frac{du}{\sqrt{1-c_{n+1}^2 \sin^2 u}}$$

avec

$$c_{n+1} = \frac{2\sqrt{c_n}}{1+c_n} \quad \text{et} \quad \sin(2\varphi_{n+1} - \varphi_n) = c_n \sin(\varphi_n)$$

Il construit alors une échelle infinie de modules :

$$0 \leftarrow \dots c_{-6}, c_{-5}, c_{-4}, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \dots \rightarrow 1$$

et montre alors que si c n'est pas trop près de 1 :

$$\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 t}} \cong \frac{(1+c_{-1})}{2} \frac{(1+c_{-2})}{2} \frac{(1+c_{-3})}{2} \frac{(1+c_{-4})}{2} \varphi_{-4}$$

égalité qui lui permet de calculer relativement facilement ses intégrales. Il trouve au passage quelques relations remarquables telle cette formule d'approximation :

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c_{-\mu+1} \dots c_{-4} c_{-3} c_{-2} c_{-1} c c_1 c_2 c_3 c_4 \dots c_v}{c_{-\mu}}} \approx \ln \frac{4}{c_{-\mu}}$$

Pour Legendre ces équations « approchées permettaient d'obtenir des approximations à un degré quelconque, plus rapidement qu'on ne pourrait le faire par toute autre méthode ». [7, Tome1, p. 101].

La formule de E. Salamin (1976)

Les espoirs de Legendre ne furent pas vains. En 1976 E. Salamin donne la formule déduite de la théorie des intégrales elliptiques qui permettrait de calculer 10⁷ décimales⁵ de π .

$$\frac{\pi}{4} = \frac{AGM(1,c)AGM(1,b)}{1 - \sum_{j \geq 1} 2^j (c_j^2 + b_j^2)}$$

Dans laquelle : $c^2 + b^2 = 1$

c_n différence des carrés des deux termes de l'AGM(1,c)

b_n différence des carrés des deux termes de l'AGM(1,b)

⁵ Apparemment on a fait mieux depuis ! Ceci provient d'un compte rendu d'un Séminaire de philosophie et mathématiques qui eut lieu en 1979 à l'Ecole Normale Supérieure. Pour le calcul de E. Salamin, la référence est Math. et Comp. Vol. 30, 1976, p.565-570.

Fonctions elliptiques

Trigonométrie elliptique

Théorie d'Abel (Niels Henrich, 1802 - 1829) et de Jacobi (Charles Gustave, 1804 - 1851)

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 t}} ;$$

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu) \text{ si } \begin{cases} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta \mu = \cos \mu \\ \cos \mu \cos \varphi + \sin \mu \sin \varphi \Delta \mu = \cos \psi \\ \cos \mu \cos \psi + \sin \mu \sin \psi \Delta \varphi = \cos \varphi \end{cases}$$

Abel et Jacobi vers 1827 partent indépendamment de l'intégrale de 1^{ère} espèce de Legendre et l'inverse : l'amplitude φ devenant ainsi la fonction *amplitude* ($\varphi = am\ u$), $\sin \varphi$ devient $\sin am\ u = \sin$ d'amplitude u et ainsi de suite pour les deux autres :

$$u = F(\varphi) \quad \text{ou} \quad am\ u = \varphi$$

$$\sin \varphi = \sin am\ u \quad \cos \varphi = \cos am\ u \quad \Delta(\varphi) = \Delta am\ u = \sqrt{1-c^2 \sin^2 am\ u}$$

Ce sont ces dernières fonctions que Jacobi appelle *fonctions elliptiques*. Avec ces nouvelles notations l'équation transcendante de Legendre devient une simple somme d'arguments, quant à ses relations trigonométriques elles deviennent les élégantes formules d'additions de la *trigonométrie elliptique*.

$$\begin{aligned} v &= F(\psi) \quad \text{ou} \quad am\ v = \psi \\ u + v &= F(\mu) \quad \text{ou} \quad am\ (u + v) = \mu \end{aligned}$$

$$\sin am(u + v) = \frac{\sin am\ u \cos am\ v \Delta am\ v + \sin am\ v \cos am\ u \Delta am\ u}{1 - c^2 \sin^2 am\ u \sin^2 am\ v}$$

$$\cos am(u + v) = \frac{\cos am\ u \cos am\ v - \sin am\ u \sin am\ v \Delta am\ u \Delta am\ v}{1 - c^2 \sin^2 am\ u \sin^2 am\ v}$$

$$\Delta am(u + v) = \frac{\Delta am\ u \Delta am\ v - c^2 \sin am\ u \sin am\ v \cos am\ u \cos am\ v}{1 - c^2 \sin^2 am\ u \sin^2 am\ v}$$

Ce sont ces formules dont Hermite dira qu'elles remplissaient de joie son âme d'algébriste. Quelques remarques peuvent être faites à leur sujet, ainsi en faisant $c = 0$, on retrouve exactement les formules classiques de la trigonométrie circulaire, de plus, la formule d'addition pour $\sin am\ u$

traduit exactement le théorème d'addition d'Euler, enfin à chaque valeur du module c correspond un système de fonctions elliptiques.

Formules de dérivation

$$\begin{aligned}(\sin am\ u)' &= \cos am\ u\ \Delta am\ u \\(\cos am\ u)' &= -\sin am\ u\ \Delta am\ u \\(\Delta am\ u)' &= -c^2 \sin am\ u\ \cos am\ u\end{aligned}$$

Abel et la double périodicité.

Abel part de l'intégrale de Legendre, comme Jacobi, mais utilise le changement de variable : $s = \sin t$ ou $ds = \sqrt{1-s^2} dt$ il obtient alors :

$$[J] \quad \alpha = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-c^2s^2)}} \quad \text{ou} \quad x = \varphi\alpha$$

Pour la simplicité de l'exposé, je garderai les notations de Jacobi, Abel avait utilisé les notations $\varphi\alpha$, α et $F\alpha$ pour les fonctions $\sin am\ u$, $\cos am\ u$ et $\Delta am\ u$ ([1], Recherches sur les fonctions elliptiques p. 265). Abel étend au plan complexe les nouvelles fonctions elliptiques, il le fait par une méthode assez exemplaire (*ouv. cit. p.266 et suiv.*), de la façon suivante :

1) Il définit la constante ω et étudie la fonction $\sin am$ sur l'intervalle $[-\omega ; \omega]$ en la reconnaissant impaire et croissante.

2) Il définit la constante $i\omega'$ et remarque que $\sin am$ d'une quantité imaginaire est imaginaire sur l'intervalle $]-i\omega' ; i\omega' [$.

$$\omega = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-c^2s^2)}} \quad i\omega' = \int_1^{\frac{1}{c}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-c^2s^2)}}$$

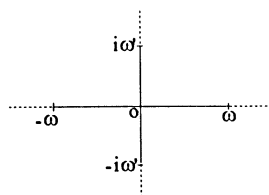
$$\text{donc} \quad \sin am\ \omega = 1 \quad \sin am\ (\omega + i\omega') = \frac{1}{c}$$

$$\text{Sur } [-i\omega', i\omega'] \quad ix = \sin am\ iu \quad u \text{ et } x \text{ réels}$$

3) Avec les formules d'addition qu'il justifie sur $\Re$, il étend aux deux axes la fonction $\sin am$ et remarque qu'elle est doublement périodique.

$$\begin{cases} \sin am(2\omega + u) = -\sin am\ u \\ \sin am(2i\omega' + u) = \sin am\ u \end{cases}$$

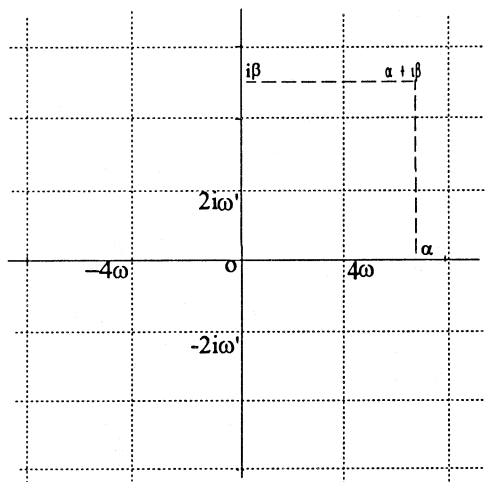
$$\begin{cases} \sin am \text{ est périodique, de période } 4\omega \\ \sin am \text{ est périodique, de période } 2i\omega' \end{cases}$$



Fonctions elliptiques

4) Enfin il étend la fonction $\sin am$ au plan complexe entier.

Pour $u = \alpha + i\beta$ $\sin am (\alpha + i\beta)$ est calculée à partir des valeurs des fonctions pour α et $i\beta$.



La double périodicité

La double périodicité est un fait remarquable dans le monde des fonctions⁶. Ainsi, chaque fonction doublement périodique, détermine sur le plan, un réseau à travers lequel la fonction se reproduit identiquement, à partir d'une cellule élémentaire appelée *parallélogramme de période*. Les trois fonctions elliptiques $\sin am$, $\cos am$ et Δam sont doublement périodiques, mais n'ont pas le même *parallélogramme de période*.

Recherches d'Abel sur la multiplication et la division des arguments des fonctions elliptiques

Multiplication des arguments

Dans son mémoire sur les fonctions elliptiques([1], Recherches sur les ... p.279), Abel cherche à exprimer $\sin am nu$, $\cos am nu$ et $\Delta am nu$ (n étant un entier) en fonction de $\sin am u$, $\cos am u$ et $\Delta am u$, chose que l'on avait cherché depuis longtemps avec les fonctions circulaires.

⁶ Gauss l'avait déjà remarqué auparavant [4, p. 296].

Formules de duplication

$$\begin{cases} \sin am\ 2u = \frac{2 \sin am\ u \cos am\ u \Delta am\ u}{1 - c^2 \sin^4 am\ u} \\ \cos am\ 2u = \frac{\cos^2 am\ u - \sin^2 am\ u \Delta^2 am\ u}{1 - c^2 \sin^4 am\ u} \\ \Delta am\ 2u = \frac{\Delta^2 am\ u - c^2 \sin^2 am\ u \cos^2 am\ u}{1 - c^2 \sin^4 am\ u} \end{cases}$$

Multiplication par 3

$$\sin am\ 3u = \frac{3 \sin am\ u - 4(1 + c^2) \sin^2 am\ u + 6c^2 \sin^5 am\ u - c^4 \sin^9 am\ u}{1 - 6c^2 \sin^4 am\ u + 4c^2(1 + c^2) \sin^6 am\ u - 3c^4 \sin^8 am\ u}$$

On constate qu'à partir de $n = 3$ les formules deviennent très compliquées, aussi, Abel recherche-t-il des formules de récurrence telles que :

$$\sin am\ (n+1)u + \sin am\ (n-1)u = \frac{2 \sin am\ (nu) \cos am\ u \Delta am\ u}{1 - c^2 \sin^2 am\ (nu) \sin^2 am\ u}$$

Il montre alors que $\sin am\ nu$ s'exprime de façon générale comme :

$$\begin{aligned} \sin am\ (2n\ u) &= \sin am\ u \cos am\ u \Delta am\ u F(\sin^2 am\ u). \\ \sin am\ (2n+1)u &= F(\sin am\ u). \end{aligned}$$

F étant une fraction rationnelle.

Division des arguments

En fait, c'est le problème inverse qui intéresse Abel, savoir, entre autre la résolution de l'équation.

$$\sin am\ nxu = \sin am\ \alpha, \text{ } n \text{ et } \alpha \text{ étant donnés.}$$

Il trouve deux façons pour résoudre cette équation.

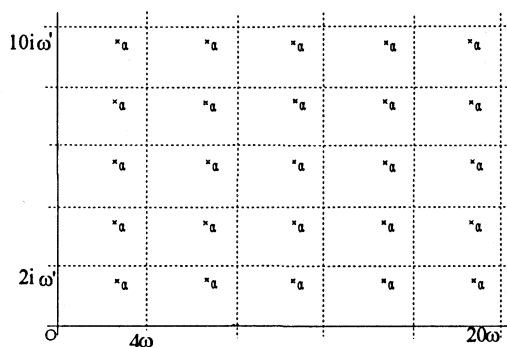
* Par la double périodicité :

$$\text{Il montre que les seules solutions sont les } u = \frac{\alpha}{n} + \frac{4p\omega + 2q\omega'}{n}, \text{ ou}$$

p et q sont entiers, $\sin am\ u$ présentant alors des valeurs distinctes pour $0 \leq p < n$ et $0 \leq q < n$. L'équation admet donc n^2 valeurs différentes.

Par exemple, avec $n = 5$, chacune des valeurs α , représentées ci-après, à 4ω et $2\omega'$ près, fournira, après division par 5, un argument donnant une solution de l'équation précédente.

Fonctions elliptiques



* Par la résolution des équations algébriques issues de la multiplication des arguments.

Puisque $\sin am \ n \times u = \sin am \ \alpha$ donne en général une équation de degré n^2 , il montre que cette résolution est possible par radicaux pourvu que cette même équation ait été résolue pour les valeurs :

$$\alpha = 4\omega \text{ et } \alpha = 2i\omega'$$

et en donne même la formule générale:

$$\sin am u = \frac{1}{n} \left(\varphi_1 + \sqrt[n]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^n}} + \sqrt[n]{C_2 + \sqrt{C_2^2 - D_2^n}} + \dots + \sqrt[n]{C_n + \sqrt{C_n^2 - D_n^n}} \right)$$

Les quantités φ_1 , C_i , et D_i dépendants des $\sin am$, $\cos am$ et Δam de $\frac{2i\omega'}{n}$ et $\frac{4\omega}{n}$.

Toutes ces recherches sont dans l'esprit du temps. En effet, depuis la fin du 18^{ème} siècle, de multiples études concernant la résolution des équations algébriques se multiplient. Abel lui-même n'a-t-il pas montré que l'équation générale du 5^{ème} degré ne peut être résolue par radicaux. Il remarque d'ailleurs, à ce sujet, que les équations elliptiques donnent une classe très générale d'équations résolubles par radicaux.

Structure algébrique naturelle des périodes des fonctions elliptiques.

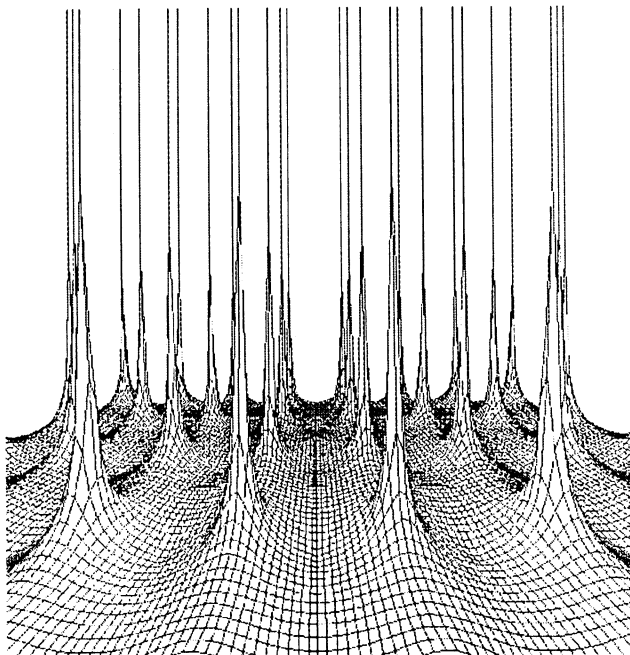
Il apparut ici naturellement, avec la double périodicité une structure algébrique particulière du plan complexe $\{4\omega p + 2i\omega' q, p \text{ et } q \text{ entiers}\}$ dont la stabilité pour l'addition et la multiplication par les entiers ne put passer inaperçue ainsi que sa propriété d'être engendrée par les deux nombres 4ω et $2i\omega'$. On pense que c'est en manipulant de telles expressions que Gauss,

dont des recherches analogues lui auraient fait connaître la double périodicité, serait arrivé à l'idée de *ses entiers*.

Principe de double périodicité

Jacobi dans ses *Fundamenta Nova*, convaincu que la double périodicité est une propriété merveilleuse, s'écrie :

Les fonctions elliptiques jouissent d'une double période, l'une réelle, l'autre imaginaire si le module c est réel. Les deux sont imaginaires dès que le module lui aussi est imaginaire. Nous appellerons ceci PRINCIPE DE LA DOUBLE PERIODICITE. A partir de quoi, comme il embrasse dans toute son étendue la période analytique que l'on peut imaginer, il est manifeste que les fonctions elliptiques ne doivent pas être mises au nombre des autres transcendentes, qui jouissent de propriétés particulièrement élégantes, peut-être plus nombreuses ou plus fortes que celles-là, mais qu'une certaine espèce de perfection et d'absolu se trouvent en elles.



Représentation graphique de $z = |\sin \operatorname{am}(x+iy)|$

Recherches de jacobi : Développement en produits infinis

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}} = m \frac{dy}{\sqrt{\alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \epsilon}}$$

$$y = F(x)$$

L'obsession

Un certain nombre de mathématiciens du 18ème siècle s'étaient appliqués à résoudre ce genre d'équation : Fagnano, Euler, Landen, Gauss, Legendre. Ils en déduisirent des solutions algébriques ou des méthodes d'approximations. Un peu plus tard Abel en fit le sujet de plusieurs de ses mémoires. Quant à Jacobi, il va en faire le *fondement de la transformation des transcendentes elliptiques*. Pour résoudre cette équation et en chercher les solutions rationnelles, Jacobi va utiliser ses fonctions elliptiques $\sin am u$, $\cos am u$ et $\Delta am u$. Il en déduira une méthode pour développer ses fonctions elliptiques en produits infinis[5, p. 141]

Développement en produits infinis

Abel était aussi parvenu à ces produits infinis. Cette idée, fut peut être suggéré par les développements connus en produits infinis des fonctions trigonométriques, ainsi pour le sinus :

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \dots$$

En posant : $q = e^{-\frac{\pi \omega'}{\omega}}$ il vient :

$$\sin am \frac{2\omega x}{\pi} = \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{c}} \sin x \frac{(1-2q^2 \cos 2x + q^4)(1-2q^4 \cos 2x + q^8)(1-2q^6 \cos 2x + q^{12}) \dots}{(1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}$$

$$\cos am \frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{\frac{c'}{c}} 2\sqrt{q} \cos x \frac{(1+2q^2 \cos 2x + q^4)(1+2q^4 \cos 2x + q^8)(1+2q^6 \cos 2x + q^{12}) \dots}{(1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}$$

$$c' = \sqrt{1 - c^2}$$

$$\Delta am \frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{c'} \frac{(1+2q \cos 2x + q^2)(1+2q^3 \cos 2x + q^6)(1+2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}{(1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}$$

Quelques remarques peuvent être faites sur ces égalités remarquables à plus d'un titre. D'abord, les deux périodes n'apparaissent guère qu'à travers q^7 , encore n'est-ce que par leur rapport et de plus ce nombre q , n'est pas un complexe mais un réel positif <1 . En conséquence, leur convergence est très rapide (convergence, au sens très pratique, du calcul de $\sin am$ u qui peut ainsi, être facilement calculé avec une bonne précision en quelques termes). Si dans la dernière, on fait $x = 0$, on en tire $\sqrt{c'}$ comme produit infini fonction de $\frac{\omega}{\omega'}$; elle permet donc d'exprimer le *module* c à partir du *rapport* des périodes, elle sera appelée plus tard *fonction modulaire*.

Résolution de l'équation du 5ème degré par Hermite

Depuis Abel on sait qu'on ne peut pas, en général, résoudre algébriquement, l'équation du 5ème degré, néanmoins Hermite tente d'utiliser les fonctions elliptiques pour étudier ses racines. Hermite prend comme modèle [6, p. 508] le fait que l'équation du 3ème degré $x^3 - 3x + 2a = 0$ peut être résolue par la trigonométrie classique, il suffit pour cela de considérer l'égalité $\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$ et moyennant un coefficient convenable, d'identifier les deux égalités. Les solutions de la première équation s'exprime alors facilement à partir des solutions de la seconde. Bien sûr, ceci ne va pas à l'encontre de l'interdiction prononcée plus haut mais permet à Hermite de :

savoir effectivement arriver à quelque notion sur la nature propre de ses racines de manière à saisir ce qu'il y a de propre et d'essentiel dans le mode d'existence de ces quantités, dont on ne sait jusqu'ici rien d'autre chose, si ce n'est qu'elles ne s'expriment point par radicaux.

Hermite, en introduisant un élément « analytique » veut pénétrer la nature intime des racines de l'équation du 5ème degré. Pour cela il va utiliser les développements Jacobiens des fonctions elliptiques :

Ainsi de la dernière, après avoir fait $x = 0$, il tire :

$$\sqrt{c'} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^9)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)(1+q^9)\dots} \right]^2$$

⁷ Si on met de côté le coefficient multiplicateur qui dépend de c et donc de ces périodes.

Fonctions elliptiques

Avec la seconde et la dernière il obtient :

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2} \sqrt[4]{q} \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)(1+q^{10})\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)(1+q^9)\dots}$$

qui sont les deux fonctions modulaires avec lesquelles Hermite résolut l'équation du 5^{ème} degré.

Fonctions H et Θ de Jacobi

Jacobi, après avoir développé ses fonctions elliptiques en produit infini remarqua qu'elles étaient à chaque fois le quotient de deux fonctions assez semblables. Jacobi va isoler ces fonctions, les étudier indépendamment et va leur découvrir de remarquables propriétés.

Fonctions H et Θ de Jacobi

$$\Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right) = (1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10})\dots$$

$$H\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q} \sin x (1-2q^2 \cos 2x + q^4)(1-2q^4 \cos 2x + q^8)(1-2q^6 \cos 2x + q^{12})$$

Propriété fondamentale des fonctions H et Θ

$$\begin{cases} \Theta(x+2\omega) = \Theta(x) \\ \Theta(x+2i\omega') = -e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-xi)} \Theta(x) \end{cases} \quad \begin{cases} H(x+2\omega) = H(x) \\ H(x+2i\omega') = -e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-xi)} H(x) \end{cases}$$

Développement en série des fonctions H et Θ

Grâce au propriétés précédentes il développe en séries infinies les fonctions précédentes.

$$\begin{cases} \Theta(x) = 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{\omega} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{\omega} - 2q^9 \cos \frac{3\pi x}{\omega} + 2q^{16} \cos \frac{4\pi x}{\omega} - 2q^{25} \cos \frac{5\pi x}{\omega} + \dots \\ H(x) = 2\left(q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi x}{2\omega} - q^{\frac{9}{4}} \sin \frac{3\pi x}{2\omega} + q^{\frac{25}{4}} \sin \frac{5\pi x}{2\omega} - q^{\frac{49}{4}} \sin \frac{7\pi x}{2\omega} + q^{\frac{81}{4}} \sin \frac{9\pi x}{2\omega} - \dots\right) \end{cases}$$

Ce sont des séries à deux variables, sur la rapidité de convergence desquelles, du fait du facteur q^{n^2} , les mathématiciens reviennent avec

insistance. Quant à la puissance n^2 on y vit une espèce de *principe gouvernant les fonctions elliptiques*. C'est en étudiant ces séries, fonctions de l'amplitude x et du rapport des périodes $\frac{\omega}{\omega'}$, mais dont la convergence ne dépend pas de l'amplitude, que Guderman en 1838 en tira l'idée de la convergence uniforme. [4, p. 254]

Un théorème d'arithmétique

Jacobi obtint de nombreuses identités à partir de ses fonctions et en déduisit des résultats curieux, ainsi par exemple, à partir des trois égalités ci-dessous il obtint de remarquables propriétés arithmétiques.

$$\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + 2q^{36} + \dots$$

$$[\Theta(\omega)]^4 = 1 + 8 \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \frac{5q^5}{1-q^5} + \frac{6q^6}{1+q^6} + \dots \right\}$$

$$= 1 + 8 \sum_{p=1, p \text{ impair}}^{\infty} \varphi(p) \{ q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + \dots \}$$

$\varphi(p)$ somme des facteurs de p .

La comparaison des termes donne le nombre de décomposition d'un entier n en somme de 4 carrés.

Pour Finir

Un dernier résultat de Jacobi

Avec ses fonctions Θ , issues de l'intégrale de 1ère espèce, qu'il utilise comme fonction-outils (il présentera d'ailleurs une théorie des fonctions elliptiques à partir de ces fonctions), il intègre l'intégrale de 2ème espèce et celle de 3ème espèce, donnant ainsi raison à Legendre, qui avait pressenti que cette dernière intégrale appartenait à la même famille que celles des deux premières espèces.

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}} ; \text{ « engendra » } \Theta$$

Fonctions elliptiques

2^{ème} espèce

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 t} \, dt = F(\varphi) \left[1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \right] + \frac{\Theta'(F(\varphi))}{\Theta(F(\varphi))}$$

3^{ème} espèce

$$\Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 + n \sin^2 t) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}} = F(\varphi) \left[1 + \frac{1}{M} \frac{\Theta''(m)}{\Theta(m)} \right] + \frac{1}{M} \ln \frac{\Theta(F(\varphi) - m)}{\Theta(F(\varphi) + m)}$$

M et m constantes dépendant de n.

Après

En 1844 Liouville donne un cours au Collège de France sur les « fonctions doublement périodiques » construit à partir de la théorie de Cauchy des variables complexes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abel N. H. *Oeuvres Complètes*, éd. L. Sylow. Chritiana, 1881
- [2] Bertrand Joseph. *Calcul différentiel et intégral*, 1860.
- [3] Descartes R., *La Géométrie*, Nouvelle édition dans la Géométrie d'Auguste Comte, Paris, 1894.
- [4] Dicudonné J., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700 - 1900*, Hermann, 1986. p. 293 - 314.
- [5] Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, éd. C. Borchardt et Weierstrass. Berlin 1881 - 91, 8 vol.
- [6] Hermite Ch., *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré*, C. R. Acad. Sci. Paris 46 (1858). p.508 - 515.
- [7] Legendre A. M., *Traité des fonctions elliptiques* (3 Tomes.), Paris, 1825
- [8] Montucla J. F., *Histoire des mathématiques*, (4 vol.), réédition A. Blanchard, Paris 1960.
- [9] IREM, *Histoire de problèmes*, Histoire des Mathématiques, Ellipses, Paris, 1993.