LA METHODE ANALYTIQUE DE DESCARTES ET L'EVIDENCE COMME DETERMINATION DE LA VERITE

Evelyne BARBIN
IREM Paris 7

Dans la Règle XII *des Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes écrit : *Dans la connaissance, il n'y a que deux points à considérer, savoir : nous qui connaissons et les objets qui sont à connaître* [1, p.71]. Cette phrase peut être jugée banale, mais ce jugement tombe quand nous la lisons dans sa pleine signification.

D'une part, Descartes résume ici l'homologie entre l'entendement et les choses, sur laquelle repose la méthode. L'entendement comprend trois opérations qui sont l'intuition, la déduction et l'induction, tandis que les choses peuvent être simples, composées, connues ou inconnues. A chaque faculté de l'entendement correspond un genre de choses : l'intuition permet de connaître les choses simples, la déduction permet de connaître les choses composées à partir des choses simples, l'induction permet de connaître les choses inconnues à partir des choses connues.

D'autre part, il est important de pointer la forme restrictive de la phrase, il n'y a *que* deux points à considérer, car de la sorte Descartes repousse la logique des Anciens comme mode de recherche de la vérité. Dans la Règle X, il oppose le sentiment d'évidence à l'appareillage logique en ces termes :

> *Quelques uns s'étonneront peut-être qu'en cet endroit où nous recherchons les moyens de nous rendre plus aptes à déduire les vérités les unes des autres, nous omettions tous les préceptes des Dialecticiens. Par ces préceptes ils [les Dialecticiens] croient régir la raison humaine en lui prescrivant certaines formes de raisonnement si nécessairement concluantes que la raison qui s'y confie, bien qu'elle aille en quelque sorte jusqu'à bannir l'évidence et l'attention de l'inférence elle-même, peut néanmoins, en vertu de la forme, conclure parfois à quelque chose de certain [1, p.64].*

Comprendre l'homologie entre l'entendement et les choses permet de saisir en quoi consiste la méthode cartésienne. Comprendre son opposition à la logique permet de saisir en quoi sa méthode analytique se distingue de celle des Anciens. Plus profondément, Descartes va proposer avec sa méthode une nouvelle conception de la vérité fondée sur l'évidence, et non sur la logique. L'évidence est au fondement de la méthode qui permet de trouver des vérités, tandis que la logique ne peut servir au mieux qu'à les exposer.

I. La méthode cartésienne

Dans la Règle III *des Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes écrit : *Nous ne deviendrons jamais mathématiciens, par exemple, bien que notre mémoire possède toutes les démonstrations faites par d'autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre toutes sortes de problèmes* [1, p.12]. Or, par rapport à la volonté de résoudre des problèmes, les démonstrations des mathématiques anciennes sont insatisfaisantes.

L'insatisfaction cartésienne : une volonté d'évidence et de fécondité

Dans la Règle IV *des Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes exprime ainsi son insatisfaction à la lecture des écrits des Anciens :

> *Certes, j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité ; quant aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même [1, p.23].*

Les écrits n'indiquent pas pourquoi l'auteur se propose de démontrer tel résultat, ni comment il parvient à le démontrer. La forme logique permet de constater la vérité des résultats, d'en être convaincu, mais elle ne permet pas de résoudre de nouveaux problèmes. L'intelligence n'est pas satisfaite car les processus qui ont conduit aux énoncés sont cachés.

Descartes poursuit en écrivant : *Rien n'est plus futile, dans ces démonstrations que le hasard fait découvrir plus souvent que l'art et qui s'adressent plutôt aux yeux et à l'imagination qu'a l'entendement* [1, p.23]. Pour comprendre son propos, lisons du point de vue de Descartes la proposition 11 du livre II des *Eléments* d'Euclide. Il s'agit de couper en un point H une droite donnée AB de telle sorte que le rectangle de côtés HB et BD, égal à AB, soit égal au carré de côté AH. Euclide met sous les yeux la construction : construire le carré de côté AB, E le milieu de AC, le segment EB, EF égale à EB, le carré de côté AF, alors H est le point demandé (fig.1). Ensuite, Euclide démontre que le rectangle est bien égal au carré par une suite de déductions rigoureuses s'appuyant sur les notions communes ou sur les propositions démontrées précédemment. Descartes est obligé de constater que le résultat mis sous ses yeux est vrai, mais il ne sait pas comment Euclide a découvert la construction du point H. Il veut connaître le processus qui a permis de l'inventer.

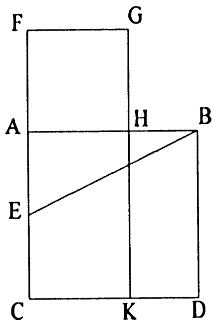


fig.1

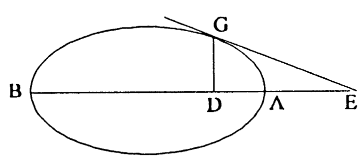


fig.2

Puis il écrit ensuite : *Rien n'est plus compliqué, avec une telle manière de faire la preuve, que de triompher de nouvelles difficultés* [1, p.24]. Pour comprendre ce propos, il suffit cette fois de considérer les démonstrations que les Anciens mettent en oeuvre pour les propositions concernant les quadratures et les tangentes. Examinons, par exemple, la démonstration d'Appolonius concernant la tangente en un point G d'une ellipse d'axe AB. La proposition énonce que si GD est l'ordonnée de G et si E est un point tel que le rapport de BE à EA est égal au rapport de BD à DA, alors ED est tangente à l'ellipse (fig.2). La démonstration procède par l'absurde : si on suppose que ED coupe l'ellipse alors après de longs raisonnements on obtient une contradiction. Descartes est obligé de constater que ED est bien la tangente, mais il ne sait pas comment a été découverte la position du point E. Le problème de trouver la tangente a une autre courbe reste entier.

L'insatisfaction de Descartes est motivée par une volonté d'évidence et de fécondité : il veut que les démonstrations indiquent comment on est parvenu à elles et qu'elles permettent de résoudre de nouveaux problèmes.

La méthode comme mise en ordre relationnelle de choses

Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes explique que sa méthode lui est venue de l'habitude, prise très jeune, d'essayer de résoudre les problèmes par lui-même plutôt que d'en lire les solutions. La résolution de problèmes mathématiques a sûrement joué un rôle initiatique pour la constitution de la méthode, et elle conservera toujours pour lui un rôle propédeutique à la méthode.

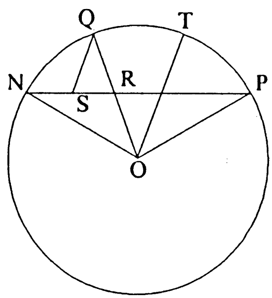
Ainsi, le jeune Descartes découvre que le problème de la trisection de l'angle se traduit par une relation entre droites (par le terme de droite on désigne au 17ème siècle une droite finie, c'est-à-dire ce qu'on appelle aujourd'hui un segment), à savoir que deux droites sont moyennes proportionnelles de deux autres. Il l'explique dans *La Géométrie* de 1637 [2, pp.418-420] : supposons l'angle NOP divisé en trois angles égaux NOQ, QOT et TOP, et menons QS parallèle à TO (fig.3). Alors un raisonnement géométrique simple permet de démontrer que :

$$NO : NQ :: NQ : QR :: QR : RS.$$

Remarquons que Descartes n'indique pas pourquoi il faut mener la parallèle QS, tombant ainsi sous le coup de sa propre critique. Nous verrons que dans sa méthode analytique, il faut introduire les droites nécessaires pour résoudre un problème. La manière dont Descartes entrevoit la résolution de la trisection l'enthousiasme, il écrit à Beeckman le 26 mars 1619 :

Pour ne rien cacher de ce qui fait l'objet de mon travail, je voudrais donner au public [...] une science toute nouvelle, qui permette de *résoudre en général toutes les questions qu'on peut se poser en n'importe quel genre de quantité, continue ou discontinue, chacune suivant sa nature.[...] Mais j'espère démontrer quelles sortes de questions peuvent se résoudre de telle ou telle manière et non autrement, si bien qu'il ne restera presque rien à trouver en Géométrie [3, tome X, p.157].*

fig.3



Dans la résolution de la trisection de l'angle, nous voyons comment un problème concernant une figure composée est résolue en décomposant cette figure à partir de choses simples, à savoir des droites, et à l'aide de relations simples.

La méthode de Descartes consiste en une mise en ordre des choses, des choses simples aux choses composées. Le second précepte de la méthode, énoncé dans le *Discours de la méthode*, précise en quoi consiste l'ordre cartésien :

conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples, et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés [2, p.21].

Descartes écrit dans la Règle XII des *Règles pour la direction de l'esprit* : Nous ne pouvons jamais rien comprendre en dehors de ces natures simples et de l'espèce de mélange ou composition qui existe entre elles [1, p.86]. Pour déterminer les choses simples, il faut l'usage de l'intuition, et pour connaître les autres à partir des choses simples, il faut l'usage de la déduction. Les choses composées doivent être déduites des choses simples par des relations simples [1, pp.29-38].

La déduction cartésienne n'est donc pas une déduction logique de propositions, mais une déduction relationnelle de choses. Elle ordonne la géométrie et le mécanisme cartésiens, alors que dans les *Essais* physiques et dans les *Principes de la philosophie*, président respectivement un ordre de discours et un ordre de doctrine [5].

Lorsqu'il s'agit de résoudre un problème, il faut l'induction qui permet d'aller des choses composées aux choses simples, connues et inconnues, car *toute la science humaine consiste uniquement à voir d'une manière distincte comment ces natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses* [1, p.92]. Ainsi, connaître un triangle, c'est le décomposer de choses simples, et résoudre un problème sur le triangle, c'est le recomposer en choses simples. Descartes écrit dans la Règle XII à propos du triangle :

> *Je puis en effet connaître le triangle sans avoir jamais pensé que dans cette connaissance est contenue encore celle de l'angle, de la ligne [...] cela ne nous empêche pas pourtant de dire que la nature du triangle est composée de toutes ces natures et qu'elles sont plus connues que le triangle, puisque ce sont elles que l'intelligence découvre en lui. Dans le même triangle sont peut être renfermées d'autres natures qui nous échappent, comme la grandeur des angles dont la somme égale deux droits et les relations innombrables qui existent ente les côtés et les angles. [1, p.86].*

La vérité cartésienne

La méthode établit une homologie entre les opérations de l'entendement et les choses, que nous pouvons résumer dans le tableau suivant :

opérations de l'entendement	choses à connaître
intuition	simples
déduction	composées
induction	connues et inconnues

La méthode permet d'accéder à la vérité parce que chaque opération de l'entendement repose sur l'évidence. En effet, le premier précepte de la méthode demande :

Ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle [...] de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute [2, p.21],

et la règle générale du *Discours de la méthode* énonce :

Les choses que nous concevons fort clairement et fort distinctement sont toutes vraies [2, p.33].

La vérité cartésienne est déterminée par l'évidence de l'entendement [9].

II. La géométrie cartésienne

La géométrie cartésienne procède à une homogénéisation dimensionnelle en ramenant toutes les grandeurs à celles des droites. Descartes écrit dans la Règle XIV des *Règles pour la direction de l'esprit* :

En géométrie presque tout le monde conçoit à tort trois espèces de quantités : la ligne, la surface et le corps [...]. Mais si l'on considère simplement comme abstraites par l'entendement [...] les trois dimensions des corps, la longueur, la largeur et la profondeur ne diffèrent entre elles que par les mots [1, p.120].

Pour comparer les grandeurs des droites, il faut les ramener elles-mêmes à une droite unité : *l'unité est cette nature commune de laquelle [...] doivent également participer toutes les choses que l'on compare entre elles* [1, p.121]. Ainsi, la géométrie n'est plus une étude de figures aux grandeurs hétérogènes, mais l'étude d'un espace dans lequel sont contenues des figures aux grandeurs homogènes. Descartes définit l'objet des géomètres dans *Le discours de la méthode* en ces termes :

un espace indéfiniment étendu en longueur, largeur et hauteur ou profondeur, divisible en diverses parties, qui pouvaient avoir diverses figures, et grandeurs, et être mues ou transposées en toutes sortes [2, p.35].

Au début de *La géométrie*, essai qui suit son *Discours de la méthode* de 1637, Descartes exhibe d'emblée ce que sont les choses simples de la méthode, à savoir des droites, et les relations simples par lesquelles elles seront reliées, à savoir des opérations arithmétiques. Ce faisant, Descartes va procéder à une déconstruction de la figure géométrique et à une arithmétisation de la géométrie.

Déconstruction de la figure et arithmétisation de la géométrie

Descartes commence son ouvrage par la conception essentielle dans sa géométrie, à savoir que tous les problèmes, et donc toutes les figures, géométriques se ramènent à la considération de droites. Il propose ainsi une homogénéisation dimensionnelle de la géométrie en écrivant :

Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes, pour les construire.

Puis il explique comment le calcul d'Arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie, en écrivant :

Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division : ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une des deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication [...]. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible [1, p.333].

L'addition et la soustraction de deux droites s'obtiennent facilement comme des droites par la simple opération géométrique de juxtaposition. Mais pour que les opérations de multiplication, de division ou d'extraction de racines deviennent des opérations internes, c'est-à-dire qui opèrent sur des droites pour produire encore des droites, il faut introduire une droite unité.

Ainsi, par exemple, pour multiplier deux droites BD et BC, il faut introduire une droite unité AB. Alors, la droite BE obtenue en menant AC et la parallèle ED à AC est le produit de la multiplication de BD par BC (fig.4). Alors que dans la géométrie grecque le produit de deux droites est un rectangle vu comme une aire, dans la géométrie cartésienne le produit de deux droites est la grandeur d'une droite. De la sorte, le rectangle est déconstruit, il n'est plus la grandeur d'une aire mais une grandeur obtenue simplement à partir des côtés qui le délimitent.

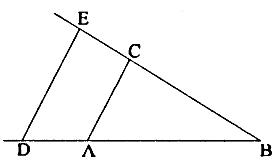


fig.4

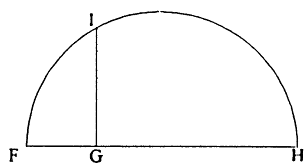


fig.5

Dans la géométrie grecque, le carré étant une aire, on peut parler du côté d'un carré. Par exemple, on dit que GI est le côté d'un carré qui a même aire que celle du rectangle de côtés FG et GH (fig.5). Mais dans la géométrie cartésienne, on peut dire qu'une droite est la racine carrée d'une autre droite. En effet, en prenant FG l'unité, alors GI est la racine carrée de GH.

Selon la méthode cartésienne, les choses composées doivent être obtenues par déduction des choses simples à l'aide de relations simples. Dans la géométrie, ces opérations simples sont les opérations de l'arithmétique. Par conséquent, les déductions géométriques se ramènent aux opérations de l'arithmétique.

Le calcul littéral donne à voir la succession des déductions qui ont permis de passer de la figure, chose composée, aux droites, choses simples. Par exemple :

- si on désigne BD par a et BC par b, alors le produit de la multiplication BE s'écrit ab ;
- si on désigne GH par a, alors la racine carrée GI s'écrit $\sqrt{a}$.

L'évidence sur laquelle s'appuie chacune des déductions devient ainsi une évidence calculatoire.

Descartes espère se rendre intelligible en introduisant les opérations de l'arithmétique dans la géométrie, mais il sait cependant que ce que nous appelons l'homogénéisation dimensionnelle de sa géométrie va heurter les conceptions héritées de la géométrie grecque.

En effet, dans sa géométrie a^2 ou b^3 ne désignent plus des aires ou des volumes, mais de simples droites. Il écrit :

> *Où il est à remarquer que par a^2 ou b^3ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des quarrés, des cubes, etc [2, p.335].*

Le *etc.* pouvait laisser rêveur un lecteur versé dans la géométrie, car les puissances supérieures à trois n'ont plus cette fois aucune signification géométrique. C'est sans doute pour ce genre de raison que Descartes écrit dans *Les Règles pour la direction de l'esprit* :

> *Nous souhaiterions ici avoir un lecteur porté à l'étude de l'Arithmétique et de la Géométrie, tout en préférant qu'il ne s'en fût pas encore occupé, plutôt que de s'y être instruit à la manière ordinaire [1, pp.110-111].*

Il est vrai que sa géométrie est en rupture complète avec celle de la géométrie des écoles. Ainsi, Descartes se voit obligé de préciser qu'une écriture du type

$$\sqrt{C.\,aabb - b}$$

est tout à fait licite dans la nouvelle géométrie. En effet, dans la géométrie ordinaire, elle signifierait qu'il faut prendre le côté d'un cube qui serait lui-même somme d'un corps de dimension quatre et d'une droite. Il explique qu'il suffit de diviser une fois aabb par l'unité et de multiplier deux fois b par l'unité pour interpréter l'expression selon la géométrie ordinaire, c'est-à-dire selon la dimensionalité habituelle.

Examinons, comment l'arithmétisation de la géométrie transforme le problème de la trisection de l'angle. En posant NO l'unité (fig.6),

la relation	NO : NQ :: NQ : QR :: QR : RS
devient	$QR = NQ^2$ et $RS = NQ^3$;
or	NP = 3 NQ - RS,
donc	$NP = 3\ NQ - NQ^3$.

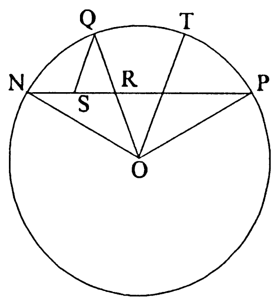


fig.6

Comme l'écrit Descartes dans la première phrase de la géométrie, le problème a été *facilement réduit à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques droites, pour les construire*. En effet, ici NP est connu et la droite NQ qu'il s'agit de déterminer s'exprime à l'aide de ce connu. L'arithmétisation de la géométrie permet ainsi d'énoncer une méthode de résolution des problèmes géométriques.

La méthode analytique

Descartes écrit à la troisième page de son ouvrage :

Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux façons ce qui se nomme une équation [2, p.335].

Pour résoudre un problème, il faut procéder par induction, c'est-à-dire décomposer la figure en choses simples, droites connues et droites inconnues. Et pour cela obtenir, par dénombrement, toutes les relations qui relient ces choses simples. Remarquons qu'il faut donner des noms à *toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire*, et donc introduire éventuellement de nouvelles droites à la figure initiale du problème. Cependant, ces nouvelles droites seront déterminées systématiquement comme parallèles ou perpendiculaires des droites de la figure.

Cette méthode est semblable à celle de l'algèbre, où l'inconnue d'un problème est obtenue en traduisant les données du problème. L'algèbre qui sert à résoudre des problèmes numériques va permettre de résoudre des problèmes géométriques. En effet, il faut établir, par décomposition, des relations entre des droites, puis obtenir, par recomposition l'équation qui relie droites inconnues et droites connues. Maintenant, le calcul littéral va donner à voir, en un coup d'oeil, la succession des opérations qui ont permis de passer du problème aux relations entre droites connues et droites inconnues. La méthode algébrique va permettre de traduire les relations entre droites connues et droites inconnues sous forme d'équations.

La méthode cartésienne suppose le problème résolu, comme la méthode de résolution d'un problème numérique par l'algèbre, mais aussi comme l'analyse de la géométrie grecque. Cependant, hormis cette similitude, l'analyse cartésienne est fort différente de celle de la géométrie grecque.

Analyse cartésienne et analyse des Anciens

Le terme grec $\alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\sigma\iota\zeta$ signifie une dissolution d'un tout en ses parties, or les parties de la dissolution sont complétement différentes dans l'analyse cartésienne et dans l'analyse des Anciens.

L'analyse est ainsi définie par Pappus dans sa *Collection mathématique*

L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui entre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée; et c'est ce que nous appelons la synthèse [4, p.477].

Dans cette analyse la chose que l'on cherche est une proposition d'où l'on déduit logiquement (on en dérive) d'autres propositions qui ont déjà été démontrées ou qui sont des axiomes (des principes). L'analyse est opposée à la synthèse car les ordres logiques des propositions sont inverses. Les parties de la dissolution de l'analyse des Anciens sont donc des propositions.

Rappelons la citation de Descartes donnée plus haut :

Toute la science humaine consiste uniquement à voir d'une manière distincte comment ces natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses [1, p.92].

Dans la méthode, les parties de la décomposition sont des choses simples. Dans l'analyse géométrique, où les choses simples sont des droites, les parties de la dissolution ne sont pas des propositions mais des droites. Cette analyse ne saurait d'ailleurs être vue comme l'opposée de la synthèse de la géométrie grecque.

Cette distinction entre l'analyse cartésienne et celle des Anciens permet de comprendre le propos de Descartes lorsqu'il parle de l'analyse des géomètres dans le *Discours de la méthode* :

> *Je pris garde pour la Logique ses syllogismes, et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait [...]. Et bien qu'elle contienne en effet beaucoup de préceptes très vrais et très bons, il y en a toutefois tant d'autres mêlés parmi, qui sont nuisibles ou superflus, qu'il est presqu'aussi malaisé de les en séparer, que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché [2, p.20].*

C'est bien par le fait que l'analyse des Anciens repose sur la logique que son analyse en diffère.

De plus, dans l'analyse cartésienne, on remonte aux choses simples pour donner naissance à la solution, alors que l'analyse des Anciens ne donne pas la solution, on doit prendre son chemin inverse pour donner la démonstration logique de la proposition. Derrida remarque que dans le terme grec d'analyse il y a deux motifs constitutifs : un motif archéologique ou de naissance lié à la racine ana, qui signifie vers le haut, et un motif lythique ou de mort lié à la racine lysis, qui signifie dénouement [7, p.53]. Nous allons voir que, pour Descartes, son analyse et la synthèse des Anciens, en tant que moyens de démontrer, correspondent à des significations différentes de la démonstration et de la vérité.

III. L'évidence comme détermination de la vérité

Nous avons vu que Descartes, par volonté d'évidence et de fécondité, est insatisfait par les démonstrations de la géométrie des Anciens. Celles-ci n'indiquent pas comment on est parvenu à elles et elles ne permettent pas de résoudre de nouveaux problèmes. Or la méthode analytique ne présente pas ces inconvénients. Examinons de ce point de vue cette méthode à l'oeuvre dans la résolution des deux problèmes qui nous ont servi précédemment d'illustrations.

L'analyse comme effectuation de la volonté d'évidence et de fécondité

La proposition du livre II des *Eléments* d'Euclide demande de couper en un point H une droite donnée AB de telle sorte que le rectangle de côtés HB et BD, égal à AB, soit égal au carré de côté AH (fig.7). Selon la méthode, il faut :

- supposer le problème résolu

- donner des noms à toutes les droites connues et inconnues :

$$AB = a \text{ et } AH = x$$

- parcourir le problème pour établir des relations entre ces droites :

$$xx = a\,(a - x)$$

- résoudre l'équation :

$$x = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a..$$

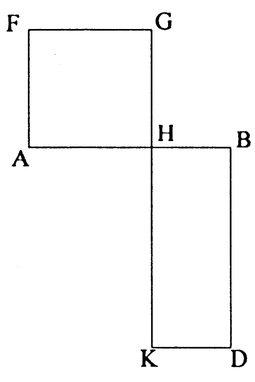


fig.7

Dans la deuxième étape, l'intuition nous permet de distinguer les choses simples de la figure. Dans la seconde étape, la déduction nous permet de décomposer le rectangle et le carré en droites (cela suppose une droite unité), et l'induction nous permet de relier les droites connues et inconnues par une équation. La résolution de l'équation repose sur les règles de l'algèbre, et s'appuie sur une évidence calculatoire. Contrairement à la démonstration euclidienne, le résultat n'est pas donné a priori mais trouvé a posteriori, et chaque étape de la résolution s'appuie sur des opérations de l'entendement.

Il resterait à interpréter la solution de manière géométrique pour la construire à la règle et au compas, cela en suivant la correspondance entre opérations arithmétiques et les opérations de la géométrie donnée au début de l'ouvrage. Mais, Descartes préfèrerait peut-être donner une construction de H à partir de celle d'une parabole, puisqu'il accepte les coniques comme courbes géométriques au même titre que le cercle.

Dans le Livre II de son ouvrage, Descartes donne une double conception de la courbe géométrique : la courbe construite par des mouvements bien réglés et la courbe donnée par une équation. Cette double conception est cohérente, comme l'indique, en particulier, sa méthode des cercles tangents qui suppose à la fois que la courbe soit considérée comme un mouvement et qu'elle soit considérée comme équation. En effet, en absence de continu numérique, le continu du mouvement est nécessaire pour saisir le continu de la courbe.

La méthode des cercles tangents supplée aux défauts de la démonstration par l'absurde sur laquelle repose les démonstrations des Anciens sur les tangentes : elle permet de trouver les tangentes et elle s'applique à toutes les courbes géométriques.

Examinons cette méthode appliquée par Descartes à l'ellipse de manière à comparer sa solution (fig.8) avec la démonstration d'Appolonius indiquée plus haut. La méthode des cercles tangents est un cas particulier de la méthode analytique. Il faut :

- supposer le problème résolu : CP est le rayon d'un cercle tangent en C à la courbe

- donner des noms à toutes les droites : CM = x, AM = y, CP = s et AP = v

- parcourir le problème pour établir des relations entre ces droites :

  les droites x et y sont reliées par l'équation de la courbe ici :
  $xx = r\,y - y$ (1)

  les droites x, s et v sont reliées par le théorème de Pythagore dans le triangle CMP :
  $ss = xx + vv - 2\,vy + yy$ (2)

  on tire de ces deux équations :
  $(1-\frac{r}{q})\,yy + (r - 2v)\,y + vv - ss = 0$ (3).

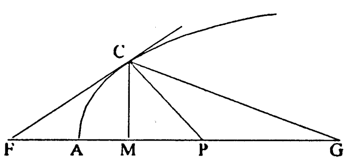


fig.8

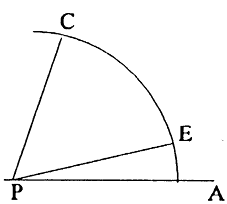


fig.9

L'équation (2) est aussi celle d'un cercle de centre P, donc l'équation (3) a pour racines les ordonnées des points d'intersection C et E de la courbe et du cercle (fig.9). Descartes explique que si le cercle est tangent alors l'équation (3) doit avoir deux racines égales car *plus ces deux points C et E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines* [2, p.374]. Il en conclut que l'équation (3) doit être de la forme :

$yy - 2e\,y + ee = 0$ (4)

- résoudre le système des équations (3) et (4) :

  en identifiant les termes en yy et en y des deux équations, et en prenant y = e, on obtient :

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r\,.$$

Cette méthode est féconde : elle s'applique à toutes les courbes géométriques, pourvu qu'on en possède une définition algébrique par une équation, éventuellement une équation implicite. Descartes a limité le champ des courbes acceptables en géométrie, mais cette limitation est une partie intrinsèque de la méthode cartésiennne. En effet, comme le stipule la règle VIII des *Règles pour la direction de l'esprit* :

Si dans la série des objets à chercher, il se présente quelque chose que notre entendement ne puisse assez bien voir par intuition, il faut s'y arrêter, sans examiner ce qui suit, mais s'abstenir d'un travail superflu [1, p.46].

Cette limitation permet de dépasser la notion de courbe pour proposer un concept de courbe, car le concept est toujours le limité, et elle permet d'édifier un programme d'étude des courbes.

Il reste à savoir si une solution obtenue par la méthode analytique peut être considérée comme démontrée. La réponse de Descartes est oui. Il sera inutile de passer par la logique propositionnelle pour donner une démonstration.

Les deux façons de démontrer : vérité logique et vérité cartésienne

Dans les réponses aux objections à ses *Méditations à la philosophie première*, Descartes se voit obliger de répondre à un lecteur qui estime que les démonstrations qu'il y a données ne sont pas mathématiques [5]. Il explique alors que la manière de démontrer est double, l'une se fait par l'analyse et l'autre se fait par la synthèse :

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes ; en sorte que si le lecteur la veut suivre, et jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui même l'avait inventée. Mais cette sorte de démonstration n'est pas propre à convaincre les lecteurs opiniâtres ou peu attentifs [...].

La synthèse, au contraire, par une voie toute autre, et comme en examinant les causes par leurs effets (bien que la preuve qu'elle contient soit aussi des effets par les causes), démontre à la vérité clairement ce qui est contenu en ces conclusions, et se sert d'une longue suite de définitions, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes, [...] elle arrache le consentement du lecteur [...], mais ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction aux esprits [...].
Les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de cette synthèse [...]. Pour moi, j'ai suivi la voie analytique dans mes Méditations, parce qu'elle me semble la plus vraie, et la plus propre pour enseigner ; mais, quant à la synthèse [...], elle ne convient pas toutefois si bien aux matières qui appartiennent à la Métaphysique [3, pp.121-122].

L'analyse s'adresse à l'intelligence du lecteur, elle peut lui donner un sentiment d'appropriation parce qu'elle repose sur l'évidence de l'entendement. En revanche, la synthèse, il s'agit de celle des anciens géomètres, peut le convaincre mais elle ne peut satisfaire l'exigence d'évidence. Alors que l'analyse repose sur l'entendement du sujet, la synthèse est un appareillage extérieur au sujet qui arrache son consentement.

Dans l'analyse, Descartes inclut les démonstrations allant des effets aux causes, que l'on trouve dans sa physique. Les *Méditations à la philosophie première* comporte deux procédures de démonstration de l'existence de Dieu, l'une par les effets et l'autre par la nature de Dieu. Dans la première, la proposition *je pense donc je suis* est considérée comme un effet dont la cause est l'existence de Dieu. Dans la seconde, Descartes démontre l'existence de Dieu par analogie avec celle du triangle : tout comme la nature du triangle se compose de toutes ses propriétés, la nature de Dieu se compose de tous ses attributs, or l'un de ses attributs est l'existence éternelle [5]. Ainsi, les deux démonstrations procèdent par analyse, mais l'une est propositionnelle et l'autre compositionnelle.

Le géomètre n'aura pas besoin d'exposer de façon synthétique ce qu'il a trouvé de façon analytique, car l'évidence de l'entendement détermine le vrai. En effet, la méthode analytique prolonge l'homologie entre les opérations de l'entendement et les choses, lorsqu'il s'agit des choses de la géométrie de la façon suivante :

La méthode analytique de Descartes

opérations de l'entendement	choses à connaître	choses de la géométrie
intuition	simples	droites
déduction	composées	figures
induction	connues et inconnues	droites connues et inconnues

La démonstration logique suppose l'évidence visuelle préalable des axiomes et des figures. Tandis que l'évidence cartésienne s'exerce pour chaque opération de l'entendement nécessaire à la résolution d'un problème, et chacune de ces opérations se manifeste dans le calcul. L'évidence cartésienne est une évidence de l'entendement qui, lorsqu'elle concerne la géométrie, est à la fois visuelle et calculatoire.

Evidence visuelle et évidence calculatoire : voir et toucher

La satisfaction de l'esprit vient de la démarche méthodique du géomètre qui décompose la figure en éléments simples et manipule les symboles algébriques représentant ces éléments. La figure n'est pas seulement contemplée, elle est disséquée en un calcul. L'évidence visuelle se poursuit en une évidence calculatoire.

L'évidence calculatoire se fonde sur la manipulation des droites représentées par des symboles. Or, Descartes va remplacer la métaphore de la contemplation ou de la vue, que l'on trouve chez les Anciens pour désigner la compréhension, par celle du toucher [6]. En effet, dans une lettre à Mersenne du 27 mai 1630, il distingue comprendre et savoir en écrivant :

Nous pouvons bien toucher avec les mains une montagne, mais non pas l'embrasser comme nous ferions un arbre, ou quelque chose que ce soit, qui n'excédat point la grandeur de nos bras : car comprendre c'est embrasser de la pensée ; mais pour savoir une chose, il suffit de la toucher de la pensée [3, tome I, p.152].

Ainsi, la vue ne permet de saisir la parabole que dans sa globalité, par exemple comme intersection d'un cône et d'un plan, alors que nous pouvons toucher chacun de ses points par un calcul et l'embrasser par son équation.

Les deux métaphores, de la vue et du toucher, vont être au coeur de la controverse qui va opposer deux cartésiens, Arnauld et Malebranche. Dans ses *Méditations chrétiennes*, Arnauld utilise la métaphore de la vue en écrivant que l'évidence seule éclaire parfaitement l'esprit, tandis que, dans *La recherche de la vérité*, Malebranche utilise la métaphore du toucher en écrivant que *l'idée constitue l'objet immédiat de l'esprit quand il aperçoit quelque chose, c'est-à-dire ce qui touche et modifie l'esprit de la perception qu'il a d'un objet* [8, pp.128-132]. Chez Malebranche, comme chez Descartes, l'évidence manipulatoire complète l'évidence visuelle.

Il est intéressant de comparer de ce point de vue les travaux mathématiques d'Arnauld et de Malebranche.

Dans ses traités mathématiques, comme aussi son ami le Marquis de l'Hospital dans son traité d'analyse, Malebranche utilise à profusion l'expression *il est évident que*. Cette expression ne se réfère pas à une évidence géométrique, mais elle s'appuie toujours sur l'évidence d'un calcul. Il est intéressant de noter qu'il en fait de même avec l'expression *il est clair que*, qui, à son origine, concerne la vision.

Dans ses *Eléments de géométrie*, Arnauld reproche aux *Eléments* d'Euclide d'être *confus et brouillés*, de traiter pêle-mêle des droites et des surfaces, des triangles et des carrés, de prouver des propositions sur les droites (choses simples) en utilisant des triangles (choses composées). Il va remplacer l'ordre euclidien des propositions, qui repose sur une déduction logique à partir de propositions évidentes (les axiomes), par ce qu'il appelle un ordre naturel, qui est l'ordre cartésien des choses qui va des choses simples aux composées. Ainsi, pour démontrer des propositions sur les simples droites, sans utiliser les choses composées que sont le triangle et l'angle, il développe une étude complète des droites perpendiculaires et obliques, où le concept d'angle est complètement absent. L'ordre naturel s'appuie sur l'évidence des choses, et non sur celle des propositions, mais il s'agit ici d'une évidence visuelle et non d'une évidence calculatoire. Il lui arrive d'en appeler à l'intelligence du lecteur, par exemple pour s'abstenir de démontrer ce qu'on appelle aujourd'hui le premier cas d'égalité des triangles dans le cas de triangles rectangles, mais il fait alors appel à l'évidence visuelle du lecteur.

Les successeurs de Descartes hériteront des deux identifications cartésiennes :

vérité = évidence et évidence = calcul algébrique

Les analystes du 18ème siècle s'appuieront sur l'identification obtenue par transitivité :

vérité = calcul algébrique

pour développer l'étude des courbes. Les géomètres du 19ème siècle contesteront celle-ci, mais resteront fidèles à la première équation cartésienne. Cette équation ne tombera vraiment qu'avec la géométrie formaliste d'Hilbert, qui s'appuie cependant sur un nouveau calcul, le calcul propositionnel [6].

Bibliographie

A) Sources

[1] DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Sirven, Vrin, Paris, 1970.
[2] DESCARTES, *Discours de la méthode*, rééd. Fayard, Paris, 1987.
[3] DESCARTES, oe*uvres*, éd. Adam et Tannery, onze tomes, Paris, 1897-1913.
[4] PAPPUS, *La collection mathématique*, trad. Ver Eecke, rééd. Blanchard, Paris, 1982.

B) Références

[5] BARBIN, Descartes et les mathématiques, in *Les philosophes et les mathématiques*, Ellipses, Paris, 1996.
[6] BARBIN, Historicité de la notion d'évidence en géométrie, entre évidence visuelle et évidence manipulatoire, in *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996.

[7] DERRIDA, Résistances, in *La notion d'analyse*, Presses universitaires du mirail, 1992.
[8] GIL, *Traité de l'évidence*, Millon, Grenoble, 1993.
[9] GUITART, *Evidence et étrangeté*, à paraître.