CE QU'IL Y A D'ALGEBRE EN ANALYSE, AVEC LES LOGARITHMES COMME OBJET D'HISTOIRE

Jean DHOMBRES
Centre François Viète
Université de Nantes

Les logarithmes gouvernaient un des instruments autrefois majeurs de l'ingénieur, la règle à calcul. Si l'instrument a disparu, les logarithmes demeurent un des incontournables de l'enseignement et ce jusque dans les classes littéraires ; d'ailleurs, les économistes l'ont adopté comme concept qu'ils dénomment *élasticité*. Ce maintien dans l'ordre pédagogique peut provenir du "réalisme" des logarithmes, c'est-à-dire leur inscription dans le pouvoir cognitif de l'homme : il y a en effet relation logarithmique entre la cause physique d'une sensation et la perception humaine de celle-ci (loi de Fechner dont la conscience est bien plus ancienne que la formulation). J'avoue aimer cette hypothèse à la façon dont j'apprécie le pétillant d'une coupe de champagne ; ce ne pourrait être, même à Reims, ma seule excuse pour parler des logarithmes.

Parce qu'il existe une culture, très ancienne et riche de pratiques, du nombre, de la mesure, et des comparaisons chiffrées, et parce que le logarithme en a profondément modifié le régime, l'envisager dans l'histoire fournit aussi celle de l'approximation et de l'à-peu-près. Mon récit pourrait alors illustrer le processus ayant fait de l'approximation un outil théorique. En installant à la manière des dictionnaires les tables logarithmiques à double entrée, la mathématique pouvait apparaître au XVII^{e} comme une langue, la langue algébrique de la précision maîtrisée. L'approximation était la nouvelle figure de l'exactitude, et la mathématique capable de gérer l'approximation devenait ainsi la figure essentielle de la modernité. Elle reléguait alors la géométrie comme une mathématique des Anciens.

Sans être fausse, cette façon de raconter l'histoire en cheminant d'une technique à une théorie oublie cavalièrement la dynamique propre des concepts forgés par un mathématicien, et présente trop comme un déterminisme le mouvement de remodelage du paysage mathématique sous l'effet d'une invention. Si l'on veut en faire l'histoire, il est impossible d'isoler une notion mathématique — en l'occurrence le logarithme — tant la science d'Euclide s'offre comme une architecture et non comme un musée, tant la manipulation des nombres pétrit les mentalités d'une civilisation.

La découverte du logarithme a ouvert le XVII^e siècle, mais largement précédé l'invention du Calcul — le calcul différentiel et le calcul intégral — qui fait la gloire des Modernes à la fin du même siècle et sonne la mort de la géométrie, d'une certaine géométrie en tout cas. Si elle peut surprendre aujourd'hui puisque le logarithme s'introduit dans les classes comme une primitive, cette chronologie motive mon intervention dans le cadre des journées intelligemment consacrées au thème *Analyse et démarche analytique*. Car s'il y a calcul grâce aux logarithmes, il y a aussi un calcul des logarithmes et de ce fait une véritable algèbre autour du développement en série, bien avant le Calcul, puis en parallèle au Calcul mais encore bien avant la constitution de l'Analyse comme branche individualisée des mathématiques. En suivant l'entrée du logarithme dans cette discipline, je poursuis donc ce que l'Analyse a incorporé d'algèbre ; je mesure l'intégration intellectuelle qui a correspondu au logarithme finalement conçu comme une intégrale. N'est-ce pas ce mouvement qui fut précisément appelé le mouvement analytique ?

Grâce au parcours que je propose avec les logarithmes pour compagnons, j'entends en vrai moins livrer une histoire que réfléchir sur la fabrication de l'histoire des mathématiques. Et par conséquent envisager son intérêt pour l'enseignant que tout mathématicien est ou a été. Je n'oublie pas la vocation des IREM qui sont à l'origine de ces journées de Reims, mais je ne propose pas un modèle de cours.

Un dernier mot encore, et mon plan sera entièrement dévoilé. Celui qui regarde en arrière ne peut presque jamais séparer la mathématique de son enseignement, sans doute parce que les non mathématiciens n'ont de contacts intellectuels qu'avec les mathématiques de l'école. Aussi, à plusieurs reprises j'envisagerai le passage du logarithme dans la pratique éducative, et terminerai même par une brève histoire du logarithme dans les cursus français aux XIX^e et XX^e siècles. L'histoire de l'enseignement, celle de la structuration des contenus, celle des sélections du savoir, celle encore des associations intellectuelles créées par l'école, n'a pas encore beaucoup de praticiens. Mon trop rapide survol suscitera peut-être des études plus soignées.

LES NOTATIONS LOGARITHMIQUES

Assurément les logarithmes ont une histoire ; ils ne font pas partie du bagage mathématique euclidien. Sans commettre d'erreur, on ne dit toutefois pas grand chose en résumant l'affaire à la découverte d'un baron Écossais au début du XVII^e^ siècle, puis l'apprentissage des tables pour lequel Kepler joua un rôle, avant une paisible et définitive adoption dans le canon de l'analyse mathématique sous le nom de fonction logarithme règlant l'approximation des calculs, au théorique comme au pratique.

L'histoire des notations relatives aux logarithmes a pourtant une simplicité qui fait la preuve de leur rapide adoption ; elle pourrait faire croire à une conceptualisation tout aussi simple. Il n'y a aucune trace de symbolisme chez John Napier —l'inventeur reconnu— ni dans sa description éprouvée dans le *Mirifici logarithmorum canonis descriptio (ejusque usus, in utraque Trigonometria ; ut etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, Facillimi, et expeditißimi explicatio*), ouvrage publié à Edinburgh en 1614 et mis en anglais par Ed. Wright deux ans plus tard à Londres, pas plus que dans son explication, le *Mirifici logarithmorum canonis constructio (et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines ...)*, sorti posthume cinq ans plus tard à Edinburgh en 1619 grâce aux soins de son fils. C'est Johannes Kepler qui, en 1624, utilise la contraction "*Log*" dans son *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* de Marburg, la suite du titre manifestant une intention théorique, *praemissa DEMONSTRATIONE LEGITIMA Ortus logarithmorum eorumque usus quibus NOVA TRADITUR ARITHMETICA...*[1]. Henry Briggs utilise ausi bien cette contraction dans son *Logarithmicall Arithmetike* de 1631 (Londres), où il expose les logarithmes décimaux. Plus de quinze ans plus tard, il est suivi par William Oughtred écrivant le *Key of the Mathematics* (Londres, 1647). Diffuseur de logarithmes, un professeur qui n'avait aucune prétention à ajouter quoique ce soit, Benjamin Ursin préfère utiliser "L" dans son *Magnus canon logarithmicus* paru à Cologne

[1] Il donne l'année suivante et chez le même imprimeur *Supplementum Chiliadis logarithmorum* ... Marpurgi, typis C. Chemlini, 1625. Ces textes sont reproduits dans J. Kepler, *Gesammelte Werke*, Bd 9, Beck'sche Verlag, München, pp. 275-352, et pp. 353-426.

en 1624[2] ; la variante "log" figure dans le *Directorium generale Uranometricum*[3] de Bonaventura Cavalieri en 1632 à Bologne, voire la forme "l" onze ans plus tard dans sa *Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica.*

On peut arrêter là l'enquête érudite. Du moins si l'on ne cherche pas l'essentiel qui est la manifestation, par une notation, du lien avec la variable, c'est-à-dire la manifestation fonctionnelle qui ne se réduit pas à la lecture d'une table numérique[4] : on lira dans les textes Log.x, car c'est par un point que l'on va d'abord noter (f.x) ou fx, voire fx et finalement mais tard f(x). Tous ces symboles sans autres ajouts se retrouvent un peu indifféremment chez les mathématiciens du XVIII^e^ siècle ; Cauchy dans son *Cours d'Analyse* de 1821 différencie le "l" pour cibler le logarithme de base naturelle, désigne alors par "L" tous les autres logarithmes. Mais il introduit aussi la fonction multivoque par l((.)). A la même époque, responsable d'un des tout premiers journaux de mathématiques A.L. Crelle qui est le pendant allemand de l'éditeur nîmois puis montpelliérain J.D. Gergonne, fixe "${}_a$log" ou "log$_a$" pour le logarithme de base a.

Bref, si l'histoire rapidement constituée des symboles contraste avec celle, tourmentée comme nous allons le voir, du concept, la première donne corps à la présomption d'existence d'un objet, le logarithme. Au fil des années, s'agit-il bien du même objet, peut-être soumis à des appréhensions variables ? C'est parce qu'il ne se pose pas une telle question que, trop souvent, le récit de l'historien est une fable, moralité incluse.

---

2 *Benjaminis Ursini ... Magnus canon triangularum logarithmicus, exvoto et consilio* ... Neperi, Coloniae, M. Gutti, 1624.

3 ... in quo trigonometriae logarithmeticae fundamenta ac regulae demonstrantur ..., Bononiae, typis J. Montii, 1647.

4 Il serait intéressant de manifester l'apparition de l'écriture Log pour la seule fonction, sans mention de la variable.

La découverte de Napier[5] dégage le sens d'un passage, celui d'une progression géométrique à une progression arithmétique, la transformation du triplet $(x, \sqrt{xy}, y)$ où l'on peut supposer $0 < x < y$, à l'autre triplet $\left\langle a, \frac{a+b}{2}, b \right\rangle$ avec éventuellement la même hypothèse de croissance $a < b$. Et si l'on fait sans ambages se correspondre les termes extrêmes, x provenant de a et y de b, il ne reste plus à voir que le passage $\sqrt{xy}$ à $\frac{a+b}{2}$. L'on retient donc la correspondance entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, deux opérations certes traditionnelles et ainsi réduites l'une à l'autre, rendues équivalentes[6]. Ce que nous résumons aujourd'hui par une seule formule où le symbole ln désigne (provisoirement) le logarithme sans autre spécification de base.

$$\ln \sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2} \tag{1}$$

Cette formule a effectivement servi à établir des tables de logarithmes, chez Henry Briggs notamment, et il est d'autant plus facile d'en imaginer la construction qu'elle fut ainsi longtemps expliquée dans l'enseignement[7].

---

[5] Je n'ai pas l'intention de donner ici une histoire du logarithme, ni d'ailleurs une biographie de Napier. Je ne cède pas plus à la tentation des notes multipliées. On trouvera l'essentiel sur Napier et sa création dans C.G. Knott, *Napier Tercentenary Volume*, London, Longmans, 1915 ; E.W. Hobson, *John Napier and the Invention of Logarithms*, Cambridge University Press, 1914. Les textes majeurs sur les logarithmes ont été réunis au début du XIXe siècle par Francis Maseres, *Scriptores Logarithmici*, London, 1804. C. Naux a réalisé un long récit en français qui isole les logarithmes en les faisant apparaître quelque peu comme miraculeux, *Histoire des logarithmes*, Blanchard, Paris, 1966.

[6] Une étude soigneuse des moyennes a récemment été faite par M. Spiesser, "Les médiétés dans la pensée grecque", *Sciences et Techniques en Perspective*, 23, 1993, pp. 1-71.

[7] La densité des nombres dyadiques de l'intervalle [a,b] fait comprendre celle des moyennes géométriques successives de l'intervalle [x,y]. La table de H. Briggs de 1624 — *Arithmetica logarithmica* — fut connue dans l'édition de Vlacq à Gouda, en 1628. La version française, *Arithmétique logarithmétique, ou la construction et usage d'une table contenant les logarithmes de tous les nombres de 1 jusqu'à*

A voir ainsi la genèse du logarithme, on en oublie le système numérique sur lequel porte le logarithme, réduit par notre présentation à un triplet. Ce qui revient à postuler l'évidence, vers 1600, du système des nombres réels. C'est un contre-sens historique, et il ne permet plus de lire ce qu'il y a d'invention dans la table des logarithmes. Nous allons bien sûr y venir.

Parce que les deux moyennes portent chacune respectivement sur une opération, l'on est certes conduit à inscrire l'histoire des logarithmes dans la quête d'un procédé par lequel la multiplication serait remplacée par l'addition, et dès lors le quotient par la soustraction. A cette quête, une profondeur historique peut être donnée, et en fait foi la mention d'un tableau que Michael Stifel offrait à ses lecteurs dans son *Arithmetica Integra* de Nürnberg en 1544. Les deux suites, géométrique et arithmétique, sont superposées et *ipso facto* mises en correspondance.

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32\ldots \\ \ldots -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \end{array}$$

Nous lisons aujourd'hui ce tableau comme un jeu d'exposants, un symbolisme ne requérant pas d'explication autre que celle d'une pratique de calcul. Parce qu'une opération est en jeu, on peut aussi rappeler la sentence que Nicolas Chuquet fournissait dans un manuscrit *Le Triparty en la science des nombres* de 1484 :

> *qui multiplie lung d'iceux par lung des autres, et qui déouste les deux ordres esquelz sont situés les deux nombres multipliez, il trouve le lieu ou doit estre situé le nombre venu de la multiplicacion.*

De sources en influences, par rétroactions successives une histoire des logarithmes risquerait de remonter à Euclide, et à son traitement des progressions géométriques. Historien des mathématiques dont le métier est de bien scander les étapes, à la fin du XVIII[e] siècle Étienne Montucla entendait assurer que ce rebroussement dans le temps n'avait qu'une signification relative. Ainsi, disait-il, la remarque de Stifel à propos de son tableau resta "stérile entre ses mains". Pour qu'il ait montré la voie du logarithme,

> *il auroit fallu pour cela qu'il eût tenté de remplir les lacunes qui se trouvent dans la progression supérieure, afin d'avoir tous les nombres*

100 000, et d'une autre table en laquelle sont compris les logarithmes des sinus, tangentes, et sécantes, paraît la même année (Goude, 1628).

naturels, et de trouver en même temps les nombres qui leur auroient répondu dans la progression inférieure[8].

L'historien manifestait que le logarithme n'est pas seulement un symbolisme, ni une correspondance entre moyennes ou une équivalence entre opérations ; il atteint un système numérique suffisamment riche, l'ensemble des nombres entiers naturels, ou du moins quelque système s'approchant de l'uniformité d'espacement des entiers. La remarque historienne est de bon sens, elle est mathématique aussi bien. Dès le départ pour les logarithmes, intervient l'idée d'une approximation d'un système numérique.

On peut certes voir dans la propriété d'Euclide par laquelle s'exprime le tableau de Stifel la force prévisible de la fonction logarithme, en résumant cette propriété par la formule multiplicative

$$a^{n+m} = a^n.a^m. \tag{2}$$

Cette formule prête corps à l'interprétation comme fonction exponentielle, qu'il suffirait d'inverser pour voir le logarithme. Si la formule — non écrite mais prononçable dans la langue mathématique grecque — ne pouvait pas être lue comme logarithme, c'est bien que les symboles n et m désignaient seulement des entiers, et donc les nombres a^n constituaient un système numérique trop particulier. Il ne couvrait pas, et de très loin, un système comparable à celui des entiers naturels. Il ne s'agit pas de penser ce recouvrement en termes cantoriens de cardinalité : il s'agit du fait que l'écart entre les nombres a^n n'est pas uniforme.

Etait-il alors possible de concevoir une voie allant des entiers à tous les nombres, à ceux qu'après Descartes écrivant en 1637 nous qualifions de réels (positifs), pour que l'exponentielle a^x les atteignent tous ? Nous savons et pensons aujourd'hui qu'il suffit, pour généraliser (2), d'un passage bien réglé des entiers aux réels, par le biais des rationnels et d'une continuité intuitive de l'exponentielle. Une telle procédure d'approximation par densité n'était guère jouable au début du XVII^e siècle. Pour qu'une telle approximation fasse sens, il convient de penser d'abord la fonction sur laquelle l'appuyer, en l'occurrence la fonction exponentielle, et agissant sur un domaine de définition numérique suffisamment riche.

---

[8] J.E. Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris, tome 2, 4e partie, livre I, 1799 ; p. 19 de la réédition A. Blanchard, Paris, 1968.

C'est en tant que fonction traduisant un domaine numérique en un autre qu'il y a eu un enjeu et une invention des logarithmes ; la fonction est le concept fondateur du logarithme, et une fonction liée à un domaine de définition et à son image ; c'est avec la fonction qu'apparaît le "même" que nous traquons. Je veux dire que fait histoire le fait qu'il s'agisse d'un même à l'origine duquel Napier s'est trouvé.

Ce même qui permet la qualification de postérité n'est pas *a priori*, ou pour les besoins de l'historien. En son absence, il y aurait aussi bien histoire possible des logarithmes, mais la dire relèverait d'un tout autre type de récit. A partir de Napier, il y a récit de postérité. L'écriture de l'histoire dépend bien sûr de ce dont il est fait histoire !

Des fonctions étaient certes disponibles avant l'invention de Napier, et d'ailleurs tabulées pour ce qui doit être pris comme une autre source historique du logarithme, ce que l'on appelle la prostaphérèse. Il s'agit d'une opération de calcul attestée au X^e siècle chez des astronomes arabes, reprise par Tycho Brahe dans une trigonométrie sphérique (manuscrite) et par un mathématicien comme Johann Werner (mort en 1528). Il convient donc de ne pas négliger le développement formel de la trigonométrie au XVI^e siècle, la familiarisation avec les sinus, les cosinus, les sécantes et les tangentes, et leurs valeurs numériques approchées fournies en de longues listes. Si on a tenu à tort Regiomontanus (XV^e siècle) pour responsable des logarithmes, c'est peut-être par le souvenir plus ou moins conscient qu'il avait joué un rôle grâce à la trigonométrie (dont nul ne nie qu'il l'ait formalisée). L'opération de prostaphérèse (littéralement méthode du plus et du moins) repose sur des formules assurant un passage du produit à la somme, par exemple une formule toujours apprise par cœur dans les classes de mathématiques, quoique rarement perçue de nos jours comme portant valeur "logarithmique" :

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

Chargé de fabriquer un standard de l'enseignement, Christoph Klau, dit Clavius car il était professeur de mathématique au Collège Romain où l'enseignement était en latin, en donne une "règle générale" (*conabimur nos eam doctrinam magis generalem efficere*) au livre I de l'*Astrolabium* de 1593, un ouvrage publié à Rome. Il parvient donc à faire sortir la prostaphérèse des calculs d'astronomie. Sans toutefois parvenir à la placer dans une algèbre, c'est-à-dire sans la présenter comme une procédure indépendante de la nature des grandeurs sur lesquelles elle opère, sans donc la fixer sur un système numérique. En ce sens, aucune fonction n'est exhibée, pensée, approchée ou même imaginée par Clavius. Remarquons que nous ne pouvons donc fixer une préhistoire sans avoir au préalable distingué un "même" sous la dénomination de logarithme.

Dans la préface à son premier livre sur les logarithmes, Napier se réfère effectivement à tous les procédés de calcul d'un produit en somme dont il dit avoir fait le tour pour en distinguer plusieurs lui paraissant efficaces. Ce faisant, il écrit une histoire aboutissant à sa découverte : il "réalise" la quête fonctionnelle que nous avons évoquée brièvement, et il en fait une tendance, sinon une force. Par une heureuse clause de style, en remarquable conteur il laisse indéterminée cette histoire le précédant. Ce qui lui permet d'affirmer un événement, son propre choix parmi tous les procédés disponibles avant lui. Car, quant à lui, il crée autre chose, il inaugure "l'adjonction" d'un système numérique à un autre :

> *A la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions...*[9].

En affichant la nouveauté, Napier met en valeur le "remplacement", donc la correspondance, tout en faisant valoir que les "autres nombres" sont des nombres aussi bien que ceux de départ. Il n'aurait pas été possible de la dire en inventant un mot spécifique pour fonction puisqu'il faudrait en plus signaler les domaines numériques de départ et d'arrivée. Ce n'est pas l'exponentielle qui a été trouvée, ni l'exponentiation. Napier dit la nouveauté par la table numérique qui fait voir la richesse des nombres atteints, et use d'un seul mot nouveau, celui de logarithme. La table, lue comme un dictionnaire, rend visible ce qu'on appelle bientôt une "convenance" ; c'est certes celle de l'addition et de la multiplication, mais c'est tout autant la traduction d'un système numérique par un autre, tous les deux étant riches pour le calcul car possédant tous les deux l'uniformité de répartition des nombres entiers.

Nous comprenons d'emblée ce que l'histoire documentée atteste, à savoir que l'établissement d'une table par Napier correspond techniquement à la construction d'une progression géométrique suffisamment serrée, c'est-à-dire dont la raison soit voisine de l'unité. Parce qu'il convient que des

---

[9] Trad. du texte latin de la préface de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, Authore ac Inventore, Ioanne Nepero, Barone Merchistonii, Edinburgi, ex officina, Andreae Hart que je reprends de C. Naux, *Histoire des logarithmes*, op. cit., p. 33.

nombres comme les entiers successifs puissent être successivement atteints par un tableau de grandeurs à la Stifel où l'écartement des termes dans la ligne supérieure croît beaucoup trop. L'approximation est donc un moyen adapté à l'objectif qui est l'accession à la propriété de répartition des nombres entiers.

Adoptant comme raison la valeur $1\text{-}10^{-7}$, Napier prend les nombres successifs $10^7\,(1\text{-}10^{-7})^{\,n}$, et il fait varier l'entier n de 0 à 100. C'est parce qu'il y a par cette expression accès aux entiers, que l'entier n lui-même, entier apparemment anodin, qualifie le *logarithme*.

Dans ce processus même, le nombre entier tellement recherché n'en perd pas moins son privilège de système particulier ; il est atteint à peu près, tout comme l'on atteint à peu près les racines carrées irrationnelles. Grâce à l'intervention d'une approximation, tous les nombres peuvent alors être pensés comme logarithmisables. L'approximation est éminemment flexible : il suffit de modifier 10^{-7}, et pour cela changer le procédé de fabrication de la table. L'expérience primitive de Napier atteste que l'on en changea effectivement. Le domaine numérique peut donc être modifié, et pourtant reste quelque chose d'identique qui est reconnu comme un pluriel : on aura alors des logarithmes, et non le logarithme.

L'extension à tous les nombres ne fait pas l'objet d'un discours théorique ; elle va de soi dans ce que présente Napier, et il faut ajouter que l'idée même de nombre n'étant pas précisée, une meilleure expression serait l'extension à tout nombre calculable, par exemple les fractions, ou tout nombre susceptible d'une approximation. Pour la clarté des idées, n'aurait-il pas plutôt fallu que Napier utilise d'abord un verbe, comme "logarithmiser" les entiers naturels, c'est-à-dire les atteindre comme logarithmes et ensuite seulement un substantif afin de marquer l'extension à tous les nombres calculables ? Poser ainsi la question, c'est interroger l'histoire au nom d'une logique analysée tant de la découverte que de sa postérité. Mais cette dernière, la logique de l'objet, a jusqu'à nos jours maintenu un seul substantif, le logarithme. Comme il s'agit de la trace sémantique d'un "même", nous ne pouvons faire l'impasse de son étymologie, même si la pratique est rare en mathématiques.

Le substantif est construit par Napier sur deux mots grecs. Il y a λογου, ayant depuis longtemps pris le sens de "raison", c'est-à-dire un rapport et peut-être même, au début du XVII^{e} siècle signifiant mesure d'un rapport. Il serait préférable de dire "ratio", un mot qui nous revient aujourd'hui du latin en étant passé par l'intermédiaire anglais du vocabulaire boursier. Et il y a αριθμος, c'est-à-dire "nombre entier", multiplicité composée d'unités comme disaient avec Euclide (au livre VII des *Eléments*) tant de penseurs de l'Antiquité. Il va cependant falloir l'entendre en un sens plus général, celui de nombre. Rarement questionnée par les historiens, la présence d'αριθμος tient au requis même de Napier de disposer, après logarithmisation, d'un système numérique aussi uniforme, ou à peu près, que les entiers. Prendre un logarithme, indique alors le mot, c'est obtenir la "raison" d'un nombre et celle-ci n'a de sens que si le nombre est pris dans un système numérique ; c'est en fournir la mesure dans ce système. C'est donc nombrer, à la façon dont on dit que prendre le rapport de deux grandeurs, c'est nombrer l'une par l'autre pour la mesurer. Le logarithme est un "numérateur des raisons" (*numerus rationem exponens*) parce qu'il repère un système numérique par un autre.

Le pluriel désigne les résultats de ce repérage ; on dira les logarithmes pour ce qui se lit dans les tables[10]. Et si une confusion s'installe entre le résultat de la mesure et la technique même de mesure, entre le nombre nombré et le nombrement, elle disparaît d'autant mieux que la singularité des nombres du repérage, le système numérique particulier de la table qui a donné corps à l'idée de repérage, disparaît sous l'universalité du nombre calculable, regroupement de tous les systèmes numériques. La fonction seule subsiste. Nous y voilà.

Alors que la langue mathématique était et reste rebelle aux mots forgés d'étymologie savante, vite abandonnés pour des mots communs[11], la richesse sémantique puis son indécision ont beaucoup fait pour le maintien du mot logarithme : en l'occurrence, ce vocabulaire fournissait l'ontologie du logarithme, ce que j'appelerai l'ombre de la fonction qui signe la mesure. A la façon dont l'étymologie de troène ou de platane importe peu au jardinier, l'oubli non moins rapide de l'étymologie, oubli aujourd'hui quasi total, s'explique d'autant mieux que le concept retenu est celui de la fonction logarithmique à laquelle on peut, sans gêne majeure, donner un

---

[10] Plusieurs paramètres interviennent pour justifier le pluriel des *logarithmes* : la base bien sûr, mais aussi le domaine numérique de la table, et la raison de la progression géométrique plus ou moins proche de l'unité.

[11] On remarquera que dans la sémantique de la mathématique enseignée, *logarithme* est avec *hypoténuse* un des rares mots ne provenant pas du langage courant. De tels mots savants disparaissent généralement. La mathématique moderne avait concocté plusieurs expressions, comme *isomorphisme*. Cette dernière a vraiment résisté à *bijection*, qui lui est équivalente lorsque l'on reste au niveau des ensembles.

nom quelconque, et pourquoi pas grec. J'ai bien dit fonction logarithmique, et non fonction tout court[12].

Un retour sur l'invention s'avère encore nécessaire pour terminer l'identification d'un "même", et assurer fermement le sens fonctionnel chez Napier, un sens qui, deux siècles plus tard, en un contexte bien différent mais dans ce que je crois pouvoir appeler la postérité de Napier, permettra avec Cauchy de fonder le logarithme sur l'extension d'une relation fonctionnelle des entiers aux réels. La continuité sera alors le moyen de validation de l'extension.

Afin de comprendre la mise en scène des logarithmes comme repère chez Napier, à la manière précisément d'une table il faut écrire en totalité une suite géométrique finie, le système numérique de départ. Il ne faut donc pas se servir du tableau indéfini à la Stifel, et cela marque à quel point Napier a dû se débarrasser des clichés de son temps, la préhistoire que nous avons précédemment faite ayant juste permis de les identifier. Ainsi, a désignant un nombre quelconque ($a > 1$), il convient d'écrire tout le système numérique, la suite en totalité, à partir de $1 = r^0$, r, r^2, ..., $r^k = x$, ..., jusqu'à $r^n = a$, r étant la "raison" ($r > 1$). C'est parce que l'on compare au rang n du dernier terme, que l'ordre, ou le rang k du nombre x ($= r^k$) à mesurer, fournit le logarithme dont la base est a. La relation s'écrit

$$\log_a x = \frac{k}{n}$$

Chez Napier, précisément la "base ", le terme final de la série numérique, est $a = 10^7$ et, comme nous l'avons dit, la raison $r = (1\text{-}10^{-7})$. Pour éviter à priori l'assimilation au logarithme d'aujourd'hui, convenons d'appeler Nog x (N pour Napier) le "nogarithme" conçu par et pour la table, d'autant que la variation du repérage par les nogarithmes est inverse de celle à laquelle le logarithme naturel nous a habitués. On peut lire en termes d'aujourd'hui :

$$\mathrm{Nog}\, x = \log_{(1-10^{-7})} 10^{-7}x$$

Ce qui, en écriture exponentielle avec $y = \mathrm{Nog}\, x$, donne

$$10^{-7}(1-10^{-7})^y = x$$

12 Mais je devrais souligner le long maintien du pluriel, les logarithmes et même les fonctions logarithmiques. La dénomination de fonction logarithmique viendra seulement avec le choix d'une base *naturelle*. Par contraste, au XVII^e siècle on disait en géométrie la parabole, en dépit même de la variété reconnue du genre par le paramètre.

Napier voit la variable y comme entière, et donne à voir que les x obtenus contiennent des nombres très proches d'un système d'entiers successifs.

Avec la raison $(1\text{-}10^{-7})$ choisie par Napier afin de visualiser l'obtention des entiers, les calculs s'avèrent beaucoup trop longs pour atteindre, en x, suffisamment d'entiers successifs. Il lui faut effectuer encore une approximation, une approximation de l'approximation. Telle est la logique du procédé, qui ne privilégie pas les entiers comme valeurs intangibles, mais comme un système de repérage, ou de mesure, ce que j'ai appelé une uniformité de répartition. Aussi, pour la table qu'il élabora (appelée "*table radicale*"), joue-t-il avec les valeurs d'une double suite, repérable par les expressions $10^7\,(1\text{-}2.10^{-3})^{\alpha}\,(1\text{-}10^{-2})^{\beta}$, les coefficients α et β étant entiers. Mais il use aussi bien de l'interpolation linéaire. Il construisit ainsi une table de nogarithmes des sinus pour des angles successivement séparés par une minute d'arc, à partir d'un triangle rectangle d'hypoténuse 10^7. Ces nogarithmes sont nécessairement approchés, comme sont seulement approchés les entiers.

LE DECIMAL COMME PRATIQUE NOUVELLE DE LA MESURE

Rendant visite au huitième lord of Merchiston qu'est Napier, poursuivant l'idée du repérage numérique, le professeur d'Oxford qu'est Henry Briggs modifie en conséquence la table. Il introduit le logarithme décimal (noté pour la suite log). La transformation qu'il opère est banale et s'écrit selon un simple changement par affinité :

$$\log x = \frac{\mathrm{Nog}\,1 - \mathrm{Nog}\,x}{\mathrm{Nog}\,1 - \mathrm{Nog}\,10}.$$

Briggs constate une nullité pour l'unité, log 1 = 0, et une valeur d'unité pour la dizaine (log 10 = 1). Il voit surtout la loi fonctionnelle du produit.

(3) $$\log x\,y = \log x + \log y.$$

De cette loi, la mathématique ne se départira plus jamais ; nous tenons la stabilité historique d'une postérité. Puisque de cette même relation on déduit

(4) $$\log 10^k x = k + \log x,$$

l'avantage explicite de la table "décimale" est de permettre un jeu facile — une simple translation — à partir de l'écriture décimale. Cette relation (3) fait aussi voir que le système numérique atteint n'est pas borné, alors que la série constitutive d'un logarithme l'était de prime abord.

L'histoire des logarithmes est indissociable de la numération décimale. Elle venait tout juste de s'affirmer en Europe, notamment sous les efforts du

Hollandais Simon Stevin, un des premiers "ingénieurs du prince" dont l'œuvre de décimalisation paraît en 1585, et se diffuse vraiment[13] après 1630. L'intérêt de la numération décimale est, par simple analogie avec les seuls entiers, de standardiser l'écriture des nombres quelconques, des nombres calculables en fait. Puisqu'il y a approximation, celle-ci pouvant être fixée par le nombre de chiffres significatifs retenus, il n'y a plus de raison de préférer 3 à 3, 0067, dont par exemple la différence avec 4, 0037 se lit "comme" un entier : 0, 0030.

Le logarithme fait partie du mouvement de numérisation de la pensée, cette représentation systématique des objets par des nombres dont la décimalisation est un signe notable. Il pourrait en souligner la part conceptuelle. Mais celle-ci a été perdue pour nous. Car notre numérisation est allée beaucoup plus loin, adoptant un système numérique de référence unique, le système des nombres réels, et effaçant toutes les étapes antérieures. L'expression même, *les étapes*, manifeste que les nombres réels devaient se trouver au bout du processus, autrement dit les réels contiennent tous les systèmes numériques possibles : les mathématiciens disent depuis Hilbert que le corps totalement ordonné des réels est maximum[14]. Au XVIIe siècle pourtant, nombrer des quantités avec des entiers ne paraissait pas équivalent à les nombrer avec des fractions, voire avec des nombres irrationnels. Il y avait au mieux analogie. Figures de la numérisation, les logarithmes de Napier montrent la possibilité de remplacer le système numérique des entiers par un autre, habituent à manipuler des systèmes quelconques, des nombres quelconques.

L'historien des mentalités ajoutera qu'en retour la décimalisation avait familiarisé les esprits avec la relation "euclidienne" que nous avons repérée par la formule $a^{n+m} = a^n.a^m$ dans le cas $a = 10$; elle a donc favorisé l'adoption du logarithme dans un monde où le calcul se standardisait et où l'intérêt grossissant un capital devenait une préoccupation. La numération décimale n'a pourtant pas gagné un monde de professionnels comme celui des astronomes, et elle ne les atteindra vraiment qu'avec l'avènement des ordinateurs qui rendent les conversions automatiques. Les astronomes adoptèrent d'emblée les logarithmes. Une telle constatation donne à réfléchir sur le jeu des corrélations que l'histoire compose.

---

13 Indiscutablement, l'historiographie du numérique est encore trop pauvre sur la période 1580-1630, dont la dernière partie voit la publication des grandes tables numériques, en Angleterre, en Hollande, en France, en Italie, etc.

14 Voir par exemple, J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Nathan, Paris, 1978.

Mathématiquement plus sophistiquée, l'étape particulière de la numérisation qu'est le logarithme n'a pas l'ampleur de la décimalisation.

Celle-ci apporte quelque chose de plus, l'avènement d'une structure de la pensée non réductible à la numération (qui est une simple classification). Sous réserve de l'acceptation de l'approximation qui en est une composante non négligeable (jeu de l'emplacement de la virgule), la décimalisation rend indifférent le privilège des entiers, ou si l'on préfère, étend indifféremment à tous les nombres les avantages de repérage des entiers. Par intégration de tous les systèmes de nombres calculables, la décimalisation provoque une indifférence aux entiers en tant que tels. Parce que le décimal impose le choix d'un repère, il abolit le caractère absolu du nombre entier.

Le logarithme participe de cet effet de numérisation ; en représentant les entiers par un autre système numérique, il en atténue la singularité, ou plutôt il transfère à ce nouveau système la capacité de calcul des entiers. Le décimal prend l'addition comme opération majeure et ignore la fraction dont le régime est multiplicatif en permettant la comparaison de deux nombres indépendamment d'un repérage général (c'est le sens commun du mot rapport). On calcule de tête la multiplication de deux fractions, alors qu'il faut peiner un peu plus pour en faire l'addition. Cet effet de minoration de la fraction par le décimal (jusqu'à l'élimination dans certaines pratiques) ne fut pas toujours accepté, et il faut interpréter de la sorte la réaction de dédain des astronomes face au décimal. Le logarithme facilite au contraire la considération des fractions en les additivant. Ce que Napier mémorise par une formule rhétorique que nous résumons selon l'écriture :

$$\text{Nog } x - \text{Nog } y = \text{Nog } 10^7.\frac{x}{y}$$

La numérisation de la pensée est passée par le décimal, et le logarithme ne fut qu'un palier.

Trace matérielle et repérable de la décimalisation au sein des logarithmes, Napier place soigneusement le point pour séparer les décimales trois par trois. Bien plus tard, mais dans le même mouvement, John Wallis introduisit en 1693 le mot *mantisse* au profit des seuls nombres décimaux (c'est la partie non entière), et c'est seulement Euler qui l'adapta en 1748 au cas des logarithmes pour lesquels il est seul resté. Ce dernier verbe n'est d'ailleurs pas le bon, car il y a eu des éclipses dans l'emploi de la mantisse, et jusque dans l'enseignement comme nous le verrons. Aujourd'hui, après une déshérence, le mot peut retrouver un rôle grâce à l'affichage sur ordinateur. C'est-à-dire à un moment où le décimal est redevenu avec l'ère de la post-numérisation la seule entité effectivement manipulée.

PLUSIEURS QUESTIONS POUR UN SENS DES LOGARITHMES

Sans qu'il y ait identité, avec même des discordances, l'histoire des logarithmes est bien liée à la pratique et à l'imaginaire des nombres dont l'histoire à l'ère classique est encore mal connue[15]. Si, par les tables, les logarithmes sont assimilables à des entiers, leur fondation comme système de repérage dépasse les entiers. Dès le départ, et le *logos* dans le mot logarithme le disait bien aux contemporains de Napier, il y eut insertion dans la théorie des grandeurs, c'est-à-dire la théorie la plus élaborée des mathématiques d'alors[16], et sinon opposée du moins parallèle à celle des entiers depuis les *Eléments* d'Euclide. Comme pour les irrationnels qui font partie de cette théorie, cette insertion des logarithmes permet leur approximation, le "nombre" exact n'étant pas toujours exprimable. Aussi bien, et parce qu'ils touchaient à la mesure, les logarithmes pouvaient être rangés parmi les objets les plus sophistiqués des mathématiques du temps. Et donc faire l'objet de discours savants. Il n'est pas possible de cantonner les logarithmes, dès leur apparition, aux seuls calculateurs professionnels, ou plutôt il faut maintenir la liaison de ceux-ci avec la mathématique des grandeurs par le biais de la théorie des proportions.

On ne quitte pas cette théorie, en remarquant que dans les effets du repérage que permet le logarithme figure une relation "exacte", l'essence même des logarithmes selon Napier :

$$\mathrm{Nog}\sqrt{xy} = \frac{\mathrm{Nog}\,x + \mathrm{Nog}\,y}{2}. \qquad (5)$$

Par le passage de la moyenne géométrique à la moyenne arithmétique s'affiche une stabilité ; une moyenne dans un système de nombres est moyenne dans un autre. Le décimal gomme les moyennes géométriques, le logarithme se contente de les rendre équivalentes aux moyennes arithmétiques. L'abandon de la relation (5) qui avait d'abord servi pour les

---

[15] On connaît mieux les arithmétiques, universitaires ou marchandes, du Moyen Age, que la pratique des nombres du XVIIe siècle. Les historiens de la comptabilité offrent aujourd'hui un nouveau regard bien venu.

[16] Est éloquent à ce propos le livre de E. Giusti, *Euclides reformatus. La teoria della proporzione nella scuola galileiana,* Bollati, Boringhieri, Torino, 1993.

tables, au profit de sa voisine la relation (3), désigne la préférence pour les opérations du décimal, addition et multiplication, aux dépens des moyennes, ces créatures des proportions qui jouissent pourtant de l'avantage d'une représentation géométrique, donc d'une signification considérée comme intrinsèque. Mais a-t-on encore besoin d'une telle représentation si le nombre calculable n'est plus conçu comme isolé, mais comme élément repérable d'un système qu'il sera possible de standardiser jusqu'au point de le rendre universel ?

Geste portant valeur théorique, et que nous interprétons comme signe fonctionnel, la relation (3), ou la *convenance* pour utiliser le langage d'alors, est jugée caractéristique du logarithme, indépendamment de tout choix d'une base. Sans autre effort de la pensée, elle fournit l'existence du logarithme comme solution d'une relation ; puisqu'il n'y a pas questionnement à partir de la seule formulation (3), il vaudrait mieux dire que le logarithme résume cette relation. La présence de cette dernière permet, sans gêne, de penser le logarithme en termes de calcul et d'approximation : l'unicité du logarithme n'est alors plus qu'une question de choix d'une base. Le pluriel, les logarithmes, bientôt ne réfère plus qu'à cette variabilité de la base.

Ainsi, la fonctionnalité du logarithme devient l'objet unique et déterminé. L'adoption d'un unique système décimal permet d'oublier la particularité d'un système de nombres le lieu d'origine d'un logarithme.

C'est fondée sur la relation (3) que se présente la table fournie par l'imprimeur Hollandais Adriaan Vlacq, d'abord publiée à Gouda en 1628, puis agrandie cinq ans plus tard et donnant les logarithmes décimaux à dix places quant aux chiffres significatifs[17] et concernant les nombres de 1 à 100 000. Cette table est l'édition mère de toutes les tables de logarithmes, jusqu'au début du XX^e^ siècle. Elle a été largement connue dès sa publication[18].

---

[17] Dans *Trigonometria artificialis, sive magnus canon triangulorum logarithmicus ad radium* 1.00000.00000, *et ad dena scrupula secunda, ab Adriano Vlacco ... Goudano constructus*, Gouda, 1633, les sinus et les tangentes sont au centième de degré.

[18] Les techniques d'établissement des tables sont décrites dans H.H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New-York, 1977 et J.W.L. Glaisher, "On early tables of logarithms and early history of logarithms", *Quat. Journal of Pure and Aplied Mathematics*, 48, 1920, pp. 151-192. Voir aussi J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 2

Il n'y a donc que quinze années qui séparent la première publication sur les logarithmes de la parution de la table d'utilisation quasi définitive. Ce temps bref mérite d'être retenu : la période se situe avant même la *Géométrie* de Descartes qui apporte en 1637 l'avantage de l'algèbre ordonnatrice, avant la *Géométrie des Indivisibles* de Cavalieri qui gère provisoirement un calcul de l'infini, avant bien sûr le Calcul lui-même dont Newton et Leibniz sont les fondateurs. Ce temps court de la fixation des logarithmes a-t-il fixé univoquement un objet ?

Ne pourrait-on prétendre, malgré l'intention de Napier, que la pratique des tables ait transformé l'objet logarithme en un objet idéal, un objet à atteindre par approximation ; qu'elle ait remplacé l'objet par l'ombre d'un objet ? C'est une question d'historien de l'épistémologie. Le mathématicien moderne poserait autrement la question, cherchant à savoir si les logarithmes n'ont pas, après Napier mais par le même effet des tables, été ressentis comme relevant du régime des seuls systèmes numériques discrets, bref été incorporés à l'arithmétique (comme ils le furent si longtemps dans l'enseignement) et donc ayant quitté le giron de la théorie des proportions ? L'historien formulera encore différemment, arguant de l'efficacité numérique de la découverte de Napier jointe à sa manipulation des approximations, pour chercher à savoir si elle n'a pas permis d'oublier la signification du logarithme comme objet construit. Ces questions voisines se posent dans la mesure où la postérité du logarithme fut d'abord chancelante. Avant de les examiner, mais pour en préparer la réponse, il nous faut mieux rendre compte de l'œuvre de Napier, cette œuvre ayant été largement diffusée.

LES NOGARITHMES

S'il avait réalisé des approximations pour la confection des tables, et si Briggs avait manifesté le biais universel et approximant du décimal, avait bien été pensé le logarithme de tout nombre, de tout nombre entier et de tout nombre calculable, quand bien même le Nog x n'aurait eu de sens que pour ceux figurant dans la table. L'écriture de l'exponentielle que nous avons adoptée dans la formule (3) ne pouvait prendre un sens général pour tout y, l'exponentielle n'étant pas définie, ni d'ailleurs à l'horizon proche du savoir. Napier entendait néanmoins donner un sens général au nogarithme,

---

Aufl., Bd 2, Die Logarithmen ; Der Begriff des Logarithmus. Die ersten Tafeln, p. 204 et suivantes, Berlin/Lepzig, 1921.

un sens valable pour tous les nombres réels dirions-nous aujourd'hui, et pas seulement pour les nombres calculables.

Et pour ce faire, c'est à un procédé de mécanique théorique qu'il se référa. Il jouait d'une science nouvelle, une avant-garde pourrait-on dire. Il le fit parce que la mécanique utilise le temps, ce qui en gageant le continu permet de parcourir tous les nombres avec une vitesse. A juste titre Montucla peut-il dire "qu'il y a une certaine analogie entre les idées du géomètre Écossois, et la manière dont Neuton a envisagé son calcul de fluxions"[19]. Et du coup, l'historien va plus loin que ce que nous sommes prêts à signifier sous l'expression de la postérité de Napier.

Encore une fois, la remarque de Montucla — premier historien professionnel des mathématiques — est une façon de scander la temporalité. Elle situe Napier non comme un continuateur plus ou moins doué d'efforts de la Renaissance, mais comme relevant de la nouvelle vague, celle de la "Révolution scientifique" que l'on fait généralement parcourir tout le XVII^{e} siècle. Tel est bien le rôle d'allocation du temps que s'arroge par fonction l'historien ; mais tel aussi il doit être jugé car il faut qu'il donne ses preuves. C'est ce que fait Montucla en évoquant l'idée newtonnienne des fluxions, le parcours de toute courbe selon un paramétrage par un temps abstrait qui n'en permet pas moins le jeu de la vitesse. Et il serait possible d'appuyer encore l'affirmation de Montucla en évoquant le calcul d'erreur que Napier affiche dans ses tables. Car ce calcul les accompagne toujours : l'approximation n'est pas chez lui un concept indéfini, il est présent quantitativement, on sait de combien au plus on peut se tromper. L'erreur Δa sur un nombre a étant naturellement considérée comme égale à celle sur un autre nombre b, le calcul de Napier peut se résumer par le quotient :

$$\frac{\Delta \mathrm{Nog}\, a}{\Delta \mathrm{Nog}\, b} = \frac{b}{a}.$$

Si cette indiscutable présence n'en efface pas les longues décennies écoulées avant que soit pensée la formule différentielle proche,

$$\frac{d(\ln a)}{da} = \frac{1}{a}$$

elle les oriente dans la détermination d'un sens dont l'origine serait Napier. Elle donne un contenu à ce que nous appelons la postérité, qui est poursuite, approfondissement et non imitation simple. Voyons mieux en explicitant en termes modernes son acte mathématique. Garder ses

[19] J.E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, *op. cit.*, p. 16.

notations et son vocabulaire prendrait pour le coup trop d'explications, et si l'historien minutieux ne peut faire l'économie de l'original, on peut s'en passer ici compte tenu de l'objectif poursuivi.

On simplifie le modèle mécanique destiné à fonder le nogarithme — je maintiens ce néologisme qui permet une distanciation — en le présentant comme le mouvement d'un point P qui se meut en ligne droite à partir d'une position initiale P_0 située à une distance 10^7 d'un point O. Sa vitesse est décroissante, proportionnelle à la distance PO ; un autre point L part de L_0 et se déplace quant à lui à vitesse constante 10^7. Comme c'est la liaison entre les deux mobiles qui crée le nogarithme, on constate que l'idée fonctionnelle n'est en rien adventice chez Napier, mais fondatrice. Elle fixe le sens de la table numérique, car elle est raison d'être du logarithme. La distance L_0L est le *nogarithme* de la distance PO ; de sorte que le calcul doit exhiber d'abord ce qu'il s'agit ensuite de faire disparaître, à savoir le temps qui permet d'exprimer séparément PO, et L_0L.

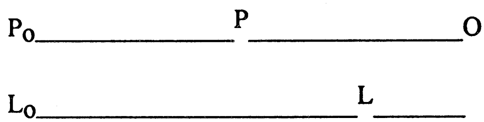

Figure 1

En utilisant encore le logarithme naturel (ln) dont la définition est pourtant ultérieure, nous notons PO = x et la distance L_0L est notée Nog' x. Le prime signale provisoirement une différence avec le Nog affirmé par la table. La solution de l'équation différentielle régissant le mouvement de P,

$$\frac{dx}{dt} = x$$

satisfaisant $x(0) = 10^7$ (premier calcul), se conjugue à l'expression du temps fournie par le mouvement uniforme

$$t = 10^7 L_0L$$

satisfaisant $x(0) = 10^7$ (premier calcul), se conjugue à l'expression du temps fournie par le mouvement uniforme

$$t = 10^{-7} L_0L$$

ou encore $t = 10^{-7}$ Nog'x (deuxième calcul), pour donner en faisant effectivement disparaître le temps :

$$\text{Nog'x} = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Ce nogarithme particulier satisfait la relation fonctionnelle si importante aux yeux de Napier,

$$\mathrm{Nog}'\sqrt{xy} = \frac{\mathrm{Nog}'x + \mathrm{Nog}'y}{2}$$

Pour relier ce nogarithme au nogarithme de la table, il suffit de vérifier que ln $(1\text{-}10^{-7})$ vaut - 10^{-7} , du moins pour une approximation compatible avec celle utilisée dans la table afin d'atteindre les entiers. Dès lors, l'expression "mécanique" du nogarithme prime est proche — au sens précis de l'approximation de la table — de

$$\frac{\ln\frac{x}{10^7}}{\ln(1-10^{-7})}.$$

Cette dernière expression, d'après la formule (3), est de fait Nog x.

Est acte mathématique le fait que Napier ne se soit pas contenté de la relation fonctionnelle du nogarithme à partir de la moyenne géométrique ; il fallait d'abord penser la présence d'une fonction manifestée par la liaison entre deux mouvements. C'est le temps, et paradoxalement son élimination dans le calcul de l'équation différentielle précédente, qui justifie la possibilité de parler du nogarithme d'un nombre x positif quelconque, ou plutôt du nogarithme de tout système numérique.

A la même homothétie près sur la variable et sur la fonction, le Nog', tout proche du Nog, équivaut au logarithme naturel.

$$10^{-7}\,\mathrm{Nog}'\,10^{7}\,x = \ln\frac{1}{x}.$$

On comprend ainsi, par l'histoire, la raison pour laquelle le logarithme naturel est appelé logarithme népérien (la forme Neper, dérivée du nom Napier, est voulue pour les besoins de la latinisation, et elle facilite euphoniquement l'adjectivation).

Reste que nous n'avons pas encore justifié le troublant qualificatif "naturel" attribué aujourd'hui encore à ce logarithme. Il renforcerait singulièrement l'idée d'un même objet dont nous faisons l'histoire, si du moins son usage revenait à dire que l'objet est placé en filiation naturelle des autres objets mathématiques. A défaut d'adéquation du logarithme à une perception de la sensibilité humaine au XVII^e siècle, voilà le seul sens que l'on peut donner à l'adjectif "naturel".

Très tôt obtenu, le logarithme décimal ne pouvait pas bénéficier auprès des mathématiciens de la qualification de naturel. Dans la mesure où il résultait d'une convention de numération, non d'une convenance avec les autres objets. En effet, le décimal n'avait aucun privilège reconnu ; il était perçu comme un moyen, et se frayait d'ailleurs difficilement un chemin, ayant contre lui les tenants de la tradition (les astronomes en particulier). Pour Napier, et pour les constructeurs de tables, tous les logarithmes étaient des artefacts en ce sens qu'ils réalisaient tous, sans privilège, la relation fonctionnelle. Etait artefact aussi bien la définition mécanique du logarithme inventée par Napier dont nous n'avons présenté que la version simplifiée, et sans détailler l'élaboration de la notion proche de celle de vitesse instantanée. Il paraît net que le qualificatif "naturel" pour un logarithme manifeste d'abord l'artificialité reconnue des premiers moyens, et ainsi tout le travail qu'il fallut faire pour parvenir à incorporer les logarithmes aux autres mathématiques[20].

Le qualificatif de naturel ne saurait en effet pas plus provenir de la constatation que la table de Napier n'a pas été unique et a même connu des concurrences. Indépendamment de l'Écossais, avec une instruction sur la manière de les comprendre et de les employer dans toute sorte de calculs, le Suisse Jobst Bürgi publiait à Prague en 1620 des *Tables progressives arithmétiques et géométriques*[21]. Ces tables sont basées sur une raison $(1+10^{-4})$ pour une progression géométrique croissante commençant à 10 et allant à 10^8. Dans la table de Bürgi, où il y a plus de 30 000 entrées, ce sont les logarithmes qui croissent arithmétiquement de 10 en 10 avec l'affichage donc de cette répartition uniforme des entiers, et ils sont imprimés en rouge (*roten Zahlen*). Leur font face d'autres nombres, exprimés en neuf chiffres en impression noire (*schwarzen Zahlen*) ; c'est une table d'antilogarithmes de base $(1+10^{-4})$. La correspondance est néanmoins nette entre les deux systèmes numériques dont chacun a la

---

20 Je ne veux surtout pas donner l'impression qu'à l'origine les logarithmes furent considérés comme ne relevant pas des mathématiques. Ils établissaient pourtant une mathématique particulière ; au même titre d'ailleurs que l'algèbre italienne du XVI^e^ siècle, ou la géométrie des projections de Desargues dans les années 40 du XVII^e^ siècle.

21 *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen samβ gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen/ und verstanden werden sol,* Prag, 1620.

bonne répartition des entiers. Le logarithme à la Bürgi, *bogarithme* que nous allons noter y =Bog x, s'exprime pour nous par la formule

$$x = 10^5(1+10^{-4})^{10^4 y}$$

Aussi, le bogarithme copie ce que nous appelons le logarithme naturel en ce sens que Bog 10^5x est proche de ln x. Fonctionnellement, Bürgi dispose de la relation même de Napier

$$\text{Bog}\sqrt{xy} = \frac{\text{Bog}\,x + \text{Bog}\,y}{2} \tag{6}$$

"So habe Ich nichts Nützliches erachtet, dan dise Tabulen" écrit-il, et il calcule mieux

$$\text{Bog}\,10^5 x\,x' = \text{Bog}\,10^5 x + \text{Bog}\,10^5 x'.$$

Si le nom de Neper reste attaché aux logarithmes, bien plus que celui de Bürgi pourtant rapidement avancé par un auteur aussi influent que Kepler en 1624 qui favorisait ainsi un compagnon de culture germanique, c'est indéniablement parce que l'Ecossais n'a pas seulement fait une table. Il a statué sur la fonction logarithme comme nous l'avons vu. L'historien Montucla a bien raison de le souligner ; et il sait qu'il fixe ainsi une postérité, à tout le moins une tradition. Le lieu de mémoire qu'est l'histoire porte ici sens mathématique. C'est plus fréquemment le cas qu'on ne le pense généralement. Mais le sens n'est pas de lecture immédiate. J'ai asséné d'emblée, et me répète ici, que l'histoire ne se donne pas à voir au premier coup d'œil !

J'ai toujours trouvé ridicule la prétention de certains à montrer que tel nom accordé par la tradition à un théorème était nécessairement une légende. Cela me fait irrésistiblement penser à la prétention scientifique manifestée par un historien du siècle dernier qui commençait par éradiquer la légende d'un Pharamond, premier roi de France, et poursuivait par l'indication des dates du règne de son fils. Pour l'explication d'un nom attribué par la tradition, j'avoue avoir tout autant de mal à imaginer un jeu de pouvoir exercé dans le champ mathématique par un homme. Non que ce pouvoir n'existe pas, ou ne fonctionne pas, mais parce que l'organisation des théorèmes, et donc leur dénomination comme repérage, me semble jouer dans la mathématique un rôle théorique tel qu'il faudrait supposer à l'action de l'homme en question une force pérenne de conviction. La supposer justifierait amplement la dénomination adoptée, et l'explication par lutte de pouvoir ne fait que corroborer la tradition[22].

Il nous reste encore à comprendre l'appellation de logarithme *naturel*.

LA NATURALISATION DES LOGARITHMES

La suite de l'histoire des logarithmes n'est pas celle qui, naturellement, pouvait être attendue. On pouvait ou bien imaginer une absence d'engouement et la limitation des logarithmes à un petit groupe de convertis, sinon de zélotes, ou bien encore une diffusion régulière jusqu'à incorporation des logarithmes tant dans l'enseignement que dans la pratique mathématique largement entendue, c'est-à-dire incluant les astronomes, les "numériciens" au sens des *Rechnungsmeister*, etc. Or, on constate après 1620 un double phénomène.

D'une part, l'absence des logarithmes dans la grande majorité des manuels mathématiques, au moins jusqu'aux années 1660, et tout autant ces mêmes années leur ignorance par les mathématiciens les plus créateurs : René Descartes ou Christiaan Huygens dont le père pourtant se renseigna auprès des meilleurs pour favoriser la formation scientifique de son fils vers la fin des années 1640. D'autre part, il y eut diffusion très satisfaisante des tables et nous avons déjà indiqué quelques titres après celle de Vlacq en 1628.

Si l'on ajoute que ces tables négligent d'expliquer le fondement des logarithmes en ne reprenant jamais le modèle mécaniste de Napier ou la méthode d'approximation des proportions que Kepler donna en 1624 dans le style exigeant de la théorie des proportions[23], on comprendra que la critique fut d'abord celle du doute scientifique. C'est celui qu'exprime Maestlin, un astronome de Tübingen qui enseignait le système de Copernic. Écrivant à son ancien élève Kepler le 2 mars 1620, et ne comprenant pas la construction logarithmique — il n'a même pas pu déterminer la raison de la

---

22 Pourquoi ne pas rappeler l'exemple de Thalès, homme de pouvoir s'il en fut au V^e^ siècle avant notre ère à en croire les récits le concernant. Le théorème qui porte son nom n'est ainsi baptisé que depuis la fin du siècle dernier !

23 Dans son *Chilias logarithmorum* de 1624 (*op. cit.*), Kepler développe une théorie des logarithmes par les proportions (Demonstratio structurae logarithmorum). Ainsi la première proposition interprète la moyenne géométrique comme division en deux parties d'une proportion : Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se aequales.

progression géométrique adoptée — il refuse péremptoirement d'accepter le nouveau système numérique. Quand bien même l'expérience calculatoire aurait permis d'en vérifier la qualité exemplaire : " un calcul qui n'a pas trompé dix fois, ou même cent fois, peut néanmoins finalement décevoir"[24] bougonne-t-il. La phrase signe un esprit scientifique ; c'est celle de la mise en doute. Et le doute a valeur de fondement. Ce qui pourrait être —la convenance du logarithme— n'est pas nécessairement. L'écho d'un tel reproche est celui entendu, il y a une décennie, lors de la résolution du problème combinatoire des quatre couleurs, alors qu'un ordinateur avait effectué la réduction finale de plus d'un millier de cas.

On ne peut cependant imputer à ce premier doute naturel la dérisoire représentation des logarithmes dans les manuels mathématiques. Un exemple suffira, car il est significatif ; en 1640, lorsque le jésuite Jan Ciermans dresse à l'Université de Louvain le plan d'un cours organisé hebdomadairement —*Disciplinae mathematicae* [25]— il ne fait aucune mention de la découverte de Napier ni de son utilisation. Or, l'ordre des Jésuites attribue aux mathématiques un rôle considérable, et Ciermans est un maître remarquablement informé. Son silence exemplaire n'est pas ignorance.

La surprise — comme tout scientifique l'historien exploite ses surprises — provient du fait qu'en cette même Assistance de la province jésuite dite de Belgo-Flandres, un autre membre de la Compagnie, maître lui-même de Ciermans, avait réussi à incarner si l'on peut dire, la propriété fonctionnelle des logarithmes dans la géométrie la plus classique. Il offrait ainsi au logarithme sa niche dans la tradition grecque, tout en offrant une voie toute nouvelle à la géométrie des aires. Il naturalisait les logarithmes, que Ciermans exilait.

---

[24] *Nam ipsum dubium semper esse necesse est, num calculus qui decies, vel centies non fefellit, etiam non aliquando decepturus sit. Ideo ego vtor calculo non, quem demonstrando credo, aut opinior, sed quem demonstratum scio, Johannes Kepler, Gesammelte Werke*, C.H. Beck'sche Verlag Buckhandlung, München, 1950, t. XVII, p. 423.

[25] *Disciplinae Mathematicae Traditae Anno Institutae Societatis Iesu Seculari A.P. Ioanne Ciermans Soc. Iesu Matheseos Professore.*

Grégoire de Saint-Vincent prouvait dans le plus pur style archimédien la réalisation de la transformation d'une progression géométrique en une progression arithmétique, c'est-à-dire ce qui caractérisait alors un logarithme, la relation (3) comme nous l'avons déjà dit. Il utilisait le biais des aires sous l'hyperbole équilatère encadrée par ses asymptotes. Un dessin est explicatif (figure 2) et il suffira.

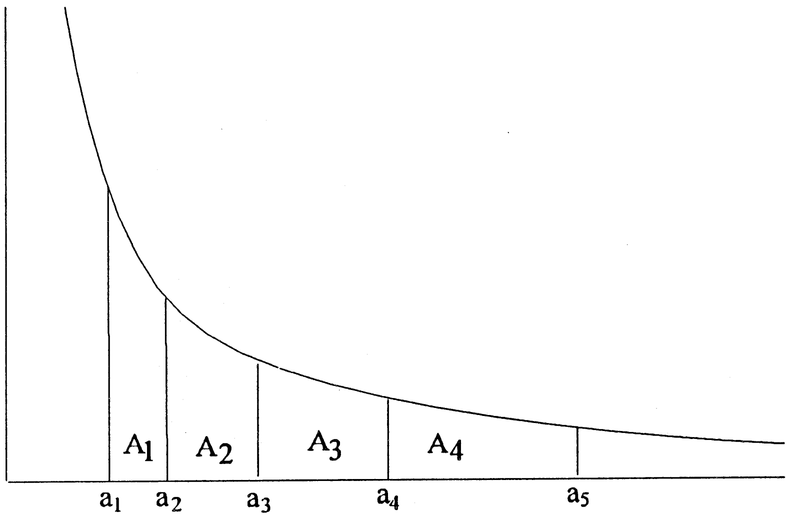

Figure 2

Si a_1, a_2, a_3, a_4 , a_5 , etc. sont des nombres en progression géométrique, placés en abscisse, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \ldots$$

les aires A_1,A_2, A_3, ... découpées sous l'hyperbole équilatère (équation cartésienne xy = constante) sont égales et A_1, $A_1 + A_2$, $A_1 + A_2 + A_3$, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$,...forment une suite arithmétique. C'est ainsi que Grégoire de Saint-Vincent s'exprime dans un livre publié en 1647 à Anvers, et dont des résultats circulaient depuis vingt ans au moins[26]. Et

[26] Proposition 107, livre VI, *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, I. et I. Meursios, Anvers, 1647. On trouvera une étude de cette quadrature de l'hyperbole dans J. Dhombres, L'innovation comme produit captif de la tradition : entre Apollonius et Descartes une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-

c'est le même Grégoire qui, deux ans plus tard, dans un opuscule polémique dont il dirige la plume quoique la signature soit celle d'un de ses élèves Alfonso Antonio de Sarasa, énonce explicitement que les aires sous l'hyperbole servent de logarithmes : “C'est ainsi que l'on voit que la nature logarithmique avec sa continuation de termes et d'excès se range au cordeau sur l'Hyperbole”[27].

Dans le langage même, on aura reconnu la rigoureuse mise au pas de l'approximation en faveur du logarithme. Il s'agit d'un objet bien identifié, et pas seulement approché ; la convenance explicitée par la relation fonctionnelle se lit géométriquement sur une figure.

La considération de l'aire offre en plus l'argument de continuité, c'est-à-dire la présence fonctionnelle que Napier obtenait avec le déroulement du temps grâce à son modèle mécaniste. Si A (x) désigne l'aire du trapèze curviligne (figure 3) déterminé par l'hyperbole, l'axe des abscisses et les parallèles à l'axe des ordonnées en 1 et x, le résultat de Grégoire de Saint-Vincent est exprimé par une formule qui n'est autre que la formule du logarithme décimal de Briggs, la transformation d'un produit en somme,

(7) $$A(xy) = A(x) + A(y).$$

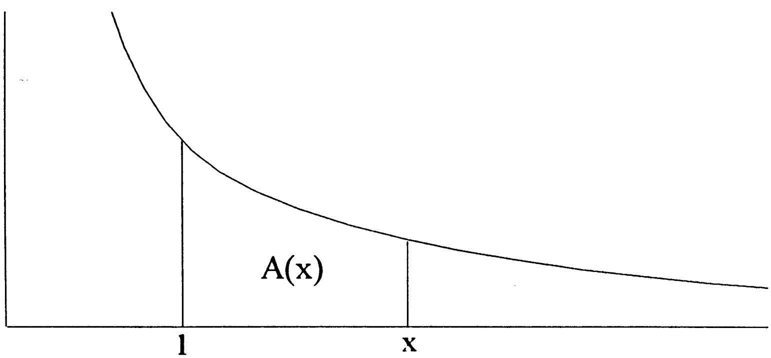

Figure 3

Vincent, in M. Panza, S. Roero (éd.), *Geometria, flussioni, differenziale, Osservationi nella matematica dell'600*, La Citta del Sole, Napoli, 1995, pp. 7-100.

[27] Trad. de l'original latin, *Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi...*Anvers, I. et I. Meursios, 1649.

Dans la genèse de ce qui doit être pensé comme une théorie, c'est la relation $A(\sqrt{x}) = \dfrac{A(x)}{2}$ qui est venue en premier chez Grégoire de Saint-Vincent ; elle a débouché sur l'idée fonctionnelle de correspondance, et fut convertie ensuite en relation du logarithme. L'objet est celui même de Napier et la découverte consonne avec celle de Napier : parce qu'il y a logarithmisation, aussi bien par la richesse du système numérique que par la propriété de convenance, et parce qu'il y a fonctionnalisation. La plus grande originalité du mathématicien flamand, formé au Collège Romain sous la férule de Clavius et proche de Galilée, est donc celle de l'aire en tant que fonction A de la variable x, l'aire comme une variable dépendant d'une abscisse.

La formule (7) est en effet la conséquence de cette considération novatrice ; car ne pouvant réduire l'aire hyperbolique à du connu, ne parvenant pas à réaliser une quadrature ou expression de l'aire par un carré, il lui fallait la déterminer autrement. C'est-à-dire en fournir une propriété qui permettrait de la reconnaître parmi d'autres fonctions. C'est ainsi qu'il y a eu fonctionnalisation du logarithme. On comprend alors que l'inventeur n'ait pas eu besoin de faire une référence à Napier ; il se plaçait en dehors de sa postérité historique et les logarithmes n'étaient pas l'enjeu. Son point de vue était tout autre.

Il restait à statuer sur l'identité des deux logarithmes, celui issu de l'hyperbole et le logarithme.

Que le procédé soit autre n'empêche pas de l'inscrire dans le même mouvement intellectuel de numérisation. En effet, Grégoire de Saint-Vincent a d'abord pu constater que la fonction aire ne possède pas les propriétés d'un polynôme ; elle n'est pas constructible comme une nction puissance ; elle est, selon un vocabulaire que Leibniz va imposer plus tard, une fonction transcendante. Quoique ne pouvant calculer rigoureusement la valeur d'une telle fonction, Grégoire a poursuivi son enquête ; il a pensé l'incalculable, et c'est la relation (7) qui est apparue. Ce qui montrait la possibilité de calculer exactement sur des aires dont le calcul n'était qu'approché. Autrement dit, au-delà des valeurs numériques s'offrait un calcul des aires, de leurs relations.

Au-delà du logarithme, Grégoire ouvre une voie, celle de l'intégration, qui efface la procédure des quadratures précédemment en usage. Que signifie "ouvrir une voie " ? Ne prêtons-nous pas trop à Grégoire selon l'habitude de l'historien à beaucoup accorder à son héros ? Le mathématicien doit s'interroger sur ce qui sépare Grégoire de Saint-Vincent de la formule du logarithme naturel, formule qui en dit plus —l'écriture (8) est nette— que la relation (7) :

8) $$\int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_1^{y} \frac{dt}{t} \qquad x > 0, y > 0$$

La réponse peut aussi bien être que rien ne l'en sépare ou qu'énormément l'en distingue. C'est selon la portée théorique que l'on adopte pour décrire la relation (8) : l'histoire n'est pas un jugement dont la hiérarchisation puisse être indépendant de la question posée[28].

Si le signe $\int_1^x$ désigne simplement une aire, alors la formule obtenue par Grégoire lui est identique, jusques et y compris dans la signification d'obtention d'une aire comme limite de rectangles qui lui sont intérieurs. Car Grégoire a calculé A (x) par des sommes particulières de Riemann à pas variables (et il n'y a aucune gêne à les décrire ainsi, quitte à prendre deux siècles d'avance en utilisant ce nom). On peut en effet écrire analytiquement les opérations que le mathématicien belge a indiquées spatialement par des dichotomies selon les moyennes géométriques successives en abscisse. Il travaille sur des sommes de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=2B} \frac{\alpha}{\frac{k}{2^n}} \left(x^{\frac{k}{2^n}} - x^{\frac{k-1}{2^n}} \right).$$

Ce qui se voit avec n = 4 sur le dessin ci-dessous (figure 4), et on devinera aisément la procédure suivie par Grégoire pour prouver $A(\sqrt{x}) = \frac{A(x)}{2}$ dès que l'on aura vérifié que

$$\left(\sqrt[4]{x} - 1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) + \frac{1}{x}\left(x - \sqrt{x\sqrt{x}}\right)$$

chacun des deux membres valant $2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$

---

[28] On trouvera une description très riche des façons mathématiques de faire dans D.T. Whiteside, "Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century", *Arch. Hist. Exact Sc.*, 1, 1960/62, pp. 179-388. Voir aussi M. Panza et S. Roero (éd), *Geometrica, flussioni, differenziale. Osservationi nella matematica dell'600*, La Citta del sole, Napoli, 1995.

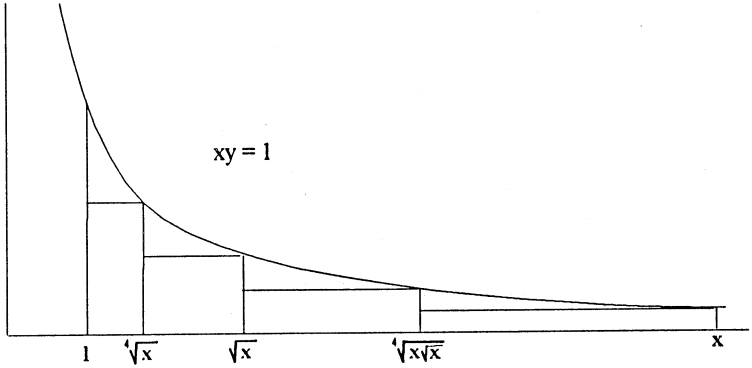

Figure 4

Si par contre le signe $\int_1^x$ désigne l'intégrale définie, c'est-à-dire une procédure universelle de passage à la limite à partir de sommes de Riemann quelconques, alors Grégoire de Saint-Vincent en est loin et en sont aussi loin les fondateurs du calcul intégral que sont Newton et Leibniz. Les deux génies qui publieront au plus tôt quarante ans après la publication déjà très tardive de Grégoire ont, quant à eux, pensé le signe de l'intégrale définie $\int_1^x$ comme indiquant l'opération inverse de la dérivation. En l'occurrence du logarithme, ils ont imaginé la relation

$$\frac{d\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

C'est aussi la formule qui peut rendre compte du calcul d'erreur de Napier. Grégoire de Saint-Vincent est encore loin de cette formule.

On le constate d'ailleurs en remarquant que les successeurs des fondateurs du Calcul peuvent déduire la propriété fonctionnelle du logarithme — sa raison d'être — de sa seule expression intégrale[29] qui peut dès lors servir de définition. Puisque

29 Je ne cherche pas ici à mieux situer les auteurs de cette démonstration. M'intéresse seulement le fait que la relation fonctionnelle du logarithme, au lieu de servir de définition d'existence, ait pu être déduite d'une autre définition.

$$\partial\frac{(\ln(xy))}{\partial y} = \frac{1}{xy}.x = \frac{1}{y}.$$

La dernière expression est égale à $d\frac{(\ln(y))}{dy}$. La différence ln (xy) - ln(y) est une constante en y, mais elle dépend de x. Par symétrie en x et y, on a finalement la relation même que Briggs trouvait pour les logarithmes décimaux,

$$\ln (xy) = \ln x + \ln y.$$

On aura remarqué le jeu fonctionnel dans cette démonstration, bien adapté au calcul différentiel ; on aura aussi remarqué la disparition de l'hyperbole.

A bon droit toutefois, et sans disposer de ces explications, Grégoire de Saint-Vincent aurait pu qualifier de "naturel" le logarithme par lui obtenu. Dans la mesure où s'imposait une base particulière du logarithme. Le naturel mathématique résultait de la capture par une tradition. La propriété fonctionnelle du logarithme, jusque là un artefact recherché comme tel, devenait l'effet naturel de la courbe hyperbole, courbe acceptée en mathématique depuis au moins les *Coniques* d'Apollonius. A condition de faire entrer dans cette mathématique la considération d'une aire comme fonction.

LA PUNITION DES LOGARITHMES : UNE PARADOXALE ET PROVISOIRE MISE A L'ECART

Il n'y a donc rien de naturel au fait que les logarithmes furent si peu présents jusqu'en 1660. Absents des recherches des mathématiciens ; absents de l'enseignement aussi. On ne saurait en l'occurrence parler d'un décalage de l'enseignement par rapport à la mathématique faite et l'explication par le retard de la pédagogie est une fois de plus inexacte. Trop habitués à la marche inéluctable du progrès — un lieu commun — les historiens sont avares d'autres explications pour le déclin du logarithme, une disparition provisoire puisque celui-ci va revenir en force. S'il est toujours instructif de rendre compte des aléas d'une postérité, c'est que seul un faisceau de raisons est vraisemblable, empêchant une éventuelle répétition historique d'une conjonction particulière.

On a pu évoquer le logarithme comme objet créé par des Protestants (Napier était un militant de la cause), et à ce titre il aurait été refusé par le monde intellectuel catholique, craintif d'être suspecté de collaboration, ceci alors même que des mathématiciens tels le Père Paul Habakuk Guldin ou encore le Père Grégoire de Saint-Vincent déjà nommé en connaissaient tous les rouages. Explication qui tiendrait mieux si les manuels mathématiques composés dans les pays protestants faisaient une bonne place aux logarithmes.

Voisine de l'explication précédente si du moins l'on suit Max Weber qui attribuait aux mentalités protestantes un éthos permettant un pragmatisme de l'aménagement de la vie d'ici-bas[30], le logarithme n'aurait pas fait souche dans les Universités sur lesquelles s'exerçait la prépondérance catholique, car trop lié à des procédures numériques, et donc simple facilité pour des techniques mineures, réservées à des astronomes professionnels ou à des maîtres de comptabilité. Il y aurait en quelque sorte eu rejet, disons plutôt spécialisation, au nom de la distinction entre ce que nous pourrions appeler les mathématiques pures et les mathématiques appliquées ; elle épouse plus ou moins la distinction qu'un monde savant d'autrefois se plaisait à faire entre arts libéraux et arts mécaniques. Dans la langue de Jacques Amyot traduisant au XVI^e^ siècle les *Vies parallèles* de Plutarque, il était rappelé qu'Archimède avait rendu...

> *la raison démonstrative un peu plus évidente et plus facile à comprendre au commun peuple, en la meslant par expérience matérielle à l'utilité de l'usage.*

Mais, poursuivait le texte, les *Platoniciens* estimaient qu'était ainsi *gâtée* la dignité de la géométrie, de sorte que

> *la mechanique ou art des ingénieurs, vint à estre séparée de la géométrie, et estant longuement tenue en mespris par les philosophes, devint l'un des arts militaires*[31].

Le logarithme aurait-il été la victime d'un dégoût du pratique, et d'une aristocratie de l'intellectualité pure ? Quels sont en effet les facteurs de socialisation d'une mathématique — celle des logarithmes — dont l'efficacité numérique fut indéniablement reconnue ? Faute d'imagination, ou par simple transposition, le sociologue des sciences, ou celui des communautés scientifiques, évoque le plus souvent cette socialisation en

---

30 M. Weber, *L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme*, trad. française, Paris, Plon, 1964.

31 *Vie de Marcellus*, dans les *Vies parallèles des hommes illustres*, Plutarque, trad. J. Amyot (du XVI^e^ siècle).

termes de conflit. Faute cependant de concurrent au logarithme[32], le conflit peut en l'occurrence être adapté à un niveau autre, celui d'une mathématique pure contre une mathématique appliquée. Et compte alors l'appréciation de la dynamique des positions intellectuelles.

Pour le moins, le débat sur le pur et l'appliqué, on disait alors plutôt mécanique, était ancien puisque Amyot ne faisait que traduire Plutarque. L'on voit donc mal pourquoi le privilège du pur se serait soudain réveillé pour contester le seul logarithme. On pourrait au contraire argumenter qu'en ce XVI^e^ siècle finissant et son successeur commençant les applications pouvaient avoir autant de sel que la théorie. Un témoignage est précieux. Dans la confession d'un esprit qu'est le *Discours de la Méthode*, Descartes qui a été très bien formé au collège jésuite de la Flèche dans les années 1610, exprime péremptoirement l'impression d'inutilité qu'il ressentait face à un parcours des différentes classes de mathématiques, qui ne sortaient pas des calculs, de l'appliqué :

> *Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons ; mais je ne remarquais point encore leur vrai usage, et, pensant qu'elles ne servaient qu'aux arts mécaniques, je m'étonnais de ce que, leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti dessus de plus relevé*[33].

Si Descartes peut passer pour le tenant d'une mathématique dure, et pure, preuve est au moins faite que l'enseignement aussi bien que les traités de son temps ne méprisaient pas les applications. A Euclide, magistralement expliqué par Clavius, avaient effectivement été adjoints dans les Collèges jésuites l'apprentissage de la Statique, procédant tout autant géométriquement et logiquement dans la classification des machines simples, et la manipulation des instruments mécaniques servant à dessiner, dont certains sont récupérés par Descartes même au profit de la théorie. On enseignait aussi la Sphère, une forme de trigonométrie sphérique et le lieu de l'appropriation de l'espace dans ses trois dimensions.

Aucune gêne donc pour des considérations mécaniques en ce début du XVII^e^ siècle, à l'école comme dans les livres. Alors que précisément somnolent les logarithmes nouvellement découverts, comme somnolent les idées algébriques qui ne trouvent pas place dans les enseignements.

---

32 La prostaphérèse ne subsista guère, et de toute façon elle relevait du monde des calculs.

33 René Descartes, *Discours de la méthode*, Leyde, 1637, p. 9 ; et p. 7, l. 24-30 de l'édition de E. Gilson, Paris, Vrin, 1976.

Dans le cadre éducatif au moins — mais existait-il un autre cadre pour cette discipline ? — la mathématique elle-même paraissait être devenue une application. Une application de la logique, et une application bienvenue car elle évitait l'abstraction aristotélicienne jugée inutilisable. Pour établir ce fait, il me faudrait fournir une coupe des enseignements collégiaux, et marquer les évolutions de la présentation de la logique en particulier. Il me faudrait surtout évoquer la distinction, au sens que Pierre Bourdieu donne sociologiquement à ce terme, effectuée progressivement au XVI[e] siècle entre philosophie et mathématiques. Au moins, Descartes confirme à sa manière profonde et aventureuse, puisqu'il avance l'idée d'une mathématique unique et impose même face à la tradition :

> *Mais je n'eus pas dessein pour cela de tâcher d'apprendre toutes ces sciences particulières qu'on nomme communément Mathématiques : et voyant qu'encore que leurs objets soient différents, elles ne laissent pas de s'accorder toutes*[34].

Cette unicité cartésienne du sens pourrait-elle avoir hiérarchisé le prestige intellectuel, et contribué à réduire la mathématique à sa partie pure ? Poser ainsi la question, c'est d'abord reconnaître un renversement vers 1640 de la mobilité dans le champ mathématique. Non l'implantation nouvelle de pratiques mathématiques appliquées, mais l'identification d'une mathématique unifiée et donc l'émergence d'un domaine en tant que tel.

L'argument adopté pour rendre compte de l'étrange stagnation du logarithme dans l'enseignement doit alors être mieux situé dans le contexte historique de ces années ; ce sont celles de la quatrième génération des collèges jésuites. Un équilibre avait finalement été établi quant aux mathématiques dont il ne faut pas oublier que le fondateur Ignace de Loyola avait surpris —ses disciples aussi bien— en insistant sur leur importance : l'*Euclide* de Clavius (la 1ère édition à Rome en 1574 est de la deuxième génération) servait désormais de référence obligée, livre du maître rendant tangible sur des cas précis et avec des commentaires argumentés à la mode scolastique, la logique dont la mathématique était porteuse. Tel était l'essentiel dans l'art de penser juste et vrai. Mais si le monde jésuite avait pris très au sérieux les mathématiques, puisqu'on ne peut négliger la moindre chose dans une logique *in concreto*, la nature des résultats exhibés se mit à importer nettement moins. La démarche primait les objets qu'elle atteignait ; du coup, quoique détaillé, le cadre élémentaire des objets euclidiens constitua un horizon suffisant. Au milieu du siècle, sa

---

34 René Descartes, *Discours de la méthode*, *op. cit.*, p. 21.

borne même avait valeur anthropologique et religieuse, pouvant servir dogmatiquement puisque de la sorte les mathématiques, étant par essence humaines et bornées, ne faisaient pas obstacle à la souveraine liberté de la pensée divine. On pourrait aller jusqu'à dire que l'impossibilité de résoudre certaines questions, comme celle de la quadrature du cercle, magnifiait la puissance du Créateur. Les gravures dont les livres mathématiques de la Compagnie sont ornés n'omettent jamais cette glorification. La faiblesse de la décimalisation dans ces ouvrages est tout aussi significative : la décimalisation marque une tendance à universaliser, et pour les mathématiques en légiférant à outrepasser toute borne. Dans la mathématique jésuite, mais j'ai tort de qualifier si fortement, la numérisation reste remarquablement cantonnée à la théorie ancienne, géniale mais parfaitement balisée, des proportions.

Si les logarithmes ne trouvent pas leur place dans cet enseignement, leur nature applicable n'était guère en cause. Jouait l'inutilité de données nouvelles pour l'apprentissage d'une logique à l'œuvre ; apprendrait-on quelque chose de plus dans l'art de penser juste en manipulant des relations fonctionnelles sur le produit et la somme, en fabriquant des tables, ou même en mesurant l'aire de l'hyperbole qui raccrochait ces tables aux classiques grecs ? La mathématique bien faite d'Euclide, revue par Clavius, était suffisante.

Ce fut donc l'objectif de l'enseignement "élémentaire" qui détourna d'une nouveauté ; elle serait venue déranger une mise en ordre bien éprouvée ; au mieux pouvait-elle concerner, à titre d'exercice, certains esprits curieux. De la même façon, on voit dans des collèges jésuites enseigner quelques propriétés des nombres, issues des considérations de Diophante, par exemple à l'initiative du père Jacques de Billy. Une simple curiosité. Le cartésianisme mathématique n'a pas pénétré le collège, et on pourrait discerner les processus d'évitement en analysant des manuels comme ceux de Tacquet des années 1650.

Pour les esprits cartésiens de ces années-là, le logarithme posait le problème que Grégoire de Saint-Vincent avait résolu par un acte dont on mesure mieux la témérité en écoutant le silence des contemporains : pouvait-on calculer et même raisonner sur quelque chose qui n'était pas algébrique. Descartes éliminait en effet de sa *Géométrie* la considération des courbes ne se réduisant pas à une équation polynomiale ; les autres courbes étaient symptomatiquement qualifiées de *mécaniques*. Le rejet est principiel, par absence de méthode de classement, et impossibilité de raisonner clairement et distinctement sur elles. C'est un rejet scientifique. Ces autres courbes ne peuvent suivre la régularité des courbes algébriques qui sont régies par le degré, la grande invention cartésienne. Mais Descartes n'avait pas prévu que le calcul des aires de courbes algébriques puisse faire sortir du domaine algébrique.

L'exercice d'une double rigueur rend ainsi le mieux compte de l'obsolescence des logarithmes dans le monde mathématique du deuxième tiers du XVII^e siècle. La rigueur d'un enseignement adoptant un objectif limité dans le déploiement de l'argumentation mathématique, et la rigueur de la limitation à un type calculable d'objets[35].

Si l'on voulait faire entrer cette rigueur dans les catégories historiques, il conviendrait d'user de l'épithète de classique. Pour faire une opposition avec le foisonnement baroque antérieur où les applications chevauchaient allégrement les théories, et avec la révolution ultérieure des Modernes. Les organisateurs du calcul différentiel et intégral dans le dernier quart du XVII^e siècle et les premières décennies de son successeur, n'eurent aucune gêne à "appliquer" leurs découvertes et fondèrent la physique mathématique ; ils ne négligèrent pas le logarithme, mais le redécouvrirent. Il devint un symbole de la simplicité offerte par le nouveau calcul. Le classicisme mathématique des années 1640 à 1660, et sans doute jusqu'à 1680 pour une majorité de personnes, est donc tout à la fois une pratique d'enseignement et un objectif logique de classification abstraite assigné à cette science dont la dissociation est d'autant plus voulue d'avec le réel qu'elle est chargée d'en rendre compte.

Pour répondre à la question de la postérité chancelante des logarithmes, nous avons dû composer une périodisation des mathématiques. Elle emprunte à l'histoire de l'art par les mots de classique ou de baroque, et d'ailleurs jusqu'à celui de Modernes qui fait évidemment référence à la querelle littéraire des Anciens et des Modernes de la fin du XVII^e siècle. Ainsi pour faire de l'histoire des mathématiques, le concept de style est souvent utile, sans toujours être suffisant.

Le style de la mathématique des Lumières est évidemment autre que celui de la mathématique classique. C'est ce nouveau style qui nous conduit enfin au logarithme "naturel", et ce par la voie de l'analytique.

---

35 En l'occurrence du logarithme et de son déclin, je ne pense pas qu'il soit possible d'utiliser la notion d'obstacle épistémologique élaborée par G. Bachelard afin de rendre compte du mouvement en histoire des sciences. Ou alors, il faut la transformer et parler d'un horizon épistémologique, l'horizon étant ce qui enclôt une vision.

La découverte d'une logique de calcul, d'une logique même de l'écriture algébrique, a remis en selle les logarithmes dont les tables, nous l'avons déjà dit, n'ont jamais été négligées par les utilisateurs. Alors seulement, au prix d'un détour de la postérité de Napier, le logarithme devient naturel. Cette logique a débuté par une curiosité qui peut paraître aussi piquante que celle exhibée par Grégoire de Saint-Vincent. Vers 1657, lord William Brouncker (1620?-1684) conçut un moyen de calcul direct du logarithme. Mais n'en fit pas une grande affaire, et pendant dix ans ne publia pas. Il numérotait astucieusement des rectangles sous l'hyperbole, et le faisait à partir d'un découpage uniforme de l'abscisse donc indépendant de la courbe. Partant de x = 1 et x = 2, au lieu de la moyenne géométrique il introduit le milieu $x = 1+\frac{1}{2}$ puis les milieux des deux segments intermédiaires $1+\frac{1}{4}, 1+\frac{3}{4}$ dégageant à l'étape générale les points "milieux" $1+\frac{k}{2^n}$ où l'entier k varie de 0 à 2^n. Quoique familière aujourd'hui par la pratique des axes de coordonnées, cette division n'avait rien de normal alors, car contrairement à celle examinée par Grégoire qui insérait des moyennes géométriques, elle n'était pas explicitement entraînée par la nature de l'hyperbole. Sauf à penser *a priori* au passage de moyenne géométrique à moyenne arithmétique, passage que le logarithme organise depuis sa création par Napier.

Ainsi, l'œuvre de Grégoire de Saint-Vincent, occultée pour diverses raisons, n'en travaille pas moins la réflexion de Brouncker[36]. Et ce dernier numérote par leurs tailles successives les rectangles inscrits, à partir du plus grand ABCD, du second obtenu par le premier milieu, DEFG, des deux suivants avec les deux nouveaux milieux GHIJ et EKLM, etc.

L'aire hyperbolique s'écrit comme somme infinie des aires de ces rectangles : ABCD + DEFG + GHIJ + EKLM.... L'ordre d'inscription

---

[36] The Squaring of the Hyperbola, by an infinite series of Rational Numbers, together with its Demonstration, by that Eminent Mathematician, the Right Honourable the Lord Viscount Brouncker, *Phil. Trans.*,N°34, p. 645, Monday, April 13.1668. L'article débute par le rappel d'une phrase de Wallis, selon laquelle « the World one day would learn from the Noble Lord Brounker the Quadrature of the Hyperbola ».

consiste à parcourir successivement les rectangles de gauche à droite grâce aux nouveaux milieux, puis arrivé au terme du segment (à l'abscisse 2), à revenir à gauche. Une régularité apparaît sur les valeurs successives des sommes de ces aires de rectangles. En effet

$$\text{Aire (ABCD)} \quad = (2-1)\frac{1}{2} \quad = \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{1.2}$$

$$\text{Aire (DEFG)} \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) \quad = \frac{1}{2}\frac{1}{6} \quad = \frac{1}{3.4}$$

$$\text{Aire (GHIJ)} \quad = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right) \quad = \frac{1}{4}\frac{2}{15} \quad = \frac{1}{5.6}$$

$$\text{Aire (EKLM)} \quad = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right) \quad = \frac{1}{4}\frac{1}{14} \quad = \frac{1}{7.8}$$

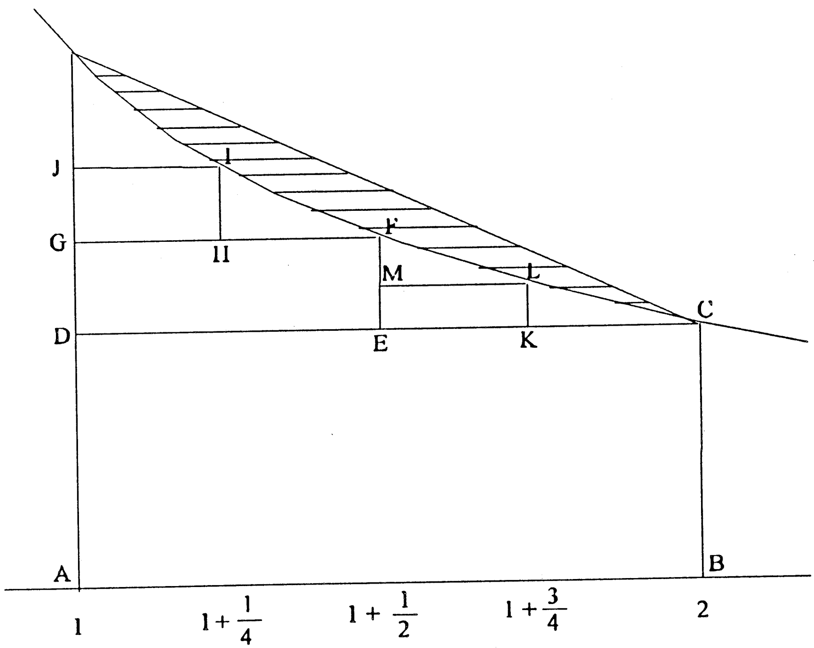

Figure 5

Régularité qu'il est facile aujourd'hui de vérifier à partir du calcul géométrique d'un rectangle générique,

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{2^n}}-\frac{1}{1+\frac{k+1}{2^n}}\right)=\frac{1}{(2^n+k)(2^n+k+1)}.$$

Sans coup férir, et au besoin un rigoureux raisonnement euclidien d'exhaustion le justifierait, l'aire hyperbolique peut s'exprimer par une suite (d'additions) qui ne se termine pas,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots$$

D'après le résultat même de Grégoire de Saint-Vincent, cette expression est encore celle de ln (1 + x) où pour atteindre 2 l'on fait x = 1. D'où la formule :

$$\ln 2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots$$

Or $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$ De sorte qu'une expression simple mais infiniment continuée résume la valeur du logarithme naturel de 2

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

Prise telle quelle, d'une telle formule on ne peut rien espérer du point de vue du calcul puisque les termes étant alternativement positifs et négatifs, et décroissant en valeur absolue, l'erreur si l'on s'arrête au terme de rang n, est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Il faudrait donc calculer mille termes afin d'avoir seulement trois décimales exactes du logarithme naturel de 2 !

La seule présence d'une écriture algorithmique, c'est-à-dire se répétant régulièrement, implique cependant la calculabilité, à laquelle une astuce doit permettre d'avoir un meilleur accès. Et Brouncker de vérifier aussi bien que l'aire du segment hyperbolique convexe (celui qui est hachuré sur la figure 5) s'exprime par une série dont la convergence est déjà plus rapide,

$$\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\cdots+$$

La valeur de cette aire correspond précisément à $\frac{3}{4} - \ln 2$ comme le montre facilement la géométrie, et l'on a ainsi une approche possible de ln2.

Brouncker publia alors ses résultats dans le journal dont venait de se doter la jeune *Royal Society* de Londres : les *Philosophical Transactions*, au n° 34 en 1668. Il le fit de façon précipitée. C'est que Nicolas Mercator (1620-1687) annonçait à paraître à Londres une *Logarithmotechnia* dont le contenu supplantait les efforts de Brouncker. Un extrait en parut effectivement au n° 38 des *Philosophical Transactions* en 1668. On mesure ainsi une tension intellectuelle autour des mêmes idées, une concurrence qui aiguillonne, et la régulation qu'apporte la publication académique. La mathématique de ces années est en pleine effervescence : on pressent que quelque chose d'important va se passer.

Chez Mercator calculant le logarithme, si astuce il y a, elle est le résultat d'une méthode agencée par un objectif. Le sous-titre de son livre dit explicitement : *sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis*. L'objectif cartésien de Mercator consiste à réduire le logarithme à du connu, et comme il ne saurait y avoir atteinte d'un connu algébrique, on doit raisonnablement envisager une procédure algébrique d'approximation. Quoique la fonction logarithme ne se calcule pas comme un polynôme, cependant elle s'approche d'un tel objet ; il faudra adopter un degré infini pour le polynôme. N'est pas anachronique chez Mercator le mot fonction qui n'a pas encore reçu une appellation — ce sera le fait ultérieur de Leibniz — car Mercator part de l'aire sous l'hyperbole prise dans sa dépendance avec la variable x, à la façon même dont Grégoire le fit. Remarquant le rôle d'origine que joue l'unité pour tout logarithme (log 1 = 0), il utilise la variable 1 + x, et parvient à l'écriture

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \tag{9}$$

Parce que cette expression provient de la considération de l'aire, et bénéficie donc du privilège du continu géométrique, Mercator parle de *logarithmi non tabulares*. Ces logarithmes sont naturels, et les voilà enfin qualifiés pour les distinguer des logarithmes jusqu'à présent calculés arithmétiquement, et par approximation, dans les tables.

Caeterum ex iis, quae hactenus differuimus, fatis liquet, naturam Logarithmorum Geometriae nullo modo obnoxiam esse ; sed verius ac liquidius ex proprio suo fonte manare[37].

Un double effet a permis la qualification du naturel, la représentation géométrique à la Grégoire de Saint-Vincent d'une part, et la réduction à une série d'autre part. Visualisation et calcul, mais visualisation dans un cadre traditionnel et calcul dans un cadre nouveau, l'algèbre des séries, l'algèbre polynomiale cartésienne élargie. Un nom en mathématique, ici le mot naturel, est le plus souvent fixation d'une procédure. Celle-ci fixe aussi l'histoire, mais elle ne dit pas forcément toute l'histoire lorsqu'on la lit des siècles plus tard.

Il y eut conscience immédiate de la remarquable fiabilité de la formule (9) ; elle permet une tabulation directe des logarithmes dès que x est suffisamment petit, une valeur absolue inférieure à 1 assurant la convergence. Grâce à la propriété fonctionnelle du logarithme, voire la relation (4) du décimal, on peut toujours se ramener à ce cas dès lors que l'on connaît les logarithmes des entiers successifs. Ainsi, la forme même de la formule (9) ouvre un nouvel horizon. C'est celui des séries entières.

Le dire ainsi, c'est trop masquer par une description technique la nature même du changement opéré : il faut voir que l'algèbre s'impose et ceci est la postérité cartésienne. Une algèbre des polynômes ordonnés - la variable indifférenciée x étant par ses différentes puissances le nouvel alphabet de la langue mathématique - porte représentation des opérations suscitées par la géométrie, et le fait automatiquement. A la dernière proposition de son article des *Philosophical Transactions*, Mercator donne l'expression de l'intégrale du logarithme, ce que nous notons sous la forme

(10) $$\int_0^x \ln(1+t)dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \cdots$$

C'est ce qu'il appelle *Invenire summam logarithmorum*, l'intégrale du premier membre étant dite par lui *summae omnium Log-orum* (Prop. 19). Pour l'obtenir il lui suffit de faire jouer l'intégration terme à terme des fonctions puissances sur la formule (9). De sorte que pour comprendre le sens de cette même formule, Mercator a commencé par établir l'expression mère, à savoir le développement infini du binôme

(11) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

[37] N. Mercator, *Logarithmo-technica sive Methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis*, Londres, M. Pitt, 1668, p. 27.

(*Atque ita continuatâ operatione, deprehenditu* $\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 (\& c))$. Et il l'a établie par le procédé le plus anciennement opérationnel, la division. Une division euclidienne qui doit tenir compte de la variété indéterminée qu'est x : telle est bien la nature foncière de l'algèbre. Aussi bien, Mercator tient-il à dresser un tableau divisionnel où les quotients successifs apparaissent dans la colonne de droite

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & & & & \\
1 & +a & & & \\
0 & -a & & & -a \\
 & -a & -aa & & \\
 & 0 & +aa & & +aa \\
 & & aa & +a^3 & \\
 & & 0 & -a^3 & -a^3
\end{array}
$$

Nous avons cité Mercator (de son nom allemand Kauffmann), parce qu'il fut le premier publié, mais il serait tout aussi juste de mentionner Newton qui, dans ses manuscrits de la fin des années 60, fixe beaucoup plus amplement la méthode des séries (jusques et y compris pour le logarithme) : la première version latine, non publiée, de la *Méthode des fluxions et des séries infinies* est de 1671 (publication en anglais par John Colson en 1736 et traduction française en 1740 par Buffon). C'est John Wallis qui avait commencé l'étude des séries entières dans son *Arithmétique des infinis,* publiée en latin en 1655. Un tel mouvement, un tel changement de naturalité mathématique, requiert une réorganisation. Le professeur Wallis, sans se contenter du formalisme algébrique, éprouve le besoin de justifier le passage de (11) à (9). Ou plutôt, il lui paraît nécessaire de montrer le jeu de l'intégration sur les séries. Il procède ainsi à la naturalisation de l'intégrale par les séries, elles-mêmes entrant de façon novatrice dans la mathématique, mais pouvant être considérées comme naturelles par leur filiation algébrique. Wallis part de la signification de l'intégrale comme mesure d'une aire à partir des rectangles inscrits, bref avec des sommes de Riemann à pas équidistants. Il est facile de reconstituer sa démarche. Si nous la décrivons, c'est pour montrer qu'elle n'est pas plus "rigoureuse" que celle de Mercator, du moins si on la juge à l'aune de l'analyse du XIX^e siècle : il y a les mêmes commutations des opérations terme à terme sur une somme infinie. Si Wallis illustre les séries, c'est aussi pour en montrer la flexibilité : elles sont adéquates à l'intégration. Afin de bien montrer un mouvement du long terme, de la description de la démarche de Wallis j'adopte la version française[38] qu'en proposa un siècle plus tard Labey, en 1796.

Dans l'hyperbole équilatère, dont la puissance $= 1$, *on a l'équation* $xy = 1$, *ou* $y = \frac{1}{x}$ *Si on veut avoir l'espace asymptotique terminé par deux ordonnées, dont le plus voisine du centre* $= 1$, *par la portion de la courbe correspondante et par la partie z de l'abscisse totale x, comprise entre ces ordonnées, on imaginera cet espace partagé en une infinité de petits rectangles, dont les bases prises sur la ligne des abscisses soient égales entr'elles et infiniment petites ; je les représente par h. Il est clair que la surface du premier, à compter de l'ordonnée* $= 1$, *sera* $\frac{1}{1+h}$, *celle du second* $\frac{h}{1+2h}$, *celle du troisième* $\frac{h}{1+3h}$, *etc. Donc l'espace total* $= h\left(\frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \cdots + \frac{1}{1+z}\right)$ *(en réduisant chaque fraction en série).*

38 *Introduction à l'Analyse infinitésimale, par Léonard Euler ; traduite du latin en français, avec des Notes et des Eclaircissements*, par J.B. Labey, Professeur de Mathématiques aux Ecoles Centrales du Département de la Seine, Paris, Barrois aîné, an IV, 1796, pp. 319-320, note à l'article 122. Dans le texte, j'ai remplacé le e infiniment petit par h, pour éviter une confusion avec la base des logarithmes népériens.

Ce qu'il y a d'algèbre en analyse

$$h(1+1+1+1+etc)$$
$$-h^2\left(1+2+3+\cdots+\frac{z}{h}\right)$$
$$+h^3\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+\frac{z^2}{h^2}\right)$$
$$-h^4\left(1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+\frac{z^3}{h^3}\right)+etc$$

Or en général $1^m+2^m+3^m+4^m+5^m+\cdots+=\frac{n^{m+1}}{m+1}$ *lorsque*[39] $n=\infty$ ...

L'espace asymptotique, dont il s'agit, sera donc :

---

39 Labey donne une explication que nous reprenons un peu autrement pour faire voir le jeu algébrique du calcul des limites et la présence des infinis. Chaque "fraction" est développée en série géométrique

$$\frac{1}{1+jh}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k j^k h^k$$

On regroupe suivant les puissances ordonnées de h, en faisant intervenir le nombre de pas de taille h permettant d'atteindre x=1+z, soit z = nh. Il vient le terme général $(-1)^k h^{k+1} (1^k+2^k+\ldots+n^k+\ldots)$ pour la série ordonnée en puissances de h. Or, en fonction de l'entier k, la somme $1^k+2^k+\ldots+n^k$ peut être estimée asymptotiquement lorsque n tend vers l'infini. C'est ce que Wallis avait prouvé dans son *Arithmétique des infinis* de 1655. A savoir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

Si l'on suppose que la limite du nombre de droite existe — posée égale à A — on peut la calculer en évaluant de deux façons. D'une part, il est évident que

$$\frac{\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)-\left(1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k\right)}{n^k}=1$$

D'autre part, à des termes près qui tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$, chacun des termes du numérateur vaut $A\, n^{k+1}$ et $A\,(n-1)^{k+1}$.

$$h=\frac{z}{h}-h^2\frac{z^2}{2.h^2}+\frac{z^3}{3.h^3}-h^4\frac{z^4}{4.h^4}+\text{etc}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{etc}$$
$$=1(1+z)=1.x.$$

Donc les espaces asymptotiques comptés depuis l'ordonnée = 1, sont exprimés par les logarithmes des abscisses totales correspondants.

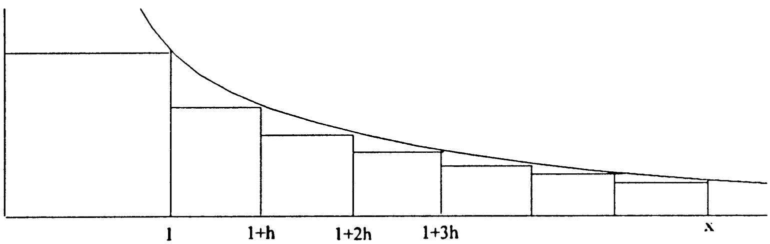

figure 6

Ce sont les séries entières qui ont permis l'intégration des logarithmes dans la culture mathématique[40]. A tel point que l'organe hyperbolique a pu être

---

On utilise le développement du binôme $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\approx 1-\frac{k+1}{n}$ de sorte que le premier membre vaut A (k+1)+ (termes en nombre fini tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$). En égalant ceci à l'unité, on déduit

$$A=\frac{1}{k+1}.$$

Le jeu consiste alors de prendre n infiniment grand et h infiniment petit, en conservant cependant le produit nh constant (égal à z). On a bien un terme général,

$$(-1)^{k+1}\frac{h^{k+1}n^{k+1}}{k+1}\approx(-1)^{k+1}\frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

D'où l'expression du logarithme,

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots.$$

40 On trouvera une histoire des séries entières dans de nombreux ouvrages, et notamment les classiques de l'histoire des mathématiques, J.E. Montucla déjà cité ou M. Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Teubner, 1898, vol. 3, ou R.A. Reiff, *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buch, 1889 (rééd., M. Sanding 1969). Un exposé mathématique, mais avec toutes les

oublié, le mot naturel étant au final préféré, se référant à une nature numérique des choses mathématiques. Le titre d'un article de Edmund Halley de 1695 est significatif de la nouvelle appropriation mathématique :

> *A most compendious and facile Method for Constructing the Logarithms, exemplified and demonstrated from the Nature of Numbers, without any regard to the Hyperbola, with a Speedy Method for finding the Number from the Logarithm given*[41].

Ce titre dit une histoire fausse, ou plutôt il attribue à Napier même, fondateur des logarithmes, le sens d'une propriété naturelle des nombres, là où Napier construisait un repérage, un numérateur des raisons. On n'en reste pas moins dans le mouvement de numérisation, et en particulier la qualité de l'approximation n'est pas sacrifiée puisque Halley s'appuie sur la série numériquement performante

$$\ln\frac{1+\frac{x}{z}}{1-\frac{x}{z}} = 2\frac{x}{z} + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x}{z}\right)^5 + \cdots$$

L'approximation fait alors usage du même outil que la théorie[42], la série entière, et cette adéquation constitue un style.

L'ANALYSE DES LOGARITHMES

De telles séries, les numériciens du XVIIIe siècle ne seront pas avares, à commencer par Euler lui-même. Qui n'en institue pas moins un renversement à propos du logarithme. En ce sens qu'il le déduit désormais de la fonction exponentielle, tout en conservant la méthode des séries entières. L'analyse mathématique se met en place ; la série du logarithme est déduite sans que la géométrie de l'hyperbole ne joue ; il n'y a que des

références historiques est celui de A. Pringsheim, G. Faber et J. Molk, *Analyse algébrique*, in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, vol. 2, fasc. 1, 1911, Gauthier-Villars ; reprint J. Gabay, 1990.

[41] *Phil. Transactions*, 19, 1695, p. 58-67.

[42] Voir le collectif, *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*, Belin, Paris, 1993.

relations fonctionnelles. Si le logarithme passe en second, c'est que l'exponentielle est promue à une prééminence de naturalité. L'exponentielle de base e est donc à son tour qualifiée de naturelle. Cela mérite explication, car rien dans les séries entières concernées ne permet d'en considérer une comme plus naturelle que l'autre.

Deux étapes scandent l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* dont l'original latin parut à Lausanne en 1748. Euler part de $y = a^z$.

> *Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z, en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y, s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y*[43].

Euler travaille sur des nombres réels et la croissance de l'exponentielle est pour lui un donné ($a > 1$), celle du logarithme s'en déduisant par réciprocité. C'est donc par la méthode des fonctions réciproques, une des bases des exposés actuels de l'analyse élémentaire, qu'apparaît le logarithme. Le jeu de réciprocité porte sur la fonction elle-même, et il ne dépend pas des séries. Ces dernières instrumentalisent le concept de fonction ; elles ne le fondent plus. Tel est le mouvement de l'analyse, qu'à juste titre Euler considère comme étant celle des fonctions. Il est notable qu'il associe plutôt les séries au calcul différentiel, notamment dans son manuel de 1755.

La deuxième étape chez Euler, une fois posée la définition du logarithme comme fonction inverse de l'exponentielle est celle du développement en série entière. Mais il entend mettre l'infini à la base du calcul, et ne veut pas s'en laisser imposer par le formalisme algébrique des séries lancé par Wallis, et plus tôt encore par Descartes. Euler recherche un principe fondateur d'analyse, qui ne soit pas le calcul différentiel. L'idée est d'écrire tout nombre réel x comme produit d'une quantité infiniment grande par une quantité infiniment petite (on peut penser à x comme limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression $n.\frac{x}{n}$) Et il traite ensuite ces quantités de façon purement algébrique et indépendante[44]. L'algèbre ne perd donc pas son utilité ; elle est cependant à la fois localisée car non fondatrice, et agrandie pour jouer sur les infiniment grands ou petits. Euler

---

43 *Introduction à l'analyse infinitésimale*, cité en trad. française, p. 72.

44 Tel a été déjà le jeu de la démonstration du développement en série entière du logarithme, dans la version de Labey de la méthode de Wallis.

part du fait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ existe ; la valeur de cette limite est posée égale à k. De sorte que son calcul se présente sans même l'indication d'un passage à la limite

$$a^x = a^{n\frac{x}{n}} = \left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{kx}{n}\right)^n.$$

Ce calcul manifeste avant tout la propriété fonctionnelle de l'exponentielle, $a^{n+m} = a^n.a^m$, les variables n et m étant indéterminées. La "nature" de l'exponentielle, d'abord posée par Euler comme une extension de la fonction puissance par discrimination de la variable (passage de x^a à a^x) est réduite à une seule relation. On pourrait parler d'un retour à Napier, ou plutôt sa postérité. Mais la découverte d'une transcendance par Grégoire de Saint-Vincent est quant à elle reprise sous la forme d'un classement, la comparaison de la fonction exponentielle à la fonction puissance, donnée sans démonstration :

D'après ce que nous venons d'exposer, il est clair qu'il n'y a de logarithmes rationnels que ceux des puissances de la base a... Puisqu'aucun nombre, soit rationnel, soit irrationnel[45]*, ne peut représenter les logarithmes des nombres qui ne sont pas des puissances de la base, on a donc raison de les rapporter aux quantités transcendantes ; et c'est la cause pour laquelle on a coutume de ranger les logarithmes parmi ces dernières*[46].

Choisir k égal à 1 dans le calcul précédent d'Euler détermine une base particulière ; elle est posée comme nombre e. Le calcul impose cette simplification ; algébrique, elle ne peut qu'être qualifiée de naturelle. La formule est seulement simple, ce qui signifie qu'elle résume ce qui est fondateur. Euler a donc imaginé ce que nous notons plus explicitement

(14) $$e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[45] Le mot irrationnel désigne ici un nombre non rationnel dont une puissance entière serait rationnelle. Euler estime évident que $a^{\sqrt{2}} = b$ est une équation impossible en nombres rationnels a et b (> 1). Prouver la transcendance de α^β, lorsque α et β sont des nombres algébriques, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, β non rationnel, est le programme du 7ème problème de Hilbert de 1900, résolu par Gelfond et Schneider.

[46] *Introduction à l'analyse infinitésimale*, *op. cit*, p. 74.

Selon l'inversion usuelle des équivalences en mathématiques, il sera possible de définir e^x par (14) et d'en déduire la relation fonctionnelle. A partir de (14), la série -c'est-à-dire l'instrument attendu- est presque en vue ; l'algèbre ordinaire la procure, mais à condition de l'appliquer à des quantités infinitésimales (grandes ou petites). Ce qui permet d'écrire le développement de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ selon la formule du binôme, n étant infiniment grand

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{x^3}{n^3}+\cdots$$

Toujours parce que n est infiniment grand, chaque coefficient se simplifie. Je note volontairement des quotients faux pour manifester l'algèbre infinitésimale à l'œuvre et pour laquelle, aujourd'hui, il faudrait rajouter le symbole de la limite.

$$\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2}=\frac{n(n-1)}{n.2n}=\frac{1.(n-1)}{1.2n}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^3}=\frac{n}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{n-2}{3n}=\frac{1}{3}.$$

et ainsi de suite. D'où la formule phare de l'exponentielle, la formule eulérienne par excellence

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{15}$$

Cette formule dresse la valeur de e ≅ 2, 718281828459045235360 28 "dont le dernier chiffre est encore exact" explique-t-il.

La théorie n'est certainement pas dissociée du calcul numérique. L'a-t-elle été jamais dans le parcours des logarithmes ? Si le numérique apparaît comme ce que les historiens appellent l'insertion matérielle, alors l'histoire des logarithmes en fait un usage exemplaire. Je ne veux pas m'étendre ici sur la pratique des tables, sur la sociabilisation des colonnes ordonnées de chiffres, ou sur le rôle de calculateurs alors très connus, comme Thomas Fantet de Lagny[47]. Il y a toute une culture du nombre tabulé dans les premières décennies du XVIIIè siècle. Cette culture accompagne les logarithmes qui la développent aussi bien.

---

[47] Voir P. Chevrier, J.Flouret, S. Papay, "Thomas Fantet de Lagny, expert de l'algorithme" in J. Dhombres (éd.), *Aventures scientifiques en Poitou-Charentes*, Poitiers, 1995, pp. 110-123.

En inversant convenablement les variables, le logarithme est nécessairement susceptible du même traitement que l'exponentielle sous la plume d'Euler. Soit avec $x = \ln(1+y)$, l'exponentielle $e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+y$, ou encore $x = n\left[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$ Ce que nous écrivons aujourd'hui sous une forme où la limite apparaît explicitement :

$$\ln(1+y) = \lim_{n\to\infty}\left[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1\right]. \tag{16}$$

Tel est le pendant logarithmique de la formule (16) relative à l'exponentielle. Et, comme avec l'exponentielle, un traitement algébrique des quantités infiniment grandes est possible, conduisant à la série du logarithme, série qui est l'objectif.

$$(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n}y + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}y^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.2.3}y^3 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{1.2.3.4}y^4 + \cdots$$

Soit,

$$n\left[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = y - \frac{n-1}{n}\frac{y^2}{2} + \frac{n-1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{y^3}{3} + \frac{n-1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{3n-1}{3n}\frac{y^4}{4} + \cdots$$

Ainsi, le jeu sur l'infiniment grand n, et la formule (16), fournissent la formule déjà proposée par Mercator, mais insérée cette fois dans une rationalisation, c'est-à-dire une théorie.

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \tag{17}$$

L'histoire des logarithmes est elle aussi inversée, l'origine devenant conséquence dans la très sobre explication d'Euler :

Les logarithmes calculés sur cette base, s'appellent logarithmes naturels *ou* hyperboliques, *parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole*[48].

Malgré la simplification du calcul à partir de la propriété fonctionnelle de l'exponentielle, propriété posée comme générique, le naturel paraît dépendre de la géométrie. Ce n'est pourtant qu'un adjectif de repère ici chez Euler ; il n'a plus de sens. La minoration de l'hyperbole est telle qu'il ne parle pas ailleurs dans le livre de l'intégrale ou de l'aire de l'hyperbole. Traducteur français du livre, J.B. Labey ne peut qu'y aller d'une note, car il est professeur à l'Ecole polytechnique et doit expliquer l'intervention devenue non naturelle de l'hyperbole. S'il reprend simplement la démonstration de Wallis dans la forme que nous avons donnée précédemment, il prend soin d'indiquer qu'elle exige la connaissance des sections coniques, ce qui manifeste pour lui un détour. L'ordre de ce qui est "naturel" en mathématiques a bel et bien été changé ; la géométrie n'est plus fondatrice, les nombres ont du naturel grâce au calcul des séries.

Architectes mathématiciens et enseignants sont alors au même diapason dans l'expression, variable, du naturel mathématique. Cette communauté ne signifie pourtant pas qu'ils soient partout en phase.

Suivons en effet Euler qui poursuit sa démarche d'algèbre infinitésimale. Il s'attaque aux fonctions trigonométriques et applique aux sinus et cosinus le traitement de l'exponentielle qui a si bien réussi pour le logarithme. Obtenant alors

(18) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

et

(19) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Il lui reste à résumer (15), (18) et (19) sous une formule unique ; elle s'obtient moyennant le passage aux valeurs complexes. Celles-ci trouvent ainsi un remarquable emploi et, de ce fait même, une justification "naturelle " de leur introduction pour le seul traitement particulier des polynômes,

---

[48] *Introduction à l'analyse infinitésimale*, *op. cit.*, n° 122, p. 89.

(20) $$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus et cosinus d'arcs réels[49]

dit Euler avec la sobriété du mathématicien. La généralisation des polynômes par les séries est justifiée car une méthode homogène est établie qui permet d'atteindre les fonctions bientôt dites fonctions élémentaires. Se dégagent les contours d'une analyse qualifiée à juste titre d'algébrique : les fonctions, définies pour elles-mêmes, sont gérées par les développements en série qui suivent formellement les règles mêmes des polynômes, et les objets qui interviennent à propos des polynômes - ainsi les nombres complexes qui réduisent ceux-ci - interviennent aussi bien pour les fonctions. Cela s'appelle une théorie, qui donne son lien à un style.

Il est facile de voir que cette théorie est vicieuse. Ce sont les seules fonctions analytiques qui sont ainsi valablement traitées, et non toutes les fonctions. Or, Euler, comme ses contemporains, adopte une définition large des fonctions. Par exemple, il définit l'exponentielle comme solution d'une équation fonctionnelle. Il lui faudrait, en rigueur, prouver *a priori* que la solution retenue est analytique. L'usage de la théorie fausse ne produit dans l'ensemble que des théorèmes incomplets[50] : c'est-à-dire que ceux-ci portent implicitement le présupposé analytique dont la reconnaissance les rend valides à nos yeux. C'est un intéressant paradoxe de l'histoire des mathématiques que cette validation par remplissage, qui fait peut-être spécificité mais sur lequel je n'ai pas le temps de m'étendre.

Installées dans la pratique mathématique depuis la seconde moitié du XVII^{e} siècle, théorie et approximation liées, les séries ne pénètrent pourtant pas l'enseignement, même lorsqu'il est question de logarithmes et ce malgré les prouesses calculatoires de nombreux praticiens du début du XVIII^{e} siècle. C'est que, tout au long de ce siècle, une fracture s'élargit entre enseignement et mathématique. Malgré une même conception de ce qui est naturel, on n'en parle pas moins de mathématiques *transcendantes* (ou sublimes) et de mathématiques *élémentaires*. La série du logarithme —

---

[49] *Introduction à l'analyse infinitésimale*, *op. cit.*, n° 138, p. 102.

[50] La difficulté n'est sérieuse que pour les théorèmes d'existence, par exemple ceux relatifs à la formule du binôme de Newton, ou pour le parallélogramme des forces. Car l'enjeu est alors de caractériser une fonction par ses propriétés et l'oubli de la régularité fausse le jeu axiomatique. Cf. J. Dhombres, "Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle", *Revue d'Histoire des Sciences*, t. 40, 2, 1987, pp. 179-202.

celle de Mercator qui date de 1668 — est ainsi ignorée de la grande majorité des esprits cultivés de la France des Lumières : au double sens du mot cette fois, elle appartient aux mathématiques transcendantes[51]. De sorte que, relevant des deux genres, les logarithmes subissent un traitement schizophrène. On en parle dans les manuels élémentaires, sans les construire ni même donner d'indication, mais les tables sont utilisées ; on les construit dans les manuels transcendants, sans reprendre leur usage, leur valorisation numérique. L'existence même d'une théorie de l'analyse algébrique la place en dehors de l'apprentissage scolaire, et l'on n'ose pas reprendre pour le niveau élémentaire, même provisoirement, une explication à la Napier, ou à la Grégoire de Saint-Vincent, car toutes les deux sont jugées peu naturelles .

La fracture entre les deux mathématiques correspond à une fracture culturelle, celle établie entre mathématiques et philosophie : non plus la distinction qui avait été consommée au XVI^e siècle pour séparer des formes du savoir, mais l'indifférence et l'ignorance réciproques. Elle correspond à la spécialisation accentuée de la science que l'*Encyclopédie* s'efforce pourtant d'effacer. Cette spécialisation contraint la mathématique à dire tout ce qui est en elle ; or certaines théories paraissent trop délicates pour l'entendement. Au lieu de bricoler ou d'admettre certains théorèmes, on préfère n'en pas parler. Les problèmes liés à la périodicité de l'exponentielle complexe (multivocité du logarithme) sont donc réservés aux mathématiques transcendantes. Ils n'en sont pas moins vifs, car il y a tension entre les propriétés du logarithme à maintenir, le développement en série entière et le prolongement analytique, la relation fonctionnelle, ou l'injectivité[52]

Avec les cours de l'Ecole normale et ceux de l'Ecole polytechnique en 1795, l'option est alors prise de combler la fracture opérée entre les deux

---

[51] Une étude de la signification de l'expression "mathématiques élémentaires" a été menée pour rendre compte de la formation d'un ingénieur dans le deuxième tiers du XVIIIe siècle, dans J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997 (chapitre II).

[52] Voir J.L. Verley, *La querelle des logarithmes imaginaires*. En 1806, suivant d'Alembert Lazare Carnot récuse encore les négatifs, en postulant le caractère injectif de la fonction logarithme et portant la contradiction selon $(-2)^2 = 2^2$ donc log (-2) = log 2. (Digression sur la nature des quantités dites négatives, in *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai sur la théorie des transversales*, Paris, Courcier, 1806).

mathématiques. L'analytique est devenu un langage dont on considère possible la pratique au niveau de formation requis pour un ingénieur et un instituteur. Assurément, la mathématique enseignée rejoint la mathématique pratiquée ; il y a là un principe posé au départ de l'enseignement moderne des mathématiques en France[53].

La grande dynamique d'approximation que nous suivions par le logarithme depuis Napier touche en effet à sa fin avec la construction architecturale que Cauchy donne en 1821 dans son *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, plus exactement avec la première partie qu'il intitule *Analyse algébrique*. Y est en effet construit le concept qui permet enfin de passer d'une table, artificielle et ne portant que sur des valeurs discrètes, à l'ensemble de tous les nombres : c'est le concept de fonction continue. Que Cauchy fait aussitôt agir sous la forme qui est opérationnelle pour tout le processus, à savoir le passage à la limite. Si f est continue sur un intervalle auquel appartient la variable x, alors pour toute suite x_n qui converge vers x, les valeurs $f(x_n)$ convergent vers f(x). Continuité et densité, voilà les ingrédients de la procédure, l'un touche aux fonctions, l'autre aux variables. Un nouvel équilibre théorique est trouvé, alors que l'analyse algébrique d'Euler rendait indifférente la nature de la variable.

L'effet est immédiat. La fonction logarithmique est aussitôt caractérisée par sa propriété fonctionnelle en ce sens que la fonction (avec la liberté d'une base quelconque) est montrée comme unique solution non identiquement nulle et continue de l'équation fonctionnelle

(21) $$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad x > 0, y > 0 .$$

Ce pourrait donc en être la définition. C'est en tout cas de cette manière que Cauchy construit la fonction logarithme sur le sous-ensemble des nombres complexes de partie réelle positive[54]. Mais la continuité permet tout aussi bien de valider la construction de Napier, le passage d'une progression géométrique à une progression arithmétique[55] ; Cauchy récupère donc toute l'analyse algébrique d'Euler et l'idée fondatrice de Napier dont il résume la postérité. Si le verbe récupérer fait vulgaire, disons mieux que, par sa

---

[53] Voir, *Leçons de mathématiques, Ecole normale de l'an III, Lagrange, Laplace, Monge*, Dunod, 1992.

[54] Cauchy, comme Euler avant lui pour l'exponentielle réelle, ne fait pas intervenir le calcul différentiel pour effectuer la construction du logarithme.

[55] J. Dhombres, El rigor o cómo se construye una idealidad, in Carlos Alvarez Jimenez (éd.), *Curso de analisis de Cauchy*, Mathema, Mexico, 1995, pp. 1-69. Pour les équations fonctionnelles, voir J. Aczél, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, 1989.

découverte de la continuité, Cauchy construit une tradition historique. Il se garde en effet de donner un caractère révolutionnaire à sa contribution. C'est ici, me semble-t-il, qu'il est intéressant de faire intervenir les options politiques, sociales, religieuses de Cauchy : c'est un Ultra, obsédé par la tradition. Ces options ne déterminent pas les théorèmes de Cauchy ; elles consonnent avec sa façon de faire pour socialiser sa mathématique[56].

Par sa construction même qui fait jouer la densité, Cauchy dérègle le fonctionnement de l'analyse algébrique : l'algèbre qui y figure n'est plus qu'un moyen au service du concept de continuité qui fixe l'analyse. Sans qu'il soit donc besoin de spécifier celle-ci par des objets comme les polynômes ou même les séries. On pourrait dire qu'il y a analyse des fonctions, ce qui n'est pas tout à fait exact, tant le domaine de la variable importe. C'est le seul substantif d'analyse qui est bientôt adopté. On a bien entendu : il n'y a qu'une analyse. Telle est la rançon de l'œuvre de Cauchy qui se veut normative pour l'enseignement. Se pose alors aussitôt la question de détacher de l'analyse les ingrédients utiles pour le seul logarithme : c'est une question que l'enseignement français va porter plus d'un siècle.

L'AVENTURE DES LOGARITHMES DANS L'ENSEIGNEMENT

Avec ce qui précède, le point est facile à faire. A partir des années 1820, un professeur possède une très large palette pour présenter et expliquer le logarithme, jusques et y compris dans sa qualification de logarithme naturel. Il peut adopter la voie des séries entières, que ce soit pour le logarithme ou pour l'exponentielle et déterminer ces series de diverses manières, dont celles de Lacroix dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral* de 1810 (Introduction) : le cadre de référence sera toujours l'analyse algébrique. Il peut, autrement, utiliser la propriété fonctionnelle constitutive des tables en la justifiant par la continuité, ce qui fait jouer l'analyse à la Cauchy et fait indéniablement moderne, mais cette analyse qui fait référence paraît requise dans sa totalité pour faire sens (avec le calcul des limites). Il peut aussi établir l'expression eulérienne (16), et plus simplement celle de l'exponentielle (14), en particulier sous la forme d'une suite croissante convergente, donc en rester à une théorie simplifiée des limites et des infiniment petits.C'est le choix d'un style élémentaire, mais la difficulté — celle de l'enseignant — est alors d'indiquer explicitement que

---

[56] B. Belhoste, *Cauchy, un mathématicien légitimiste*, Paris, Belin, 1985.

la fonction ainsi construite est continue. Car le résultat a l'air de déroger par rapport à l'esprit de construction adoptée, en mêlant deux styles. L'enseignant peut encore utiliser une équation différentielle $\left(\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\right)$, et effectuer de la sorte un retour à la géométrie de l'hyperbole. Et cette courbe apparaît alors médiatisée par le calcul intégral qui fonde désormais le naturel et balise une théorie. Elle est plus moderne encore que l'analyse algébrique de Cauchy, ou plutôt elle n'est que l'analyse poursuivie par le professeur de l'Ecole, qui ne s'arrête pas à son *Cours* de 1821 et continue sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Le pédagogue peut encore construire le logarithme dans le cadre de la théorie des fonctions d'une variable complexe, et utiliser la nouveauté sensationnelle de Cauchy, son calcul des fonctions par des intégrales le long de chemins géométriques.

Ces différentes méthodes de présentation des logarithmes, d'autres encore qui ne font pas nécessairement référence à une théorie, se partagèrent effectivement les manuels européens au cours des XIX^e^ et XX^e^ siècles. Il serait instructif de les sérier par auteurs, par périodes, et par pays, notamment en fonction des intentions éducatives affichées. Car, sur un des *topoi* de la quantification dont l'historien fait grand cas pour situer la modernité, on dresserait une carte des façons mathématiques, carte dont l'évolution pourrait servir à une géographie des mentalités. Les présentations ne suivent jamais l'ordre historique que nous avons tenté de reconstituer : l'enseignement construit autrement[57].

En France, s'il y a évolution des présentations, la géographie des logarithmes n'en est pas moins pauvre car les programmes ne laissent aucune liberté. Fait symbole l'échec d'Evariste Galois à son deuxième concours d'entrée à l'École polytechnique : il n'avait pas traité convenablement la question de cours ; elle portait sur les logarithmes *selon le mode arithmétique*. Le jeune mathématicien, que son professeur de Louis-le-Grand soutenait avec admiration, avait laissé courir son imagination qui coïncide d'ailleurs en l'occurrence avec la rigueur ; en

[57] Il est notable que malgré son allure géométrique la théorie des fonctions d'une variable complexe n'entre pas au XIX siècle dans l'enseignement secondaire. Apparaît une nouvelle démarcation entre mathématiques enseignées et mathématiques pratiquées (y compris par les ingénieurs). Mais la démarcation est de degré si l'on peut dire, alors qu'au XVIII^e^ siècle, il y avait deux mathématiques distinctes, indépendantes l'une de l'autre.

parlant de la continuité il était sorti du carcan arithmétique[58] ; il était derechef sorti du concours.

Des années plus tard, pour la classe de mathématiques élémentaires comme pour celle de mathématiques spéciales, l'arrêté de 1843 spécifie toujours une introduction "arithmétique" des logarithmes. Toutefois, le programme laisse place l'innovation intellectuelle par la formulation suivante : "Théorie des logarithmes considérés comme exposants". J'aimerais connaître concrétement l'application de cette directive dans les classes : mais disparaît le plus souvent la trace matérielle d'un enseignement, les notes prises à un cours par des élèves par exemple. L'histoire de l'enseignement est le plus souvent contrainte par les documents qu'elle peut exploiter, textes officiels et manuels[59].

D'après le réglement de septembre 1849, ce n'est qu'en troisième année de la section scientifique de l'enseignement spécial qu'il est question d'un segment d'hyperbole. Comble d'erreur théorique, le qualificatif d'approché est ajouté à la mesure demandée. Certes, la valeur numérique du logarithme peut être calculée par approximation selon un procédé d'intégrale, mais l'approximation ne tient pas en propre à la figure. Nous l'avons vu avec Grégoire de Saint-Vincent ou Mercator, la figure représente exactement un logarithme. Pour comprendre les objectifs d'un tel programme, il faut percevoir qu'est poursuivie la construction d'une seule théorie — c'est l'objectif des séries — et n'est pas visée prioritairement l'appropriation d'un objet particulier comme les logarithmes. Est à l'œuvre une conception de la mathématique organisée par théories et méthodes, une mathématique délibérement voulue comme moderne, et qui relègue en travaux pratiques toutes les autres présentations.

Le bouleversement apporté trois ans plus tard par le programme de 1852 est, dès la classe de troisième, de transférer les logarithmes de l'arithmétique à l'algèbre. Ce qui est directement conforme à l'objectif des séries. Le changement ne s'accompagne pourtant d'aucun changement conceptuel, alors même que le détail prescrit guide le professeur avec sévérité.

---

58 Un carcan dont on ne peut donner aucune justification historique - ce n'est pas l'œuvre de Napier, ni celle d'Euler - mais seulement une justification disciplinaire, la séparation au XIXe siècle entre les genres de la mathématique enseignée.

59 B. Belhoste a eu l'heureuse initiative de réunir ces textes officiels dans *Les sciences dans l'Enseignement secondaire français, textes officiels*, tome I, 1789-1914, INRP, Economica, 1995.

18,19. Principales propriétés des progressions arithmétiques et des progressions géométriques.
20. Des logarithmes.—Chaque terme d'une progression arithmétique commençant par zéro, 0, r, 2r, 3r, 4r... est dit le logarithme du terme qui occupe le même rang dans une progression géométrique commençant par l'unité, 1, q, q^2, q^3, q^4... Si l'on conçoit que l'excès de la raison q sur l'unité diminue de plus en plus, les termes de la progression géométrique croîtront par degrés aussi rapprochés qu'on voudra. Etant donné un nombre plus grand que 1, il existera toujours un terme de la progression géométrique, dont la différence avec ce nombre sera moindre que toute quantité donnée.
21. Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.—Corollaires relatifs à la division, à l'élévation aux puissances, à l'extraction des racines.
22, 23. Logarithmes dont la base est 10. — Tables. — Règles des parties proportionnelles —De la caractéristique. — Changement qu'elle éprouve quand on multiplie ou quand on divise un nombre par une puissance[60] *de 10.*
24. Usage des caractéristiques négatives (les logarithmes entièrement négatifs n'étant d'aucun usage, il n'en sera pas fait mention dans le cours.—Les définitions précédentes n'assignent pas de logarithmes aux nombres plus petits que 1. Quand il s'agit de calculer de pareils nombres avec les tables, on conçoit qu'ils soient multipliés par une puissance de 10, telle que le produit devienne supérieur à l'unité ; et il ne reste qu'à diviser, par cette puissance, le résultat fourni par les tables).
25, 26, 27. Application des logarithmes aux questions d'intérêts composés et aux annuités[61].

Ainsi, et de façon paradoxale car il y a eu passage à l'algèbre, sont proscrits les logarithmes négatifs, donc le libre jeu des exposants auparavant prescrits ; un commentaire d'application est formel : "Est-il besoin de dire qu'il ne doit point être fait mention des quantités négatives proprement dites ?" annonce péremptoirement le commentateur, qui n'est autre que Le Verrier, le "découvreur" de Neptune. Il poursuit certes par l'indication du jeu décimal selon la formule (6).

---

[60] On reconnaît là l'effet de la formule (6), qui va de surcroît justifier l'interdiction d'une expression négative d'un logarithme au n° 24.

[61] Décret du 30 août 1852, voir B. Belhoste, *op. cit*, p. 283.

On peut toujours ramener les caractéristiques des logarithmes employés dans un calcul à des nombres positifs, sauf à diviser le résultat final par une puissance convenable de dix, et c'est ainsi que le calcul des fractions, au moyen des logarithmes, doit être présenté. Si l'on veut, de plus, que le logarithme écrit fasse connaître la place de la virgule, rien n'est plus facile : on enseignera que de même que la caractéristique 2 indique que le nombre a deux chiffres significatifs avant la virgule, de même on est convenu que le caractéristique $\bar{2}$ *indique que le premier chiffre significatif vient deux rangs après la virgule*[62].

Mais une telle écriture ne saurait être pensée algébriquement sur le corps des nombres réels et le programme précise :

Ce doit être pour les élèves une convention, rien de plus. On aura d'autant plus raison d'agir ainsi, que, même dans la classe de seconde, lorsqu'on en viendra à l'enseignement de la théorie des logarithmes, on devra se garder de parler aux élèves de logarithmes entièrement négatifs, qui ne sont jamais d'aucun usage, mais introduire les caractéristiques négatives comme une conséquence de la convention qui sert à fixer le rang de la virgule.

La rationalité de ce texte est à trouver dans un après de l'enseignement, lorsque la "théorie des logarithmes" aura enfin été donnée par l'algèbre. Mais la mémoire de la précédente inscription arithmétique des logarithmes joue *a contrario* afin de limiter aux logarithmes positifs. Cette contradiction, perçue sur un cas mineur, me paraît caractéristique de l'élémentaire conçu à la française. On doit enseigner le plus moderne, sans concession (c'est-à-dire sans admettre à titre d'axiome certaines étapes), et si on ne peut le faire avec cette rigueur, alors on préfère ne rien faire, ou pire créer un monstre, un $\bar{2}$ de convention dont les règles d'ajustement avec le système numérique sont inconnues.

Dans le programme de 1891, l'insertion des logarithmes en algèbre ne trouve effectivement sa raison d'être qu'en classe de mathématiques spéciales. Puisque les logarithmes y sont étudiés au moyen des séries, étudiés et calculés car la théorie incorpore bien sûr la manipulation numérique. Le programme est toujours sévère et aucun autre calcul n'est toléré. Demeure une injonction

---

62 B. Belhoste, *op. cit.*, p. 33, Instruction pour la mise à exécution du plan d'études des lycées (15 novembre 1854).

la détermination des logarithmes eux-mêmes ne sera pas donnée par les fractions continues, c'est-à-dire par une méthode complètement inexplicable, mais bien au moyen des séries[63].

Cette affirmation de la mathématique unique est magnifiquement caricaturale : une explication d'une autre nature théorique est non seulement écartée, mais en outre jugée impossible ! L'autre méthode — rivale des séries entières si l'on enferme celles-ci dans une algèbre spécifique — est pourtant recommandée en Allemagne à la même époque, du moins si l'on veut initier aux logarithmes avant même l'intervention des séries entières, jugées techniquement plus difficiles. C'est la méthode des fractions continues qui n'aurait guère de peine à être présentée comme une théorie "arithmétique", basée sur la procédure de pgcd d'Euclide. Je reprends alors un exposé dû à Brook Taylor et paru au début du XVIIIe siècle dans les *Philosophical Transactions* [64] : il est souvent adopté dans des manuels allemands contemporains de l'interdiction française[65].

Soit à déterminer log 2 (c'est-à-dire le logarithme décimal). On posera puisqu'il s'agit d'un logarithme inférieur à 1,

$$\frac{1}{x} = \log.2.$$

Soit $\quad 2^x = 10.$

Visiblement x doit être entre 3 et 4, donc on écrit $x = 3 + \frac{1}{y}$

D'où $\quad 8.2^{\frac{1}{y}} = 10$

Soit $\quad \left(\frac{5}{4}\right)^y = 2$

Le nombre y est supérieur à 3 et encore inférieur à 4. Donc $y = 3 + \frac{1}{z}$*.On poursuit le calcul avec* $z = 9 + \frac{1}{u}$*.* $u = 2 + \frac{1}{v}$ *soit la fraction continue pour le logarithme*

$$\log 2 = 1{+}3{+}3{+}9{+}2{+}2{+}5{+}\ldots$$

---

63 Programme de la classe de mathématiques spéciales, 15 novembre 1854, cf. B. Belhoste, *op. cit.*, p. 365.

64 B. Taylor., "A new method of computing logarithms", *Phil. Trans* , vol. XXX, n° 352, p. 618-622.

65 Par exemple, H. Müller, *Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen*, II, Die Oberstufe, Berlin, 1899, p. 29.

Elle fournit les réduites successives

$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3+\frac{1}{3}}=\frac{3}{10},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}}=\frac{28}{93},\quad \frac{59}{196},\ \text{etc}$$

Le programme français n'est pas guidé par des raisons didactiques concernant les possibilités d'apprentissage des élèves ; est en l'occurrence refusée une des voies historiques de l'approximation des nombres réels, au nom de l'uniformité que représente la voie des séries. Même pour le cas des logarithmes, l'enseignement entend reproduire la théorie, celle de l'Analyse, mais en outre elle est conçue comme uniforme. Ainsi reste forte la prétention, lancée par l'Ecole normale en 1795, de faire coller l'enseignement aux mathématiques les plus modernes. Toute l'affaire des programmes est seulement de légiférer l'accès à la théorie jugée la seule juste, en tous les sens de l'adjectif. Cette graduation qui va jusqu'à l'interdiction, c'est le sens de l'élémentaire ; il n'a donc rien de naturel et l'un des maîtres-mots de cette pédagogie est : on n'a pas le droit de. Le programme est chargé de veiller à ce qu'il n'y ait pas de dérive "intuitive", de chemins de traverse ; l'impératif est celui de la mathématique unique.

Si les logarithmes demeurent en algèbre pour la classe de mathématiques élémentaires, la limitation est dans celle des tables : il n'y a de logarithmes que des nombres de la table !

on ne considérera que les nombres qui peuvent faire partie de la progression géométrique après insertion de moyens géométriques[66].

Le programme de 1904 pour la classe de mathématiques spéciales intègre finalement toute la construction de Cauchy : "Définition et continuité de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique". Il revient sur la méthode d'Euler parce qu'elle est dûment encadrée par l'analyse à la Cauchy. "Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$ quand m grandit indéfiniment en valeur absolue". La suite est aussi bien à la Cauchy qu'à la façon d'Euler car il n'y a plus de différence théorique. "Dérivées de a^x et de log x... développement

---

66 Programme du 24 janvier 1891, voir B. Belhoste, *op. cit.*, p. 528. La contrainte "arithmétique" du programme est si forte qu'un auteur respectable tombe dans le piège d'une fausse démonstration : il énonce que tout logarithme rationnel est le logarithme d'une puissance entière de 10 (F. Gibod, 1900).

en séries de log (1-x), $\log\frac{1-x}{1+x}$ série exponentielle, série du binôme".

Vient cependant au final une façon différente et un commentaire est ajouté : "les équations y' = y et y' (1+x) = my permettent de déterminer les sommes de ces deux séries". On constate que le passage par la primitive, avec l'interprétation hyperbolique des aires, a été occulté. Au profit de la voie des équations différentielles, voie plus élaborée, mais aussi beaucoup plus algébrique et dégagée de la représentation géométrique. De fait, il n'y a pas inflexion du sens ; mais extension car l'équation fonctionnelle livre le développement en série entière de la fonction solution. C'est donc la simple poursuite de l'Analyse à la Cauchy étendue aux équations différentielles. Historiquement, on a agrandi son cours de 1821 à celui des quelques années suivantes.

Dans les années 1950, le programme officiel des lycées place toujours les logarithmes en algèbre, juste après les progressions arithmétiques et géométriques. Mais il les met bien après la notion de dérivée qui permettrait aisément la construction prévue dès 1904 pour les classes de mathématiques spéciales. Cependant, le niveau des lycées est sanctionné, et il n'est prévu que des "exercices de calculs logarithmiques". On ne doit pas alors parler théorie. Ce qui suscite une tension dont témoigne le rédacteur d'un remarquable cours, J. Commeau, qui a le regret d'avoir outrepassé le programme en se permettant d'évoquer les exposants fractionnaires et négatifs "couramment utilisés en physique" précise-t-il pour se faire pardonner (*Algèbre et trigonométrie*, Paris, Masson, 1956). De ces exposants, rappelons-le, la mention était requise comme théorie dans le programme affiché exactement un siècle plus tôt. C'est à l'histoire que le professeur du milieu du XX^{e} siècle se raccroche lorsqu'il explique l'impossibilité "dans l'état actuel des traditions de notre enseignement" d'un exposé axiomatique sur des principes de l'Algèbre. La surprise est de ne pas entendre le mot Analyse dont la visée était jusqu'à présent organisatrice. Il a tout à fait raison de ne pas invoquer l'histoire des mathématiques, mais bien celle de la tradition enseignante. Car, comme l'exige cette tradition, il aimerait suivre la nouvelle théorie en vogue après-guerre pour l'Analyse, celle qui la fait dépendre d'une algébrisation formelle. Le professeur se contentera d'une étape, l'analyse à la Cauchy est malmenée : elle n'est plus la seule référence. C'est un mauvais programme, et ce jugement tient seulement compte de la justification que se donne un programme en France depuis l'Empire. Tout craque au début des années soixante.

Pour scander les évolutions de la présentation des logarithmes, il serait possible de poursuivre sur un ton haletant la description de 1960 à nos jours, notamment avec l'introduction des mathématiques modernes. Instructif, l'exercice serait cependant trop long. D'autant que la conclusion ne serait pas changée : un programme français est ciblé sur une théorie actuellement consensuelle et qu'il s'agit d'atteindre. Mais l'accès est situé au terme même des études, celui-ci pouvant largement dépasser le baccalauréat ; on ne construit pas des théories intermédiaires, sinon des contournements pour respecter scrupuleusement les interdits de dépassement fixés : c'est souvent dans ce cadre que surgissent ces objets qui ne sortent pas de l'action éducative, et sont des monstres mathématiques.

CONCLUSION

Comme nous avons pu le percevoir avec l'exemple des logarithmes[67], l'enseignement ne suit pas l'histoire de la notion, ni dans la progression des classes, ni même dans l'évolution des programmes. Mais il serait inadéquat d'en rendre compte par un décalage en retard de l'enseignement des professeurs sur la pratique mathématique ; cette tentation néglige et la spécificité corporatiste de l'enseignement et la sélection dogmatique dans les mathématiques enseignées. Existe un élémentaire à la française. Il est possible de parler de ces sélections en des termes de didactique, c'est-à-dire en témoignant d'une expérience professionnelle de la transmission des connaissances, mais il ne faut pas oublier que ces connaissances sont données avec un objectif, celui d'une unique mathématique acquise au terme d'un long parcours. L'écart entre cette prétention et la réalité des classes mériterait d'ailleurs une présentation où la sociologie interviendrait forcément. Si, pour faire court, j'ai choisi plutôt d'évoquer l'histoire des programmes sur un cas particulier, c'est pour rendre compte du fait que les programmes façonnent une expérience particulière. C'est l'expérience de l'élémentaire, qu'il ne faut pas réduire à celle de la simplicité. Cette expérience crée une structure de pensée et elle s'inscrit dans le long terme.

67 Il aurait été intéressant de montrer la place des logarithmes dans les cours de DEUG, les évolutions quant au logarithme d'une matrice.