# LES LOIS DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION COMME EXERCICE DE CALCUL

Patricia RADELET-DE GRAVE

---

### Des lois prises comme exercice : les frères Bernoulli

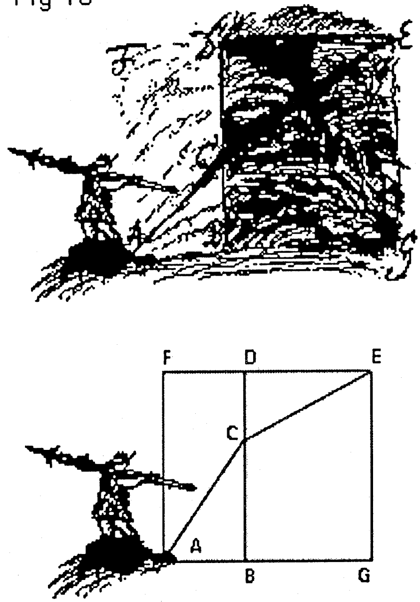
Alors que la loi de la réflexion et sa démonstration remontent à la *catoptrique* d'Héron d'Alexandrie [S.23], la loi de la réfraction ne fut démontrée qu'en 1636, par Descartes dans la *Dioptrique* [S.21]. Contrairement à celle de Descartes qui se fonde sur des considérations mécaniques, la démonstration de Héron faisait appel à un principe de minimum pour les rayons :

> *Nous devons encore montrer que lorsqu'ils sont réfléchis par des surfaces planes ou courbes, ils le sont de manière à ce que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Nous le ferons sur base des mêmes raisons, c'est-à-dire de la vitesse d'incidence et de réflexion. Car nous devons à nouveau le démontrer au moyen des lignes les plus courtes. Je prétends donc que parmi tous les rayons incidents qui se réfléchissent en un même point, ce sont ceux qui pour les miroirs plans ou courbes, ont les angles d'incidence et de réflexion égaux qui sont les plus courts.*

Fermat fera appel à un calcul d'extremum en appliquant sa méthode des maxima et minima [S.22] pour démontrer la loi de la réfraction.

Lorsqu'en 1684 Leibniz publie le texte fondateur du calcul différentiel [S.31], il suit Fermat et donne comme application une démonstration de cette même loi. Le premier réflexe des frères Bernoulli, Jacob et Johann, devant la difficulté que posait la lecture de ce texte fut de tester leur compréhension en refaisant les applications proposées par Leibniz. Nous retrouvons cette démonstration dans les *Leçons sur le calcul différentiel* [S.16, p. 17-18] que Johann Bernoulli, de passage à Paris, a données à la fin de l'année 1691, au Marquis de l'Hopital. Il les poursuivra jusqu'en novembre 1692 .

Fig 18




*Le Voyageur A qui tend vers E doit traverser un champ plat et viable AFDB et un lieu raboteux et inégal DBGE et les chemins sont tels que, en un temps a, on parcourt l'espace b du champ plat FDB et, dans le même temps, l'espace c dans le lieu raboteux DBG. On cherche le chemin le plus court de A à E c'est-à-dire celui que le Voyageur accomplit dans l'espace de temps le plus bref. Qu'on mène les perpendiculaires AB = m et ED = n à la ligne BD, qui sépare les deux chemins différents. Et soit BC = x, BD = e; on aura DC = e-x et* $AC = \sqrt{mm+xx}$ *et* $CE = \sqrt{ee\text{-}2ex+xx+nn}$.

*Mais* $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{mm+xx}}{\frac{a\sqrt{mm+xx}}{b}}$ *est le temps dans lequel la ligne AC est parcourue et* $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{ee\text{-}2ex+xx+nn}}{\frac{a\sqrt{ee\text{-}2ex+xx+nn}}{c}}$ *est le temps de parcours de la ligne CE.*

*On a, par conséquent,* $\dfrac{a\sqrt{mm+xx}}{b} + \dfrac{a\sqrt{ee-2ex+xx+nn}}{c}$ *qui est le plus petit espace de temps. Et sa différentielle*

$$\frac{axdx}{b\sqrt{mm+xx}} + \frac{axdx - aedx}{c\sqrt{ee-2ex+xx+nn}} = 0.$$

*Par conséquent,* $\dfrac{x}{b\sqrt{mm+xx}} = \dfrac{e-x}{c\sqrt{ee-2ex+xx+nn}}$

*et* $cc\,ee\,xx - 2cc\,ex^3 + ccx^4 + cc\,nn\,xx =$

$$= bb\,ee\,mm + bb\,ee\,xx - 2bbe\,mm\,x - 2bbex^3 + bb\,mm\,xx + bbx^4.$$

*Et* $(bb - cc)\,x^4 - (2bbe-2cce)\,x^3 + (bbmm+bbee-ccee-ccnn)\,xx$ $-2\,bbemmx + bbeemm = 0$

Les trois hommes - Jacob et Johann Bernoulli et le Marquis de l'Hopital - exploitent de concert la source d'inspiration mathématique que fournissent les lois de la réflexion et de la réfraction en optique. Durant son séjour à Paris, Johann correspond[1] avec ce frère qui lui a enseigné les mathématiques. Cette époque où les deux hommes poursuivent en commun leurs recherches ne va pas durer, une querelle éclatera 4 ans plus tard, Johann étant à Groningue [R.1 et R.3]. Après avoir rejoint Bâle, sa ville natale, ce dernier établira une correspondance avec son élève parisien.

Notre but, dans l'article qui suit, est d'analyser l'interaction intellectuelle des trois hommes, entre 1684 date de publication de la *Nova methodus* et 1696 la date publication par le Marquis de l'Hopital de *l'analyse des infiniment petits* . Cet ouvrage est l'aboutissement de l'enseignement que Johann Bernoulli a donné en France et l'un de nos objectifs est de distinguer, dans une partie de ce livre, ce qui est dû au maître de ce qui est le fait de l'élève.

Pour atteindre notre objectif nous analyserons les *Leçons* 26 à 32 [S.17, pp. 464-481] et 56 à 59 [S.17, pp. 546-558] et deux sections de *l'Analyse* de de l'Hopital. Il s'agit des sections 6 et 7 qui traitent respectivement *de l'usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réflexion* [S.31, pp. 104-119] et *de l'usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réfraction* [S.31, pp. 120-130]. Notre analyse se déroulera en deux temps :

---

[1] comme en témoignent de très rares lettres

I. la comparaison des *Leçons* à *l'Analyse* du point de vue de leur structure et de quelques démonstrations ;
II. la recherche d'explications de certaines différences dans la correspondance des trois hommes et dans les travaux de Jacob Bernoulli.

## Du maître à l'élève devenu maître : comparaison de deux textes à propos des caustiques

Notre tâche de comparaison est rendue plus difficile par le fait que le découpage en *Leçons* ne correspond pas au plan que Johann a dans la tête. Ce découpage semble plutôt correspondre à une longueur bien déterminée des cours. De plus, comme nous le montrerons, il expose ses recherches en cours. Son plan est donc susceptible de modifications.

Dans les *Leçons* 26 à 32, Johann traite seulement les Caustiques par réflexion et laisse les Caustiques par réfraction qu'il abordera dans un *Additamentum* qui occupe les *Leçons* 56 à 59, données peu avant son départ de Paris. Dans *l'Analyse*, ces deux types de caustiques sont traitées successivement dans les sections 6 et 7 respectivement.

Dans sa *leçon 26,* Johann explique ce qu'est une caustique :

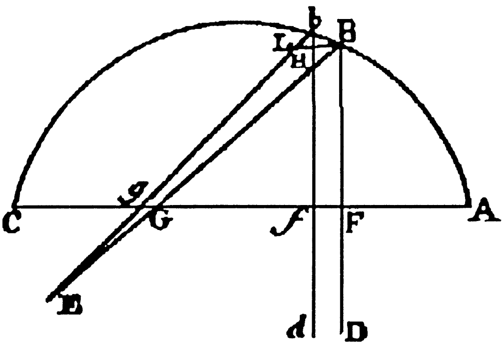
*Des courbes Caustiques et de leurs propriétés*

*Si les rayons solaires tombent sur la partie concave d'une certaine courbe, ils formeront par leur réflexion une autre courbe, à qui M. Tschirnhaus a donné le nom de Caustique*[2] *et dont il a été le premier inventeur. Car, jusqu'ici, les anciens n'ont pris en considération que le seul point dans l'axe de la courbe où en fait tous les rayons, ou au moins plusieurs d'entre eux convergent après leur réflexion; et ce point fut considéré par eux comme un Foyer, parce que là s'exerce la plus grande force d'ignition des rayons réfléchis.*

Après une introduction historique, qui nous montre comment on en est arrivé à considérer ce genre de problèmes, Johann poursuit

[2] L'éthymologie de ce mot qui vient du grec Καυστικὸς, brûlant s'explique par la suite de la citation.

*Pour l'instant, il faut exposer la manière dont nous nous représentons la génération de la courbe Caustique. Soit une courbe quelconque ABC*




*sur laquelle tombent les rayons de soleil parallèles DB, db, etc dont les rayons réfléchis sont BE, bE, etc ; le point de concours E de deux rayons réfléchis distants d'une longueur infiniment petite est sur la courbe Caustique.*

Cette intersection, autre façon de dire le point de tangence de la caustique sur EB a une propriété qui permet de déterminer la courbe :

*De la manière suivante donc, il est immédiatement évident, d'après ce que nous avons dit plus haut, que le rayon réfléchi est tangent à la courbe Caustique, s'il est vrai que deux tangentes infiniment proches se coupent en ce point de contact. Par conséquent, pour déterminer la nature de la courbe Caustique, on peut formuler le problème de la manière suivante; trouver la nature d'une courbe à laquelle tous les rayons réfléchis ...Donc ... il faut trouver la longueur du rayon réfléchi BE qui est intercepté entre le point d'incidence B et le point de concours E.*

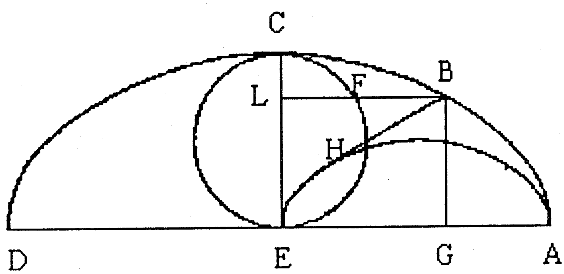
Soulignons immédiatement, car cette courbe nous est plus familière et que nous la retrouverons, que si nous considérions non pas les rayons réfléchis mais les rayons du cercle osculateur ou rayons de courbure en des points infiniment proches, nous trouverions la développée au lieu de la caustique.

Après avoir expliqué puis rectifié la courbe, c'est-à-dire après en avoir déterminé la longueur en général, Johann va donner plusieurs exemples : les caustiques du cercle, de la parabole et de la cycloïde. Tous ces problèmes sont obtenus en imaginant la réflexion sur différentes courbes de faisceaux de rayons parallèles (rayons solaires), mais :

> *Effleurons brièvement celles* [les Caustiques], *que décrivent par réflexion les rayons provenant d'un point fixe quelconque; celles-ci, en effet, ne sont pas très différentes des précédentes et, mutatis mutandis sont aussi facilement soumises au calcul.*

Parmi les exemples de caustiques issues d'une source lumineuse ponctuelle qu'il traite signalons un intéressant retour en arrière aux caustiques issues de rayons lumineux parallèles. Ce qui prouve que Johann parle bien de ses recherches en cours.

> *En guise de "coronis" nous allons ajouter la détermination de la Caustique qui est engendrée par réflexion des rayons parallèles à l'axe,* [détermination] *qui a été précédemment laissée de côté .*




> *Soit une cycloïde ABC dont le sommet est C, l'axe CE, le cercle générateur CFE, le rayon incident GB, le [rayon] réfléchi BH; on recherche la longueur BH. La Caustique AHE est aussi une Cycloïde dont le cercle générateur est le quart du cercle EFC.*

Dans son journal scientifique, ses *Meditationes* [S.8], Jacob fait allusion à une lettre que son frère lui a adressée le 15 mars 1692 et dans laquelle il pose les problèmes ici résolus. Le dernier exemple des *Leçons*, celui de la spirale logarithmique qui est sa propre caustique nous prouve également qu'il travaillait, à cette époque en relation avec son frère. Cette spirale fait l'objet d'une publication de Jacob sur laquelle nous reviendrons [S.6].

Une dernière preuve du fait que Johann relate ses travaux en cours est fournie par les nombreux exemples qu'il doit abandonner car les calculs sont trop fastidieux.

Dans les 4 dernières *Leçons*, qui forment un *additamentum* à celles que nous venons d'analyser, mais que Johann ne livre que plusieurs mois plus tard, il aborde le problème des caustiques par réfraction, la loi de la réfraction étant connue. Bien qu'il s'agisse d'un prolongement, la présentation a changé; c'est celle qui sera adoptée par de l'Hopital : Johann considère d'abord le point rayonnant, que nous appelons source lumineuse comme voisin du miroir et calcul ensuite la limite lorsque ce point tend vers l'infini pour obtenir la solution du problème des rayons parallèles. Malheureusement Johann est pris par le temps et sa dernière leçon ne sera qu'un plan de recherche et des calculs pénibles. Pourtant les problèmes qu'il propose de résoudre ne manquent pas d'intérêt :

> *Il reste à résoudre inversement le Problème des Caustiques : c'est-à-dire, étant donnée une courbe Caustique, trouver la courbe dont elle est la Caustique. Or, ce Problème est indéterminé, car une seule et même Caustique est générée par une infinité de courbes dans lesquelles les rayons sont réfractés ou réfléchis. Mais, puisque ci-dessus, dans l'article sur les Caustiques nées de la réflexion des rayons, nous n'avons fait aucune mention de ce Problème inverse, nous allons évoquer maintenant, brièvement un autre genre de Caustiques qu'il faut résoudre inversement.*
>
> *De même que n'importe quelle courbe donnée est seulement engendrée par le développement d'une courbe unique par contre, une courbe unique donnée peut décrire par son développement une infinité d'autres de degrés différents selon que l'on prend le point de départ du développement ici ou autre part; - de même n'importe quelle courbe n'a qu'une seule Caustique, mais une courbe unique peut être la Caustique d'une infinité d'autres, selon la valeur donnée dans le premier cas à l'angle CDE; dans le dernier, par contre, au point L.*

Le problème inverse qui reste à résoudre oppose la difficulté supplémentaire de ne pas avoir de solution unique.

## Une correspondance à trois : les propriétés de la développée.

Nous avons rapidement évoqué la relation qui existe entre la développée et la caustique et nous nous étonnons de constater que bien que ces deux éléments et le rayon de courbure ou rayon de la développée soient traités dans les *Leçons,* Johann ne fait nullement appel à ce dernier pour déterminer les caustiques.

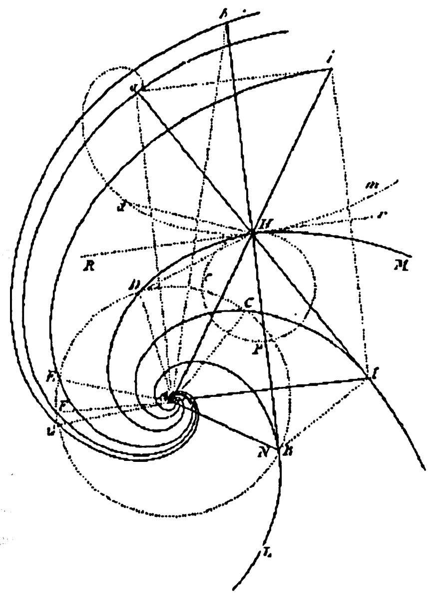
L'expression différentielle du rayon de courbure apparaît pour la première fois dans les *Meditationes* [S.2] de Jacob Bernoulli, *De Spiralis Parabolicae (Parabolae helicoidis) dimensione.* Il fait son apparition en même temps que le calcul différentiel dans les notations de Leibniz et sous deux formes

$$z = \frac{dx\,ds}{ddy} \quad \text{ou } z = \frac{dy\,ds}{ddx}.$$

Ce texte prépare le travail, *Specimen Calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque* [S.3] où il est étonnant de ne pas retrouver l'expression du rayon de courbure. Pourtant, cette expression fera l'objet de son *theorema aureum,* mais il ne le publiera qu'en juin 1694 dans le contexte différent de la recherche de la courbe élastique *Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.* [S.12]. Dans ce travail il donne le rayon de courbure sous 4 formes différentes :

- deux formes à ds constant, c'est-à-dire en prenant s comme variable indépendante $\frac{1}{z} = \frac{ddy}{dxds}$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{ddx}{dyds}$
- une à dx constant, c'est-à-dire en considérant x comme variable indépendante $\frac{1}{z} = \frac{dxddy}{ds^3}$
- et une à dy constant c'est-à-dire si y est la variable indépendante $$\frac{1}{z} = \frac{dyddx}{ds^3}.$$

Son intérêt pour les développées est à rapprocher de l'importance qu'il accorde au rayon de courbure, comme nous aurons encore l'occasion de le remarquer dans son [S.7], *Lineae Cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relatio* *ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque* où l'on trouve sur une même figure les caustique, évolute, développée etc. de la spirale logarithmique qui a cette étrange propriété de rester invariante sous ses différentes transformations. Ce qui a conduit Jacob Bernoulli à demander que l'on grave une telle spirale sur sa tombe accompagnée des mots EADEM MUTATA RESURGO, je renais identique à moi-même[3].

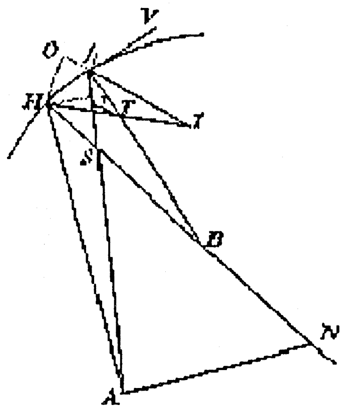


Dans ce texte [S.13, p. 493], Jacob souligne l'importance du théorème qui lie les caustiques aux développées.

> *Si d'un point radiant A, on élève le rayon incident AH perpendiculaire à AN qui coupe* ***le rayon du cercle osculateur HB*** *[prolongé si nécessaire] et que l'on fasse : comme 2 HN - Hb est à* ***HB*** *ainsi AH est à HI qu'il faut détacher du rayon réfléchi HI, le point I sera dans la caustique issue de A. HB, le rayon du cercle osculateur est le rayon de courbure.*

---

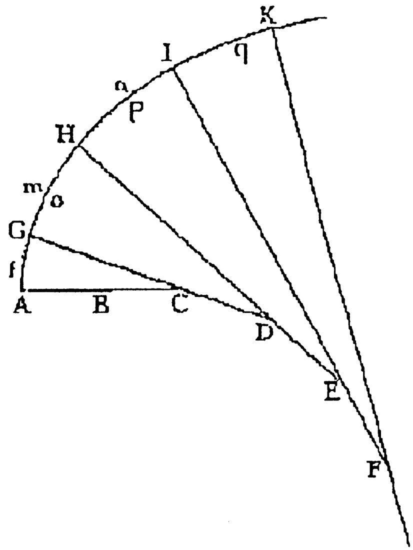
3 Malheureusement le graveur a préféré tracer une spirale archimédienne qui ne jouit pas de la-dite propriété.




$$\frac{2HN - HB}{HB} = \frac{AH}{HI}$$

Comme G. Cramer le montre dans ses notes aux *Opera* de Jacob [S.13, p. 493], la relation est générale et ne se limite pas au cas très particulier de la spirale logarithmique. Donc, au moyen du rayon de courbure, Jacob relie généralement la développée d'une courbe à sa caustique. Mais soulignons-le, il ne publie toujours pas l'expression différentielle de ce rayon alors qu'il la connaît. Il garde la clef en poche.

Pour nous, la développée est le lieu des centres de courbure mais pour les auteurs de l'époque la développée est la courbe que l'on développe, c'est-à-dire que l'on enroule une corde le long de celle-ci et que l'on développe cette corde en la gardant toujours tangente à la développée. De cette manière on trace la courbe qu'ils considèrent. Une figure de *l'analyse des infiniment petits* le montre bien




C'est en partant de cette vision des choses que nos trois auteurs découvrent progressivement les propriétés de la développée et des rayons de courbure. Parmi elles, celle qui deviendra notre définition de la développée : le lieu des centres de courbure. Ce point de vue explique encore le terme de rectification donné à l'évaluation de la longueur de la courbe ou de la corde, comme le montre la rectification de la spirale logarithmique que Jacob avait déjà donné en juin 1691 dans [S.4] *Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque.*

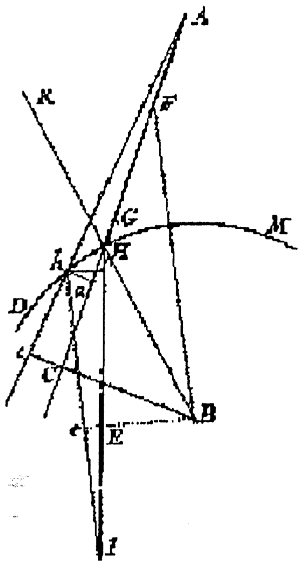
Dans la *Meditationes* [S.8] *Demonstratio Theorematis a Fratre animadversi (vid. Lit. ejus de 15 Martii 1692) Caustica Cycloidis vulgaris nata ex reflexis radiis parallelorum axi itidem est vulgaris cyclois, cuius basis est prioris dimidia.* qui fait suite à une lettre aujourd'hui perdue de Johann et que nous avons déjà évoquée, Jacob prépare [S.9] *Additio ad Schedam de Lineis Cycloidalibus* où le passage relatif au *theorema aureum* est remplacé par un *ut figura docet* (comme l'indique la figure).

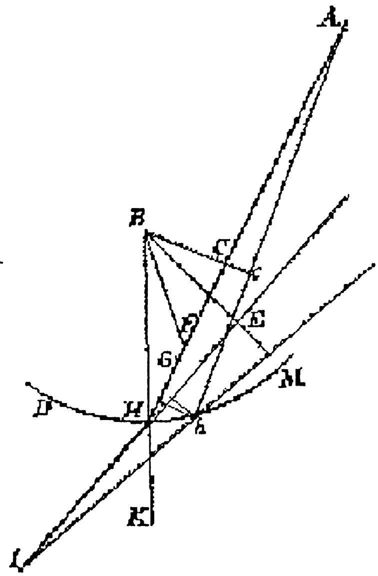
Jusqu'ici, il n'a été question chez Jacob que de caustiques par réflexion. Il les nommera *catacaustiques* lorsqu'il abordera probablement à l'époque de cette lettre de mars 1692 les caustiques par réfraction ou *diacaustiques*. Directement, comme le prouve [S.10], *Invenire relationem inter Evolutas & Diacausticas, sicut reperta fuit inter Evolutas et Catacausticas, supra §. CLXXXV,* Jacob recherche le lien entre la développée et la diacaustique. Entre-temps, une lettre de de l'Hopital à Johann Bernoulli en témoigne, les *Leçons* ont pris fin et Johann est rentré à Bâle. Il lui écrit le 8/12/1692, *je serais bien aise de savoir de quelle manière il réduit aux développées les caustiques qui se font par réfraction.*

C'est donc bien, la présentation en *additamentum* dans les *Leçons* le confirme, le sujet de recherche en cours au moment où les *Leçons* se terminent et Johann n'a pas encore compris l'utilité du rayon de courbure.

En juin 1693 Jacob publie le résultat de la Med. CXCV [S.10] dans un article intitulé *Curvae Dia-Causticae, earum relatio ad Evolutas, aliaque nova his affinia. Item: Natura osculorum uberius explicata.* [S.11] mais il en omet la démonstration qui pourtant figure dans la *Meditationes* :

> *Soit A le point radiant, DHM la courbe quelconque exposée, soit convexe vers A* (fig. 1) *soit concave vers A* (fig. 2), *le rayon HB perpendiculaire à la courbe, B un point de sa développée, AH le rayon incident, HI le rayon réfracté s'approchant de la perpendiculaire dans la première figure et s'en éloignant dans la seconde. Ceci posé, traçons du point B de la développée les perpendiculaires aux rayons incident et réfracté, droites qui mesurent la réfraction par BC et BE et l'angle compris EBC, égal à HBF aux parties que montrent le schéma : on suppose HG troisième proportionnelle à AH et HC; on fait FG à FC comme HE à HI. Je dis que le point trouvé est dans la Dia-caustique de A.*




L'Hopital va découvrir une autre démonstration et en faire part à Johann dans sa lettre du 2 septembre 1693. Sa démonstration fait appel au rayon de courbure.

## De l'Hopital à Johann Bernoulli
## Paris, 2 septembre 1693

C'est ce qui m'a fait juger que Mr. vôtre frere avoit suivi quelque chemin plus court et apres avoir essayé inutilement diverses voyes, je crois enfin d'y estre tombé, vous m'en direz des nouvelles, car le voici.

Probleme . soit une courbe quelconque *DHM*, et soit un point rayonnant *A* d'où partent deux rayons d'incidence *AH*, *Ah* infiniment proches l'un de l'autre : on demande le point de concours I des rayons de refraction *HI*, *hI*.

Solution : Ayant mené par le point *H* donné sur la courbe les perpendiculaires *HK*, *HL* sur *Ah*, *hI* ; et par le point *B* où se rencontrent les rayons de la developpée *HB*, *hB*, les perpendiculaires *BE*, *Be* sur *HI*, *hI* : on nommera l'indeterminée *AH* ou *Ah* (*y*), la constante *HB* ou *hB* (*a*), la differentielle *Hh* de la courbe (*du*), et la raison constante des sinus qui mesurent la refraction qui est celle de *hK* à *hL* (*m.n*), et on aura par conséquent

$$hK = dy,\ hL = \frac{ndy}{m} \text{ et } HL = \frac{\sqrt{mm\,du^2 - nn\,dy^2}}{m}.$$

Cela posé ; les triangles rectangles semblables *HhL* et *HBE* donneront

$$Hh \cdot HL :: HB \cdot HE = \frac{a\sqrt{mm\,du^2 - nn\,dy^2}}{m\,du}$$

et
$$Hh \cdot hL :: BH \cdot BE = \frac{an\,ddy}{m\,du}.$$

d'où l'on tirera (en prenant *du* pour constante) la differentielle

$$Ne = \frac{anddy}{mdu}.$$

Or à cause des triangles semblables *HLI* et *NeI*

$$HL - Ne \cdot HL :: HE \cdot HI = \frac{ydx \times \overline{mmdx^2 + \overline{mm - nn}\,dy^2}}{\overline{myddy - mdx^2}\sqrt{mmdx^2 + \overline{mm - nn}\,dy^2} - mnydx\,ddy}$$

en supposant pour abreger $HK(\sqrt{du^2 - dy^2}) = dx$ et mettant pour *a* sa valeur

$$\frac{y\,dx\,du}{y\,ddy - dx^2}.$$

Donc la nature de la courbe etant donnée on trouvera facilement la longueur de *HI*. Mais si l'on suppose que le rayon *HB* de la developpée soit donné, on trouvera en cette sorte la raison de *HE* à *HI* sans avoir besoin de la nature de la courbe. Puisque

$$\mathrm{a} = \frac{y\,dx\,du}{y\,ddy - dx^2}$$

on aura $$a\,ddy = dx\,du + \frac{a\,dx^2}{y}$$

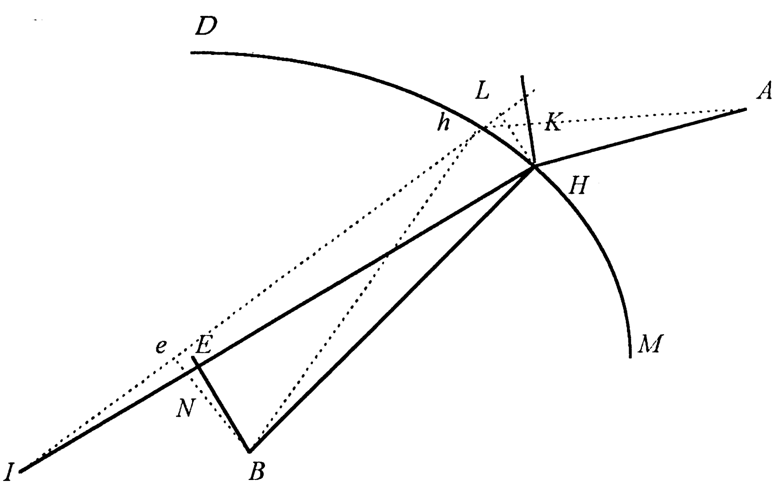
et $$Ne\,(\frac{an\,ddy}{m\,du}) = \frac{n\,dx}{m} + \frac{an\,dx^2}{my\,du}$$

et partant

$HL - Ne \cdot HL(HE \cdot HI) ::$

$y\,du\sqrt{mm\,du^2 - nn\,dy^2} - ny\,dx\,du - an\,dx^2 \cdot y\,du\sqrt{mm\,du^2 - nn\,dy^2}$

d'où l'on tire immediatement la construction qui est dans les actes.



Il y fait appel à l'expression du rayon de courbure : $\frac{ydxdu}{yddy - dx^2}$ mais il la considère comme connue et ne la démontre pas. Cette forme n'est pas celle de Jacob.

Johann semble d'ailleurs sceptique puisque l'Hopital lui répond dans une lettre du 7 octobre : *Vous trouvez, Monsieur, que je fais un terrible calcul dans ma solution des caustiques par réfraction* et que l'Hopital reprend son raisonnement. Il devra encore le reprendre le 2 décembre :

> *De la manière dont vous m'écrivez sur ce que je pose le rayon HB de la développée pour constant par rapport au rayon rompu HI je croirois m'estre trompé pour peu que la chose me parût douteuse, mais comme il ne se faut rendre qu'à la raison sur tout dans les mathématiques et que rien ne me paroît plus évident dans tout le calcul différentiel, je vais tâcher de vous en convaincre.*

Pour conclure : *Or vous convenez que cette valeur est la véritable puisque c'est en ceci que consiste l'invention de M. vôtre frêre.*

Mais le malheureux l'Hopital ne sera toujours pas écouté puisqu'un an plus tard, suite à la publication du Op. LVIII [S.12] par Jacob sur l'*elastica*, Il écrit à Johann :

> *Pour ces théorèmes doréz dont il fait tant de cas et desquels il dit ... de quibus nec frater adhuc constat, il me semble qu'il se fait tort en estimant trop de choses faciles. Vous vous ressouviendrez aisément qu'il y a plus d'un an que je vous ai envoyé une méthode que j'avois trouvée pour déterminer les points des caustiques par réfraction, de laquelle on tiroit la construction qu'il a fait mettre dans les actes. Je m'y servois de ces théorèmes, et je la fis insérer dès ce temps dans nos mémoires; de sorte qu'ils ne paroîront pas nouveau.*

Il donne toujours la même forme qui n'a pas la symétrie de celle de Jacob. Le 12 janvier, Johann répond :

> *Je me souviens maintenant que vous m'envoyâtes il y a longtemps une méthode pour déterminer les points des caustiques où vous vous serviez de ces mêmes théorèmes, je suis fâché de n'y avoir plus pensé avant que j'envoyasse ma construction de la courbe de descente à Leipzig; je vous proteste que j'y en aurois fait mention exprès, pour*

*apprendre à mon frère de parler un peu plus modestement de ses inventions qui sont déjà connues à d'autres.*

Johann trouve alors la même forme que l'Hopital.

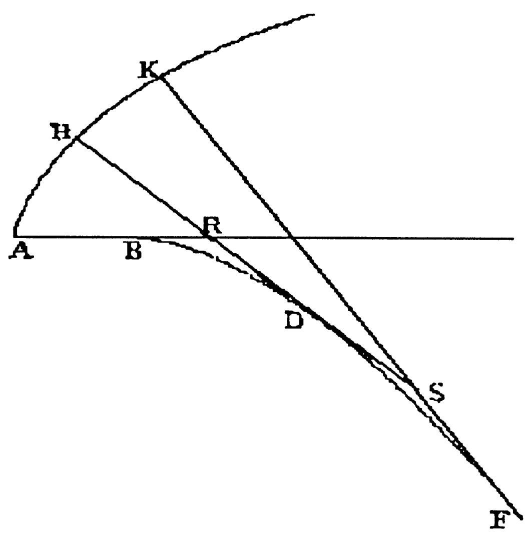
## Le manuel du marquis de l'Hôpital

Cette expression est celle que de l'Hopital donne dans la section 5 de son analyse des infiniment petits et qui sert de base aux sections VI et VII sur les caustiques.

*Usage du calcul des différences pour trouver les Développées.*

*DEFINITION.*

*Si l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque BDF concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil ABDF, dont l'une des extrémités soit fixe en F, & l'autre soit tendue le long de la tangente BA, & que l'on fasse mouvoir l'extrémité A en la tenant toujours tendue & en dévelopant continuellement la courbe BDF ; il est clair que l'extrémité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AHK.*



*Cela posé, la courbe BDF sera nommée la Développée de la courbe AHK.*

*Les parties droites AB, HD, KF du fil ABDF seront nommées les rayons de la développée.*

L'Hopital rassemble les *Leçons* de Johann et leur *additamentum* en deux sections, la section VI qui porte sur les caustiques par réflexion et la section VII sur les caustiques par réfraction. De plus, l'Hopital construit son texte selon le dernier modèle de Johann. Il se donne d'abord un point rayonnant à proximité et considère le point à l'infini et les rayons parallèles comme un cas limite.

Mais surtout, tant dans le cas des caustiques par réflexion que par réfraction, l'Hopital introduit le rayon de courbure dès le début ce qui lui permet de traiter le problème en toute généralité.

## Conclusion

Il faut constater que Johann avait réfléchi tout haut en donnant ses *Leçons* et que son élève a remanié son travail pour lui donner une structure qu'il avait à peine ébauchée. De plus, les pistes de recherches que Johann avait lancées mais qu'il n'était pas capable de suivre à l'époque des *Leçons* furent parcourues par l'Hopital dans *l'Analyse*. Mais les deux hommes sont restés en correspondance et Johann a encore fourni de nombreux enseignements à de l'Hopital.

## Bibliographie

### A) Sources

[S.1] Bernoulli, Jacob, *Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae & Philosophicaen a me JB. concinnatae & collectae ab anno 1677,* Manuscrit de la bibliothèque de l'Université de Bâle, LIa 3.

[S.2] Bernoulli, Jacob, Med. CLXI, *De Spiralis Parabolicae (Parabolae helicoidis) dimensione,* T.P. 1689 - T.A. janvier 1691, LIa 3, pp. 198-201.

[S.3] Bernoulli, Jacob, Op. XLI, *Specimen Calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque,* Acta Eruditorum, janvier 1691, pp. 13-23; Opera, pp. 431-442.

[S.4] Bernoulli, Jacob, Op. XLII, *Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque,* Acta Eruditorum, juin 1691, pp. 282-290; Opera, Genève, 1744, pp. 442-453.

[S.5] Bernoulli, Jacob, Med. CLXXXV, *De Anti-Evolutis, & Anti-Causticis quaedam, cum utili quodam Theoremate Catoptrico,* T.P. janvier- T.A. mai 1692, LIa 3, pp. 227-229.

[S.6] Bernoulli, Jacob, Med. CLXXXVI, *Curva mirabilis, seu Spiralis Logarithmica [eadem sibi semper similis & constantiae symbolum, emblema], quae sui ipsius evolutione seipsam (non tantum similem vel ejusdem speciei ut cyclois mechanica Hugenii aut geometrica Tschirnhausii) sed prorsus identicam & positione tantum diversam describit, praeterea sui ipsius caustica est & pericaustica anticaustica seu {akamtos & aklastos},* T.P. janvier- T.A. mai 1692, pp. 229-232.

[S.7] Bernoulli, Jacob, Op. XLIX, *Lineae Cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque,* Acta Eruditorum, mai 1692, pp. 207-213; Opera, Genève, 1744, pp. 491-502.

[S.8] Bernoulli, Jacob, Med. CXCII, *Demonstratio Theorematis a Fratre animadversi (vid. Lit. ejus de 15 Martii 1692) Caustica Cycloidis vulgaris nata ex reflexis radiis parallelorum axi itidem est vulgaris cyclois, cuius basis est prioris dimidia,* T.P. janvier- T.A. juin 1692, LIa 3 pp. 237-240. Publié dans *Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli,* Birkhäuser, Bâle, 1991, pp. 144-150.

[S.9] Bernoulli, Jacob, Op. L, *Additio ad Schedam de Lineis Cycloidalibus,* Acta Eruditorum, juin 1692, pp. 291-296; Opera, Genève, 1744, pp. 503-510.

[S.10] Bernoulli, Jacob, VP XVII = Med. CXCV, *Invenire relationem inter Evolutas & Diacausticas, sicut reperta fuit inter Evolutas et Catacausticas, supra §. CLXXXV,* T.P. janvier 1692- T.A. juin 1693 , LIa 3, pp. 242-247. Publié dans Jacobi Bernoulli Opera, Genève, 1744, pp. 1077-1080.

[S.11] Bernoulli, Jacob, Op. LVI, *Curvae Dia-Causticae, earum relatio ad Evolutas, aliaque nova his affinia. Item: Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitae. Regulae pro Resistentiis, quas Figurae in Fluido motae patiuntur &c.* Acta Eruditorum, juin 1693, pp. 244-256; Opera, Genève, 1744, pp. 549-573.

[S.12] Bernoulli, Jacob, Op. LVIII, *Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.* Acta Eruditorum, juin 1694, 262-276; Opera, Genève, 1744, pp. 576-600.

[S.13] *Jacobi Bernoulli Opera,* Genève, 1744. Œuvres éditées par G. Cramer.

[S.14] Bernoulli, Johann à Bernoulli, Jacob, Lettre du 22 mai 1691, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 104-105.

[S.15] Bernoulli, Johann, Op. VI, *Solutio Curvae Causticae per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque.* Acta Eruditorum, Janvier 1692, pp. 30-35 ; Opera Omnia, Lausanne et Genève, 1742, pp. 52-59

[S.16] Bernoulli, Johann, *Lectiones de calculo differentialium,* manuscrit publié en 1922 par Paul Schafheitlin dans les Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, vol. XXXIV; Une traduction française par R. Violette, J. Dhombres et P. Radelet-de Grave est en préparation.

[S.17] Bernoulli, Johann, *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque,* Opera Omnia, vol. III, pp. 385-563, Lausanne et Genève, 1742; Une traduction française par R. Violette, J. Dhombres et P. Radelet-de Grave est en préparation.

[S.18] Bernoulli, Johann à l'Hopital, Guillaume de, Lettre du 12 janvier 1695, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 253-257.

[S.19] Bernoulli, Johann à l'Hopital, Guillaume de, Lettre du 26 mars 1695, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 274-278.

[S.20] *Johannis Bernoulli, Opera Omnia,* Lausanne et Genève 1742.

[S.21] Descartes, René, *Dioptrique,* Leyden, 1637; Adam & Tannery, Œuvres de Descartes, vol. VI, pp. 79-228, réédition Vrin, 1996.

[S.22] Fermat, Pierre de, *Des maxima et minima* pp. 121-149 et *Analyse pour les réfractions,* pp. 149-156, Œuvres de Fermat, par P. Tannery et Ch. Henry, Tome III.

[S.23] Héron d'Alexandrie, *Catoptrique* , in *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia,* Leipzig, Teubner, 1900, vol. II, pp. 303-305.

[S.24] Huygens, Christiaan, *Horologium oscillatorium,* Paris 1673; Œuvres, tome XVIII.

[S.25] Huygens, Christiaan, *Traité de la lumière,* Leyden 1690.

[S.26] l'Hopital, Guillaume de, à Johann Bernoulli, Lettre du 2 septembre 1693, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 184-187.

[S.27] l'Hopital, Guillaume de, à Johann Bernoulli, Lettre du 7 octobre 1693, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 191-195.

[S.28] l'Hopital, Guillaume de, à Johann Bernoulli, Lettre du 2 décembre 1693, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 195-200.

[S.29] l'Hopital, Guillaume de, à Johann Bernoulli, Lettre du 31 décembre 1694, publiée dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955, pp. 250-253.

[S.30] L'Hopital, Guillaume de, *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris 1696.

[S.31] Leibniz, Gottfried Wilhelm, *Nova methodus, pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus,* Acta Eruditorum, octobre 1684, pp. 467-473; Traduction française par M. Parmentier, *La naissance du calcul différentiel,* Mathesis, Vrin, 1989, pp. 104-117.

**B) Ouvrages de référence**

[R.1] Goldstine, Hermann, Introduction aux *Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli,* Birkhäuser, Bâle, 1991.

[R.2] Introductions aux *Œuvres complètes de Christiaan Huygens,* publiées par la Société Hollandaise des Sciences.

[R.3] Spiess, Otto, Introduction à *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. 1, Bâle, Birkhäuser, 1955.