Sur la robe de la Mélancolie III[1].

LA « GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE » COMME OBSTACLE ÉPISTÉMOLOGIQUE,

OU LES ANTI-MÉMOIRES DU NOMBRE ...

Philippe LOMBARD.

> « *Et que l'on ne croie pas que cette foule de théorèmes divers, qu'on peut aujourd'hui multiplier indéfiniment par ces méthodes, doivent compliquer la géométrie, et en rendre l'étude plus longue et plus pénible. Toutes ces propositions, nouvelles ou plus générales que celles qu'on connaissait déjà, auront, au contraire, pour effet certain, de simplifier cette science et d'en étendre les doctrines. En effet, d'une part, les propositions d'un nouveau genre donneront lieu à des théories et à des considérations géométriques nouvelles ; et d'autre part, les propositions qui rentreront dans des théories connues forceront, par leur généralité, d'élargir les bases actuelles de ces théories, et de les asseoir sur des principes susceptibles de déductions plus diverses et plus générales.* » Michel Chasles.

Bien que le sujet puisse passer pour provocateur dans un colloque consacré à la *Mémoire des nombres*, le but de cet exposé est l'étude épistémologique d'un moment très important de l'histoire des mathématiques : *la naissance de la géométrie dans l'espace*. C'est la suite de deux interventions dont on pourra trouver le détail dans les actes des colloques précédents (cf. [1] et [2]) et qui se proposaient de décrire une *modélisation* de la notion d'obstacle épistémologique, tout en expliquant

---

1 Cette communication constitue le 3ème volet d'un cycle intitulé *Sur la robe de la Mélancolie*, dont les deux premiers volets sont parus dans les Actes des colloques inter-IREM de Lyon (*La Figure et l'Espace*, 1991) et de Brest (*Histoire d'Infini*, 1992) ; cf. [1] et [2] dans la bibliographie.

son fonctionnement à propos de *la représentation en perspective.* S'il suffisait de cultiver le paradoxe, le sous-titre conviendrait peut-être pour excuser pareille intrusion, mais je voudrais m'arrêter un instant pour signaler qu'un hors-sujet peut n'être qu'apparent... et qu'un paradoxe peut parfois en cacher un autre...

L'habitude qui nous fait considérer deux univers bien distincts - *celui du calcul* d'un côté et *celui de la géométrie* de l'autre - est certes largement ancrée dans les esprits, elle n'en est pas moins excessivement artificielle ou, pour le dire autrement, beaucoup plus rituelle que véritablement justifiée : d'abord *dans la pratique,* puisque, mathématiquement, il est devenu presque impossible aujourd'hui d'envisager l'espace de la géométrie élémentaire sans penser à $\mathbb{R}^3$; mais aussi *au regard de l'histoire,* qui nous oblige tout simplement à constater une *symbiose* entre l'évolution de l'algèbre et celle de la géométrie. Chacun sait en fait que le concept d'une "géométrie pure" est relativement moderne, et bien postérieur, en tout cas, à la création de la plupart des outils géométriques... Pourtant cela n'empêche nullement de maintenir - souvent même du point de vue de l'épistémologie - le mythe d'une dichotomie fondamentale ! Là est sans doute le vrai paradoxe, et c'est d'ailleurs à partir d'une telle contradiction que nous touchons à une question épistémologique des plus intéressantes...

Je tenterai de la préciser plus loin, mais je m'attacherai tout d'abord à mon problème initial : celui qui consiste à essayer de comprendre les mécanismes de l'invention et de la *mise au point* de la géométrie dans l'espace. J'essaierai simplement de le faire en évitant d'étudier le passé au travers des savoirs actuels. Mon objectif, en effet, n'est pas de discuter la *valeur* des choix effectués pour résoudre un problème - celui de l'espace - pour lequel nous disposons aujourd'hui de plusieurs solutions ; il n'est pas de dire pourquoi, au regard des interprétations physiques plus récentes, le "modèle $\mathbb{R}^3$" s'est révélé *pertinent ou non* ; il est au contraire de chercher les *ressorts d'une découverte.* Nous effectuerons cette démarche en interrogeant d'abord l'histoire, afin de revenir à une époque où il ne s'agissait pas de choisir un modèle mais de le *créer* ; à une époque où ni l'anticipation ni la confrontation des possibles n'étaient encore de mise ; à une époque au travers de laquelle la seule ambition qui peut nous guider est celle de trouver un fil conducteur à l'enchaînement des faits... Nous reviendrons ensuite sur la question de structurer les différents obstacles à partir du principe de modélisation que j'ai évoqué plus haut et nous nous consacrerons enfin aux perspectives épistémologiques qui découlent de cette façon d'aborder le problème...

*

* *

Première partie : un peu d'histoire...

Il convient de préciser d'entrée de jeu un point très important vis-à-vis de la géométrie et c'est dans ce but que j'ai utilisé pour le titre de cet exposé l'expression "géométrie *de* l'espace" plutôt que celle de "géométrie *dans* l'espace"... Cette distinction ne signifie pas que je cherche à établir une opposition entre deux domaines indépendants l'un de l'autre - ni surtout que je tienne à séparer deux problèmes auxquels il faudrait accorder des importances inégales - mais il faut tout d'abord attirer l'attention sur une certaine différence de nature entre des questions comme celles qui touchent aux *polyèdres réguliers* ou aux *sections du cône* étudiées par les Grecs (c'est indéniablement de la géométrie dans l'espace), et des problèmes qui relèvent de ce que nous appellerions aujourd'hui la "modélisation physique de l'espace". Or, même si l'astronomie ou la géodésie des Anciens supposaient des choix en matière de géométrisation du monde, il est à peu près clair que cette question n'a pris sa véritable ampleur qu'à partir de la Renaissance, et d'abord à propos de représentation picturale.

On peut même noter un phénomène plus surprenant en apparence : rien (dans l'évolution historique) ne tend à montrer qu'une mise en place préalable d'outils de géométrie *dans* l'espace - en considérant ainsi ceux de la géométrie grecque - n'ait été une condition nécessaire à une utilisation de ce modèle géométrique comme "modèle de l'espace". Tout porte à croire, au contraire, que la Renaissance a constitué une sorte de "revisitation" complète du sujet : d'abord parce que les problèmes de maîtrise de "l'espace" (au travers de la question de sa représentation picturale) n'ont fait que tardivement appel aux outils propres à la géométrie dans l'espace ; mais surtout (semble-t-il) parce que ce sont ces problèmes nouveaux qui amenèrent à compléter la panoplie des outils déjà forgés par les géomètres grecs et leur donnèrent une puissance nouvelle, sans doute insoupçonnée à l'origine.

La réalité est donc simplement que l'histoire de la géométrie *dans* l'espace ne peut pas ne pas s'intéresser au problème de la géométrie *de* l'espace et que le tournant constitué par l'époque de la Renaissance à cet égard est d'une telle importance qu'il n'apparaît pas totalement illégitime d'y faire démarrer une analyse détaillée, indispensable à une approche épistémologique...

* * * * *

1°) La Renaissance (1400 - 1600).

Considérons par conséquent que l'histoire commence en 1400... L'Occident, qui dispose déjà d'une culture mathématique non négligeable (sans doute principalement héritée des Grecs *via* l'empire byzantin), va progressivement prendre connaissance de la science arabe et - au travers de celle-ci - de la majeure partie des savoirs de l'Antiquité. Parallèlement à ce mouvement qui s'étale lentement sur presque deux siècles, les savants vont tout particulièrement s'attacher à résoudre un problème d'une importance philosophique et scientifique capitale : celui de la représentation "exacte" de l'espace. D'abord largement cantonnées (jusqu'en 1600) dans une problématique essentiellement picturale, les recherches vont donner peu à peu naissance à ce qui, pour nous, relève aujourd'hui de la théorie de la *perspective*, c'est-à-dire de la *géométrie projective*.

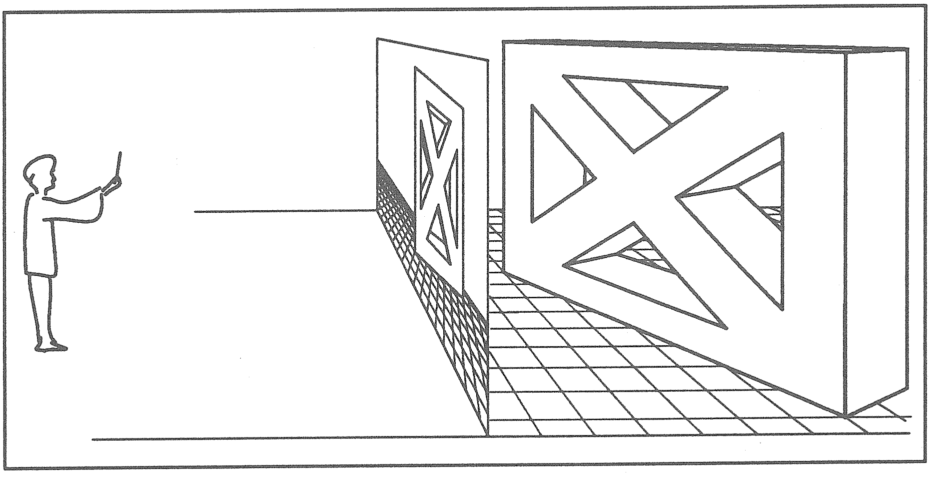


figure 1

D'une façon schématique, le problème peut se résumer à la question suivante : *trouver l'image d'un objet donné de l'espace sur un plan*, de manière à traduire par *projection centrale* la vision que peut en avoir un observateur (voir le schéma de la figure 1). Je renvoie à [2] pour une description assez détaillée des réponses à cette question en ce qui concerne la période allant de 1400 à 1600 ; il convient cependant de rappeler ici plusieurs points essentiels si l'on veut éviter certains contresens épistémologiques :

a) La première idée fausse à éviter est de croire que le problème a été résolu comme nous l'exposerions aujourd'hui à des élèves, en termes de *géométrie dans l'espace*... Cela tient peut-être simplement à l'originalité de la question posée : les peintres du Quattrocento vivaient bien dans l'idée que les Anciens connaissaient déjà des solutions, mais ne disposaient - et ne pouvaient en fait disposer... - d'aucune référence sur le sujet. Cela résulte plus certainement de la *difficulté intrinsèque* au problème. En effet, même si des outils de géométrie dans l'espace étaient disponibles, la situation *n'est pas un simple exercice* à trois dimensions et - en tout état de cause - elle n'est pas un *exercice simple* de géométrie dans l'espace ! Un peu de bonne foi amène vite la plupart des professeurs de mathématiques à reconnaître leurs propres difficultés pour maîtriser ce genre de problème, et encore faut-il - pour en arriver à ce stade - admettre que le modèle spatial dont relève (par exemple) la théorie des polyèdres, fournit à lui seul les propriétés de la figure 1... parce qu'il s'applique à la question sans autre extrapolation qu'une espèce de "prolongement à l'univers tout entier"... C'est le contraire qui s'est produit. Et l'on peut considérer sans simplifier outre mesure que les premières règles de la perspective ont été entièrement découvertes en se plaçant uniquement *du point de vue du personnage* représenté dans la figure 1, en ne faisant appel à aucune autre notion "spatiale" que celles de directions horizontale ou verticale, et en ne travaillant en fait que dans le plan du tableau ou dans le plan horizontal (cf. [2]). La géométrisation à partir d'intersections de plans ou de droites obliques que nous connaissons aujourd'hui n'a été en réalité appréhendée véritablement qu'en 1600, époque à laquelle Guidobaldo del Monte proposa pour la première fois un exposé mettant en jeu sous une forme "correcte" les notions enseignées actuellement au niveau du lycée...

b) De façon plus imagée, il faut garder à l'esprit qu'une réalisation graphique telle que celle de la figure 1 n'est vraiment envisageable qu'à partir de 1600. C'est-à-dire que, bien que le résumé de la situation globale qu'elle contient soit sans aucun doute dans les têtes dès le début des années 1400, elle constitue techniquement une "mise en abîme" qui suppose une maîtrise simultanée de deux points de vue. Mais leur mise en œuvre "opérationnelle" au niveau géométrique nécessite l'application de règles sur les points de fuite qui n'ont pas été précisées avant Guidobaldo. Jusqu'à la fin du XVIème siècle, la solution reposait essentiellement sur des méthodes qui permettaient de trouver la représentation sur le plan du tableau d'un quadrillage de référence situé dans le plan horizontal et auquel il suffisait de rapporter le sujet à représenter. Les seules règles démontrées ne concernaient en réalité que le "point de fuite principal" et "les tiers points" (ou "points de distance") en lesquels convergent les *diagonales* du quadrillage. Le problème a donc finalement nécessité deux siècles pour trouver sa forme en *tant que problème de géométrie dans l'espace* et c'est, paradoxalement, une démarche de géométrisation de l'espace presque indépendante d'un appel aux connaissances des mathématiciens grecs qui a donné un sens au "modèle à trois dimensions".

c) La mise en place des règles de la perspective fait ainsi apparaître, en filigrane, un phénomène d'autant plus important qu'il est relativement rare en mathématiques : l'anticipation de propriétés suffisamment *plausibles* pour être admises et utilisées sans véritable justification théorique convaincante. C'est là un des aspects sur lesquels je me suis attardé dans [2] et qui touche, en l'occurrence, la notion de *points de fuite.* Il faut bien comprendre en effet que l'approche des XVème et XVIème siècles ne permettait pas de *démontrer* - ni même d'*expliquer* - la convergence des parallèles en dehors des cas très particuliers du point principal et des tiers points. Cela n'a nullement empêché cependant des mises en œuvre de la perspective picturale qui ne se privaient pas de faire appel à des points de fuite plus généraux - notamment à tous ceux qui sont sur la ligne d'horizon - et ceci dès le début des années 1500. Il aura fallu pourtant attendre 1600 pour expliquer mathématiquement ce phénomène ! Nous sommes donc ici en face d'une propriété suffisamment "prégnante" pour être extrapolée de manière tout à fait naturelle, *sans avoir besoin d'être comprise géométriquement...*

* * * * *

2°) Le cap 1600...

Le "cap 1600" correspond ainsi à la fin d'une phase initiale qui aura abouti à la première démonstration des règles concernant les points de fuite. Sans trahir excessivement la vérité, on peut comparer la situation du début des années 1600 à ce qu'il est facile d'observer aujourd'hui chez des élèves nantis d'un bagage scientifique minimal en matière de perspective : les savoirs scolaires actuels permettent sans grande peine de comprendre pourquoi les images des droites qui sont parallèles dans l'espace doivent converger dans le plan du tableau, puisque c'est là une application directe des propriétés d'intersection des plans et des droites dans l'espace... Il serait cependant erroné d'en conclure que le problème était complètement résolu une fois franchie cette étape ! Certes, le "modèle spatial" était désormais mis en place - du moins sous l'aspect que nous rapportons maintenant aux propriétés d'*incidence* - encore faut-il noter que cette maîtrise "qualitative" du problème (qui permet de structurer géométriquement la figure 1) laisse notamment de côté tout l'aspect métrique de la solution découverte dès le début du Quattrocento. La nuance n'est pas mince et, s'il en était besoin, il suffirait pour s'en convaincre d'observer les difficultés qui surgissent immédiatement lorsque l'on veut faire accepter à des lycéens - ou à des professeurs ! - les propriétés des *points de distance...*

Mais revenons plus en profondeur sur le problème global : on doit remarquer que la figure 1 *ne contient pas toute la solution.* D'abord parce qu'il n'est pas immédiat d'y trouver une véritable maîtrise de "ce que voit exactement le personnage de gauche". Ensuite parce qu'elle n'apporte pas directement les moyens d'une *approche numérique,* susceptible de guider des calculs que j'appellerai provisoirement : "propres à la situation"... Même pour un lecteur d'aujourd'hui, une chose est de connaître les rudiments de la perspective, alors que c'est une tout autre complication que de savoir en gérer les aspects métriques. Même si l'on sait par ailleurs de la géométrie analytique - voire de la géométrie projective - et bien que les premières solutions apportées au problème aient contenu d'emblée une grande part des réponses à ce type de question !

Épistémologiquement parlant nous disposons là d'un symptôme frappant qui montre en quoi le sujet est difficile : nous nous intéressons à la genèse d'une théorie qui - même rétrospectivement - engage plusieurs facettes très délicates à assembler. Il semble donc naturel que la découverte et la mise en place complète de tous ces éléments aient dû nécessiter une lente évolution... Et les choses ont effectivement subi une très longue maturation à partir du stade auquel nous en sommes arrivés... elles n'ont trouvé une sorte de conclusion - provisoire ? - que deux siècles plus tard, c'est-à-dire vers le début du XIXème siècle...

Je schématiserai ce processus de la façon suivante :

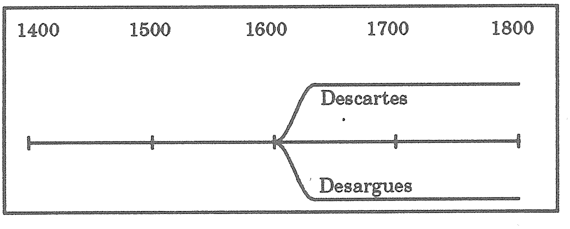


figure 2

C'est-à-dire qu'à partir des années 1630 deux nouvelles approches largement indépendantes l'une de l'autre vont permettre d'enrichir le "substrat de géométrie dans l'espace" auquel est parvenu le XVIème siècle : l'une correspond à la *géométrie analytique* (je la rapporterai pour simplifier au point de vue de Descartes), l'autre est celle inaugurée par Desargues, qui met en avant la notion correspondant aujourd'hui à celle de *projection centrale.*

* * * * *

3°) Les deux voies (1600 - 1800).

Bien qu'il soit possible (et intéressant...) de rapprocher chacune des deux démarches de telle ou telle avancée particulière à la géométrie grecque, la manière la plus simple de décrire la différence entre les deux "voies" schématisées sur la figure 2 est de rapporter chacune d'elles à une façon possible de pénétrer à l'intérieur de la figure 1...

D'un certain point de vue, en effet, la géométrie de Descartes consiste à s'intéresser d'abord à la *partie droite* de cette figure 1, et revient à poursuivre l'idée du quadrillage auquel est rapporté le plan horizontal. Il est clair qu'on peut voir aisément dans cette technique systématisée par les peintres de la Renaissance pour *repérer les éléments de l'espace*, l'embryon de la notion de "repère cartésien" : elle permettra d'apporter peu à peu les moyens de synthétiser tous les aspects du problème à partir d'un seul repère à trois coordonnées, englobant à la fois (lorsque le besoin s'en fait sentir) *l'objet à étudier*, le *plan image* et l'*observateur*. Ce n'est rien d'autre que la *méthode analytique actuelle* dans laquelle tous les calculs deviennent réalisables... Il faut toutefois préciser quelques points indispensables pour comprendre la progression historique. D'abord l'idée en elle-même du "repérage" par projection sur des axes de référence ne constituerait pas un progrès sur la démarche des peintres s'il ne s'y était ajouté la possibilité de *pratiquer le calcul* à partir des "coordonnées". Ensuite, indépendamment de cette puissance quelque peu miraculeuse offerte par l'invention du calcul algébrique, la nouveauté de la méthode cartésienne par rapport à celles (parfois très semblables) des Anciens réside principalement dans l'idée de rapporter *tout* le plan (ou *tout* l'espace) à un *repère unique*, choisi *a priori* et non plus associé à des propriétés particulières aux objets étudiés. Enfin cette "montée en puissance" de la technique algébrique est sans doute l'élément essentiel à considérer pour analyser les avancées effectuées dans la voie de la géométrie analytique, si bien que cela rend l'épistémologie de la géométrie largement tributaire de l'invention de l'algèbre "abstraite".

À l'inverse, la "voie Desargues" consiste à se focaliser plus précisément sur la *partie gauche* de la figure 1... C'est-à-dire qu'elle s'attache à chercher une meilleure capacité pour gérer "ce que voit l'observateur", au sens où il s'agit de dégager des invariants qui permettent de transporter certaines propriétés métriques de la figure initiale à la figure-image s'inscrivant sur le tableau médian. Ici encore je ne ferai que résumer très succinctement les points essentiels, et je me contenterai donc de préciser deux éléments... Il convient d'une part, en effet, de conserver en permanence à l'esprit l'importance donnée par Desargues à la notion de *projection centrale* : d'abord dans sa volonté de perfectionner les procédés de la perspective picturale ou ceux de la gnomonique, et ensuite au travers de sa théorie synthétique des coniques. Mais il faut aussi souligner, d'autre part, que le simple concept "géométrique" de projection n'aurait sans doute jamais trouvé une réelle efficacité sans la mise en œuvre d'outils nouveaux tels que les notions de *points à l'infini* ou d'*involution*, permettant l'utilisation systématique de l'invariance des divisions harmoniques... Nul ne connaît, évidemment, l'origine exacte des découvertes de Desargues, il est cependant assez séduisant de penser que toute sa démarche pourrait découler de l'étude systématique des propriétés de la figure obtenue en perspective lorsque l'on cherche à représenter les bissectrices d'un angle ou même, tout simplement, des systèmes de droites perpendiculaires...

Il convient donc de noter les ruptures indéniables qui séparent les hommes du XVIIème siècle de leurs prédécesseurs et d'insister sur le fait qu'indépendamment de la montée en puissance progressive du calcul algébrique, le ressort essentiel de cette révolution semble bien résulter d'une problématique de géométrie *de* l'espace. L'un des tous premiers traits caractéristiques propres à un Descartes ou à un Desargues tient en effet au fait que ceux-ci ne se contentent plus d'étudier simplement des *figures*, mais engagent des théories qui donnent une existence (et des propriétés intrinsèques) à *tout* l'espace. Désormais, les objets étudiés ne pourront plus guère disposer d'une individualité "existentielle" mais se trouveront presque naturellement "plongés" dans une sorte d'*espace ambiant*... que nous appelons aujourd'hui "l'espace de la géométrie" ! Ce mouvement n'est évidemment pas conscient, mais on ne peut cependant pas analyser l'histoire de cette période sans prendre en compte ce lent glissement souterrain qui verra finalement le but de la géométrie passer peu à peu d'une étude des objets particuliers à une étude de "l'objet universel" qui les contient tous.

Cela étant, les deux approches vont se perfectionner durant deux siècles et leur évolution doit constamment être comparée à celle, parallèle, de l'algèbre. Remarquons simplement (pour ce qui nous intéresse) que, durant ces deux siècles, les points de vue se sont souvent épaulés mutuellement : on voit par exemple un La Hire utiliser aussi bien l'une ou l'autre des approches pour ériger sa théorie des coniques, de même qu'un Newton établit une classification des cubiques en jouant habilement sur l'étude des équations et sur les simplifications apportées par des considérations géométriques "à la Desargues"... Il n'en reste pas moins que les deux démarches étaient "par essence" étrangères l'une à l'autre, c'est-à-dire que les outils forgés dans l'un ou l'autre des points de vue apportaient chacun leur part de résultats, sans qu'au fond il soit possible de disposer d'une théorie "d'unification" au sein de laquelle les deux "façons de penser" trouveraient un lien véritable. Cela s'explique d'ailleurs aisément si l'on considère la faille originelle entre un Descartes et un Desargues : comme l'on sait aujourd'hui, l'un aboutit à l'espace *affine*, l'autre doit en permanence prendre en compte une structure d'espace *projectif*... Une illustration presque emblématique de cette "double géométrie" peut être observée dans l'œuvre d'un Lambert, qui reprendra le problème spécifique de la représentation en perspective au milieu du XVIIIème siècle : dans un premier temps son étude repose essentiellement sur l'utilisation de toutes les ressources de la géométrie cartésienne (on peut d'ailleurs y mesurer de façon spectaculaire l'évolution du calcul algébrique depuis le début des années 1600) ; dans un deuxième temps, il reprendra le problème sous un point de vue analogue à celui choisi par Desargues, avec le but avoué cette fois, de "s'affranchir" de l'importance donnée au "plan géométral" (c'est-à-dire horizontal) et, à travers lui, de la "stabilisation" du problème contenue dans la particularisation représentée sur la figure 1...

* * * * *

4°) Les prolongements (1800 - ...).

Le processus résumé dans la figure 2 peut en définitive s'analyser en deux temps : alors que l'étude de la perspective constitue un problème unique, traité et résolu pour lui-même dans une première phase allant de 1400 à 1600, l'approfondissement et l'extension de la question entraînent ensuite une nette bifurcation qui ouvre une deuxième phase, marquée essentiellement par la présence de plusieurs méthodes concurrentes. Il faut attendre la fin du XVIIIème siècle pour observer une nouvelle évolution importante du point de vue épistémologique, mais cette "troisième phase" qui s'ouvre indéniablement avec le début des années 1800 présente deux aspects distincts qui risquent malheureusement d'en brouiller l'analyse : nous allons en effet assister presque simultanément, d'une part à la mise en place d'une synthèse particulièrement satisfaisante des deux voies empruntées depuis 1600 - c'est donc l'occasion de parler d'un nouveau "cap 1800"... -, et d'autre part à l'ouverture d'une problématique inattendue dont certains côtés vont donner l'impression de perturber la solution enfin dégagée...

Si nous devions arrêter l'histoire au début du XIXème siècle, je pourrais largement la simplifier en annonçant la *clôture définitive* du problème dont j'ai fixé l'origine en 1400. Et il suffit, à vrai dire, de se pencher sur les travaux de mathématiciens comme Monge, Chasles ou Poncelet pour être frappé de voir comment toutes les pièces du puzzle vont se mettre en place et pour observer la manière dont vont converger désormais toutes les "pistes" pratiquées au cours des deux siècles précédents...

En effet, on ne peut d'abord manquer d'observer, au travers de l'œuvre d'un Monge par exemple, l'aboutissement et la mise en cohérence parfaits des démarches correspondant aux deux lignes supérieures de la figure 2 : l'utilisation systématique de la *géométrie analytique* et de la *géométrie descriptive* pour résoudre "en parallèle" les problèmes de géométrie dans l'espace témoigne, à partir de cette époque, de la pleine conscience d'une unité profonde entre les "calculs à la Descartes" et les "figures à la Guidobaldo". La synthèse complète avec le point de vue de Desargues attendra simplement Chasles et Poncelet : reprenant l'ensemble de la question, ceux-ci éclaireront complètement les liens entre l'*involution* utilisée par Desargues et l'*invariance du birapport* (c'est le côté algébrique de la question), mais aussi entre l'*espace affine* de la géométrie cartésienne et le passage à l'*espace projectif* inventé par Desargues (c'est le versant géométrique sous-jacent).

En résumé, nous pouvons dire aujourd'hui que les voies schématisées sur la figure 2 se rejoignent à partir de la découverte d'un nouveau cadre : celui qui est permis par la maîtrise des *coordonnées homogènes* (réelles et même complexes), et que c'est seulement dans ce nouveau contexte qu'il devient possible de rassembler - notamment à propos de la théorie des coniques - *tous* les résultats acquis dans les différentes voies depuis le début du XVIIème siècle. Le "grand œuvre" n'est certes pas encore complètement achevé, mais l'*Aperçu historique* de Chasles montre à l'évidence comment les divers ingrédients de la solution se sont mis en place et amènent à un *point de vue nouveau*, centré désormais sur la notion de *transformation*, préparant en quelque sorte une synthèse définitive telle qu'elle sera énoncée par Klein en termes de recherche d'*invariants*, puis "close" un peu plus tard par la détermination complète de tous les invariants de la géométrie élémentaire... Pouvait-on - d'un point de vue épistémologique - rêver mieux que de cette clôture du problème énoncé autour de la figure 1 ? Étudié et résolu partiellement dans un contexte donné, enrichi et compliqué à l'extrême dans différentes directions, il va se trouver "nettoyé" au travers d'une sentence irrévocable comme celle-ci : "*toute cette quête revenait en fait à dégager un invariant « projectif » au sein de la géométrie de Descartes, et le seul que l'on pouvait trouver en l'occurrence était le* birapport, [...] *celui-là même qui avait été pressenti par Desargues*" !

L'histoire des mathématiques pourrait au fond en rester là. Mais il serait cependant trop simpliste de s'arrêter à un tel sentiment d'achèvement car, avant même la fin de cet "achèvement", on assiste à l'ouverture d'une nouvelle période dont les rebondissements vont dépasser largement les questions originelles. C'est une phase que Dieudonné a pu, à bon droit, désigner (dans [6]) sous le nom de "chaos"... ; je ne m'y attarderai pas pour le moment dans la mesure où ses multiples aspects nous amèneraient obligatoirement à détailler ses développements au cours du XXème siècle. Il me suffira de souligner ici la contradiction apparente qui va voir à *partir de cette époque* la naissance d'une nouvelle divergence, alors même que la dichotomie entre les deux voies que j'ai appelées "Descartes" et "Desargues" a trouvé le moyen d'être enfin surmontée. C'est le paradoxe que j'ai déjà évoqué au début de cet exposé et qui touche - seulement à partir du XIXème siècle - l'émergence de deux "écoles" et d'une vraie *concurrence* entre ce que l'on appellera le *point de vue analytique* et le point de vue de la *géométrie pure*... J'y reviendrai plus loin.

*

* *

Deuxième partie : un peu d'épistémologie...

Comme je l'ai annoncé dans l'introduction, mon but est maintenant d'essayer de donner une "modélisation" de ce qu'il est intuitivement possible d'appeler "les obstacles épistémologiques" liés au problème. Le principe de base de la description à laquelle je vais m'attacher repose sur un appel à la notion de *singularité* telle qu'on l'envisage habituellement dans le cadre de la "théorie des catastrophes". Il ne m'est évidemment guère possible de détailler tous les aspects de ce point de vue puisque les préliminaires font déjà l'objet de deux exposés : je dois de ce fait renvoyer à [1] et [2] pour de plus amples explications... Disons simplement que l'exposé [1] était consacré à l'étude de l'idée de *fronce* rappelée succinctement ci-dessous et que l'exposé [2] étudiait une situation plus complexe, correspondant (en simplifiant) à la *conjonction de deux fronces*... Nous sommes ici en face d'un problème d'une plus grande difficulté qui va nous obliger à faire appel à une singularité de *dimension quatre* connue sous le nom "d'aile de papillon"...

* * * * *

1°) La notion de "fronce".

Mettons-nous un instant à la place du peintre représenté sur la figure 1 et supposons que nous nous posions un problème analogue au sien, c'est-à-dire de dessiner sur le plan vertical médian l'image d'un objet situé dans l'espace. En simplifiant la question à l'extrême, nous pouvons la ramener à un exercice analogue à celui qui est énoncé sur la figure 3 (ci-contre)...

Lorsque l'on sait que cet "archétype" de schéma a demandé des siècles avant d'être réalisé de façon cohérente, on imagine sans peine que les essais de résolution amènent à de multiples erreurs. On peut aisément les classer : d'un côté les tentatives qui consistent à reporter telles quelles les égalités de segments donnant les milieux, de l'autre les approximations qui cherchent à rendre crédible une déformation plus ou moins aléatoire... C'est précisément pour tenter d'expliquer une dynamique susceptible d'entraîner ces deux sortes d'erreurs que j'ai introduit dans [1] une "modélisation" que l'on peut résumer par la figure 4 ci-contre.

Les deux formes initiales en présence dans l'énoncé, ainsi que la solution idéale, ont été symbolisées en des points C, T et S d'une courbe représentant les "états" possibles *à partir de l'idée de déformation*. Mais ces "états" sont prisonniers des branches marquées en trait plein, alors que le point S se révèle *inaccessible* par de simples variations le long de l'axe borizontal.

Exercice : la figure de droite est formée d'un carré et de ses médianes. Compléter la figure de gauche pour qu'elle corresponde à une vue en "perspective" de la figure de droite.

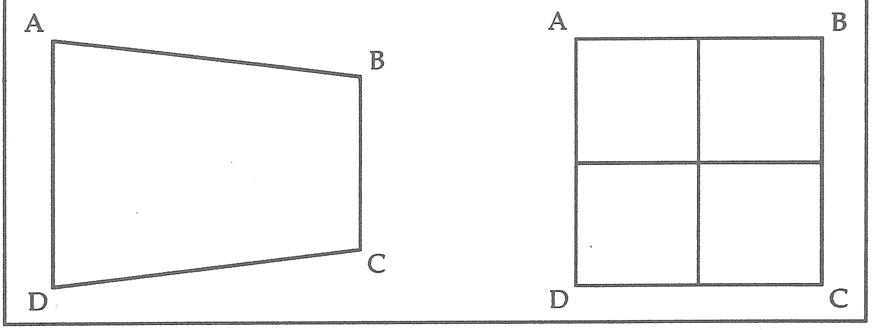


figure 3

Les seuls changements observables induisent des cycles C - E1 - T - E2 , dans lesquels les passages aux points E1 et E2 correspondent à chacun des deux types d'erreurs citées plus baut. La seule issue pour atteindre la solution consiste à "passer outre", c'est-à-dire à faire appel à un *autre paramètre* et à trouver un chemin susceptible de revenir au point S... Cela suppose que le problème relève d'une *surfa*ce représentative des "états" telle que celle de la figure 5, sur laquelle le détour par un "savoir" situé au point γ (*cusp*) permet - après démontage et remontage du dessin initial - d'aboutir au résultat cherché...

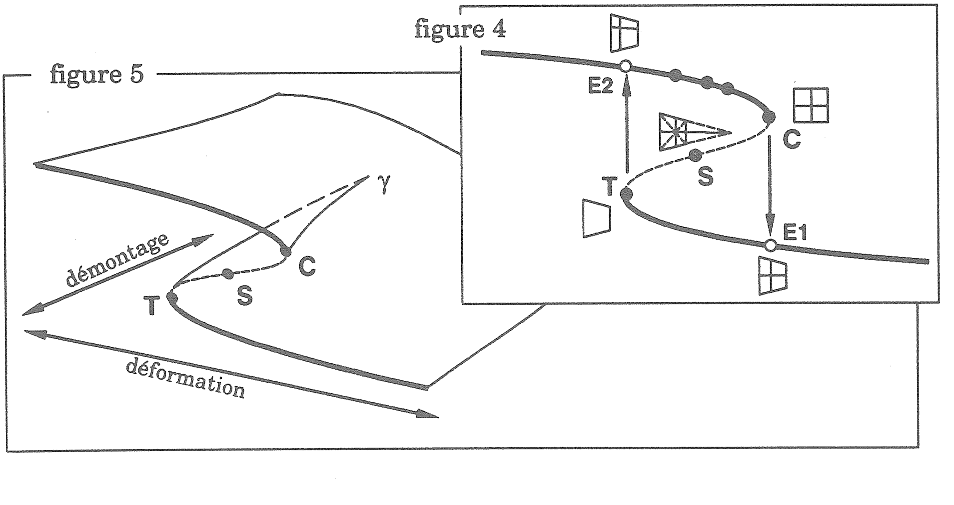


figure 4

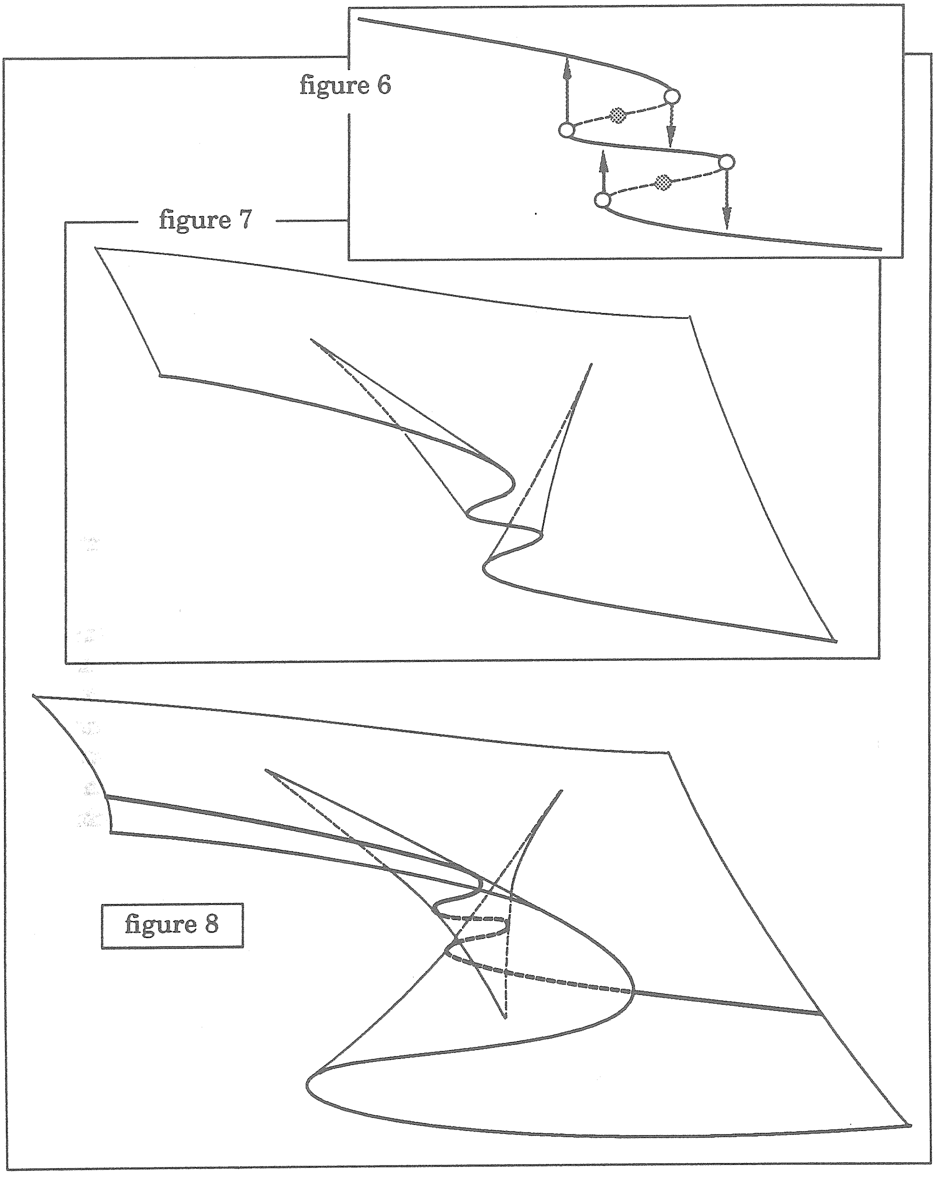
figure 5

On se reportera à [1] pour des développements supplémentaires. Notons cependant que l'exercice dont je viens de me servir ne correspond nullement à une situation historique : il est en fait "prédigéré", alors que la solution originelle devait surmonter une problématique similaire dans laquelle le point de fuite était lui aussi à inventer... En fait Alberti s'est heurté dès le début du XVème siècle à un obstacle mettant en jeu *deux fronces à* gérer simultanément (cf. [2]) ! Mais revenons au problème qui nous concerne, c'est-à-dire en réalité à un exercice qui pourrait s'énoncer ainsi : *réaliser soi-même la figure 1...*

Contrairement au cas précédent, la question posée ressemble cette fois effectivement à une étape "historique" : d'abord - au cours du XVIème siècle - dans la mesure où des figures strictement analogues étaient nécessaires pour la confection des *traités de perspective*, et ensuite au tournant des XVIème et XVIIème siècles - par le simple fait que les *problèmes d'ombres* qui se sont posés aux peintres appellent des constructions structurellement équivalentes. Cela étant, admettons donc que nous disposions des deux parties gauche et droite de la figure 1 et que nous devions la compléter en dessinant "ce que voit le peintre" sur le plan vertical médian.

Il est facile de comprendre que la difficulté est désormais renforcée par la nécessité de faire la part des choses entre *trois points de vue :* celui que l'on peut avoir "hors contexte" sur la forme intrinsèque de l'objet observé d'une part, mais aussi, concurremment, sur les images apparentes de celui-ci *pour le personnage situé dans la figure* et pour *le lecteur du schéma final,* qui voit directement (mais de façon oblique) l'image du tableau intermédiaire ! Nous tombons naturellement sur une "modélisation du problème" qui amène à faire appel, non plus à la figure 4, mais à une "courbe des états" du type de celle de la figure 6 dans laquelle les trois branches vont correspondre à chacun des trois points de vue susceptibles de servir "d'attracteurs"... (bien évidemment, les positions relatives des différentes discontinuités sont à moduler en fonction des interprétations nombreuses entraînées par les variations de l'énoncé). L'important est de noter qu'un problème relevant d'un aussi grand nombre de combinaisons - donc d'erreurs potentielles - *ne peut plus* être résolu par l'appel à une seule "fronce", mais nécessite pour le moins la construction d'une "surface des états" qui fasse intervenir *trois* "cusp" (cf. figures 7 et 8).

Nous sommes ainsi amenés à considérer une nouvelle combinaison de singularités. Ce sont toutes celles par lesquelles doivent passer les étapes de la résolution du problème, car chacun des *groupements possibles entre les attracteurs* correspond en fait à une fronce, et celle-ci permet de parcourir la surface selon un cheminement pertinent, adapté au problème conjoncturel traité.



Peut-être pourrions-nous en rester à une telle explication et chercher à préciser sur les figures 6, 7 et 8 la signification de chaque discontinuité en fonction des erreurs rencontrées dans la résolution de tel ou tel exercice analogue à celui que je viens d'évoquer ?... Cependant, il ne me semble pas que cette modélisation soit suffisante pour comprendre véritablement le type d'obstacle auquel nous avons affaire, et ceci pour plusieurs raisons :

- d'abord, parce que le phénomène de "compréhension" (cf. [2]) oblige à intégrer une évolution historique de la variété des "états" au fur et à mesure de la création (et du renforcement) des points de passage découverts à l'occasion de certains problèmes répétitifs,

- ensuite, parce que nous aboutirions tout au plus, dans cette seule direction, à l'établissement d'une sorte de "bestiaire" d'exercices indépendants les uns des autres alors qu'il est légitime de penser que ceux-ci doivent être comparés et *rassemblés* au sein d'une *famille de cas possibles* apparentés à un même problème de fond,

- enfin, parce que l'analyse épistémologique ne saurait se contenter de trouver la "surface" adaptée à chaque type d'exercice alors que la *dynamique d'une synthèse* constitue précisément une étape importante au travers de ce que l'on peut appeler le stade de la "conceptualisation" (cf. [2]).

* * * * *

2°) "L'aile de papillon".

Que doit-on entendre par "dynamique d'une synthèse" ? Je veux dire par là que, plutôt que de rester sur l'idée d'une famille d'obstacles "à trois fronces" du type de celui de la figure 8, il convient de regarder cette surface comme une simple *manifestation particulière* d'une variété de dimension supérieure qui serait, elle, chargée de représenter un obstacle d'une *plus grande complexité*. Précisons encore, mais en regardant les choses par l'autre versant : il existe une singularité de *dimension quatre* - c'est-à-dire une sorte de "fronce" où la surface de la figure 5 est remplacée par une "hyper-surface" à quatre dimensions - et rien ne nous empêche d'admettre que *c'est elle qui doit permettre de modéliser* la situation... à condition de considérer désormais que le type de problème précis que nous venons d'étudier constitue une *simple restriction* de la singularité globale à une surface de dimension deux contenue dans la variété de dimension quatre.

Cette singularité de dimension quatre est connue sous le nom "d'aile de papillon" (cf. [3]). Il est évidemment difficile d'en donner une représentation éclairante sur une figure de l'espace habituel, mais l'on peut se l'imaginer grossièrement à partir de ses "sections" par des plans mobiles qui balaieraient le voisinage du point singulier. En première analyse, les singularités obtenues sont des surfaces que j'ai tenté de schématiser sur la figure 9 : c'est-à-dire qu'en fonction des "plans de coupe", il est possible de rencontrer des configurations qui ont exactement l'allure de fronces simples (figure 9.a), ou au contraire de faire "éclater" celle-ci selon des singularités présentant trois fronces disposées de manière plus ou moins symétrique autour de la position centrale (figure 9.b).

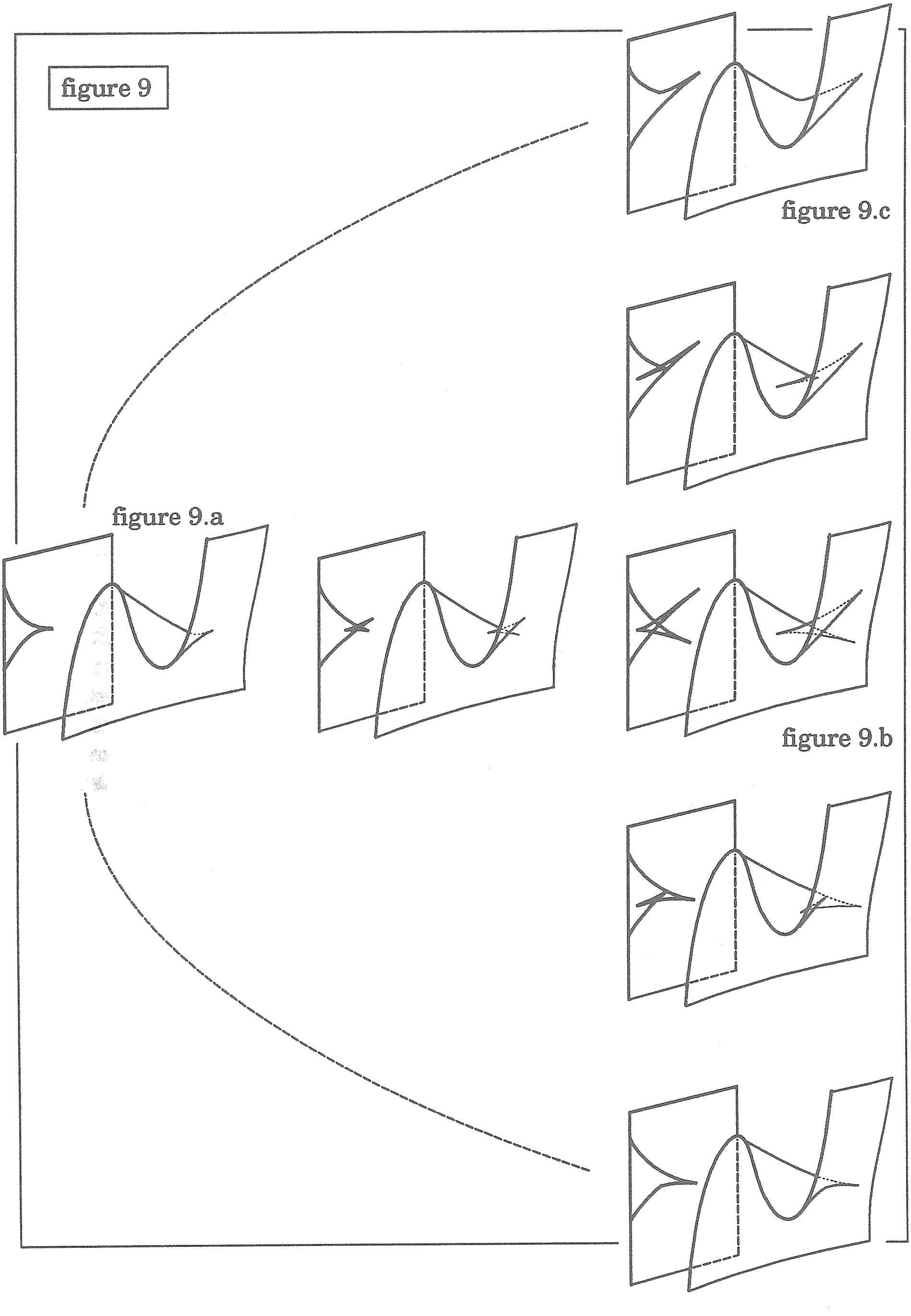


figure 9
figure 9.a
figure 9.b
figure 9.c

Vue sous cet angle, on peut donc considérer que *l'aile de papillon* correspond à un problème relevant d'une seule fronce, mais qui serait en quelque sorte *instable*, dans la mesure où une petite variation des données ferait passer à un problème à plusieurs fronces, c'est-à-dire beaucoup plus complexe.

Mais c'est en fait cette espèce de variabilité structurelle (vis-à-vis des sections !) qui est importante : elle va nous permettre de porter un regard différent sur les trois points signalés à la fin du paragraphe précédent...

D'abord au niveau de la *conceptualisation*, puisqu'il s'agit précisément d'envisager une mise en rapport de toute la famille des problèmes qui peuvent apparaître comme liés épistémologiquement entre eux : il devront correspondre ici aux diverses sections qu'il est possible d'étudier aux alentours de la singularité.

Ensuite au niveau de la *compréhension*, car il devient plausible que la familiarisation avec un type de problème ne suffise pas à *maîtriser l'obstacle*, et qu'au contraire, la solution véritable ne puisse être acquise qu'au travers de la résolution des *très nombreux cas* attachés aux diverses sections... et même à une résolution *interdépendante* de suffisamment de cas "génériques" pour atteindre à un *lissage* effectif de *toute la singularité* de dimension quatre.

Le "repassage" d'une fronce telle que *l'aile de papillon* apparaît en définitive comme un problème "monstrueux" nécessitant la mise au point d'un *savoir* (au sens de [1]) qui doit englober de façon cohérente tous les sous-problèmes attachés aux diverses sections, ainsi que tous les "passages" possibles entre ces sous-problèmes ! Pour prendre un exemple lié à la question de la géométrie dans l'espace, nous pouvons ainsi commencer par relire de cette manière la progression qui va de 1400 à 1600 en la ramenant à un simple chemin parmi les sections à deux dimensions :

a) le problème initial de la perspective picturale correspondait à une surface à trois fronces du type de celle qui est représentée au milieu de la colonne de droite dans la figure 9 (figure 9.b),

b) la première étape (Alberti) a consisté à *inventer* deux des "cusp",

c) le stade suivant (Viator) a fait apparaître une *condensation* de ces deux "cusp", de telle sorte que le problème évolua vers une surface telle que celle du haut de la même colonne dans la figure 9 (figure 9.c)[2].

d) la dernière période (Guidobaldo) consista enfin à dégager le dernier "cusp" qu'il restait à inventer sur cette surface (à une seule fronce), afin de

2 C'est le point où j'en suis resté dans [2] et on pourra s'y reporter pour les détails.

résoudre l'ensemble des problèmes particuliers liés uniquement aux relations d'incidence...

Comme on le voit, la solution trouvée ne peut être que partielle : d'une part parce que l'on n'a parcouru qu'un seul "chemin" à l'intérieur de la singularité, et d'autre part parce qu'il apparaît même (voir l'analyse de [2]) que ce chemin a modifié la direction originale de la section primitive, faisant perdre ainsi de vue certains paramètres du problème initial (ceux qui touchaient aux aspects métriques de la question). Le savoir au "cap 1600" est le résultat de ce parcours particulier et demande non seulement à être complété dans les directions perdues, mais surtout à être "synthétisé" sous forme d'une clarification qui permette d'en unifier les diverses composantes... On peut de plus interpréter le schéma de la figure 2 comme une manifestation des parcours résumant l'évolution historique : une fois la résolution partielle 1400 - 1600 effectuée, le problème renaît dans toute sa complexité et va être abordé simultanément dans deux directions différentes, qui suivront ce que j'ai désigné sous les noms de "voie Descartes" et "voie Desargues". Chacune de ces voies sera en fait accomplie pratiquement pour elle-même durant deux siècles et il semble bien que le "cap 1800" corresponde à l'aboutissement, non pas de chacune (car chacune a atteint très vite un haut niveau de performance dans la découverte de ses propres fronces), mais à la mise en place des savoirs associés à la *singularité principale* (l'aile de papillon de dimension quatre), qui apporteront les moyens de passer sans difficulté d'un point de vue à l'autre...

* * * * *

3°) La clôture.

J'ai donné plus haut les caractéristiques essentielles des approches de Descartes et Desargues vis-à-vis du problème général de l'espace et de la perspective. On pourra remarquer aussi la façon dont ces approches ont été transférées dans une "strate géométrie algébrique" de l'aile de papillon autour du thème de l'étude des coniques, en notant la particularité de chacune à cet égard et en les comparant à un troisième type d'approche possible, tel que celui d'un Dandelin...

De Newton à Lambert en passant par Euler ou Leibniz, on peut d'autre part observer les tentatives de bascule d'une section à l'autre et mesurer la difficulté de ces liaisons. Le "cusp total" (c'est-à-dire la singularité elle-même) devra mettre en jeu une technique susceptible de gérer simultanément les *calculs de la géométrie analytique* et les *considérations sur l'involution* utilisée par Desargues. On sait depuis Chasles et Poncelet que cela nécessite l'invention du *concept de birapport* et que sa mise en œuvre au sein des systèmes de coordonnées cartésiennes passe en fait par une étude systématique des *transformations homographiques*, qui appellent elles-mêmes de manière assez naturelle une extension des repères capable de donner algébriquement accès aux *points à l'infini*.

En résumé : la maîtrise géométrique de la situation représentée sur la figure 1, qui nous a servi en quelque sorte de frontispice, amène à se placer dans *l'espace projectif* - comme Desargues l'avait pressenti à l'origine -, et suppose - si l'on veut accéder à la puissance du calcul qui est à la base de la pensée de Descartes - le recours aux *coordonnées homogènes*. C'est ce "couronnement" qui marque les mathématiques dans la première moitié du XIXème siècle, ses prémices constituant notamment la trame essentielle de l'*Aperçu historique*... de Chasles (cf. [5]). À partir de cette période il s'agit de reconstruire l'édifice en se fondant sur cette découverte : il convient - pour reprendre l'image développée dans [1] - de "repasser" entièrement la singularité ou, si l'on préfère, de constituer une nouvelle carte de la "variété des états" au voisinage du *cusp* qui vient d'être découvert...

Ce phénomène correspond assez exactement à celui que j'ai désigné sous le nom de "compréhension" ; il consiste à rapporter systématiquement les résultats connus auparavant à des théorèmes "plus puissants" apparus à l'occasion du changement de point de vue. La manière dont Chasles s'efforce de reprendre la théorie des coniques est édifiante à cet égard, et il suffit de se rappeler du mouvement analogue provoqué par la "théorie des ensembles" ou simplement de la toute récente "période des maths modernes" pour imaginer l'ampleur que peut prendre un tel bouleversement... La tentation de "l'universalité" devient alors le moteur essentiel, tant est grand le plaisir de donner une unité à tout un corpus de résultats dont on sentait certainement la parenté profonde dans la période précédente, mais pour lesquels le "liant" restait hors de portée. Cela ne va d'ailleurs pas non plus sans risquer quelques effets pervers si l'élan amène à ne plus toujours faire la part des choses entre les différents aspects primitifs, ou si l'unité de façade se met à cacher les oppositions et les synergies qui ont servi de moteur dans la mise en place de la fronce...

Cela étant, on peut assister en parallèle au second phénomène épistémologique cité dans [2], celui de la "conceptualisation", qui va consister à étendre l'emprise de la surface des états non plus en étendue, mais, d'une certaine façon, en "épaisseur", c'est-à-dire dans le but de rassembler autour de la singularité (qui est en cours de lissage au travers du phénomène de compréhension), des situations analogues apparaissant désormais comme susceptibles de relever de généralisations ou d'extensions de la théorie naissante. C'est en ce sens, me semble-t-il, qu'il convient alors de lire la volonté d'un Chasles (puis d'un Klein) de tout rapporter à la notion de *transformation* et d'*invariants*. C'est sans doute aussi le même phénomène qui préside aux élargissements de la géométrie vers l'utilisation des nombres complexes, puis aux cas des dimensions supérieures, tant il est clair, en effet, que ces champs nouveaux de recherche ne relèvent pas d'idées originales par rapport à l'obstacle "aile de papillon", mais simplement d'un nouvel investissement des intuitions qui s'y rattachaient.

On notera aussi que le résultat de cette systématisation dans le passage par la "carte nouvelle" créée autour de la fronce, amène paradoxalement à une certaine perte d'intérêt : Chasles lui-même conclut à une forme de "mécanicisme" de la géométrie, induit par le fait qu'en définitive tout raisonnement se résume désormais à trouver la bonne transformation... On peut enfin se demander si le phénomène de séparation ultérieure entre "tendance analytique" et "tendance géométrique" ne résulte pas d'une certaine imperfection dans ce lissage systématique à partir de la fronce. On pourrait le penser en considérant par exemple un domaine comme l'étude des coniques, où on verra jusqu'au début du vingtième siècle telle ou telle "école" préférer l'un ou l'autre des points de vue, tout en cherchant par d'ailleurs à se rattacher à l'une ou l'autre des traditions historiques inaugurées par Descartes ou Desargues. C'est évidemment là une explication possible, surtout si l'on prend en compte un éventuel désir de se cantonner à des niveaux élémentaires : le refus de passer par le *cusp* général obligerait en quelque sorte à conserver une forme d'incompatibilité entre les "directions" originelles, telles qu'elles furent explorées par chacune des voies rappelées plus haut... Il me semble toutefois que nous touchons ici à un "épisode épistémologique" d'une nature différente auquel je m'attacherai plus longuement après être revenu quelque peu sur le fond du problème.

*

* *

Troisième partie : hypothèses et questions...

En admettant donc que l'on dispose - à travers l'idée de singularité - d'une façon relativement pertinente de "modéliser" certains types d'obstacles épistémologiques (et notamment celui de la géométrie de l'espace), il devient nécessaire de tirer quelques conclusions sur différents éclairages que ce type de "modélisation" permet de mettre en avant. Je vais tâcher de dégager certaines remarques ou questions qui me semblent s'imposer dans trois directions particulières : 1°) est-il possible de *comprendre l'obstacle global à partir d'une difficulté unique* ? 2°) existe-t-il une réponse en termes de "modélisation" à la question de l'évolution de la géométrie *au delà de la résolution du problème originel* ? 3°) quels enseignements peut-on enfin tirer, à partir de l'analyse historique qui précède, *en matière d'apprentissage de la géométrie* ?

* * * * *

1°) Le fond du problème.

Comme je l'ai dis précédemment, si l'obstacle constitué par le problème global de la géométrie de l'espace me semble devoir être décrit à partir de l'idée d'une singularité très complexe du type "aile de papillon", c'est d'abord parce que l'évolution des esprits entre 1400 et 1800 témoigne de la nécessité des diverses "prises de recul" successives, qui furent nécessaires pour assembler et rendre compatibles des entrées dans le problème n'ayant pas forcément de liens évidents entre elles. Il paraît dès lors légitime que la progression soit marquée par des phases de *créativité* (voir l'analyse de la "queue d'aronde" décrite dans [2]) et par des phases plus lentes ou plus stationnaires, correspondant sans doute à l'invention et à la mise au point des *cusp* intermédiaires.

Toutes ces étapes sont des préalables à la mise en place d'un véritable *cusp* pour la "fronce multidimensionnelle" qui est au nœud de la question. Les mathématiques ne manquent pas vraiment d'occasions plus ou moins "locales" où l'analyse épistémologique conduit à observer de tels phénomènes... Un critère efficace pour diagnostiquer un obstacle de cette nature pourrait être le suivant : *la maîtrise de la solution amène non seulement à savoir utiliser (au moins)* deux sortes *de règles, mais aussi à savoir* choisir *en permanence (et à bon escient) laquelle de ces règles doit s'appliquer de façon optimale à chaque moment de la résolution.*

C'est là, en effet, une caractéristique de tout problème difficile et il n'est pas nécessaire d'observer longuement le moindre apprentissage pour se rendre compte à quel point tout franchissement d'obstacle bute invariablement sur des phénomènes de cet ordre.

Cela dit, il est clair que l'exemple du problème étudié jusqu'ici comporte de façon conjointe des aspects qui le font sortir - provisoirement ou non - du *cadre géométrique strict* dans lequel il est inscrit au départ : c'est bien évidemment le cas de tout ce que l'on pourrait être tenté de ramener à un aspect "purement algébrique"... Il se peut donc que cela soit dû passagèrement à des variations de la "nappe" sur laquelle sont concentrés les efforts à un moment donné de l'histoire. Il se peut aussi, au contraire, que les termes du problème initial ne servent en fait qu'à masquer une *réalité plus fondamentale*. C'est-à-dire que le *fond du problème* - sa structure même en quelque sorte - demande à être clarifié par la découverte d'un "noyau dur" sur lequel il serait possible de modeler (ou plutôt de projeter) l'ensemble des difficultés constituant l'obstacle.

Nous touchons évidemment là une question à laquelle il pourrait bien se révéler en fin de compte totalement impossible de répondre, ne serait-ce que parce qu'elle met très vite en jeu une espèce de hiérarchie entre divers domaines... Or notre but est précisément de ne pas engendrer un jugement de valeur qui n'aurait pas de sens (par exemple entre algèbre et géométrie...), mais au contraire de voir dans quelle mesure certains phénomènes sont plus ou moins indissolublement liés.

Ce qui est indéniable dans le problème qui nous occupe est justement le fait que *géométrie* et *calcul* sont inévitablement engagés de manière à la fois *concurrente* et *complémentaire* : on l'a vu au niveau historique à propos de Desargues et Descartes ; on pourrait le constater aisément en feuilletant un cours théorique concernant l'homographie tel que celui de Chasles ; on le sait de façon particulièrement irréfutable depuis les travaux de Hilbert montrant l'équivalence - sur le plan logique - entre les constructions axiomatiques de la géométrie et celles du calcul sur un corps, d'ailleurs commutatif ou non commutatif.

Ce qui est très frappant, en revanche, touche à la naissance des deux voies inaugurées par Descartes et Desargues et à la filiation que l'on a envie de leur conférer vis-à-vis de la tradition grecque.

On connaît en effet une partie des relations ayant existé entre ces deux mathématiciens et notamment une des premières réactions de Descartes au travail de Desargues sur les coniques. Celui-ci écrit à l'auteur du *Brouillon project...* :

> "[...] *il me semble que, pour rendre vos démonstrations plus triviales, il ne serait pas hors de propos d'user des termes et du calcul de l'Arithmétique, ainsi que j'ai fait en ma Géométrie ; car il y a bien plus de gens qui sçavent ce qu'est multiplication, qu'il n'y en a qui sçavent ce que c'est que composition de raisons, etc.*"

... encore eut-il fallu qu'il ait été facile pour Desargues de présenter ses calculs à la manière suggérée par Descartes !

Par de très nombreux détails l'un et l'autre se rattachent, en réalité, à l'une et à l'autre des deux traditions qui sous-tendaient toutes les mathématiques grecques et que j'ai déjà signalées dans [1] : d'un côté la tradition "pythagoricienne", axée sur l'utilisation des opérations à partir de leur signification géométrique, d'un autre côté la tradition "thalésienne" fondée sur la considération des "raisons", c'est-à-dire de ce que nous appelons aujourd'hui des "proportions".

J'ai insisté dans [1] sur la façon dont on peut considérer ces deux démarches comme responsables d'une structuration des *Éléments* d'Euclide sous la forme d'un immense "pli" (au sens des singularités)... Et il n'est pas difficile de sentir dans les travaux des successeurs d'Euclide - d'Archimède à Appolonius - la continuité de ces deux voies, leur complémentarité mais aussi leur indépendance, voire leur "incommunicabilité" relative. On retrouvera le même phénomène au début des années 1600 à travers cette sorte d'incompatibilité qui sépare les idées d'un Desargues de celles d'un Descartes et même, plus largement, du contexte constitué par la géométrie analytique.

La distinction soulignée par Descartes dans sa lettre à Desargues est en effet très loin d'être de pure forme. Elle marque au contraire toute la différence entre deux opérations qu'il serait - d'un point de vue épistémologique - complètement erroné d'apparenter trop rapidement : la *multiplication* et la *division* !...

Ce sont certes *aujourd'hui* des avatars d'une même "loi de composition", mais il convient justement de garder à l'esprit que c'est là *le résultat* de toute une évolution, et précisément *le résultat de l'évolution du problème que nous sommes en train d'étudier*... L'idée d'un Descartes repose presque entièrement sur deux choses :

- d'abord, comme je l'ai déjà signalé, l'idée de remplacer l'étude des points du plan (ou de l'espace) par celle des couples (voire des triplets) qui se déduisent des projections sur les axes,
- l'idée de remplacer ensuite les considérations sur les relations géométriques entre les points par des *calculs sur ces nouveaux objets*.

Ces calculs porteront alors sur des longueurs ou, plus abstraitement, sur des *mesures de longueurs*. Les opérations qui amenaient initialement à se rattacher à des propriétés géométriques (longueurs, aires, volumes, puissances d'un point par rapport à un cercle, etc.) évolueront peu à peu, elles s'affranchiront progressivement du sens géométrique pour ne plus faire appel qu'à l'aspect *symbolique* ou *numérique* des manipulations effectuées. D'une certaine façon, c'est tout simplement ici de l'invention de l'algèbre qu'il est question, mais il ne faut pas perdre de vue que cette démarche est en fait essentiellement de nature *additive* et *multiplicative*. Elle aboutit à la notion de polynôme. Même sous son aspect lié à l'analyse (étude des indivisibles ou des tangentes) elle donne l'impression de traiter très peu de questions relatives aux *proportions* ou aux *rapports* (au sens géométrique du terme).

La démarche d'un Desargues est quasiment opposée : utilisation du théorème de Menelaüs, conservation des "composées de raisons", passage au cas infini par extension des égalités de rapports, disparition presque obligatoire des notions purement métriques, etc., etc. Sa démarche est entièrement fondée sur ce que nous appellerions aujourd'hui la *division*... Seulement la nuance n'est pas mince, car la "composée de raisons" correspond effectivement à une multiplication... mais à condition de ne pas - ou de ne plus... - se poser de questions sur la *nature* des objets qui sont en jeu ! C'est là tout le problème : Descartes manipule des nombres en tant que longueurs (ou mesures de longueurs), Desargues manipule des nombres en tant que *rapports de longueurs* ! Même si cela nous paraît aujourd'bui "être la même chose", *toute l'histoire de la géométrie de l'espace ne tient* *peut-être que dans la difficulté de faire "marcher ensemble" ces deux points de vue, au travers des considérations différentes qu'ils supposent dans l'approche des figures...*

On s'en convaincrait vite en suivant durant ces quelques siècles les difficultés ressenties pour unifier la notion de *nombre*, ou même simplement la notion de *proportion* : ce n'est qu'au XIXème siècle que tomberont les dernières barrières opposées par les puristes pour assimiler entre elles les diverses notions de rapports de grandeurs (commensurables ou non). Et il est même tout à fait édifiant de voir - dans la première moitié du XXème siècle ! - le soin mis par un Lebesgue, dans son livre *La mesure des grandeurs*, pour fustiger les considérations "métaphysiques" qui encombrent encore certains discours sur l'introduction des nombres. On pourrait croire, au travers de notre apprentissage personnel (qui a eu lieu à une époque nettement postérieure à tous les faits que j'ai rapportés jusqu'ici...), que nombre des obstacles - ou plus exactement : nombre des *facettes de ces obstacles* - ont été largement surmontés. Et il est indéniable, par exemple, que la présentation actuelle du modèle *spatial* (*en géométrie*) et du modèle numérique *réel* (*en matière de calcul*) peuvent laisser penser qu'il est devenu chose courante, aujourd'hui, de faire éviter la majorité de tous ces écueils à la majorité des élèves. Rien n'est moins sûr...

Je voudrais simplement signaler sur ce sujet une observation pédagogique qui me semble particulièrement intéressante, à propos de l'apprentissage (au niveau du collège) des équations du type "a . x = b" (cf. [4] pour une présentation détaillée)...

Lors d'une séquence didactique consacrée à la résolution progressive d'équations allant du cas très simple comme "$3 . x = 4$" à des exemples plus complexes du type "$5 . x = \frac{2}{3}$" puis du type "$\frac{3}{4} . x = 7$" ou "$\frac{3}{5} . x = \frac{2}{3}$", on peut s'apercevoir en effet de la présence d'un obstacle très important pour la plupart des élèves : alors qu'il s'avère relativement facile d'apprendre les mécanismes initiaux qui amènent - au niveau des deux premiers exemples - à *diviser les deux membres* par le nombre adéquat, le passage aux deux derniers exemples contient, en revanche, une difficulté d'une tout autre importance.

Cela provient du fait que ce type d'équation amène obligatoirement à envisager *deux voies possibles* :

- traiter le coefficient de x comme l'action de deux opérations (*multiplier* par 3 ; *diviser* par 5) ce qui induit d'inverser ces deux opérations en les appliquant au second membre... : « je dois *diviser* par 3 et *multiplier* par 5 les deux membres, donc $x = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$ »,

- traiter le coefficient de x comme la multiplication par *un seul nombre* (à savoir le résultat de la division de 3 par 5) et aboutir, de ce fait, à : « je dois *diviser* les deux membres par le nombre (3/5), d'où $x = \frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{(2/3)}{(3/5)}$ ».

Inutile de dire que les élèves sont sans cesse confrontés à ce type de question, et surtout que chaque nouveau problème dû à la malignité du maître, suppose, de leur part, de savoir *choisir à bon escient* laquelle des deux façons de regarder la solution obtenue est la bonne...

Il y a là beaucoup plus que ce que l'on pourrait considérer trop vite comme une difficulté mineure. On peut faire semblant de croire aujourd'hui que des règles aussi "combinatoires" que celles qui doivent être acceptées pour ne pas faire de différence psychologique entre les deux formes précédentes du même résultat sont largement dépassées par la présentation du concept de *nombre* et de *loi de composition*. Or même affranchi (en apparence ?) des difficultés conceptuelles qui ont marqué l'histoire, il n'est pas si facile d'admettre que le "résultat d'une opération" est un objet qui a exactement le même *statut* que les deux objets que l'on vient de composer...

En fait, on rencontre ici - au travers de l'agencement des différentes règles de calcul sur les quotients et sur les "quotients de quotients" - tous les ingrédients d'un obstacle "en aile de papillon". Encore "techniquement" présent dans l'apprentissage et résumant presqu'à lui seul l'aspect algébrique de la plupart des difficultés rencontrées historiquement sur le concept de nombre, il pourrait bien, en fin de compte, constituer le *paradigme fondateur* de l'obstacle étudié jusqu'ici... et auquel se sont d'abord heurtés les géomètres.

* * * * *

2°) Les prolongements.

Bien qu'elle soit quelque peu allusive, nui doute que l'analyse précédente soit susceptible d'avoir réconcilié le sujet de cet exposé avec le thème du présent colloque... Il me reste cependant à revenir sur un point que j'ai déjà évoqué à plusieurs reprises et qui touche à la séparation traditionnelle entre *géométrie* et *algèbre*. À partir du XIXème siècle, les mathématiques sont largement marquées, en effet, par la coexistence de deux grands courants en géométrie, dont l'un se réclamera de la *géométrie pure* et l'autre se rattachera avant tout à la *géométrie analytique*.

Plus encore que sur les questions précédentes, il est clair qu'il ne peut s'agir ici que d'*hypothèses épistémologiques* destinées à comprendre les *mécanismes* de cette évolution. Nous sommes en fait confrontés à un problème qui est malheureusement compliqué par une certaine part de "mauvaise foi" séparant les tenants de l'une et de l'autre école. Les arguments apparaissent souvent comme plus subjectifs qu'objectifs, un peu comme si le fond du problème ne relevait en définitive que d'*esthétique*, de préférences personnelles dans une inclination *vers les figures* ou *vers les équations*, ou simplement d'un attachement quasiment sentimental à la tradition de Descartes ou à celle de Desargues...

La vérité est d'abord que ces invocations de la "géométrie des Anciens" ou de tel ou tel "grand géomètre" sont généralement sans grand rapport avec les divergences effectives qui séparent les écoles. Car même si Descartes ou Desargues suivaient des voies différentes, il serait bien difficile de prouver que l'un faisait plus référence que l'autre aux outils mathématiques grecs et, plus encore, que l'un ait suivi une voie plus "géométrique" que l'autre ! Il n'en reste pas moins qu'au moment où prend naissance la possibilité d'une harmonisation entre les deux éclairages qui ont véritablement séparé la géométrie avant 1800, on voit s'instaurer une nouvelle bifurcation, et que celle-ci va sans doute se prolonger jusqu'au milieu du XXème siècle.

Nous avons vu plus haut les conséquences que l'on peut attribuer à l'invention du *cusp* correspondant à "l'aile de papillon" du problème de l'espace : on peut résumer ces conséquences en disant que la découverte des savoirs précis liés à la structure projective sous ses différents aspects (géométrique et algébrique) induit une nouvelle présentation des choses à partir du *cusp*, et tend à étendre cette présentation au maximum de sujets environnants. Si nous devons interpréter les événements qui suivirent en termes de "fronces", nous sommes donc amenés à constater la *naissance d'un nouveau "pli"* dont les nappes devront être affectées à l'une et à l'autre des tendances marquant désormais la géométrie. En termes de singularités, il semble légitime d'envisager au moins trois possibilités qui sont de portées sensiblement différentes :

a) On peut regarder ce nouveau pli comme une conséquence naturelle du lissage au voisinage d'une singularité. C'est-à-dire que nous serions en présence d'un simple déplacement de la fronce (et de ses nappes initiales) dû à la stabilité générique de celle-ci : le "repassage" ne reviendrait, en fin de compte, qu'à pousser plus loin la difficulté...

b) On peut interpréter le phénomène comme le résultat d'une découverte imprévisible, provenant de la création d'un pli nouveau par *combinaison* de la situation locale (en cours de lissage) avec une fronce voisine "couplée" à celle que nous avons étudiée jusqu'ici...

c) On peut être confronté enfin à l'obligation de revenir partiellement sur l'analyse précédente qui postulait la complète résolution du problème de l'espace au "cap 1800", afin de réintégrer le nouveau pli comme une simple étape supplémentaire dans l'évolution de la singularité à quatre dimensions...

À vrai dire, la situation nouvelle fait d'abord penser à une dynamique de type "queue d'aronde", telle qu'elle a été décrite dans l'exposé [2] et telle que l'on peut la schématiser à la manière de la figure 10 de la page suivante. Il me semble en effet qu'une grande part de l'analyse épistémologique conduit à dégager nombre de symptomes évoquant la *genèse d'un pli* (ou son renforcement) *à partir de la conjonction de deux fronces.* Précisons-en quelques-uns...

i) la nature des nappes :

Il n'est pas si facile de spécifier la différence entre "géométrie pure" et "géométrie analytique". On peut toutefois considérer sans trop caricaturer qu'à partir du XIXème siècle la géométrie s'est scindée en deux grandes directions : l'une s'est située explicitement dans le champ de l'analyse algébrique étendue à la géométrie projective complexe pour culminer autour de la théorie des *fonctions algébriques* (on y rattachera avant tout un Cauchy ou un Riemann), l'autre (pratiquement inaugurée par Chasles), s'est presque tout aussi explicitement fixé pour but *l'élimination des calculs* des problèmes relevant de la géométrie...

De l'utilisation systématique des "invariances par transformations" aux détours les plus sophistiqués de la "géométrie énumérative", de la réduction des raisonnements aux "cas génériques" à l'apogée de la "géométrie italienne", il est aisé de suivre la trace d'un indéniable "parti-pris de pureté" qui se mit à côtoyer, *de manière plus ou moins rigoureuse*, une ligne générale des mathématiques qui donnait, de son côté, l'impression de conquérir de jour en jour une plus grande assurance dans ses fondements. Sans aller très loin, vous pourrez vous en persuader de façon particulièrement frappante si vous feuilletez, par exemple, un ouvrage quelconque de "géométrie supérieure" publié dans les débuts du siècle : il risque de vous paraître totalement incompréhensible à force de mise en avant de "principes algébrico-différentiels" destinés à résoudre les équations avant même de les avoir posées !

Mais c'est au fond de cela qu'il s'agit. Indépendamment de l'intérêt "qualitatif" que l'on peut attribuer à l'étude des "formes" dont relève la géométrie, les questions mathématiques sous-jacentes sont presqu'essentiellement des problèmes de *résolution d'équations*. Ainsi en va-t-il, bien entendu, des études sur les coniques ou des théories les plus difficiles sur les courbes ou surfaces algébriques, mais il en est de même pour des considérations aussi simples que celles qui concernent les propriétés d'incidence "immédiates" entre droites et plans, qui ne sont, au fond, que la traduction de systèmes algébriques... [pensez par exemple à la très belle démonstration du théorème de Pappus à l'aide de la propriété du neuvième point.]

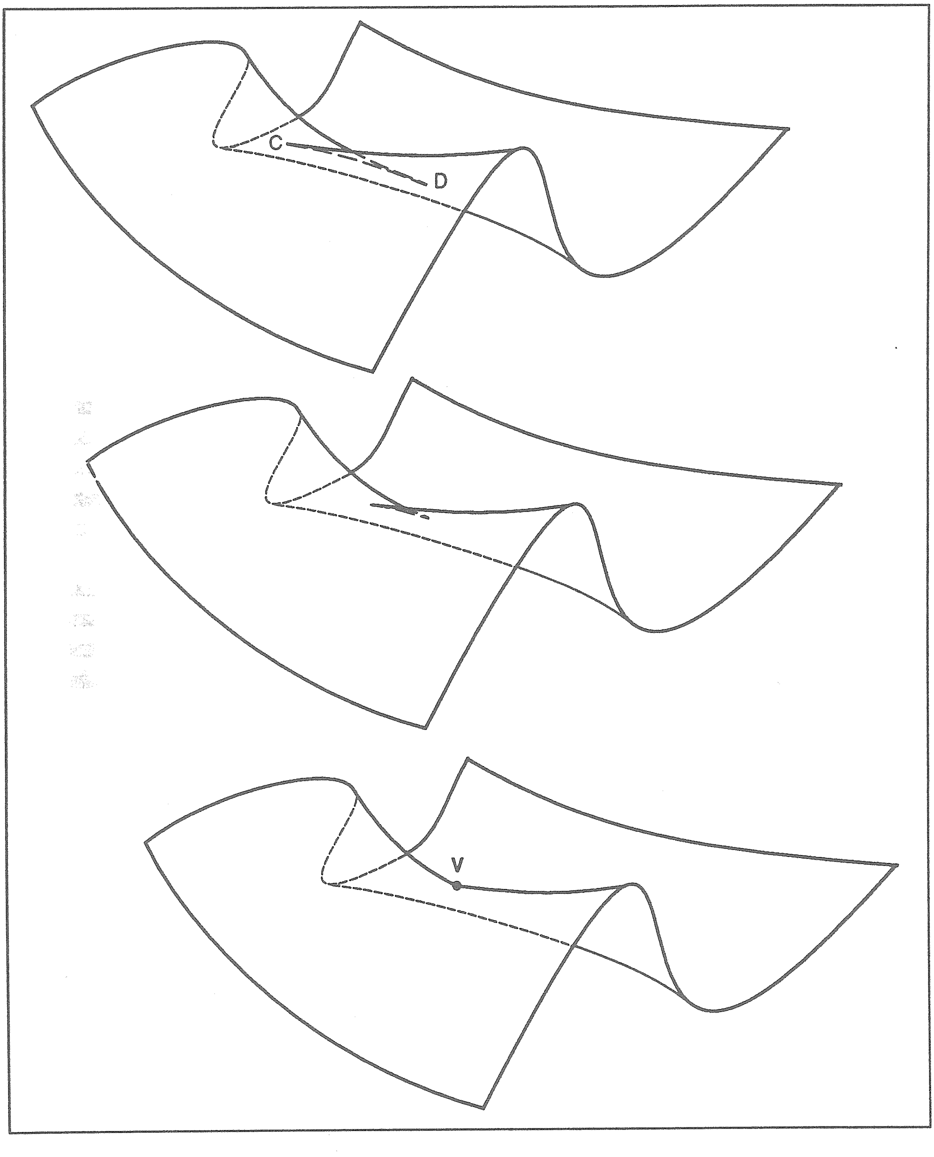


figure 10

Cela étant, on comprend mieux la différence entre les deux approches, du moins en ce qui touche à ce que nous appelons aujourd'hui le domaine de la géométrie algébrique : d'un côté, "l'analyse algébrique" serait l'étude des *équations* à partir de l'arsenal des outils "fonctionnels" ; de l'autre, l'étude des *solutions de ces équations* requerrait des outils moins visiblement "calculatoires", illustrant une fois de plus l'adage selon lequel *"la résolution des équations algébriques ne relève pas de l'algèbre"*... On connaît d'ailleurs les "obstructions" qui, par essence, interdisent d'exprimer par des formules les solutions des équations trop complexes, on sait aussi l'énormité des ressources d'analyse réelle ou complexe nécessaires pour effectuer des avancées significatives dans la maîtrise des solutions à partir du degré trois...

ii) le phénomène de condensation :

S'il convenait de chercher un événement fondateur dans le développement "moderne" de chacune des deux "nappes" évoquées ici, il ne me semblerait pas déplacé de s'arrêter un instant sur un point très précis lié à la théorie de l'*involution* introduite par Desargues à propos de l'étude des coniques.

Indépendamment de l'approche proprement "spatiale" qui caractérise la démarche de Desargues développée jusqu'ici, il n'est pas inutile, en effet, de se rappeler que l'un des ressorts principaux du *Brouillon projet...* réside dans ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler le théorème de *Desargues-Sturm*, consistant à remarquer que les intersections d'une droite avec les coniques d'une même "famille" sont en *involution*. C'est-à-dire que les couples de points déterminés sur une droite par une conique variable définissent une *application* de cette droite sur elle-même et, qu'en prenant certaines précautions vis-à-vis du point à l'infini, cette application n'est rien d'autre qu'une *fonction homographique involutive.*

On voit percer ici une idée tout particulièrement précisée par Chasles et qui consiste à relier l'étude d'une *correspondance* d'origine algébrico-géométrique entre points d'une droite, avec l'étude d'une *application* (ou transformation) sur la droite, ainsi qu'avec l'*invariance du birapport* associée à celle-ci.

Il semble clair que c'est dans des considérations de ce genre qu'il convient de chercher la source de la notion de *correspondance*, étendue par la suite avec plus ou moins de bonheur à une foule de situations du même type. Cela étant, on notera aussi que l'involution utilisée par Desargues est l'un des rares cas de ce genre où la théorie fonctionne à merveille et où il est effectivement possible de jongler avec l'un ou l'autre des points de vue tout en étant capable de justifier, à chaque instant, le passage de l'un à l'autre... Elle correspond de ce fait à une occasion presque unique de "condensation" de deux fronces à l'occasion de laquelle un résultat important et nouveau va naître de la rencontre de considérations *fonctionnelles* et *géométriques*.

iii) la phase d'extrapolation :

Nous en arrivons ainsi à un aspect que j'ai déjà rappelé au début de la partie historique de cet exposé et sur lequel j'ai insisté dans [2]. Il touche à un phénomène majeur que l'on doit pouvoir associer à une situation du type de celle qui est résumée sur la figure 10 : une fois "consommée" la condensation des deux fronces (point V) tout se passe comme si on assistait à la création d'un "champ de savoirs" (bord apparent de la nappe) et que ce champ, bien que constitué d'images non *justifiables* au sens mathématique du terme, serve d'attracteur pour de futurs développements.

On peut comparer cette situation à celle de la notion de points de fuite en perspective : les propriétés "miraculeuses" (et démontrées...) de *l'involution* joueraient le même rôle que le *point de fuite principal* lorsqu'il engendra *par extension simple* tous les autres cas. Leur "prégnance" autoriserait nombre de généralisations dont la seule démonstration possible relèverait d'un pur appel à *l'intuition*.

Il semble en être allé exactement de façon analogue si l'on se réfère aux divers principes invoqués par Chasles ou Poncelet pour se convaincre de la validité de nombreux raisonnements fondés sur les "correspondances (m, n)", sur les "extrapolations au cas complexe", sur les "restrictions aux positions générales", etc. Chasles, le premier, avait évidemment conscience de la faiblesse des justifications théoriques, mais il ne doutait pas - et c'est justement là tout le *phénomène épistémologique* que je voudrais souligner -, il ne doutait pas de la *validité* des résultats obtenus, bien que la théorie reste comme *en suspens*, faute d'une fronce venant compléter la figure 10 de manière à permettre le passage d'une nappe à l'autre du nouveau pli...

On mesurera simplement la difficulté du problème en essayant d'imaginer des justifications du type de celles qui avaient cours pour l'involution de Desargues en les appliquant, cette fois, à un exemple comme celui d'une "involution ternaire" déterminée sur une droite par les intersections d'une cubique variable... Je me contenterai de signaler, pour ma part, que la justification de nombre de raisonnements de la géométrie algébrique italienne soulève encore des difficultés aujourd'hui, et je renverrai à [6] sur la question...

iv) mise en abîme et fronce terminale :

Curieusement, le parallèle avec la situation étudiée dans [2] à propos du XVIème siècle peut sans doute être poussé plus loin encore. C'est-à-dire qu'une fois le pli de la figure 10 établi et exploré selon les possibilités associées à chacune des nappes, il devient très difficile de *découvrir* (ou de *créer*, si l'on préfère...) les ingrédients nouveaux, susceptibles de constituer un *cusp* pour la fronce manquante. Mais en tout état de cause, il semble bien que la solution passe par une énorme "prise de recul" vis-àvis du problème initial, à un niveau certainement aussi élevé que celui de la "mise en abîme" qui fut nécessaire au XVIème siècle pour passer d'un stade "à la Viator" au stade maîtrisé par Guidobaldo. Sans vouloir filer exagérément la métaphore, chacun peut effectivement mesurer le chemin parcouru en matière de "mise en abîme" : la *géométrie de l'espace* va devenir un simple "cas particulier" parmi une infinité de "variétés" imaginables, le *calcul algébrique* devra s'étendre et se perfectionner pour englober "l'algèbre non commutative", les "formes" elles-mêmes rentreront dans les nouvelles combinatoires du "calcul homologique", etc., etc.

Il est par ailleurs légitime de penser que la "fronce" manquante attendra les années 1950... : après que Severi et Lefschetz soient parvenus à réinterpréter en termes d'*homologie* un grand nombre des méthodes de géométrie énumérative mises en œuvre depuis Chasles ; après qu'un point de vue comme celui qui conduit à la "formule des Tor" de Serre ait permis de comprendre la nature profonde des résultats les plus puissants de la géométrie algébrique. D'une certaine façon, on peut estimer que la présentation de *l'algèbre homologique* menée à bien par Cartan et Eilenberg constitue l'un des premiers cadres dans lequel aura pris forme le "lissage" de cette fronce "terminale"...

Comment raccrocher une telle analyse aux trois hypothèses a), b) ou c) formulées plus haut ?

Chacun aura sans doute son idée sur la question... Je dirai pour ma part qu'il me semble plausible d'hésiter entre les interprétations b) et c), et donc de se demander s'il convient de regarder ou non l'ensemble de cette phase comme un simple élément "contenu" dans *l'aile de papillon* constitutive du problème de la géométrie de l'espace (c'est-à-dire comme une étape de cette résolution, au même titre, par exemple, que la phase étudiée dans [2], correspondant au stade 1400 - 1600). Je pense cependant qu'il conviendrait plutôt de prendre en compte une sorte de notion de "dimension" du problème, au sens suivant : l'étendue et la pluralité des "principes" postulés par Chasles au "cap 1800" donne à penser que, contrairement au cas du "stade Viator", le phénomène d'extrapolation lié à la "queue d'aronde" a induit cette fois un "champ de savoirs" bien plus substantiel, et que celui-ci ne peut plus être restreint "à la dimension 1"... On peut de ce fait postuler que le phénomène que je viens de décrire comme une simple "queue d'aronde" corresponde en réalité à une singularité analogue mais de dimension *supérieure*, et soit dû par exemple à la conjonction, non pas de deux fronces simples, mais à la rencontre de deux singularités de type "aile de papillon". Dans cette lecture, l'une des deux singularités C ou D de la figure 10 ne serait autre que la singularité "géométrie de l'espace"... Sa résolution coïnciderait en fait avec celle d'un autre obstacle... lié par exemple au problème de la détermination des racines d'une équation algébrique...

Quelle que soit l'hypothèse retenue, il paraît indéniable que la lecture du "stade 1950" s'impose comme celle d'un nouveau cap important... Il n'est pas besoin d'insister pour s'en convaincre, je pense, sur la dimension psychologique à lui affecter en termes d'ouverture d'une nouvelle phase "universalisante", y compris dans les conséquences qu'une telle lame de fond a pu entraîner en matière de programmes scolaires dans les années soixante...

* * * * *

3°) L'aspect didactique.

Ce n'est évidemment pas le lieu ici de s'appesantir sur la dynamique entraînée par un tel élan et sur les vagues secondaires qu'elle peut provoquer : il semble bien que la découverte d'un nouveau *cusp* conduise la pensée de certains à *l'illusion de l'universalité* et puisse même entraîner des retouches idéologiques sur leur vision du réel... [Ce qui ne saurait d'ailleurs expliquer ni les conditions sociologiques ou politiques du moment, ni comment le système enseignant tout entier s'est mis à regarder les livres de Bourbaki comme des modèles indépassables de pédagogie.]

Je voudrais cependant terminer cette étude en revenant quelques instants sur l'aspect proprement didactique de la notion d'*obstacle épistémologique* et compléter, à la lumière de cette analyse historique, les remarques de [1] consacrées à ce sujet. Je ne reviendrai donc pas ici sur le cas des fronces que l'on pourrait désormais qualifier de "simples" ; mais il est clair que l'existence d'obstacles plus complexes (comme ceux qui paraissent relever de singularités de type "queue d'aronde" ou "aile de papillon") ne saurait manquer d'avoir des conséquences qui méritent d'être prises en compte lorsque l'on s'intéresse à *l'apprentissage* des mathématiques.

Considérons pour commencer une singularité comme *l'aile de papillon*. Contrairement au cas des exercices élémentaires étudiés dans [1] (ou à propos de la figure 3 du présent exposé), elle semble nécessaire pour structurer des "questions de fond" aussi importantes que celle de la *représentation en perspective* ou celle du *calcul fractionnaire*. Mais si c'est bien le cas, comment faut-il envisager - du point de vue du maître... - l'*apprentissage* des questions de ce genre ? En d'autres termes, si l'on admet qu'un enfant aura compris - voire *conceptualisé* - une théorie comme celle de la *perspective* uniquement lorsqu'il se sera forgé une "carte" convenable au voisinage de la difficulté, est-il possible de maîtriser des *procédures d'enseignement susceptibles de l'amener à ce résultat* ?

Autant je pense qu'il est possible de tirer une forme de profit de méthodes fondées sur une *progressivité* et une *répétitivité* intelligentes *dans les domaines relevant de fronces* "simples", autant il me semble présomptueux de croire détenir la vérité sur des questions difficiles associées à "l'aile de papillon"... Face à un tel obstacle, en effet, et en admettant que la plupart des exercices ne font que correspondre à des "sections planes" de la singularité, l'élève doit savoir non seulement résoudre un grand nombres d'exercices types, mais aussi les assembler de façon à pouvoir *passer aisément de l'un à l'autre.* C'est-à-dire que le "savoir" proprement dit passe d'abord par la maîtrise de problèmes assez complexes en eux-mêmes (puisqu'ils peuvent relever d'une situation à trois *cusp*), mais nécessite de plus une certaine "intelligence" de ce qui peut constituer à la fois leur parenté et leur individualité.

Cette obligation (pour le maître) de faire découvrir des "savoirs partiels", en ayant pour objectif la constitution d'un "savoir global" qui n'est autre que le "lissage" de la singularité tout entière, amène naturellement à des choix stratégiques particulièrement délicats. On peut dire sans se tromper que les solutions apportées à ce genre de problème didactique relèvent jusqu'à présent de l'empirisme le plus complet et même s'il faut convenir que toutes les démarches existantes n'aboutissent pas à des échecs, il est bien difficile d'en mesurer objectivement l'efficacité.

Rapportées à la métaphore du "repassage d'une singularité", ces diverses stratégies ont pour point commun de chercher tout à la fois un "balayage" aussi complet que possible des cas multiples dans le choix des "sections" et, parallèlement, de viser à une "structuration de l'esprit" de l'enfant... Il est d'ailleurs facile de penser ici à diverses tendances classiques et de les rapporter à ce double objectif. Il est clair, par exemple, qu'une technique comme celle qui est souvent prônée sous le nom universitaire de "débat scientifique" (et qui correspond essentiellement à ce que tout professeur du secondaire appellerait simplement "une gestion active" de sa classe) consiste à tenter *de profiter au maximum* du "balayage aléatoire" offert par les réactions d'un grand nombre d'imaginations différentes, toutes plus motivées les unes que les autres... À l'inverse (sans tomber évidemment dans le pur "cours magistral"), on peut voir dans la méthode du "maître qui pense devant ses élèves" la volonté de limiter l'aspect hasardeux des "sections" retenues, tout en privilégiant la part de "raisonnement modèle" qui doit permettre d'aider à apprendre à penser...

La question ne se résume pourtant pas au domaine de la technique pédagogique ponctuelle, elle concerne surtout - et de manière cruciale - la vision plus globale que l'on peut avoir sur tout un programme, ou même simplement sur l'ensemble d'un chapitre. Ainsi le problème de *l'apprentissage de la perspective* (ou *du calcul fractionnaire*) met-il le professeur face à des choix de "progressions" qui reviennent à *fixer des* *chemins* pertinents parmi les "sections"... Il est inutile de préciser, je pense, que les positions décrites au paragraphe précédent n'apparaissent plus alors que comme des "épiphénomènes" au regard de la réflexion indispensable (de la part du maître) qui doit présider à l'élaboration des séquences d'apprentissage !

Ici encore il est possible d'observer au moins deux types de tendances mises en œuvre dans l'enseignement, reposant sur des philosophies très différentes à l'égard de l'apprentissage...

D'un côté la démarche du "cours magistral" - pour ne pas dire "la pédagogie du traité de mathématiques recopié au tableau"... - s'appuie sur l'idée que l'on doit *proposer à l'élève* un "lissage préalable" des difficultés : quels que soient ses qualités ou ses défauts, elle suppose donc qu'il est possible de résoudre tous les problèmes par le simple fait de les rapporter à un discours et à une théorie suffisamment clairs pour gommer les obstacles. À l'opposé, les tentatives de pédagogie "spiralaire" chercheront à confronter les élèves *à la plupart des obstacles* et - par un mouvement d'aller et retour vers le *cusp* - à les guider vers un "repassage" personnel, censé leur permettre d'aborder ensuite des exercices de plus en plus éloignés de la fronce.

Chacune de ces démarches est sans doute quelque peu utopique dans la mesure où la vraie question est de savoir à l'avance *sur quels chemins diriger les élèves*. Peut-être le démontage complet d'une singularité comme *l'aile de papillon* permettrait-il d'avancer dans cette direction ? Je l'ignore, mais j'aimerais conclure cette étude sur quelques remarques qui semblent découler de l'observation de l'histoire...

La première concerne la difficulté éprouvée durant presque quatre siècles pour comprendre les ressorts géométriques et numériques d'un problème comme celui de l'espace. Le cheminement effectué, même s'il ne doit pas nécessairement être répété au travers de l'apprentissage, conduit à donner une indéniable importance à ce qu'il faut bien considérer comme un "fractionnement du problème" correspondant à la pluralité des voies suivies. En d'autres termes, il semble important de ne pas négliger les *problèmes partiels* attachés à ce que j'ai considéré comme de simples *sections* de la singularité principale. Il est clair, en effet, que l'apprentissage ne saurait économiser des *savoirs* qui doivent se rapporter aux strates "significatives" de dimension inférieure vis-à-vis de la "surface des états".

À moins de supposer que l'esprit soit capable de gérer simultanément des obstacles mettant en jeu plus de deux paramètres - au sens où j'ai utilisé ce mot pour la dimension de la surface des états -, une telle démarche reviendrait donc à dresser progressivement une "carte" au voisinage de la singularité par une sorte de *méthode du squelette* ; c'est-à-dire en comblant peu à peu les lacunes laissées entre les savoirs "élémentaires" qui correspondent à certaines sections plus abordables.

Les exemples pédagogiques ne manquent pas pour illustrer ce genre de situation. Il suffit de penser à la façon dont tout le *calcul fractionnaire* peut apparaître simplifié par le recours systématique à des valeurs décimales approchées ; à la simplification analogue apportée à tout exercice de géométrie sur la similitude par l'utilisation mécanique des rapports trigonométriques ; aux savoirs-faire "aveugles" en géométrie de l'espace qui peuvent résulter d'un usage répétitif de règles simples...

Cette vision des choses laisse malheureusement dans le vague le problème didactique de l'éventuelle possibilité de *relier intelligemment* les diverses strates dans un "lissage" de la singularité tout entière...

Peut-être une analyse épistémologique plus profonde des moments de l'histoire correspondant aux jaillissements de ces épisodiques synthèses permettrait-elle de progresser sur ce problème didactique ? Nous en sommes encore actuellement à laisser le soin aux élèves de faire eux-mêmes ce travail... et à nous extasier sur la facilité avec laquelle les plus "doués" parviennent à franchir ce genre d'obstacle.

Faut-il dès lors, dans une sorte de réaction inverse, fonder nos seuls espoirs sur l'idée de *rupture* ? Faut-il abandonner l'ambition de faire suivre à l'enfant une forme de *parcours initiatique* jalonné de difficultés jugées nécessairement "formatrices", soit parce qu'on les croit liées indissolublement à l'histoire, soit parce qu'on les ressent comme profondément significatives dans l'accomplissement de notre formation personnelle ?

L'antidote à ces itinéraires balisés empiriquement amène assez souvent à se lancer dans des méthodes d'enseignement fondées sur des progressions où les obstacles apparaissent comme préalablement "lissés"... On reconnaîtra même ici (au moins lorsque les problèmes concernés sont de grande ampleur) la tendance à mettre en place de mémorables "réformes de l'enseignement" aux ambitions quasiment révolutionnaires ! Il convient de méditer sur ce type de décision en tenant compte des expériences passées et en se rapportant à la difficulté du problème sous-jacent. L'histoire nous offre curieusement deux exemples quelque peu similaires en la matière, d'une part avec ce qui a pu se passer au début du XIXème siècle et, d'autre part, avec ce que nous avons pu observer, plus récemment, de la trop fameuse "réforme des maths modernes". Rappelons-nous tout d'abord, en effet, la période révolutionnaire et la célèbre "École Normale de l'An III". Épistémologiquement parlant, elle correspond à ce que j'ai appelé le "cap 1800", c'est-à-dire au moment où se fait jour une maîtrise quasiment parfaite de la singularité "géométrie de l'espace". Il suffit de feuilleter les diverses *Leçons* proposées par les plus grands mathématiciens de l'époque pour voir comment vont s'imposer à des générations d'enseignants la *géométrie de Monge* et le *système décimal...* : les errements antérieurs en matière de *calcul* ou de *figures* n'auront plus qu'à s'effacer dans un discours nouveau, exempt d'une grande part des *plis* antérieurs... Les pères de la réforme de 1970 ne se sont pas privés d'invoquer cet exemple - que l'on peut certainement, de bonne foi, qualifier de "réussi" - pour justifier par avance le bien-fondé de la révolution qu'ils prônaient... Il est d'ailleurs vrai qu'une partie des *bonnes intentions* contenues dans celle-ci consistait effectivement à mettre en place une vision nouvelle des choses, structurée à partir des ingrédients d'un "lissage" correspondant à ce que j'ai évoqué comme un possible "cap 1950" ; il n'en reste pas moins que nous sommes ici en présence d'une *pédagogie de rupture* complètement ratée.

Je sais par expérience que chacun a son explication sur cet échec ; je voudrais néanmoins tenter d'éclairer ce problème par une dernière remarque qui me semble pouvoir être tirée de toutes les analyses précédentes. Elle a trait à un phénomène sur lequel il ne me paraît pas inutile d'insister : c'est celui du stade épistémologique lié à la notion de "queue d'aronde"... Comme j'ai tenté de le montrer à propos de la période 1500 (cf. [2]) ou de l'histoire de la géométrie algébrique au XIXème siècle, une situation de *conjonction de deux fronces* (quelles que soient leurs dimensions) a le privilège de *créer des savoirs*. Car tout se passe comme si elle imposait à l'esprit des attracteurs *plus riches* que ceux qui résulteraient de la simple analyse des deux problèmes initiaux. Peut-on rêver mieux que de cette occasion *d'invention* ? La seule restriction qui pourrait lui être apportée tient dans le fait que ces "savoirs" ne résultent pas d'une *démonstration* mais bien de ce qu'il conviendrait de désigner sous le nom *d'intuition*. Mais l'histoire des mathématiques n'a cessé de progresser sous l'influence "d'attracteurs" de ce genre - qu'ils prennent le nom de *conjectures* ou simplement de *principes* - dont la justification n'est venue que nettement plus tard et a même constitué, à son tour, une des plus fortes motivations aux progrès.

Il serait bien dogmatique de penser que *l'apprentissage* ne doive pas, lui aussi, tirer un profit substantiel du plus grand nombre possible de rencontres de cette nature. On notera que la stabilité structurelle d'une singularité interdit en fait pratiquement tout espoir d'un "lissage" qui ne reviendrait pas, d'une façon ou d'une autre, à repousser la difficulté plus loin... Dès lors, à moins de ruptures suffisamment profondes pour entraîner des remises en cause globales touchant à de larges pans des connaissances, les rares dynamiques envisageables pour une maîtrise de l'apprentissage passent par l'élimination simultanée de plusieurs fronces à l'intérieur d'un processus de type "queue d'aronde".

Encore faut-il, *pour les accepter*, renoncer à une volonté permanente, obsessionnelle et tatillonne de *rigueur démonstrative*. Et c'est peut-être là qu'il faut chercher une des plus convaincantes explications de l'échec de la réforme des années 70 : non pas tant dans la volonté d'introduire une présentation nouvelle des choses (qui n'était guère que l'utilisation d'un "lissage" ni plus ni moins légitime qu'un autre), mais dans la véritable *stérilisation de l'activité intellectuelle* résultant d'une volonté bien naïve de donner à tout instant l'impression d'une science à l'abri des incertitudes, des repentirs ou des rajouts... La *curiosité scientifique* serait-elle donc une denrée si courante pour qu'on puisse se permettre de la brider et de ne pas mettre en œuvre tout ce qui pourrait la susciter, l'encourager et la nourrir ?

*
* *

Conclusion.

Desargues concluait son *Brouillon Projet* sur les coniques par ces mots :

"Quiconque verra le fonds de ce Brouillon est invité d'en communiquer de mesme ses pensées.".

Me permettra-t-on de plagier modestement sa conclusion ?

On aura compris, je l'espère, que le *"fonds"* de ces exposés touche, en premier lieu, à la notion de "revêtement de sens"... Chacun d'entre nous a sans doute en mémoire ce genre de sensation privilégiée marquant les moments où l'on découvre une *nouvelle façon* de voir les choses, lorsque l'esprit se met à rassembler tout une famille d'événements pour leur conférer une parenté nouvelle, pour leur donner un "nouveau sens". Cela peut concerner d'infimes détails. Comme pour l'enfant qui découvre un jour que le signe " = " (qu'il a manipulé longtemps dans sa langue naturelle pour signifier une foule de situations "d'égalisation"), doit être dépouillé d'un grand nombre d'acceptions parasites afin d'épurer son sens, jusqu'à constituer la pierre angulaire d'un "formalisme" plus ou moins élaboré... Comme pour l'étudiant qui doit se faire violence et admettre que les diverses propriétés des *tangentes* rencontrées auparavant ont *intérêt* à être considérées comme les "conséquences des axiomes" du calcul différentiel...

Cela peut aussi mettre en jeu (aussi profondément sans doute que lors des grandes mutations historiques) des "concepts" tout entiers, relatifs, par exemple, au statut des *nombres* ou des *figures géométriques*... Je n'insisterai pas ici sur le cas des nombres (chacun peut se rappeler aisément de la rupture provoquée par la découverte du fait que de tels objets se "construisent"...), mais il n'est pas forcément inutile de s'arrêter quelque peu sur la question géométrique, car les dernières décennies ont apporté en ce domaine leur lot de bouleversements.

Admettons un instant que les *faits mathématiques* dont nous parlons concernent uniquement les objets habituels de la géométrie, ainsi que leurs propriétés élémentaires. Il est clair que depuis Euclide (et ses prédécesseurs) l'ensemble de ces *faits* n'a guère changé de "nature"... Or si l'on considère les *présentations possibles* de ceux-ci dans le discours mathématique ou dans l'enseignement, on s'aperçoit de la profonde différence de "sens" que l'élève est amené à utiliser en fonction des époques. Tantôt les points et les droites apparaîtront comme des objets d'essences distinctes et assez floues ; tantôt les droites devront être regardées comme des *familles* de points constituant des ensembles fort complexes. Tantôt les *transformations* seront de simples analogies entre "figures" ; tantôt elles ne pourront obtenir droit de cité que comme *fonctions* définies sur le plan tout entier...

On notera d'ailleurs au passage qu'une réforme dite des "maths modernes" aura essentiellement cherché à renforcer un "revêtement de sens" *ensembliste* fondé sur la "théorie naïve", alors même que le formalisme de la théorie "moderne" reviendrait précisément à n'instaurer que des *relations entre des symboles*, au sens suffisamment vague pour ne pas prêter le flanc aux classiques paradoxes de la théorie des ensembles... Mais cette question du "revêtement de sens" peut aussi rejaillir sous une forme analogue à propos de situations en apparence très éloignées de ce qu'il est habituellement convenu de rattacher à la notion de "sens" : c'est notamment le cas lorsque l'on réfléchit à la réalisation de *logiciels de constructions géométriques*.

Chacun peut en imaginer, évidemment, la problématique fondamentale : une figure est traduite en mémoire sous forme analytique ou numérique et constitue l'ensemble des *objets* sur lesquels peut agir l'utilisateur... Mais sur ce *substrat de faits*, le concepteur du logiciel doit mettre en place une "couche interface" destinée à gérer les *opérations autorisées* pour l'utilisateur. Or le simple problème de décider des *autorisations* et des *interdictions* en matière de *redondance* (c'est-à-dire de la possibilité de construire ou non "par-dessus" un objet déjà construit un objet identique) amène à un dilemne qui revient à choisir un "revêtement de sens". Convient-il, en effet, de considérer que tout *objet* déjà présent dans la figure interdit la construction d'un objet identique au même endroit, ou convient-il de considérer que c'est seulement la répétition d'une même commande qui doit être proscrite ? Prenons un exemple : considérons un triangle *presque*-isocèle dans lequel on a tracé la médiatrice de la *presque*-base et supposons que l'on désire construire la médiane correspondante... Dans le premier cas, le logiciel refusera la construction puisqu'il détectera la *présence d'une droite* à l'emplacement souhaité ; dans le second, il acceptera la médiane puisque cette commande n'a pas encore été effectuée...

Chacune des deux procédures a une logique propre, mais aussi des effets pervers : la première demande de faire varier la figure (si c'est possible) pour détruire la pseudo-propriété du triangle *presque*-isocèle ; la seconde ouvre la possibilité de surcharger les constructions d'une foule d'objets inutiles, n'ayant d'autre "sens" que de correspondre à des *gestes possibles*, indifférents aux propriétés géométriques intrinsèques de la figure.

Que l'on ne s'y trompe pas : la "couche interface" engage la "nature" de ce que l'on cherche à réaliser. Il n'est d'ailleurs pas difficile de retrouver une filiation naturelle de chacune des deux positions que je viens d'évoquer avec un éclairage de type "ensembliste" des *objets géométriques* ou une présentation plus "raisonnante", axée sur les propriétés... À cet égard, la seconde méthode accepte des *singularités* entre le "revêtement fondé sur les commandes" et la figure de base : c'est le dédale bien connu des propriétés géométriques de concours ou d'alignements ; exactement de la même manière que la géométrie analytique rencontre des problèmes lorsqu'elle désire associer de manière bi-univoque les équations et les parties du plan.

Le géomètre ne dispose-t-il pas, quant à lui, d'un "revêtement de sens" intermédiaire entre tous ceux-ci, qui permette notamment de travailler sur des *figures fausses*... en choisissant soi-même, à bon escient, ce qui mériterait redondance ou non ? Mais je voudrais surtout m'appuyer sur ces exemples pour montrer qu'il ne s'agit aucunement ici d'entrer dans un débat que les philosophes qualifieraient d'*ontologique* : la question qui m'a intéressé dans les analyses précédentes ne porte pas sur le fait de savoir ce que pourrait être la *nature exacte* des objets étudiés, pas plus que sur le fait de savoir si tel ou tel "revêtement de sens" est plus pertinent qu'un autre. Peu importe (ici...) que les "faits" étudiés en mathématiques existent de façon autonome ou qu'ils ne soient en définitive qu'une sorte de "quotient" des "sens" qu'on leur affecte ; peu importe que les "images mentales" que l'on associe aux faits soient de telle ou telle nature ; libre aux *sciences humaines* de considérer que tel ou tel "revêtement de sens" est légitime ou non au regard de tel ou tel "mythe" ; libre aux mathématiciens de se raccrocher de plus en plus à une sorte "d'in-signifiance" des *faits* pour n'assumer que l'existence des "signes" et des "symboles"... Puisque je ne me suis en fait attaché qu'aux *rapports* entre "revêtements de sens", et seulement dans le but de rechercher des *singularités* entre ceux-ci.

> *"En géométrie, comme en algèbre,* [disait Poinsot,] *la plupart des idées différentes ne sont que des transformations ; les plus lumineuses et les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul."*

Dès lors, si le "revêtement de sens" n'a d'importance, pour le mathématicien, que par son *efficacité*... il n'en aurait, pour l'épistémologue, qu'au travers de ses *singularités* propres ! Peu importeraient, en somme, les *interprétations* des faits, puisque les seuls faits dignes d'intérêt seraient ceux qui marquent de leur "singularité" la progression des savoirs... Ceux-là seuls seraient "porteurs de sens", puisque leur sens serait tout uniment à rechercher dans la nature de leur "singularité"...

Un peu à la manière dont les plis d'un drapé suffisent pour donner consistance aux mouvements d'une étoffe... Un peu comme dans l'allégorie de Dürer où, seuls, les plis du tissu suffisent à donner sens à la robe de la *Mélancolie...*

*

* *

Références.

[1] LOMBARD, Philippe.
- *"La représentation en perspective comme obstacle épistémologique"*, in *La Figure et l'Espace*, Actes du colloque inter-IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques de Lyon (juin 1991). Publications de l'IREM de Lyon, 1993.

[2] LOMBARD, Philippe.
- *"La notion de « point de fuite » comme obstacle épistémologique"*, in *Histoire d'Infini*, Actes du colloque inter-IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques de Landerneau (mai 1992). Publications de l'IREM de Brest, 1994.

[3] THOM, René.
- *Stabilité structurelle et morphogénèse.*

[4] MUNIGLIA, Michèle.
- *"Le théâtre au service de l'algèbre"*, in *Repères-IREM* n° 16, Juillet 1994.

[5] CHASLES, Michel.
- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles, 1837. 2de éd., Paris, 1875. 3ème éd., 1889.

[6] DIEUDONNÉ, Jean.
- *Cours de Géométrie Algébrique*. Paris.

[7] TATON, René.
- *L'œuvre mathématique de Girard Desargues*. P. U. F. Paris, 1951.

*

* *

*