

ENTRE DEMARCHE MATHEMATIQUE ET DEMARCHE PHILOSOPHIQUE

Joëlle DELATTRE

Quels sont le sens et la portée des démonstrations de géométrie astronomique auxquelles Théon de Smyrne consacre une place centrale - c'est-à-dire un long chapitre de vingt pages¹ - dans son étude des connaissances astronomiques nécessaires à la lecture des écrits cosmologiques de Platon ? Nous avons d'abord pensé qu'il s'agissait d'exercices, un peu fastidieux et répétitifs, proposés au lecteur non expert en mathématiques, avec le soutien efficace de la manipulation des sphères mécaniques construites, appelées par Théon de Smyrne lui-même : "sphères platoniciennes". Sans abandonner vraiment cette première interprétation, nous voudrions la compléter par la mise en évidence d'une exigence logique et philosophique qui dépasse le cadre d'un simple exercice d'apprentissage. Celle-ci s'est imposée à nous dès lors que nous avons tenté de récapituler de manière ordonnée les énoncés et les reformulations des problèmes posés, des théorèmes utilisés et des démonstrations effectuées².

Plusieurs caractéristiques de l'entreprise de Théon ont, en effet, attiré notre attention, et nous ont paru l'apparenter à une démarche proprement "analytique" :

- le questionnement initial d'abord : "quelle est la cause" de l'impression que le Soleil nous donne de se déplacer irrégulièrement sur le cercle zodiacal ?
- la volonté d'être exhaustif, ensuite, et de ne négliger aucune piste dans l'examen systématique de tous les cas, répertoriés et classés en hypothèses positives ou négatives dont on étudie les différentes conséquences ;

¹ Cf. III 26, éd. et trad. J. Dupuis, pp. 246 à 279 ; éd. E. Hiller pp. 152 à 172. Nous utilisons les initiales D. ou H. dans nos références au texte, selon l'édition à laquelle nous renvoyons.

² Voir en annexe la mise en page de cette récapitulation.

- la recherche, enfin, pour la démonstration, d'un point de vue qui ne soit pas un cas particulier, mais un cas quelconque permettant une conclusion toujours valable.

Après avoir reprécisé le contexte historique dans lequel s'est écrit le texte de Théon de Smyrne, nous nous proposons de relire une page célèbre [135 d à 136 e] du *Parménide* de Platon, dans la nouvelle traduction de Luc Brisson [pp. 111 à 113] ; en effet, il nous semble que l'injonction parménidienne faite au jeune Socrate de "s'exercer à la dialectique", telle que Platon la met en scène dans cette page, correspond à une authentique démarche d'analyse. Nous nous demanderons alors si la méthode d'étude systématique des hypothèses de géométrie astronomique, mise en oeuvre par Théon, n'a pas quelque lien avec l'exigence de "s'exercer à la dialectique". Restera alors à apprécier si la démarche de Théon de Smyrne est plus philosophique que mathématique.

Le contexte historique et philosophique

Rappelons tout d'abord que Théon de Smyrne est l'auteur grec, au deuxième siècle de notre ère, d'un traité de deux cents pages intitulé : *Ce qui est utile du point de vue scientifique pour lire Platon*. L'ouvrage nous est parvenu en deux parties : l'arithmétique et la musique d'une part, grâce à un parchemin du XIe ou XIIe siècle, dont la première édition remonte au milieu du XVIIe siècle ; l'astronomie d'autre part, grâce à un papier grand format du XIVE ou XVe siècle, et éditée seulement au milieu du XIXe siècle. Le texte grec a été relu et réédité à la fin du XIXe siècle par E. Hiller, pour les éditions Teubner à Leipzig, et par J. Dupuis qui l'a traduit en français pour les éditions Hachette, à Paris. On a très peu de renseignements sur l'auteur lui-même. Est-ce à lui que Ptolémée attribue des observations de Mercure et de Vénus, en 129 et 130 ? A-t-il un rapport avec le personnage que Plutarque met en scène dans certains de ses dialogues, et en particulier dans *Du Visage que l'on voit dans le disque lunaire* ? Est-ce lui, le philosophe platonicien dont on peut voir le buste sous le numéro vingt-cinq dans la salle des philosophes au Musée du Capitole ? Il est plaisant de croire que les trois ne font qu'un, mais rien ne permet d'en être absolument certain.

Nous sommes en Asie mineure, au IIe siècle, sans doute en Carie, région encore célèbre à l'époque de Proclus, au Ve siècle, pour le renom de

ses écoles philosophiques. On peut considérer que Théon de Smyrne est le contemporain de Nicomaque de Gêse dont l'*Introduction Arithmétique* et l'*Encheiridion* (manuel d'harmonique) comportent des ressemblances importantes avec les deux premières parties de l'ouvrage de Théon. Ils ne se citent pas l'un l'autre, mais ont des sources et des références évidemment communes, et en particulier, pythagoriciennes et médio-platoniciennes.

L'un et l'autre auteurs correspondent, en effet, à une tendance qu'on appelle souvent le "médio-platonisme" : fortement éclectiques, faisant des emprunts aux stoïciens, à Aristote, aux pythagoriciens, ils prônent une relecture fervente des textes de Platon, écrits au IV^e siècle avant notre ère. En effet, ces textes éloignés de cinq siècles dans le temps, comme les *Essais* de Montaigne vont bientôt l'être pour nous, sont devenus difficiles à comprendre pour les contemporains de Théon, de Nicomaque, et aussi d'Alkinoos³, auteur d'un *Didaskalikós*, manuel d'introduction à la lecture de l'oeuvre de Platon. Aussi est-il besoin d'expliquer, de commenter, de "traduire" avec des synonymes de la langue commune du II^e siècle des expressions devenues obscures et désuètes, comme le fait remarquer Pierre Hadot dans *Qu'est-ce que la philosophie antique?*, à propos de la tendance exégétique qui caractérise la philosophie grecque durant l'Antiquité tardive.

Or, plusieurs commentateurs des textes platoniciens, comme Alkinoos, ont essentiellement réfléchi, à partir des questionnements du *Gorgias* et du *Phèdre* en particulier, aux rapports de la science dialectique et de la rhétorique, tellement à l'honneur dans l'éducation des jeunes Romains ; n'hésitant pas à l'appeler "science du langage" et à la présenter comme la science suprême, ils la disaient bien supérieure et préférable à toutes les disciplines mathématiques, qui ne devaient être que les "échelons", ou le "vestibule" permettant d'y accéder. Iseltraut Hadot, dans *Arts libéraux et philosophie dans la pensée antique*, analyse ce qu'elle appelle "la méthode d'interprétation déformante des platoniciens" [pp. 76-77], qui reposait principalement sur la pratique de citations tronquées, ou détournées de leur contexte. Une telle méthode, d'ailleurs, n'est pas non plus étrangère à Théon de Smyrne qui l'utilise, en particulier, dans l'introduction de son

³ Voir J. Delattre, "Apprentissage des sciences mathématiques et initiation philosophique : médio-platonisme et néo-pythagorisme au II^e siècle", contribution à l'Université d'été d'épistémologie et d'histoire des mathématiques de Besançon (juillet 1995), publiée dans les *Actes...* par l'IREM de Besançon.

ouvrage, mais à des fins, nous semble-t-il, opposées, puisqu'il s'y efforce, au moyen de citations de la *République* et de l'*Epinomis*, de faire reconnaître l'utilité et la nécessité des savoirs mathématiques en tant que tels pour un philosophe platonicien.

En effet, l'enjeu de cette introduction consiste à montrer qu'il est nécessaire de faire des mathématiques pour devenir un authentique philosophe platonicien. Certes, le but dernier du philosophe étant la recherche de la vie la meilleure, il ne s'agit pas de "mathématiser", pas plus que de continuer à faire des vocalises, jusqu'à l'extrême vieillesse. Ce à quoi Théon veut donc que s'entraîne son lecteur, c'est à une certaine manière de faire des mathématiques qui conduise au suprême bonheur de l'assimilation à la divinité, tel que Platon le définit dans le *Théétète* [176 d]. Or, on ne peut s'assimiler vraiment à la divinité, selon Platon et Théon de Smyrne, que lorsqu'on devient capable de comprendre comment les rapports numériques, géométriques et harmoniques, qui expriment et garantissent la cohérence de l'univers, constituent l'intelligibilité de la réalité dans toutes ses dimensions ; celles-ci ne se révèlent, de fait, qu'à celui qui sait les découvrir avec méthode comme un "lien unique et naturel" entre tous les savoirs, ainsi que Théon le rappelle en citant et commentant, dans la partie II sur la musique [II 31, H. 84 li. 7-14], l'*Epinomis* [991 e]. C'est donc seulement en passant par la voie difficile des disciplines mathématiques, et avec la bonne méthode, c'est-à-dire en s'y exerçant à la dialectique [I 1, H. 5 li. 5 et 7, et H. 7 li. 8], qu'on parviendra à appréhender un tel lien et à le penser dans son unité, sa vérité, et sa conformité à la nature, afin de goûter ainsi au bonheur suprême d'être divin.

S'entraîner et s'exercer à la dialectique, c'est-à-dire à saisir le vrai et à le comprendre

Au début de la seconde partie du *Parménide* de Platon, le jeune Socrate est félicité par Parménide pour l'élan beau et divin qui l'emporte vers l'argumentation [135 d]. Mais le maître de la philosophie éléate ajoute alors une recommandation importante qui va être l'occasion pour les deux interlocuteurs de préciser en quoi consiste la méthode dialectique [p. 111] :

PA. - Mais exerce-toi, pendant que tu es jeune encore, et entraîne-toi à fond en te livrant à ces exercices qui aux yeux du grand nombre,

paraissent une perte de temps et qui sont par lui qualifiés de "bavardages". Sinon la vérité se dérobera à tes prises.

SO. - Mais de quelle façon, Parménide faut-il s'entraîner ?

PA. - En faisant précisément, répondit-il, ce que tu as entendu Zénon faire. Sous la réserve toutefois de ce que tu lui as dit et qui m'a ravi, [135 e] à savoir qu'il faut ne laisser l'enquête s'égarer ni dans les choses visibles ni même dans ce qui les concerne, mais l'appliquer aux choses qui sont par excellence objets de la raison et dont on pourrait estimer que ce sont des Formes.

Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur les *Paradoxes* de Zénon dont il a été question précédemment dans le dialogue de Platon. Ce qu'il nous importe de noter surtout c'est que l'entraînement et les exercices recommandés consistent en une "enquête" (*episkopeîn*) laquelle ne porte pas sur des objet visibles ou en rapport avec ce qui est visible, mais sur des "Formes" (*eide*), des objets pour la raison (*lógoi*). Autrement dit, les objets mathématiques comme les nombres, les rapports de nombres et de grandeurs, les "formes" géométriques seront de tels objets de la raison dans la mesure où on voudra bien les considérer en tant que tels, et indépendamment des objets sensibles auxquels il leur arrive de se rapporter.

En sorte que, "s'exercer à la dialectique" en faisant des mathématiques, ce ne pourra donc être faire des mathématiques utiles pour la vie quotidienne, et pas non plus faire des mathématiques comme l'ingénieur qui cherche à mettre au point des innovations techniques ; ce sera au contraire faire des mathématiques en elles-mêmes et pour elles-mêmes, d'une manière sans doute authentiquement mathématique, mais en même temps éminemment philosophique. Cette première exigence étant surtout le préalable fondamental de la méthode, intéressons-nous à présent à l'entraînement lui-même et à l'exercice méthodique que Parménide recommande au jeune Socrate.

PA. - Mais il faut continuer et faire ceci encore. Il ne suffit pas d'examiner les conséquences qui [136 a], pour chaque prédicat, découlent de l'hypothèse : "s'il est...", mais il faut aussi, si tu veux t'entraîner à fond, faire pour le même objet, l'hypothèse : "s'il n'est pas..."

SO. - Que veux-tu dire ? aurait demandé Socrate.

Parménide précise alors, en se référant encore à l'argumentation de Zénon d'Elée⁴, en quoi consiste l'examen exhaustif de toutes les conséquences de l'hypothèse que le multiple existe, puis de celle que le multiple n'existe pas ; puis, dit-il, la même argumentation s'appliquera à l'hypothèse de l'existence ou de la non-existence de la ressemblance, puis à ce qui est dissemblable, au mouvement et au repos, à la génération et à la corruption, au fait d'être ou de ne pas être. Et après avoir évoqué ces exemples, il reformule d'une manière générale la démarche à laquelle il convient de s'exercer pour atteindre la vérité.

PA. - En un mot donc, au sujet de tout ce que toujours tu poses par hypothèse "être" ou "ne pas être", ou recevoir une autre caractéristique, il faut examiner de la même façon les conséquences qui découlent pour ces choses elles-mêmes et [136 c] pour chacune des autres choses, que tu auras choisie, en les considérant l'une après l'autre, puis pour plusieurs, et pour toutes sans exception. Et de nouveau, tu mettras les autres choses en relation avec elles-mêmes et avec le prédicat que chaque fois tu auras choisi, que tu l'aies supposé être ou ne pas être, à supposer que tu aies l'intention de t'entraîner comme il faut et de discerner à coup sûr la vérité.

Et Socrate de s'exclamer : *elle n'est pas d'un maniement facile la méthode que tu indiques, Parménide, et je ne la comprends pas très bien.* Situation rêvée pour obtenir une démonstration de la méthode par Parménide lui-même, qui, malgré son grand âge, ne se laissera pas longtemps prier par son jeune interlocuteur, d'autant que Zénon à son tour, Aristote, Pythodore le narrateur et quelques autres auditeurs insistent avec empressement.

Voilà pourquoi, écrit Luc Brisson, la seconde partie du Parménide se présente comme une démonstration de pratique dialectique destinée à donner au jeune Socrate les moyens de défendre la doctrine des Formes [p. 43]. En effet, il faut rendre, selon lui, à ce texte la dimension historique que Platon lui-même a voulu lui donner - l'image que donne Platon de

⁴ Voir à ce propos, J.-P. Dumont, "L'infini paradoxal de Zénon d'Elée : la dialectique de l'espace et du nombre", *Histoire d'infini*, Actes du IX^e colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, IREM de Brest 1994, pp. 49- 62.

Parménide et de Zénon est relativement fidèle [p. 51] - et il faut en finir avec les anachronismes dont les interprétations ontologiques des néo-platoniciens, influençant malgré nous notre lecture du texte, nous ont rendus coupables. En particulier, Luc Brisson démontre que cette seconde partie du dialogue a en réalité un arrière-plan cosmologique, que Parménide n'y parle que de ce monde [p. 61], et que le "tout" dont il est question, par exemple en 145 a b, est matériel, et donc qu'il s'agit bien de l'univers [p. 60]. Mais, laissant au lecteur le soin d'apprécier la nouveauté et l'intérêt de cette réinterprétation du grand dialogue platonicien, nous proposons de revenir au passage dont nous avons interrompu la lecture. Zénon, invité par Socrate à donner la démonstration que Parménide a commencé par refuser, décline l'invitation en répondant ceci :

ZE - C'est à Parménide lui-même qu'il faut adresser ta prière, Socrate. En effet, ce que tu demandes n'est pas une mince affaire. Ne vois-tu pas quelle somme de travail tu exiges ? Bien sûr, si nous étions plus nombreux, il ne conviendrait pas de faire à Parménide cette demande. En effet, il ne convient pas d'aborder des sujets pareils devant un auditoire nombreux, surtout quand on a son âge. Le grand nombre ignore en effet que saute [136 e] d'explorer toutes les voies, sans cette divagation, il est impossible de tomber sur le vrai pour en avoir l'intelligence.

Ces dernières lignes font écho aux premières déclarations de Parménide que nous avons citées, plus haut. La foule non instruite a tendance à appeler ces exercices d'argumentation : "bavardages", perte de temps, divagation, alors qu'ils sont absolument nécessaires, et qu'ils doivent être pratiqués, sans impasse ni raccourci, si l'on veut que l'intelligence ait des relations avec le vrai - autre manière de traduire les derniers mots : *entukhónta tōi alethei nóin skheîn* [136 e 2]. Cette fois, il ne s'agit pas seulement d'être capable de discerner à coup sûr le vrai : *kuríōs diópsēsthai tò alethés* [136 c 6], mais d'être aussi "en intelligence" avec lui, et qu'il nous soit familier et proche, à force de nous entraîner à le reconnaître. Aussi, l'exigence de ne négliger aucune des conséquences découlant de l'hypothèse examinée, comme celle d'explorer toutes les voies nous paraissent-elles déterminantes pour garantir l'exhaustivité de l'enquête et caractériser la méthode en question.

Or, la condition essentielle pour ne pas tomber dans l'anachronisme est, selon Luc Brisson, d'accepter le primitivisme logique de ce texte

[p. 44], c'est-à-dire le fait que les règles de déduction et les définitions soient antérieures à celles qu'Aristote a définies, mais aussi le fait que les divers domaines : linguistique, logique, cosmologique, ontologique y manquent un peu d'autonomie [p. 51] ; il nous a paru important d'en tenir compte par rapport au projet de Théon de Smyrne. En effet, ce dernier cherche à convaincre ses lecteurs que la philosophie de Platon, tout en étant plus ancienne que les autres, est la meilleure. Ce faisant, il nous semble le plus souvent, sans craindre l'éclectisme, emprunter aux auteurs plus tardifs des concepts et des arguments destinés à mieux faire comprendre et apprécier l'originalité et la pertinence de l'enseignement platonicien. Toutefois, pour ce qui est de la manière platonicienne de faire des mathématiques, c'est-à-dire en s'exerçant à la dialectique, il est évident qu'il doit au contraire éviter soigneusement l'anachronisme, s'il veut persuader de sa supériorité philosophique, du moins est-ce une hypothèse que nous avons cherché à éprouver en relisant certaines des démonstrations de géométrie astronomique qu'il nous transmet.

Sauver les faits observés de manière platonicienne

Selon la tradition, en particulier Simplicius, dans ses *Commentaires au De Caelo* [II 12, 293 a] d'Aristote,

Platon, en imposant aux mouvements des corps célestes d'une manière indubitable la circularité, l'uniformité et la régularité, proposait aux astronomes de résoudre le problème suivant [493 G] : quels mouvements supposer parmi ceux qui sont uniformes, circulaires et réguliers pour que les phénomènes planétaires puissent être sauvés ?

Cela concernait les astres errants en général, et pas plus le Soleil ou la Lune que les autres "planètes". On considère habituellement, et cela ne fait aucun doute pour Simplicius dans les pages qui suivent, que les dispositifs de sphères homocentriques d'Eudoxe de Cnide, perfectionnés par Callippe de Cyzique, comme le transmet Aristote dans la *Métaphysique* [XII 8 1073 b], étaient des essais de solutions apportées à ce problème platonicien.

Or Théon ne se réfère pas à Platon pour poser le problème astronomique du mouvement solaire dont la résolution géométrique l'intéresse : il utilise en effet des données probablement plus tardives (peut-être celles d'Hipparque, mais sans le préciser), concernant l'inégalité des

saisons laquelle, au IV^e siècle, on admettait comme une erreur négligeable, semble-t-il, à mettre au compte d'observations peu fiables.

En quoi pourtant la manière dont Théon procède, en particulier dans les deux derniers moments du chapitre que nous allons relire, nous paraît authentiquement platonicienne, c'est ce que nous voudrions essayer de montrer maintenant.

Le chapitre vingt-six de la troisième partie du traité de Théon de Smyrne se subdivise, en effet, en quatre moments dont les deux premiers, plus brefs, consistent à poser d'abord le problème de l'irrégularité apparente de la course du Soleil sous la ceinture zodiacale, puis à en proposer une première solution qui utilise l'hypothèse d'un cercle solaire, excentrique par rapport au cercle zodiacal.⁵ Le moment suivant expose une seconde solution qui utilise l'hypothèse d'un cercle solaire épicycle dont le centre se meut, sous le zodiaque, selon un cercle concentrique ; et le dernier moment s'étend, assez longuement, sur l'ajustement de ces deux hypothèses. Nous renvoyons le lecteur au résumé structuré que nous joignons en annexe, et sur lequel nous nous appuyerons au fur et à mesure de notre commentaire.

De fait l'originalité de Théon consiste à poser le problème de l'irrégularité apparente du mouvement solaire sous une forme d'allure déductive, nettement scandée en trois ou même quatre temps.

Partant de l'observation précise du fait astronomique :

les saisons ont une longueur inégale, et, alors que les arcs décrits par le Soleil sur la voûte céleste, selon le cercle zodiacal, sont égaux, il paraît ralentir au début des Gémeaux et accélérer au début du Sagittaire [H. 153 li. 1-15],

Théon énonce le principe ou la loi "naturelle" qui régit le mouvement de tous les êtres célestes, principe platonicien certes, mais axiome de toute l'astronomie grecque :

or tous les êtres divins ont naturellement et nécessairement un mouvement circulaire uniforme et régulier [H. 153 li. 16-17],

pour enfin en conclure que nécessairement l'irrégularité observée n'est qu'une apparence pour nous :

⁵ Voir l'étude comparée des deuxième et troisième moments de ce chapitre que nous proposons, au cours de notre article "Nombre et astronomie", dans les Actes du colloque inter IREM épistémologie et histoire des mathématiques de Cherbourg (juin 1994), *La mémoire et le nombre*.

donc c'est nous qui avons l'impression que le Soleil [être divin, animé d'un tel mouvement] est emporté irrégulièrement sur le cercle zodiacal [H. 153 li. 19-20].

Le coeur de la question se formule alors plus précisément de la manière suivante : *Ce qui est cause d'une telle manifestation, c'est que le Soleil se meut d'une autre manière qu'autour du centre Q* [H. 154 li. 1-2].

Autrement dit, on cherche à expliquer que nous ayons cette impression d'irrégularité alors que le mouvement solaire doit être uniforme et régulier. Il est clair qu'il s'agit ainsi non pas de rendre compte en elle-même de l'inégalité des saisons comme d'un phénomène scientifique au sens moderne, mais plutôt de déduire logiquement du modèle circulaire et uniforme parfait, par une conséquence inévitable, que cela nous apparaisse ainsi irrégulier et inégal. Il faut seulement trouver le chemin logique, l'ordre déductif, à partir du principe absolu et indubitable jusqu'à la conséquence observée et incontournable, sans que ni l'un ni l'autre ne puisse être remis en cause. Dans de telles conditions, seule la méthode de résolution, c'est-à-dire l'articulation et l'enchaînement des hypothèses et des théorèmes par rapport au problème à résoudre, seront donc susceptibles de variantes, comme nous allons le voir.

Notons tout d'abord le soin avec lequel sont envisagées les différentes solutions, même celles qui sont impossibles et absurdes, concernant les positions respectives du Soleil S, du centre de son cercle (que nous appelons M) et du centre du cercle zodiacal Q :

- *ou M est en Q* : cela produirait la même difficulté (*aporia*) car les temps seraient égaux
- *ou S passe par Q* : cela est impraticable (*amékhanon*) car le Soleil et la Terre ne se rencontrent pas et il en résulterait des absurdités (*átopa*)
- *ou S et M tournent autour de Q* : cela est alors possible de deux manières :

soit en le comprenant à l'intérieur du cercle solaire (1)

soit en le laissant à l'extérieur du cercle solaire (2)

de ces deux dernières hypothèses, celle (1) selon l'excentrique et celle (2) selon l'épicycle, il est alors précisé que *les phénomènes seront sauvés quelle que soit celle qu'on choisira* [H. 154 li.12-13].

De fait, l'expression "les phénomènes seront sauvés", que Simplicius, nous l'avons vu, emploie aussi, ne semble pas avoir été utilisée par Platon. La science astronomique avait en effet pour lui une autre fonction, à

condition d'être pratiquée comme la géométrie, c'est-à-dire, comme il le fait dire à Socrate dans la *République*, à condition

Qu'on ne la pratique que pour connaître ce qui existe toujours... [VII 527 b]. Ainsi elle serait propre à entraîner l'âme vers la vérité, à promouvoir la pensée philosophique en tournant vers le haut un regard que nous avons présentement le tort de diriger vers le bas.

Les interprètes de Platon ne s'accordent d'ailleurs pas tous sur la manière de comprendre la déclaration qu'on trouve quelques lignes plus loin, selon laquelle

C'est donc en traitant de problèmes, exactement comme en géométrie, que nous pratiquerons l'astronomie, et nous laisserons de côté ce qui se passe au ciel, si nous voulons que la vraie manière de comprendre l'astronomie tire parti de ce qui dans notre âme est naturellement intelligent au lieu de le laisser sans emploi. [VII 530 b-c].

Louis Guillermit [p. 73] traduit "nous laisserons de côté ce qui se passe dans le ciel" (*tà d'en tòi ouranôi eásomen*) plutôt que "nous abandonnerons", sens plus fort de *eân* lequel impliquerait qu'on bannisse complètement de l'astronomie l'observation, pour la remplacer par la spéculation. Or, comme le montrent avec finesse et d'une manière convaincante les auteurs de l'ouvrage édité et introduit par John P. Anton, *Science and sciences in Plato*, les choses ne sont pas si simples. Car Platon dit aussi au même endroit que pour connaître les vraies réalités astronomiques, *il faut se servir de ce qu'on voit de complexe dans le ciel comme d'autant de paradigmes* [VII 529 d], ce qui signifie plutôt que les observations célestes, sans être en elles-mêmes objet de connaissance scientifique, sont néanmoins l'instrument et le moyen pour accéder à une vraie connaissance.

Aristote ne semble pas non plus avoir utilisé l'expression "sauver les phénomènes", mais il recourt, dans le traité *Du Ciel*, à des expressions comme "s'accorder" (*sumbainein*) ou "s'harmoniser" (*sumphônein*) avec les phénomènes. Et sans doute l'idée de "sauver" (*sôidzein*) les faits observés est-elle plus tardive, dans l'histoire de la pensée, de même que les sources que Théon de Smyrne utilise pour nous transmettre les deux solutions qu'il étudie. Il nomme en effet le commentateur d'Aristote, Adraste, pour la

solution de l'excentrique, mais il ne précise pas à quels "autres" il emprunte la solution de l'épicycle. Quant à la démonstration de l'ajustement des deux hypothèses, il en attribue le début à Adraste, mais semble ensuite s'approprier la fin sans plus préciser de source, même de manière indéterminée. On peut penser qu'il s'agissait sans doute, au II^e siècle, d'un enseignement devenu scolaire, que chacun pouvait s'approprier sans crainte d'être injuste vis-à-vis de son inventeur (Apollonios peut-être ou bien Hipparque, ou l'un de leurs successeurs), l'enjeu étant surtout de faire réfléchir à la manière de procéder logiquement, à la façon d'ordonner et de structurer les démonstrations.

Par exemple le début de l'étude de la solution du cercle solaire épicycle est exemplaire de ce point de vue. On est frappé par la rigueur logique d'une enquête procédant par dichotomies successives. En suivant notre résumé on peut récapituler la démarche ainsi :

ou bien (1), ou bien (2)

(1) est impossible, donc (2) ;

mais ou comme (A), ou (B)

et ou (a), ou (b), ou (c),

comme non (a), et non (b),

alors, ou comme (A) et (c),

ou (B) à quoi s'ajoutera (A) pour produire l'impression de retard ;

Si (B),

ou (d) ou (e)

or (B) et (d) :

en effet, soit (e), que voit-on sur le zodiaque ?

le contraire de ce qui apparaît, donc non (e)

alors (d) et (B)

que voit-on sur le zodiaque?

les phénomènes seront sauvés, logiquement.

Produire l'impression de retard par un mouvement inverse de celui du ciel est, précise Théon, "l'opinion préférée de Platon" [H. 160 li.17-18] ; il justifie ainsi le choix de B, puis l'essai de la solution (e), et c'est à la combinaison du mouvement du cercle du Même avec ceux des cercles de l'Autre dans le *Timée* [38 e-39 a] qu'il se réfère ici en réalité. Toutefois, il ne suffit pas de rendre compte d'un retard, il y a aussi une accélération, et c'est pour en produire l'impression qu'il faudra trois mouvements et pas seulement deux. Ce que nous pouvons schématiser ainsi :

B + A → impression de retard comme avec l'Autre et le Même chez Platon

B + d + A
↓ → même impression avec trois mouvements,
(=A) B le mouvement de l'épicycle, d celui du Soleil, A celui du ciel, mais en même temps, impression d'accélération possible aussi [H. 165 li. 4].

On voit comment le modèle mécanique proposé par Théon de Smyrne reste platonicien dans l'esprit, aussi bien dans la conception d'une combinaison complexe de mouvements que dans l'exigence d'une division logique rigoureuse.

S'intéresser aux hypothèses mathématiques en dialecticien

Quant au problème qui retient tous les soins de Théon de Smyrne, et qui est précisément celui de l'ajustement des deux hypothèses, pourquoi éprouve-t-il le besoin d'écrire, en se référant à Hipparque lui-même, que ce problème est "digne d'attention mathématique" (*áxion einai mathematikês epistáseos*) [H. 166 li. 6-7], si ce n'est parce qu'il est aussi et surtout un problème philosophique ? En effet, que les mêmes choses semblent s'ensuivre d'hypothèses aussi différentes, autrement dit, que l'une ou l'autre des hypothèses permette aussi bien de "sauver les phénomènes", voilà en effet le véritable objet théorique sur lequel l'apprenti philosophe va maintenant s'exercer à argumenter et à raisonner.

Une fois acquis que chacune des hypothèses rend compte des faits observés, ce à quoi s'applique la connaissance théorique de l'astronome platonicien, c'est à la manière dont chaque hypothèse peut se déduire de l'autre, et inversement. Deux modèles géométriques différents rendent compte de l'irrégularité apparente du mouvement solaire : se peut-il qu'ils soient équivalents ou interchangeables, comment et pourquoi ? Les exercices démonstratifs proposés par Théon doivent nous amener à "voir la cause" (*ideîn tèn aitián*) et à savoir expliquer pourquoi les deux modèles conviennent aussi bien l'un que l'autre pour rendre compte de la course solaire apparente.

Les quatre moments de l'argumentation, tels que nous avons tenté de les présenter en annexe, constituent de fait une sorte de gradation vers l'abstraction, la plus grande généralité et la réversibilité. Certes, le Soleil est assimilé à un point uniformément et régulièrement mû en cercle autour

de la Terre Q, assimilée elle-même à un point fixe, et l'étude des liens entre les deux hypothèses, quelle que soit la position où le point S se projette sur le cercle zodiacal, correspond incontestablement à une curiosité de mathématicien.

Mais l'interrogation sur le principe unique auquel les deux hypothèses renvoient, dès lors qu'on cesse de partir d'elles pour, selon l'expression même de Platon dans la *République* [VI 510 b], *suivre une marche qui mène non au principe mais à la conclusion* - à savoir ici à la découverte du rapport de un à vingt-quatre ou de son inverse de vingt-quatre à un, correspondant sans doute à une valeur approchée de l'excentricité mesurée par Hipparque - voilà qui intéresse alors plutôt le dialecticien, lui qui utilise le seul raisonnement pour saisir son objet "par la faculté dialectique" (*tēi toū dialégesthai dunámei*), comme traduit Louis Guillermit [p. 233]. En effet, dit encore Platon, sans transformer les hypothèses en principes (comme fait le raisonnement mathématique), le raisonnement dialectique

les tient pour ce que sont en réalité des hypothèses : autant de degrés et de points d'appui permettant de se diriger vers le principe universel pour atteindre l'anhypothétique [l'absolu] ; ce principe une fois saisi, [VI 511 b] le raisonnement prend la direction inverse : il descend en s'attachant aux conséquences qui se rattachent à ce principe, jusqu'à ce qu'il parvienne à destination sans jamais recourir à rien qui soit sensible ; et c'est aux seules Idées qu'il recourt, il passe de l'une à l'autre, et c'est à des Idées qu'il aboutit finalement.

Telle est l'exigence platonicienne de remontée vers l'absolu à partir des hypothèses multiples, puis de redescente rigoureusement articulée selon les conséquences.

Dans la mesure où la démonstration du deuxième énoncé du théorème par Théon de Smyrne fait appel à la vérification visuelle quart de cercle par quart de cercle, sans doute en s'appuyant sur les sphères platoniciennes construites, on ne peut certes pas dire que le raisonnement n'y *recourt jamais à rien qui soit sensible*. De la même façon, aussi bien la démonstration du théorème général que celle de la réciproque s'appuient toutes les deux sur des tracés et des constructions géométriques dont la réalisation dans une figure support est, semble-t-il, nécessaire pour soutenir l'argumentation. Néanmoins, le fait de choisir comme évident le seul cas du Soleil parce qu'il est *le plus visible et le plus grand* - tout classique que

ce choix puisse être puisqu'on retrouve le même choix aussi chez l'astronome du premier siècle, Géméus - nous paraît correspondre aussi à l'usage paradigmatique des observations célestes que Platon recommande, comme nous l'avons vu, dans la *République* [VII 529 d].

D'autre part, c'est quand même bien *en s'attachant aux conséquences* que le raisonnement prétend progresser logiquement dans tout le chapitre. Car on a laissé de côté la cause "première" (*prôte mén*) [H. 152 li. 3] de l'apparence des mouvements irréguliers et désordonnés des astres errants (à savoir l'inclinaison du zodiaque), pour annoncer dès la première ligne du chapitre vingt-six qu'on en éluciderait en quelque sorte la "causalité seconde ou dérivée", ou plutôt qu'on ferait porter l'examen sur le mouvement qu'ils décrivent "par consécution" (*katà sumbebekòs dé*) [H. 52 li. 6], comme nous avons tenté de traduire de manière uniforme, en lieu et place de l'expression habituellement utilisée dans la tradition aristotélécienne : "par accident", et qui n'a guère de sens dans ce chapitre. T. H. Martin, premier éditeur et traducteur en latin de ce texte, reconnaît lui-même, dans une note développée, que le sens aristotélécien de l'expression est "forcé" par Théon de Smyrne. Il se trouve, en effet, qu'on rencontre au II^e siècle, chez Galien par exemple, un emploi technique médical de la même expression qu'on ne parvient pas non plus à traduire par : "par accident". Devons-nous simplement conclure à une évolution, en quelque sorte scientifique, de l'usage de l'expression aristotélécienne ?

Pourtant, nous nous demandons, dans le cas qui nous occupe ici, si Théon de Smyrne n'aurait pas aussi cherché à donner à l'expression aristotélécienne un sens platonicien, un sens par exemple lié au mouvement descendant⁶ du raisonnement dialectique, enchaînant les unes aux autres les conséquences à partir du principe unique du mouvement des êtres célestes. Il est, en effet, remarquable que l'expression soit, dans notre chapitre, utilisée d'abord pour qualifier la manière dont les sept astres errants, tout en ayant un mouvement propre qui est simple, "décrivent plusieurs cercles différents" [H. 152 li. 6-8], puis pour préciser ce qu'on va montrer, c'est-à-dire "qu'ils décrivent les trois cercles *par consécution*, celui qui a comme centre le tout, le cercle excentrique et l'épicycle"

⁶ Voir notre étude détaillée du sens de cette expression, en particulier à propos du dernier chapitre du traité de Théon de Smyrne, pp.13 à 32 dans *Histoires d'infini*, Actes du Colloque inter IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques de Landernau (mai 1992), publiés par l'IREM de Brest en 1994.

[H. 154 li. 17-19] ; tandis que c'est encore la même expression qui est ensuite employée pour nommer la manière dont l'hypothèse selon l'excentrique s'ensuit de celle selon l'épicycle [H. 166 li. 11-12] et inversement ; comme si, cette fois, c'était le lien même entre les hypothèses qui constituait en réalité l'objet de la recherche. Or, le lien entre, d'une part, les hypothèses, entre, d'autre part, celles-ci et le principe naturel, entre, d'autre part enfin, celui-ci et les apparences que nous observons, n'est plus exactement un objet mathématique. C'est le dialecticien qui, selon Platon, se préoccupe de le découvrir avec méthode. Et tel était sans aucun doute l'enjeu de l'initiation par Théon de Smyrne à une astronomie platonicienne.

Il apparaît donc que Théon de Smyrne, tout en utilisant à l'évidence des données astronomiques et des supports mécaniques et géométriques sans nul doute très postérieurs à l'époque de Platon, cherche néanmoins à nous initier, en particulier dans ce long chapitre de géométrie astronomique, à la pratique d'une démarche logique et méthodique dont l'authenticité platonicienne semble difficilement contestable.

Certes cela est éloigné de "l'appareil démonstratif euclidien". Toutefois, si celui-ci, comme le fait remarquer Annick-Charles Saget, dans *L'Architecture du divin* [p. 201], "est pour ainsi dire absent" de *L'Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gêrase, alors qu'il se consacre à la recherche de correspondances analogiques entre des séries de termes numériques en proportion s'engendrant les unes les autres et se résolvant à nouveau par opérations successives dans l'égalité primitive, il convient, selon nous, d'être plus nuancé vis-à-vis de Théon de Smyrne, lequel développe lui aussi, à la fin de la partie II sur la musique, la même théorie harmonique, qu'il attribue à Eratosthène, d'une composition proportionnelle indéfinie de séries de trois nombres puis de leur résolution (*análusis*) possible à nouveau jusqu'à l'égalité de l'unité de départ. En effet, insistant sur le fait qu'Eratosthène passe sous silence les démonstrations [H. 107 li. 23], on voit que Théon cherche à énoncer, en s'appuyant sur Adraste, des théorèmes qui formulent d'une manière abstraite et générale les opérations nécessaires à l'engendrement et à la résolution des séries de trois nombres, dans un effort évident de formalisation, avant de préciser et de "montrer" l'application numérique sous forme ou nom de tableau.

D'autre part, on trouve encore, à la suite du long chapitre de géométrie astronomique que nous venons d'étudier, d'autres essais "monstratifs" - à propos des éclipses en particulier [H. 195-196]- qu'on pourrait qualifier, cette fois, d'optique astronomique, et qui sont sans aucun doute plus

euclidiens que platoniciens. Ne peut-on se demander d'ailleurs si la volonté de rappeler au lecteur "de manière élémentaire" (*stokheiqdôs*) [H. 119 li. 20] les connaissances d'astronomie, n'a pas elle-même quelque rapport avec le projet et le modèle euclidien ? Ainsi Théon de Smyrne, pour convaincre son lecteur philosophe de s'initier au savoir scientifique utile pour lire Platon, s'est-il trouvé confronté, dans l'écriture même de son traité, à la difficulté de situer l'une par rapport à l'autre démarche mathématique et démarche philosophique ; et peut-être même est-ce pour étayer les arguments destinés à montrer justement l'intérêt de s'exercer à la dialectique à propos des savoirs harmoniques et astronomiques, qu'il recourt avec le plus de soin aux procédés de la formalisation mathématique.

Bibliographie

Anton J. P. éd., *Science and sciences in Plato*, New York 1980, quatre essais de G. Vlastos, A. P.D. Mourelatos, R. G. Turnbull et I. Mueller, à propos du texte : *République* VII 527d-531 d.

Brisson L., *Platon, Parménide*, traduction inédite, introduction et notes, GF-Flammarion, Paris 1994.

Charles-Saget A., *L'architecture du divin. Mathématique et philosophie chez Plotin et Proclus*, Les Belles Lettres, Paris 1982.

Guillermi L., *Platon par lui-même*, textes choisis et traduits, GF-Flammarion, Paris 1994.

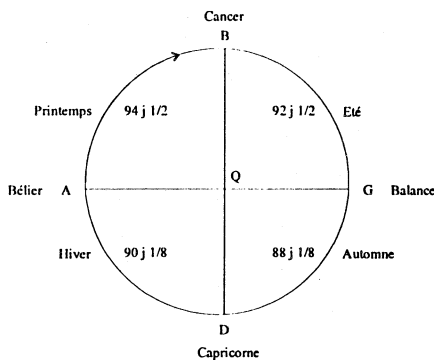
Hadot I., *Arts libéraux et philosophie dans la pensée antique*, Etudes Augustiniennes, Paris 1984.

Hadot P., *Qu'est-ce que la philosophie antique ?*, Gallimard Folio-Essais, Paris 1995.

LES DEMONSTRATIONS DU CHAPITRE 26

A - Le problème

Soit le zodiaque ABGD et Q son centre auquel la Terre est fixée,
A début du Bélier, B début du Cancer,
G début de la Balance, D du Capricorne,



* le soleil paraît parcourir des arcs égaux en des temps inégaux
AB: 94j. 1/2, BG: 92j. 1/2, GD: 88j. 1/8, DA: 90j. 1/8 ;

* or tous les êtres divins se meuvent, par principe, de manière régulière et bien réglée (*homalôs kai eutaktos*) cela est "naturel" (*phusikón*) et nécessaire [H.153 li. 16] ;

* donc c'est ainsi (*homalôs kai eutaktos*) que le Soleil est emporté sur son propre cercle, et c'est nous qui avons l'impression qu'il est emporté irrégulièrement (*anomalos*) sur le cercle zodiacal.

Quelle est la cause d'une telle manifestation (*emphasis*) ?

Quatre solutions possibles :

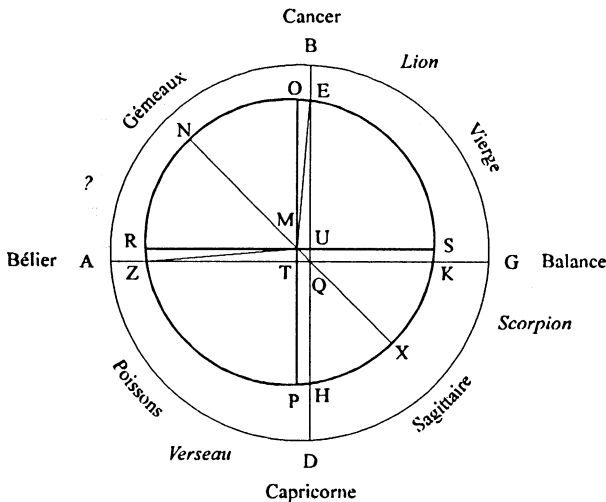
- 1) éliminée : Q ne peut pas être le centre de son cercle, les temps seraient égaux.
 - 2) s'il passe par Q, cela est absurde, car le Soleil rencontrerait la Terre.
 - 3) ou bien tout en tournant autour de Q, il le comprend à l'intérieur de son cercle,
 - 4) ou bien il le laisse à l'extérieur tout en tournant autour de lui,
- reste donc à étudier les solutions 3) : celle de l'excentrique et 4) : celle de l'épicycle.

Quelle que soit l'hypothèse (3 ou 4) choisie, les phénomènes seront sauvés ; on montrera en effet que les planètes décrivent par consécution (*katà sumbebekós*) les trois cercles : épicycle, concentrique et excentrique [H. 154 li. 17-18].

B - Etude de la solution du cercle solaire excentrique (selon Adraste)

Excentrique :	E	Z	H	K	de centre M "sous l'arc EZ"
	↙	↓	↓	↘	
Zodiaque :	A	B	G	D	de centre Q

1) vérification arc par arc que le Soleil, quand il parcourt la totalité de son cercle de manière régulière semble avoir parcouru celui des signes du zodiaque de manière irrégulière ;



- 2) repérage, en traçant la prolongation de la droite des centres Q M, des
- périgée X au 5e degré 1/2 du Sagittaire
 - apogée N au 5e degré 1/2 des Gémeaux
 - des points moyens dans les Poissons et dans la Vierge ;

Entre démarche mathématique et démarche philosophique

3) tracé des diamètres de l'excentrique // aux diamètres du zodiaque, graduation du cercle excentrique en 365 "divisions-jours" $\frac{1}{4}$, calcul de la valeur de chaque demi-cercle autour de l'axe AG, puis de chaque quart de cercle déterminé par les diamètres // : 91 divisions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$;

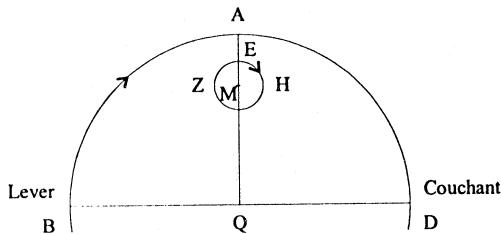
4) comparaisons d'angles au sommet, rapports des segments dans les triangles MQT et MQU, on en déduit la position et la grandeur du cercle EZHK, par rapport au centre Q, et aux points repérés N et X ;

5) on trouve le rapport de 1 à 24 entre la droite des centres Q M, et le rayon de l'excentrique.

C - Etude de la solution du cercle solaire épicycle (selon d'autres)

Epicycle EZKH

Le mouvement du ciel se fait de B (lever) vers A puis vers D (couchant)



ou (1) il [le cercle] est immobile

ou (2) il se meut pendant que le Soleil se meut autour de lui

(1) est impossible pour 2 raisons :

- tout le zodiaque défilerait en un jour derrière le Soleil
- ce serait toujours le jour pour une moitié de la Terre (et la nuit pour l'autre)

(2) donc il se meut;

mais dans quel sens ? le même sens que le ciel (A) ou l'inverse? (B)

- et à quelle vitesse ?
- la même (a)
 - plus vite (b)
 - plus lentement (c)

- non (a) pour 2 raisons :

- le Soleil semblerait toujours dans le même arc de zodiaque
- et aller tantôt dans un sens tantôt dans l'autre

ce qui est faux.

- si (b), le Soleil semblerait précéder les étoiles et parcourir le zodiaque à l'envers

donc :

ou bien (A) et (c)

ou bien (B) de son propre mouvement, ajouté au mouvement d'entraînement diurne (A) "il semblera laissé en arrière"

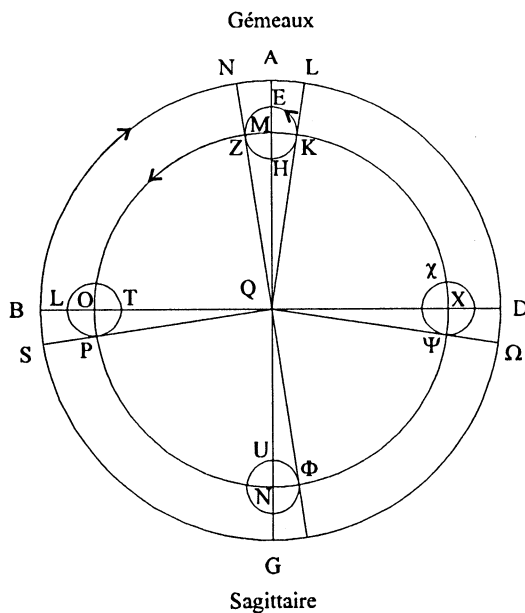
c'est l'opinion préférée de Platon [H. 160 li. 18].

"COMMENT SAUVERA-T-IL LES PHENOMENES?"

Soit le cercle du Soleil de centre M

et le cercle MONX de centre Q et de rayon QM,

sur le cercle EZHK, dans quel sens se meut le Soleil ?



(d) ou il [le Soleil] se meut dans le même sens que le tout

(e) ou il se meut dans le sens contraire

THEOREME :

"je dis que le cercle EZHK étant emporté selon le concentrique **en sens inverse** du tout (B), le Soleil sera emporté sur EZHK **dans le même sens** que le tout (d)."

Démonstration en trois phases :

I* : supposons qu'il soit emporté :

- (e) dans le sens inverse du tout et dans le même sens que son cercle,

quart de zodiaque par quart de zodiaque, étude des mouvements combinés du cercle sur le concentrique et du Soleil sur l'épicycle,
Que voit-on du point Q sur le Zodiaque?

"étant ainsi emporté, c'est autour des Gémeaux [point A où se projette E point le plus éloigné] qu'il semblera mû le plus vite, et autour du Sagittaire [point G où se projette U point le plus proche] le plus lentement

or, c'est le contraire qui apparaît
donc il n'est pas vrai que (e).

II* : alors il est emporté (d) dans le même sens que les étoiles sur l'épicycle
l'épicycle allant dans le sens inverse du tout (B),

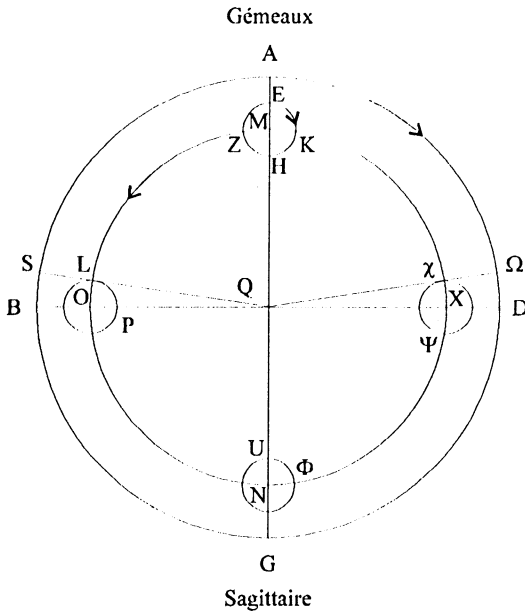
vérification quart de zodiaque par quart de zodiaque,
Que voit-on du point Q sur le Zodiaque?

selon cette hypothèse-ci, **les phénomènes seront sauvés ;**
... et cela est logique (*kai taûta eulôgos*) [H. 164 li. 17].

III* : reprise une troisième fois de l'étude arc par arc pour vérifier que l'accélération et le ralentissement sur le zodiaque résultent bien de la combinaison nécessaire des trois mouvements : voûte du ciel, épicycle et Soleil lui-même.

1) "il semblera prolonger de son propre mouvement le mouvement qui l'emporte sur le zodiaque en se produisant dans le même sens, alors que d'une certaine façon, il est en consécution" (*trôpon tinà sumbainousan*) [H. 165 li. 4].

2) on trouve, à l'inverse du précédent, le rapport de 24 à 1 entre la droite des centres et le rayon de l'épicycle.



D - L'ajustement des deux hypothèses

"voir la cause" (*ideîn aitlan*) pour laquelle, d'hypothèses aussi différentes que celle de l'excentrique et celle de l'homocentrique et de l'épicycle, les mêmes choses semblent s'ensuivre (*tà autà phainetai akoloutheîn*)

(problème "digne d'attention mathématique" selon Hipparque).

Pour ajuster les deux hypothèses, l'apogée, point de la course solaire le plus éloigné de la Terre, se trouve déplacé en A comme dans la solution de l'épicycle (au lieu de N sur l'excentrique).

I* - Début (selon Adraste) de la démonstration :

"l'hypothèse de l'excentrique suit celle de l'épicycle
par consécution (*katà sumbebekós*)".

Soit ABGD le zodiaque de centre Q, EZHK l'épicycle du Soleil de centre M, MONX sur lequel se déplace le centre de l'épicycle, de même centre Q que le zodiaque

PREMIER ENONCE DU THEOREME :

"je dis que puisque M est mû autour de l'homocentrique MONX **régulièrement dans le sens inverse** du tout, et qu'il emporte l'épicycle, le Soleil, parcourant **dans un temps égal** l'épicycle EZHK **régulièrement dans le même sens** que le tout, décrira aussi l'excentrique égal au concentrique."

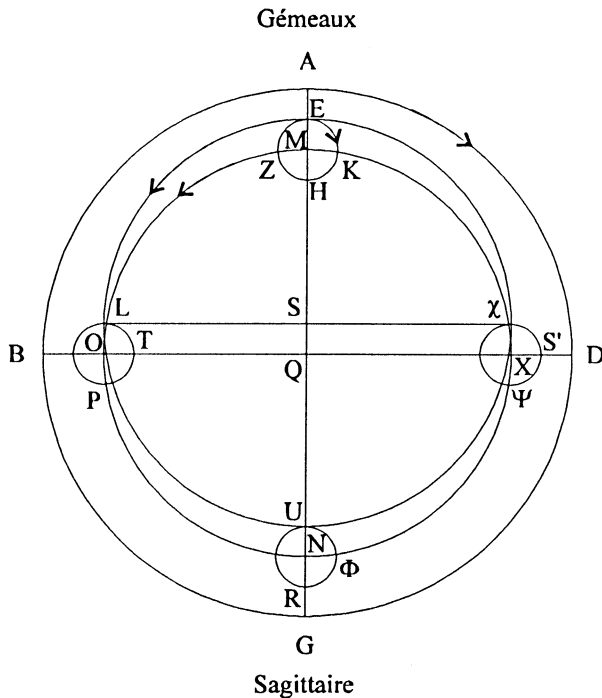
1) on mène les diamètres du zodiaque perpendiculaires AG et BD ;
A est au 5e degré $\frac{1}{2}$ des Gémeaux et G au 5e degré $\frac{1}{2}$ du Sagittaire

2) on suppose décrits trois autres cercles égaux à EZK : LPT, $UR\Phi$ et $\chi\Psi$;
on trace leurs diamètres perpendiculaires à BD : LP et $\chi\Psi$,
on joint LX (et $O\chi$), elles sont égales et parallèles,
donc (f) : $LS = OQ$ et $S\chi = QX$;

3) puisque $QS = OL$, alors $UN = QS$ et $ME = QS$;
or $QN = QM$,
donc $US = SE$;
mais puisque $QS = UN$ et QU commune, alors $SU = QN$,
donc (g) : ES et SU sont toutes deux égales au rayon de l'homocentrique ;

4) comme (f) et (g),
alors SE, SL, SU, $S\chi$ sont égales et perpendiculaires deux à deux,
et le cercle $ELU\chi$ de centre S sera égal à MONX, et sera divisé par EU et L
 χ en quatre parties égales ;

5) on vérifie que les points le plus éloigné E et le plus proche U sont bien à leur place sous A et G.



II* - Suite de la démonstration (ajoutée par Théon à celle d'Adraste ?)

DEUXIEME ENONCE DU THEOREME :

"alors je dis que le Soleil étant emporté comme on l'a supposé selon l'épicycle EZHK décrira **par consécution** aussi l'excentrique ELU χ "

Vérification quart de cercle par quart de cercle...

l'expression *katà sumbebekós* est utilisée seulement pour les arcs semblables sous le diamètre BD, LT (épicycle) et LU (excentrique), U Φ (épicycle) et U χ (excentrique), pas pour les autres, "de sorte que parcourant la totalité de l'épicycle d'une manière régulière, il décrira un excentrique au moyen de l'homocentrique". **CQFD**. [H. 169 li. 9].

III* - Généralisation de la démonstration (selon une autre manière) :

Soit ABGD le zodiaque,
EZHΚ l'épicycle dont le centre est situé sur
MONX homocentrique de centre Q,
E se trouve sous le 5e degré $\frac{1}{2}$ des Gémeaux.

ENONCE DU THEOREME GENERAL :

"je dis que KE (épicycle) emporté **régulièrement** sur MONX **dans le sens inverse** du tout, le Soleil étant emporté **dans le même temps** selon l'épicycle, **régulièrement** et dans le sens contraire de l'épicycle, *i. e.* **dans le même sens** que le tout, c'est **par consécution** qu'il décrira aussi l'excentrique égal au concentrique MONX."

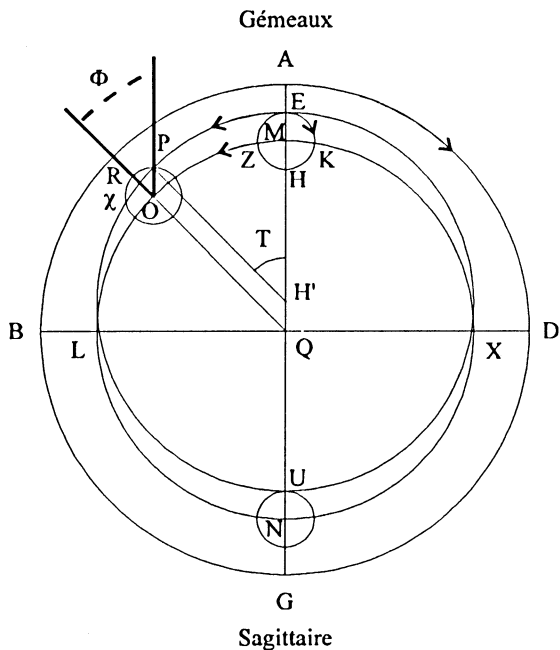
- 1) on suppose (a') MO arc quelconque de MONX
(b') PRΧ épicycle de centre O déplacé sur cet arc
(c') les arcs semblables MO (homocentrique) et RP (épicycle) parcouru par le Soleil partant de E
(d') QH' (droite des centres du Zodiaque et de l'excentrique) = ME rayon de l'épicycle

- 2) on joint H'P et QR,
alors (e') angle Φ (ROP) = angle T (PH'E) comme (c'),
donc PO // H'Q ;

- 3) or PO = H'Q comme (d'), donc PH' = OQ et PH' // OQ ;
or OQ = H'E comme (d') [et OQ = QM non rappelé],
donc H'P = H'E,
donc le cercle ayant H' pour centre et H'E pour rayon passe par P,
et est égal au cercle MONX

- 4) on trace le cercle EPΧLUX, c'est l'excentrique ;
puisque PH' // RQ comme (e'),
donc EP est semblable à RP ;
"en partant de E le Soleil décrira par consécution l'arc semblable EP de l'excentrique";

"et on montrera de même qu'il le fait (*poiôn*) toujours [H. 170 li. 21], de sorte que justement parcourant **tout** l'épicycle au moyen du concentrique, il décrira **tout** l'excentrique". CQFD. [H. 171 li. 2].



IV* - Démonstration de la réciproque (selon Théon) :

"c'est aussi de l'hypothèse de l'excentrique que s'ensuit
(*katà sumbebekós*) celle de l'épicycle" :

Soit ABGD le zodiaque de diamètre AG et de centre Q,
ELUX excentrique du Soleil de centre H' sur AQ,
E le point le plus éloigné sous le 5e degré 1/2 des Gémeaux ;

on trace MONX de centre Q et de rayon H'E,
on trace EZHK de centre M et de rayon ME [$\Rightarrow QH' = ME$ non écrit],
alors il est évident (*dêlon oûn hos*) que ce dernier sera le même que
l'épicycle.

ENONCE DE LA RECIPROQUE :

"je dis que le Soleil étant mû **régulièrement** selon l'excentrique ELUX décrira **par consécution** aussi l'épicycle EZHK, emporté **régulièrement** selon MONX,
et dans le même temps que le Soleil".

1) on suppose EP arc quelconque sur l'excentrique où le Soleil est emporté,
on joint PH' et RQ sa parallèle,
or $OR = QH'$;

2) on joint aussi PO,
alors H'Q et PO sont égales et parallèles ;
or $QH' = ME$ (voir données), i. e. $QH' = OP$ et $QH' = OR$,
donc le cercle de centre O et de rayon OR passe par P,
et sera le même que l'épicycle EZHK ;

3) on suppose qu'on trace $PR\chi$,
du fait des parallèles, $T = \Phi$,
or, selon le THEOREME :
"dans les cercles, les angles égaux interceptent des arcs semblables,
et dans les [cercles] égaux, ce sont justement des arcs égaux
[qu'ils interceptent] qu'ils soient attachés aux centres ou aux arcs",
RP, EP, MO sont alors semblables,
et EP et MO sont égaux ;

"donc le Soleil parcourant l'arc EP sur l'excentrique à partir d'E c'est-à-dire de R, a décrit aussi l'arc semblable RP de l'épicycle";

"et on montrera qu'il fait (*poioumenos*) la même chose aussi durant tout le mouvement [H. 172 li.12], de sorte que justement, en parcourant tout l'excentrique le Soleil décrira tout l'épicycle".
CQFD. [H. 172 li. 14].