

RETOUR AUX SOURCES DU CONCEPT D'ANALYSE

Jacqueline GUICHARD
IREM de POITIERS

*I*l y a cette différence en Mathématique, entre l'Algèbre et l'Analyse, que l'Algèbre est la science du calcul des grandeurs en général, et que l'Analyse est le moyen d'employer l'Algèbre à la solution des problèmes.

L'usage que l'analyse mathématique fait de l'Algèbre, pour trouver les inconnues au moyen des connues, est ce qui la distingue de l'Analyse logique, qui n'est autre chose en général que l'art de découvrir ce qu'on ne connoît pas par le moyen de ce qu'on connoît.

Tout Algébriste se sert de l'analyse logique pour commencer et pour conduire le calcul ; mais en même temps le secours de l'Algèbre facilite extrêmement l'application de cette analyse à la solution des problèmes.

D'ALEMBERT [5, p. 107-108].

Le mot *analyse* véhicule une histoire chargée de variations conceptuelles telles qu'on peut se demander si, de ses origines grecques à son algorithmisation dans les mathématiques du XVIII^{ème} siècle, il peut représenter autre chose que la simple unité d'un nom.

Dans cette histoire, le texte des *Secondes réponses* aux objections faites aux *Méditations métaphysiques*, dans lequel DESCARTES [10, p. 387-389] explicite sa conception de l'analyse et de la synthèse, peut constituer une entrée éclairante dans la mesure où le texte cartésien exprime une conception de l'analyse qui est à la charnière de la tradition des mathématiques grecques et d'une nouvelle conception de l'analyse ouverte par VIETE, à la fin du XVI^{ème} siècle : l'analyse conçue non pas seulement comme un *ars inveniendi*, un art de la découverte dont les résultats devraient être certifiés par la synthèse, mais un *ars demonstrandi*, une méthode de démonstration autosuffisante.

La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition.

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes ; /.../.

Analyse ou résolution, synthèse ou composition : par ces précisions, le texte cartésien semble récupérer l'héritage sémantique des termes, tout en invitant à repenser leur articulation par rapport à la tradition des mathématiques grecques, en prenant comme repères les définitions données par PAPPUS (IV^{ème} siècle ap. J.-C.) et par ARISTOTE (IV^{ème} siècle av. J.-C.).

I. Une Méthode pour résoudre tous les problèmes en général

... ce serait une chose fort utile si, à la fin de vos solutions, après avoir premièrement avancé quelques définitions, demandes et axiomes, vous concluiez le tout selon la méthode des géomètres, en laquelle vous êtes si bien versé, afin que d'un coup, et comme d'une seule œillade, vos lecteurs y puissent voir de quoi se satisfaire, et que vous remplissiez leur esprit de la connaissance de la divinité. [10, p. 365]

Cette demande générale clôt l'énoncé des secondes objections faites à DESCARTES par divers théologiens et philosophes et recueillies par le Père MERSENNE. En fait, ils lui reprochent de ne pas avoir suivi la voie démonstrative, c'est-à-dire la voie synthétique des principes aux conséquences dans ses *Méditations métaphysiques*, mais d'avoir suivi une démarche analytique qui leur semble moins propre à forcer la conviction.

La manière de démontrer est double ...

Aux reproches qui lui sont adressés, DESCARTES répond qu'il distingue la question de l'ordre de l'enchaînement des raisons d'une part, qui *consiste en cela seulement, que les choses qui sont proposées les premières doivent être connues sans l'aide des suivantes, et que les suivantes doivent après être disposées de telle façon, qu'elles soient démontrées par les seules choses qui les précèdent*, et d'autre part la manière de démontrer qui est de deux sortes : l'analyse, ou résolution, méthode de recherche, qui *éclaire*

l'esprit et la synthèse, méthode de composition ou d'exposition, qui *arrache le consentement de l'esprit* par la nécessité de ses enchaînements, mais ne l'éclaire pas sur la façon dont la vérité a été trouvée. S'il a suivi la méthode analytique dans ses *MEDITATIONS*, c'est à cause de la difficulté du sujet et de la nécessité, par conséquent, d'éclairer l'esprit.

La démarche analytique telle qu'il la définit détermine un ordre de la connaissance : elle trace un chemin pour aller de l'inconnu au savoir certain, ou encore du complexe que la pensée ne peut d'abord comprendre, à ce qui le résout en éléments plus simples ou connus qui en sont les causes ou principes. *Méthode pour résoudre tous les problèmes en général* dont le *Discours de la méthode* détermine les principes et qui se révèle fructueuse. Chaque vérité trouvée par son moyen étant une règle pour en trouver d'autres, sa maîtrise permettrait de déterminer tout ce qu'il est possible de savoir : *il me sembla aussi, vers la fin, que je pouvais déterminer, en celles même que j'ignorais, par quels moyens, et jusques où, il était possible de les résoudre.* [7 pp. 138 & 139]

Méthode de découverte et démonstration : la certitude du savoir

Le privilège accordé à l'analyse vient de ce que, partant de ce qui est à trouver, elle exhibe l'ordre de la recherche – méthode d'invention – qui est recherche des conditions qui conduisent nécessairement au résultat, et c'est pourquoi elle constitue une démonstration à part entière. En cela, DESCARTES bouleverse la tradition.

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes ; en sorte que, si le lecteur la veut suivre, et jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée.

Mais cette sorte de démonstration n'est pas propre à convaincre les lecteurs opiniâtres ou peu attentifs : car si on laisse échapper, sans y prendre garde, la moindre des choses qu'elle propose, la nécessité de ses conclusions ne paraîtra point ; /.../

En donnant à voir «aux yeux de l'esprit», ou en permettant à l'entendement de saisir l'ordre de la découverte, l'analyse donne la certitude du savoir, ce que la synthèse à elle seule ne peut pas faire, parce qu'elle n'est que l'exposition du savoir selon son ordre de composition, du plus

simple – les principes ou causes – au plus complexe ou composé – leurs effets ou conséquences –, ce qui suppose que le plus simple, point de départ de la synthèse, est déjà connu, qu'il a été trouvé par ailleurs. Elle ne comporte alors aucune difficulté, et emporte le consentement.

Mais lorsque les principes sont difficiles à concevoir – ce qui est le cas en Métaphysique –, elle peut vaincre l'esprit par la force de la nécessité logique, mais elle laisse la porte ouverte à la contestation : *Car, de cela même que quelqu'un se prépare pour impugner la vérité, il se rend moins propre à la comprendre, d'autant qu'il détourne son esprit de la considération des raisons qui la persuadent, pour l'appliquer à la recherche de celles qui la détruisent.*

Néanmoins, il accepte d'*imiter la synthèse des géomètres* pour exposer les démonstrations de l'existence de Dieu, et la distinction de l'esprit et du corps humain. [10 pp. 390-398]

Le reproche aux Anciens

Il clôt l'exposé des deux manières de démontrer : *Les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de cette synthèse dans leurs écrits, non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais, à mon avis, parce qu'ils en faisaient tant d'état, qu'ils la réservaient pour eux seuls, comme un secret d'importance.* [10 p. 388]

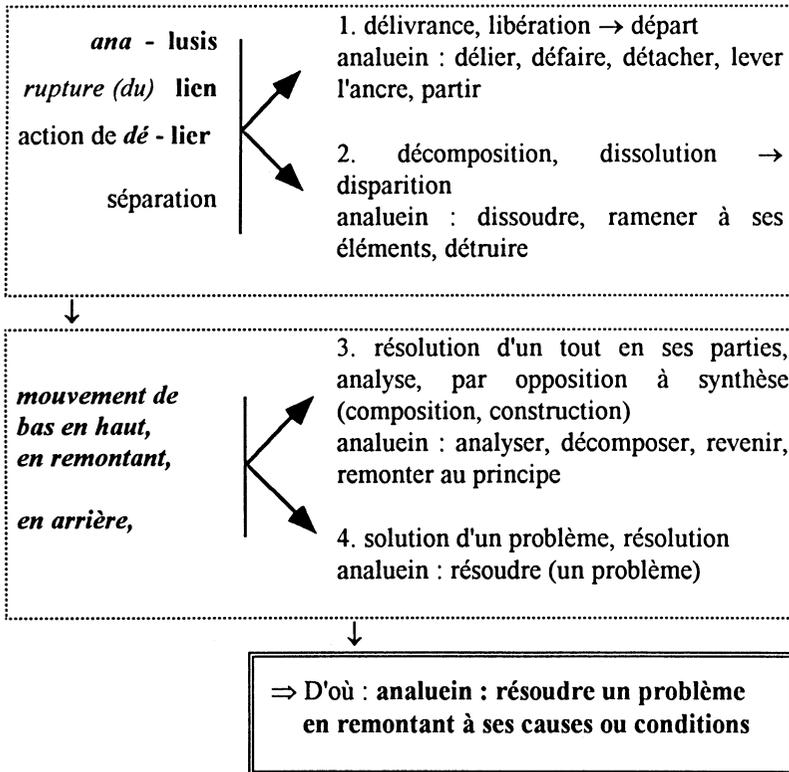
Vieux reproche... déjà présent dans la IV^{ème} Règle pour la direction de l'esprit où DESCARTES exprime sa déception à la lecture de leurs ouvrages : *... je lisais bien chez eux beaucoup de choses touchant les nombres, qu'après avoir fait des calculs je reconnaissais vraies ; et même, touchant les figures ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux bien des vérités, qu'ils tiraient de certains principes ; mais ils ne me paraissaient pas faire voir assez clairement à l'esprit, pourquoi il en est ainsi, et comment s'était faite l'invention...* Et de comprendre qu'elles aient été délaissées ou redoutées par des hommes qui ne manquaient pourtant pas de talent. [6 p. 48]

II. Analyse : retour aux sources grecques du terme.

Un retour aux sources du concept d'analyse invite à revenir à l'Antiquité grecque où s'enracine le mot "analyse" dans la langue non spécialisée, avant d'être utilisé pour désigner une démarche intellectuelle en mathématiques et d'être théorisé dans les *Analytiques* d'ARISTOTE. [2 & 3]

Dans la langue non spécialisée

On y trouve une constellation de sens qui s'articulent à partir de l'étymologie du mot :



En mathématiques

La tradition fait remonter à PLATON (IV^{ème} siècle av. J.-C.) son introduction en géométrie. Tradition rapportée par PROCLUS (412-486) [19, p. 187] :

Et ce qu'il y a de meilleur pour découvrir les lemmes, c'est l'application de l'esprit à leur égard ; car beaucoup de géomètres, qui s'attachant aux solutions, sont prompts à les percevoir même sans méthodes, comme CRATISTE qui, de tous temps, est capable de poursuivre une question par des méthodes primitives et les plus brèves en usant de son tempérament pour les découvrir. Des méthodes nous ont été données cependant, et la plus belle est celle qui présente la chose cherchée comme accordée en principe par l'analyse. Cette méthode est celle que l'on dit avoir été transmise par PLATON à LEODAMAS, et par laquelle, d'après ce que l'on rapporte, LEODAMAS serait devenu l'inventeur de beaucoup de choses en géométrie. La seconde méthode est distributive < διαρητικός > ; elle décompose le genre proposé en ses parties et fournit un point de départ de la démonstration en éliminant les choses étrangères à la construction de la chose proposée, et c'est la méthode célébrée par Platon comme étant devenue l'auxiliaire de toutes les sciences. Enfin, la troisième méthode est la réduction à l'impossible, qui ne montre pas directement la chose cherchée, mais en réfute le contraire et trouve accidentellement la vérité.

DIOGENE LAËRCE (entre 200 et 500) le mentionne dans sa vie de PLATON, au livre III de ses *Vies, doctrines et sentences des hommes illustres* [11 p. 161] :

*C'est PLATON qui le premier (cf. PHAVORINOS, *Mélanges historiques L.VIII*) introduisit l'art du dialogue, appris à LEODAMAS de Thasos le mode de recherche analytique, /.../*

Paul TANNERY qui cite le passage de PROCLUS l'assortit d'un commentaire critique.

Nous touchons ici évidemment à l'invention de la méthode analytique que la tradition attribue à Platon. Il est douteux que cette tradition remonte effectivement à EUDEME <IV^{ème} siècle av. J.-C.>,

mais elle doit déjà avoir été admise par GEMINUS <I^{er} siècle av. J.-C.> ; /.../ De même que les autres légendes que nous avons déjà rencontrées sur le rôle de PLATON comme géomètre, celle-ci doit nous inspirer une certaine défiance. [20 p. 111]

En fait, les textes qui permettraient de fonder une étude précise de l'histoire et du concept de la méthode analytique manquent. Les textes mathématiques sont postérieurs à l'époque grecque classique.

Dans le livre XIII des *Éléments* d'EUCLIDE (III^{ème} siècle av. J.-C.), entre les propositions 5 et 6, figure une brève détermination de l'analyse et de la synthèse, suivie de leur explicitation sur les cinq premières propositions déjà démontrées précédemment <Cf. annexe en fin d'article> :

Ce que c'est que l'analyse, et ce que c'est que la synthèse.

Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé. [12 p. 486]

Ce texte est jugé comme étant une interpolation et est attribué par HEIBERG ainsi que «*tout ce qui figure dans PEYRARD entre les prop. 5 et 6, pp. 485 à 490 /.../ à HERON D'ALEXANDRIE <I^{er}-II^{ème} siècles ap. J.-C.>. Ce passage est loin toutefois d'être privé d'intérêt...*» ajoute Jean ITARD dans son Introduction aux *Œuvres d'Euclide*, [12 p. XVI].

Le texte mathématique de référence qui explicite la démarche analytique dans ses différences et articulations avec la démarche synthétique date probablement de la fin du III^{ème} ou du début IV^{ème} siècle : le livre VII de la *Collection mathématique* de PAPPUS s'ouvre sur une détermination du champ et du concept de l'analyse comme méthode de recherche des principes de la démonstration.

... supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue, ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution.

Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.

Dans *The method of analysis*, [14 p. 12] J. HINTIKKA et U. REMES proposent de remplacer la traduction habituelle “conséquences” pour $\alpha\kappa\omicron\lambda\omicron\upsilon\theta\omega\nu$ par “concomitants”, c'est-à-dire “les choses qui vont avec” A. Szabo [14 p. 125]. La démarche analytique consisterait alors à tirer de ce qui est cherché pris comme hypothèse tout ce qui peut s'en déduire, à parcourir toutes les déductions possibles, à la charge de la synthèse de vérifier si elles constituent ou non des conditions suffisantes. C'est pourquoi la synthèse est le complément indispensable de l'analyse, qui ne peut à elle seule être méthode de démonstration.

Statut remis en question par DESCARTES, qui en même temps, sous le même vocable déplore le silence des Anciens. Il est piquant de remarquer qu'il a travaillé sur les problèmes de PAPPUS, dont la *Collection mathématique* est parue dans la traduction latine de COMMANDINO en 1588 [17]. C'est dans cette traduction qu'il cite PAPPUS au début de *La Géométrie*, de préférence au texte grec, «*afin que chacun l'entende plus aisément*». Il a lu le début du Livre VII qu'il résume brièvement en ces termes :

«...ce que PAPPUS a mis au commencement de son septième livre, où après s'être arrêté quelque temps à dénombrer tout ce qui avait été écrit en géométrie par ceux qui l'avaient précédé, il parle enfin d'une question, qu'il dit que ni EUCLIDE ni APPOLLONIUS ni aucun autre n'avaient su entièrement résoudre...» [8 p. 339 (p. 377 éd. 1637)]

En fait, PAPPUS avait fait précéder son “dénombrement” d'une phrase qui situait les œuvres des auteurs cités «*comme appartenant au champ de l'analyse*» [18 p. 479]. Ni ses précisions, ni la détermination du concept d'analyse qui ne correspond pas au sien, ne semblent avoir retenu l'attention de DESCARTES.

En logique

La grande référence de l'Antiquité, c'est ARISTOTE qui fait la théorie du raisonnement et de la démonstration dans les *Analytiques premiers et seconds*, respectivement troisième et quatrième tomes de son traité de logique : l'*Organon*. [2 & 3]

L'analytique, expression abrégée de la science analytique, est l'étude du raisonnement déductif, de sa structure et de ses éléments composants c'est-à-dire l'étude du syllogisme, de ses figures de ses modes concluants et de la possibilité de ramener un syllogisme à un autre, opération de réduction ou résolution.

Le syllogisme est, selon son étymologie, un assemblage ("syl" : σὺν) de propositions (logoi : λόγοι) dont les premières, ou prémisses, contiennent les principes ou raisons de la dernière, ou conclusion.

Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données.

Par le seul fait de ces données, je veux dire que c'est par elles que la conséquence est obtenue ; à son tour, l'expression c'est par elles que la conséquence est obtenue signifie qu'aucun terme étranger n'est en sus requis pour produire la conséquence nécessaire.

[2 p. 4-5 & 4 p. 2]

«Tous les hommes sont mortels.

SOCRATE est homme.

Donc SOCRATE est mortel.»

homme = le moyen terme
ou terme commun,
cause de la conclusion.

prémisses ou données :

majeure

mineure

conclusion

La démarche du syllogisme partant des principes pour en déduire les conséquences est synthétique, méthode de construction du savoir, composition comme le disait DESCARTES.

Mais trouver les termes d'un syllogisme, résoudre un syllogisme non concluant en convertissant ses prémisses, pour le ramener à un mode concluant, relève du travail de l'analyse. ARISTOTE le précise dans les *Premiers Analytiques* :

Quant à la façon dont nous devons réduire les syllogismes aux figures que nous avons indiquées plus haut, c'est ce que nous avons ensuite à dire, car il nous reste encore à examiner ce point. Si, en effet, nous considérons la production des syllogismes et possédions le pouvoir de les découvrir, et si en outre nous étions à même de les réduire, une fois formés, aux figures précédemment décrites, l'objet que nous nous sommes proposés en commençant serait mené à bonne fin.
[2 pp. 8-9]

Et dans l'*Éthique à Nicomaque*, il prend l'exemple de l'analyse géométrique comme modèle de toute recherche qui porte sur la détermination des moyens appropriés à l'obtention de telle fin donnée : la guérison du malade pour le médecin, la persuasion de l'auditoire pour l'orateur, l'établissement de bonnes lois pour le politique, etc. L'analyse partant de la fin visée, examine les conditions de sa production, c'est-à-dire qu'elle "remonte" la chaîne des moyens – les conditions de production du premier moyen trouvé, ou moyen du moyen ... jusqu'à celui qui est directement accessible, dernier dans l'ordre de la recherche, mais premier dans l'ordre de la production, *cause immédiate* [1 pp. 135- 136] :

.../ En effet, quand on délibère on semble procéder, dans la recherche et l'analyse dont nous venons de décrire la marche, comme dans la construction d'une figure (s'il est manifeste que toute recherche n'est pas une délibération, par exemple l'investigation en mathématiques, par contre toute délibération est une recherche), et ce qui vient dernier dans l'analyse est premier dans l'ordre de la génération.

Plus de dix ans avant le texte des *Secondes réponses*, le début de la XIII^{ème} règle cartésienne pour la direction de l'esprit, en prenant ses distances avec la tradition, définit l'ordre de résolution qui ramène

l'inconnu au connu par la division, dont l'énoncé constituera dix ans plus tard le second précepte de la Méthode [7 p. 137], et par l'examen des conditions, caractères classiques de la démarche analytique :

Nous imitons les dialecticiens en cela seul que, de même que pour enseigner les formes des syllogismes ils supposent qu'on en connaît les termes ou la matière, de même nous aussi nous exigeons ici que la question soit parfaitement comprise. Mais nous ne distinguons pas, comme eux, deux termes extrêmes et un moyen terme ; nous considérons la chose tout entière de la façon suivante : premièrement, dans toute question il y a nécessairement quelque chose d'inconnu, car autrement la recherche serait inutile ; deuxièmement, cet inconnu doit être désigné d'une manière quelconque, car autrement rien ne nous déterminerait à le chercher plutôt qu'autre chose ; troisièmement, il ne peut être ainsi désigné que par quelque chose de connu. [7 p. 90]

Les *Premiers Analytiques* d'ARISTOTE font la théorie générale du raisonnement déductif, les *Seconds Analytiques* font la théorie du raisonnement producteur de science, c'est-à-dire le syllogisme démonstratif.

.../ ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par démonstration j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle scientifique un syllogisme dont la possession même constitue pour nous la science. Si donc la connaissance scientifique consiste bien en ce que nous avons posé, il est nécessaire aussi que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes. C'est à ces conditions, en effet, que les principes de ce qui est démontré seront aussi appropriés à la conclusion. Un syllogisme peut assurément exister sans ces conditions, mais il ne sera pas une démonstration, car il ne sera pas productif de science. [3 pp. 6-8]

Le fil de l'héritage

L'héritage mathématique du concept grec d'analyse peut se lire dans la définition de PAPPUS d'Alexandrie : ... *supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce*

dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue, ou qui rentre dans l'ordre des principes.

Mais c'est dans les mathématiques arabes qu'on trouve la reprise dans ses propres termes de la théorisation aristotélicienne de la démonstration comme syllogisme du nécessaire pour définir la démarche synthétique, et de l'analyse comme art de la recherche des prémisses. L'introduction de *L'analyse et la synthèse* de Ibn AL-HAYTHAM (fin X^{ème} siècle) en dresse le programme [13 pp. 150-151] :

Nous montrons également comment sont ces prémisses et l'inverse de leur arrangement, qui est le syllogisme démonstratif, et c'est ce qu'on appelle la synthèse ; on l'a en effet appelée synthèse car c'est la composition des prémisses déduites par l'analyse, et c'est la synthèse syllogistique. En outre, nous partageons cet art en ses subdivisions, nous en évoquons les règles et les lois, et nous exposons le détail de ses parties. Nous apportons également notre aide pour tous ces principes utilisés en cet art et requis par lui, et ainsi nous commençons par y dire :

Nous disons que la façon de procéder dans l'analyse est de supposer le recherché tout à fait achevé et complet, puis nous examinons les propriétés de son objet nécessaires à cet objet et à son genre, puis les conséquences nécessaires de celles-ci, puis les conséquences nécessaires de ces dernières, jusqu'à ce que l'on aboutisse à une chose donnée dans ce recherché, qui ne soit pas impossible en lui. Voici comment on procède en général dans l'analyse.

Une "lecture en parallèle" des quatre textes grec, alexandrin, arabe et cartésien permet un repérage des constantes et des déplacements du concept d'analyse, et corrélativement, de ses articulations avec celui de la synthèse.

"Prospective"

Dans la détermination aristotélicienne, on trouve un double aspect de l'analyse :

- Déterminée comme moyen de justifier - ou de récuser - quelque chose, en remontant à ses causes ou raisons pour réduire les raisonnements à l'un des syllogismes parfaits dits de la première figure <figure de la nécessité

produite par la condition suffisante, du type de l'exemple ci-dessus>, conduit à mettre l'accent sur l'aspect décomposition logique, plus que sur la dimension découverte.

- Cependant, seule une démarche analytique permet de découvrir les prémisses du syllogisme démonstratif, par la remontée aux causes qui rendent la conclusion nécessaire.

On peut peut-être voir ici en filigrane, la «double destinée», si l'on peut dire, ou le double avenir du concept d'analyse, au sens où se trouveraient déjà là les germes de deux conceptions de l'analyse qui toutes les deux susciteront des critiques :

- Méthode de découverte, par remontée aux causes ou principes : découverte du moyen terme, voie féconde par conséquent. Mais dans ce qui sera l'analyse mathématique ainsi entendue, est-on bien sûr d'avoir des conditions suffisantes ? Les Anciens, le texte de PAPPUS en témoigne, s'en assuraient par la composition ou synthèse à partir des raisons découvertes. DESCARTES assure à l'analyse son auto-suffisance logique en en faisant une méthode de démonstration à part entière parce qu'elle exhibe la nécessité du lien des conséquences à leurs principes.

- Méthode de réduction aux éléments composants : certitude de l'analytique, mais a-t-on augmenté le savoir ? N'est-elle pas plus proche de la stérilité tautologique d'une démarche qui ne fait que développer ce qui était implicitement contenu en ses principes ? La conception kantienne mettra l'accent sur cet aspect explicatif de l'analytique qui n'augmente pas le savoir et qui fait privilégier le jugement synthétique, parce qu'il est constructif. Tous les jugements mathématiques sont des jugements synthétiques a priori, construits dans l'intuition pure, celle du temps pour les concepts et jugements arithmétiques, celle de l'espace pour les concepts et jugements géométriques [15 pp. 16-17 & pp. 493-494].

Conclusion

Descartes reprochait aux Anciens d'avoir cachée la méthode analytique à la postérité «*comme un secret d'importance*». Un siècle plus tard, Sylvestre François LACROIX nous donne à penser que l'histoire se répète :

L'analyse est en général la méthode d'invention ; et l'on croit maintenant que c'est par son moyen que les géomètres du siècle dernier

ont fait les nombreuses découvertes qui les ont illustrés, et qui ont servi de base aux travaux de leurs successeurs. Mais, soit pour dérober leur marche, ou plutôt parce que, n'étant pas assez habitués à cette méthode, ils n'osaient s'y confier entièrement lorsqu'ils étaient parvenus à une proposition, ils la démontraient toujours synthétiquement. On a vu dans les écrits posthumes de PASCAL et de ROBERVAL, qu'ils faisaient d'abord usage de la méthode des indivisibles pour résoudre les problèmes, et qu'ensuite ils démontraient la vérité de leurs résultats à la manière des anciens. Le plus souvent ils cachaient le chemin qui les y avait conduits, parce que leurs procédés d'invention n'étant point réduits en règles et en méthodes générales, ils avaient le plus grand intérêt à les tenir secrets, afin de s'assurer des armes propres à les faire triompher des attaques que leur portaient leurs rivaux, dans les défis qui se multipliaient chaque jour. C'est à la synthèse aussi que NEWTON a donné la préférence pour exposer dans le livre des Principes, ses admirables découvertes sur les mouvements des corps célestes, et cela parce qu'il croyait qu'une proposition mathématique n'était digne de voir le jour que lorsqu'elle était revêtue d'une démonstration synthétique.» [16 p. 209-210]

Bibliographie

Référence des textes cités.

- [1] ARISTOTE. *Éthique à Nicomaque*. Trad. et notes J. TRICOT. Éd. Vrin 1967.
- [2] ARISTOTE. *Premiers analytiques*, (Tome III de l'*Organon*) Trad. J. TRICOT. Éd. Vrin, 1966.
- [3] ARISTOTE. *Seconds analytiques*, (Tome IV de l'*Organon*). Trad. J. TRICOT. Éd. Vrin, 1970.
- [4] ARISTOTE. *Topiques*, (Tome V de l'*Organon*). Trad. J. TRICOT. Éd. Vrin 1965.
- [5] D'ALEMBERT. *Essai sur les éléments de philosophie*. 1759. Corpus des œuvres de philosophie en langue française. Rééd. Fayard, 1986.
- [6] DESCARTES R. *Règles pour la direction de l'esprit* (-v 1628). In *Œuvres*, Éditions de La Pléiade. NRF-Gallimard 1953.
- [7] DESCARTES R. *Discours de la Méthode*. 1637. In *Œuvres*, Éditions de La Pléiade. NRF-Gallimard 1953.

[8] DESCARTES R. *La géométrie*. In *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*. Leyde (1637). Rééd. Fayard, Paris 1986.

[10] DESCARTES R. *Secondes réponses* (aux objections faites aux *Méditations métaphysiques*) 1641. In *Œuvres*. Editions de La Pléiade. NRF-Gallimard 1953.

[11] DIOGENE LAERCE. *Vies, doctrines et sentences des hommes illustres*. Trad. R. GENAILLE. Tome I. Garnier-Flammarion 1965.

[12] EUCLIDE. *Les Œuvres d'Euclide*. Trad. F. PEYRARD, 1819. Rééd. avec une introduction de J. ITARD, Blanchard, Paris 1966.

[13] HAYTHAM Ibn AL-. *L'analyse et la synthèse*. Trad. R. RASHED, in *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*. Éditions du CNRS, 1991.

[14] HINTIKKA J., REMES U. *The method of analysis. Its geometrical origin and its general significance*, Dordrecht Reidel, 1974.

[15] KANT E. *Critique de la raison pure*. (1^{ère} éd. 1781 - 2^{ème} éd. 1787). Trad. A. TREMESAYGUES et B. PACAUD. P.U.F., Paris 1967.

[16] LACROIX S.F. *De la méthode en mathématiques*. In *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier*. Bachelier, Paris, 3^{ème} éd. 1828.

[17] PAPPUS. *Pappi Alexandrini Collectiones Mathematicae*, trad. F. COMMANDINO, Pise, 1588.

[18] PAPPUS d'Alexandrie. *La Collection mathématique*. Livre VII. Traduit du grec par Paul VER EECKE. 2 tomes. 1933.

[19] PROCLUS. *Les Commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, traduit du grec par Paul VER EECKE. Desclée de Brouwer, Bruges 1948.

[20] TANNERY P. *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars 1887. Rééd. J. Gabay 1988.

[21] TIMMERMANS B. *La résolution des problèmes de Descartes à Kant*. P.U.F., Paris 1995.

ANNEXE

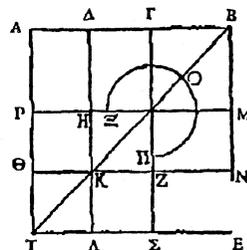
EUCLIDE (-III^o). ELEMENTS. Livre XIII. Trad. F. PEYRARD, in *LES ŒUVRES D'EUCLIDE*, 1819. Rééd. Blanchard, Paris 1966, resp. 483-484 & 488-489.

PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison * ; le carré du plus petit segment augmenté de la moitié du plus grand segment, est égal au quintuple du carré de la moitié du plus grand segment.

Qu'une droite quelconque AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , que $A\Gamma$ soit le plus grand segment, et coupons $A\Gamma$ en deux parties égales au point Δ ; je dis que le carré de BA est quintuple du carré de $\Delta\Gamma$.

Car décrivons avec AB le carré AE , et construisons une double figure. Puisque $A\Gamma$ est double de $\Gamma\Delta$, le carré de $A\Gamma$ est quadruple au carré de $\Gamma\Delta$, c'est-à-dire que $P\Sigma$ est quadruple de ZH . Et puisque le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est égal au carré de $A\Gamma$ (17.6), que le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est ΓE , et que le carré de $A\Gamma$ est $P\Sigma$, le rectangle ΓE sera égal à $P\Sigma$. Mais $P\Sigma$ est quadruple de ZH ; le rectangle ΓE est donc quadruple de ZH . De plus, puisque $A\Delta$ est égal à $\Delta\Gamma$, et ΘK égal à KZ (4.1), le carré



HZ sera égal au carré $\Theta\Lambda$; la droite HK est donc égale à $K\Lambda$, c'est-à-dire MN égal à NE . Le rectangle MZ est donc égal au rectangle ZE (36.1). Mais le rectangle MZ est égal à ΓH (43.1) ; le rectangle ΓH est donc égal à ZE . Ajoutons le rectangle commun ΓN ; le gnomon $\Xi O \Pi$ sera égal à ΓE . Mais on a démontré que ΓE est quadruple de ZH ; le gnomon $\Xi O \Pi$ est donc quadruple du carré ZH ; le gnomon $\Xi O \Pi$ conjointement avec le carré ZH est donc quintuple du carré ZH . Mais le gnomon $\Xi O \Pi$ avec le carré ZH forment le carré ΔN , et ΔN est

le carré de ΔB , et HZ est le carré de $\Delta\Gamma$; le carré de ΔB est donc quintuple du carré de $\Gamma\Delta$. Ce qu'il fallait démontrer.

/.../

ANALYSE DU TROISIEME THEOREME.

Que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ^* , que $A\Gamma$ soit le plus grand segment, et que $\Gamma\Delta$ soit la moitié de $A\Gamma$; je dis que le carré de $B\Delta$ est quintuple du carré de $\Gamma\Delta$.

Car puisque le carré de $B\Delta$ est quintuple du carré de $\Gamma\Delta$, que le carré de ΔB est le rectangle sous $AB, B\Gamma$, conjointement avec le carré de $\Gamma\Delta$ (6.2) ; le rectangle sous $AB, B\Gamma$, conjointement avec le carré de $\Delta\Gamma$, sera quintuple du carré de $\Delta\Gamma$; donc, par soustraction, le rectangle sous $AB, B\Gamma$ est quadruple du carré de $\Delta\Gamma$.



Mais le carré de $A\Gamma$ est égal au rectangle sous $AB, B\Gamma$ (17. 6), car la droite AB est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ ; le carré de $A\Gamma$ est donc quadruple du carré de $\Gamma\Delta$. Mais cela est, puisque $A\Gamma$ est double de $\Gamma\Delta$.

SYNTHESE.

Puisque $A\Gamma$ est double de $\Gamma\Delta$, le carré de $A\Gamma$ est quadruple du carré de $\Delta\Gamma$. Mais le carré de $A\Gamma$ est égal au rectangle sous $AB, B\Gamma$ (17. 6) ; le rectangle sous $AB, B\Gamma$ est donc quadruple du carré de $\Delta\Gamma$; donc, par addition, le rectangle sous $AB, B\Gamma$, conjointement avec le carré de $\Delta\Gamma$, ce qui est le carré de ΔB (4.2), est quintuple du carré de $\Delta\Gamma$. Ce qu'il fallait démontrer.

* « Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit. » EUCLIDE Livre VI. Déf. 5. Op. c. p. 139.