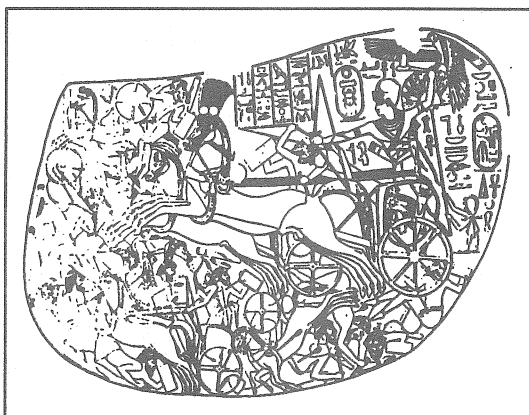


LES NOMBRES EN ÉGYPTÉ : APPROCHE HISTORIQUE.

Daniel AUSTIN.

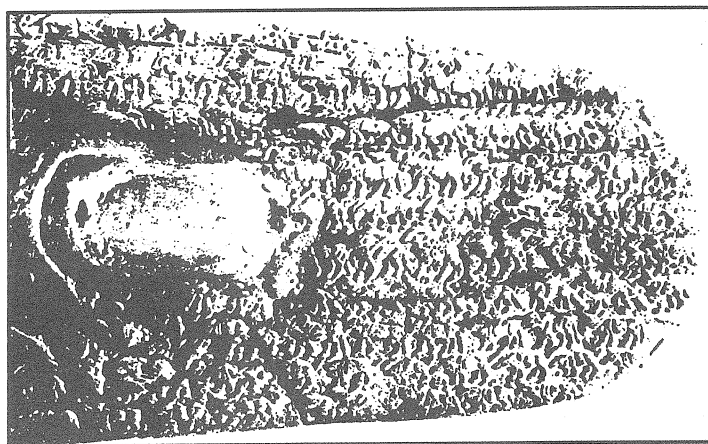


Document n° 1.

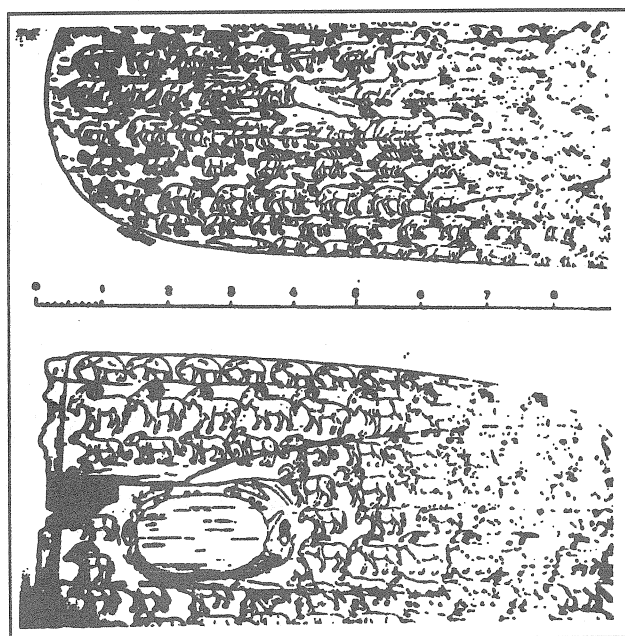
Élément de char de guerre de Thoutmosis IV (XVIIIème dynastie) ;
Musée du Caire, n° CG 46 097 ; dessin exécuté par H. Carter¹.

Avant les nombres, il y avait le chaos (doc. 1). Puis Osiris apporta la civilisation et Pharaon en fut le garant. Son devoir est de repousser le désordre hors les frontières du monde. Les chevaux sont en diagonale pour séparer l'inconciliable. En haut et à droite l'harmonie par les lignes verticales et les hiéroglyphes. En bas à gauche, l'indistinct, le confus, l'indénombrable. Le désordre s'oppose au classement. Alors vient un temps où la multitude se trouve rangée en registres horizontaux par affinités de nature. Le classement s'opère, l'espace se structure. Nous sommes aux environs de 3 500 av. J.-C. Sur ce manche de couteau historié les animaux sont sagement alignés dans le même sens de marche.

¹ D'après Reeves, N., Taylor, J. H. : *Howard Carter before Tutankhamun*, Londres, 1992, p. 75.



Document n° 2a.



Document n° 2b.

Manche de couteau historié, époque guerzéenne, env. 3 500 av. J.-C.

a) Musée de Brooklyn, Acc. n° 09 889 118. ²

b) Moulage du Musée des Antiquités Nationales de Saint-Germain-en-Laye, n° 57.655.

Autant le thème du chaos fut un thème iconographique de l'époque historique, autant les représentations préhistoriques privilégient toujours la structure et le géométrique (doc. 2)³.

² D'après Eggebrecht, A. : *L'Égypte ancienne*, Paris, 1986, p. 39.

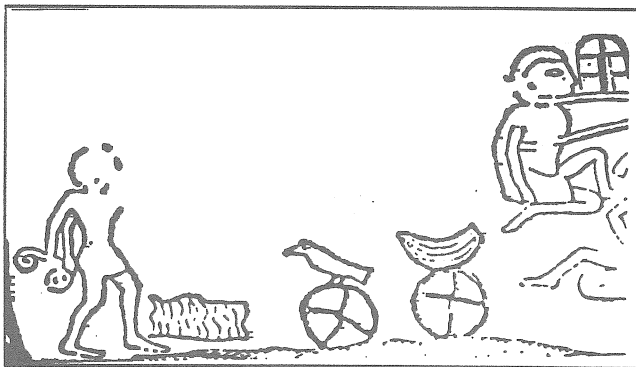
³ Cf. *Archéologie comparée*, Paris, 1982, p. 101.

Après le classement par genres : les éléphants surmontant les ovidés puis les capridés, il y a la reconnaissance par paquets. C'est le cas des glyphes définissant des villes ennemies conquises. Il y a une lecture figurative, symbolique mais déjà hiéroglyphique. En tout cas, il y a une visualisation de "deux".

De gauche à droite (doc. 3), on voit le roi sous la forme d'Horus surmontant le plan de son palais contenant son nom protocolaire. Devant : un nubien captif avec le hiéroglyphe nommant sa nationalité en guise de lien à ses bras rejetés dans le dos.

Puis deux glyphes sous la forme du signe ⊗, future hiéroglyphe pour la ville (⊗), surmonté chacun par un oiseau totem devant aussi écrire le nom de la ville ou mieux du camp retranché. Plus loin des cadavres et des prisonniers.

À partir des paquets, on peut établir des comparaisons et bientôt définir des égalités et donc des inégalités. Le procédé le plus archaïque est de répéter autant de fois que nécessaire la chose ou l'être désigné. Par respect pour certaines formes du divin ou de l'usage consacré, cette méthode surannée perdurera sur les 3 000 ans et plus de l'histoire égyptienne.



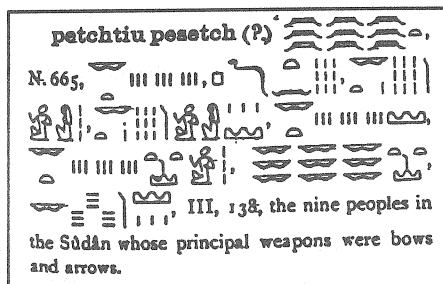
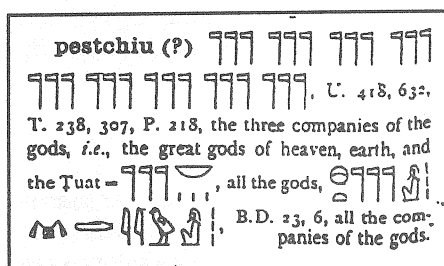
Document n° 3.

Graffito provenant de Bouhen (Nubie). Époque de Djer, 1ère dynastie⁴.

Le document n° 4 présente le groupement des trois Ennéades de Dieux du Ciel, de la Terre, et de "l'Enfer" (Douat)⁵. Le groupement visuel et les arrangements possibles font office de dénombrement.

⁴ D'après Aldred, C. : *Les Égyptiens*, Paris, 1965, p. 62.

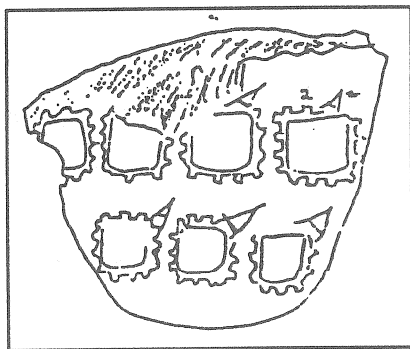
Document n° 4. Texte funéraire du roi Ounas, Vème dynastie.



Document n° 5.

Autre exemple de duplication mécanique (doc. 5) : Les "Neuf Arcs" qui symbolisent les ennemis héréditaires de l'Égypte⁵. On regarde, on compare, mais il n'y a pas encore de dénombrement, ni de nombre. Pour qu'ils soient, il faut les appeler, puis les écrire.

Le grand saut qualitatif sera l'apparition du déterminatif. Ce terme désigne un être, une chose, voire une abstraction qui, associé au nombre, va conférer à celui-ci sa valeur abstraite tandis que le nombre va conférer au déterminatif sa valeur générique ; c'est pourquoi, en Égyptien, les unités métrologiques sont au singulier et précèdent le nombre. Ainsi pour "quatre coudées" on écrit "coudée 4".



Document n° 6.

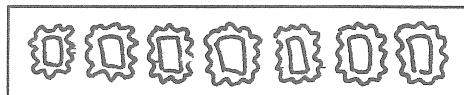
Croquis partiel de la palette "libyenne", 3 000 av. J.-C.
Musée du Caire, R.34, n° d'inventaire JE 27 434.

⁵ Cf. Wallis Budge, E. A. : *An Egyptian Hieroglyphic Dictionary*, New-York, 1978, vol. 1, p. 250.

⁶ Cf. Wallis Budge, E. A. : *op. cit.*, p. 257.

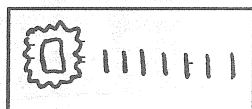
À l'intérieur de chaque glyphe se trouve le nom de la ville (doc. 6). On reconnaît le symbole de la houe de fondation (𓂏) au dessus de la forteresse. Le croquis ne reprend pas les hiéroglyphes à l'intérieur des structures quadrilatères.

Ainsi il y a un monde entre :



c'est-à-dire : "paquet de sept forteresses", ou mieux :

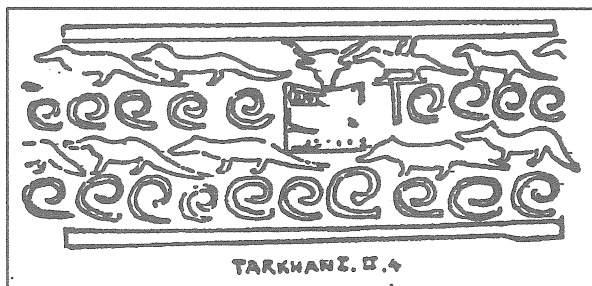
forteresse + forteresse + forteresse + forteresse + forteresse + forteresse + forteresse, et :



, c'est-à-dire : "forteresse 7".

Les bâtons acquièrent une force abstraite car ils peuvent s'appliquer, malgré la duplication, à des quantités équivalentes autres que les forteresses. C'est le cas que l'on peut reconnaître peut-être pour la première fois pour le signe désignant "cent" sur un sceau cylindre, dont la datation doit être antérieure à la palette libyenne.

Ce que l'on voit (doc. 7) est l'empreinte du sceau-cylindre dont la mode aux environs de 3 000 av. J.-C parvint de Mésopotamie en Haute-Égypte. La signification admise est celle d'une chasse. Le signe en spirale répété est identifié à un flotteur⁷. Nous préférons y voir une des premières représentations du nombre "cent". Au registre supérieur on a un paquet de neuf fois (𓂏) ; et au registre inférieur un paquet de dix fois (𓂏). On constate que l'on ne passe pas au signe 𓂏 de la classe d'unité supérieure, la fleur de lotus.



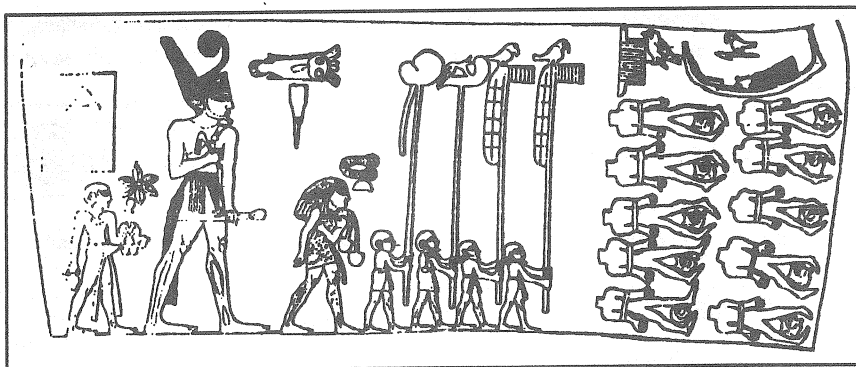
Document n° 7.

Sceau-Cylindre, env. 3 000 av. J.-C.⁸

⁷ Cf. Vandier, J. : *Manuel d'Archéologie égyptienne*, Paris, 1952, Tome I, vol. II, p. 863.

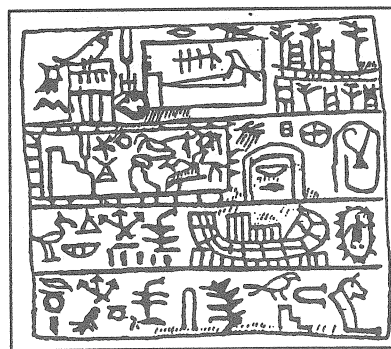
⁸ Cf. Vandier, J. : *op. cit.*, p. 862.

Document n° 8.

Extrait de la Palette du roi Narmer, 1ère dynastie⁹.

On reconnaît (doc. 8) un "paquet" de dix captifs décapités. La force symbolique de la juxtaposition des dix dessins représentant chacun un captif est plus importante que celle d'un "captif" suivi du signe de dix (O).

Au troisième registre à partir du haut (doc. 9), on voit que la partie gauche est occupée par des hiéroglyphes de lecture délicate mais qui fait apparaître | | | | (i. e. 5) sous les symboles ☯ (i. e. le Nord) et ☷ (i. e. le Sud). À moins de considérer qu'il s'agit d'une graphie très défective pour 𓂏 (i. e. province).



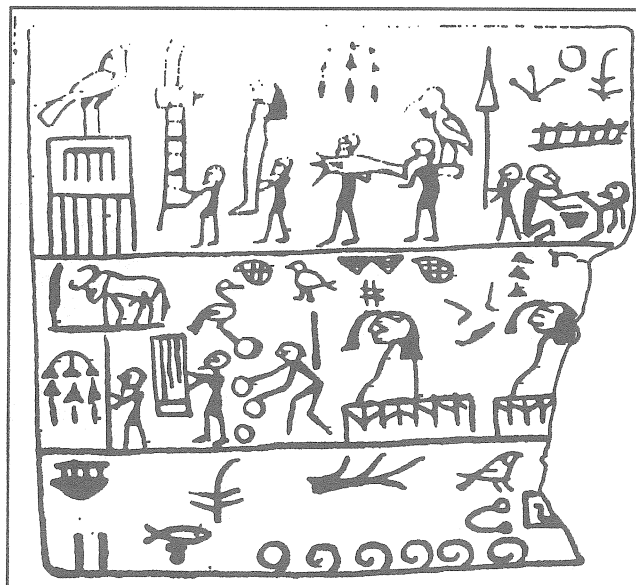
Document n° 9.

Tablette du roi Djer, 1ère dynastie. Musée de Berlin¹⁰.

⁹ D'après Fischer, H. G. : "L'écriture et l'art de l'Égypte ancienne", in *Essais et Conférences du Collège de France*, Paris, 1986, fig. 22, p. 69.

¹⁰ D'après Vandier, J. : *op. cit.*, Tome I, vol. II, p. 841, fig. 562.

Il n'est pas question ici de réfléchir sur la destination de ces "plaquettes". On remarque un trou de suspension en haut à droite, qui confère à l'objet une destination de monstration en sautoir dans un but cérémoniel à l'instar des scènes figurées. Mais il se trouve aussi que Newberry¹¹ évoque des "étiquettes" provenant de coffrets contenant des matières précieuses en l'occurrence des huiles. C'est l'interprétation que l'on peut donner au troisième registre par la traduction suivante¹² : "première qualité d'huile de cèdre, six cent jarres, offertes par le peuple du Sud".



Document n° 10.

Tablette du roi Djer, Ière dynastie, trouvée dans la tombe de Hemaka. Musée de Berlin¹³.
Le rond situé au coin supérieur droit est un trou de suspension.

Ainsi si la traduction de Emery est correcte, nous avons sous les yeux un des plus anciens exemples connus de numération.

Ainsi vers 2 900 avant J.-C. le nombre acquiert son statut. Chaque nombre n'est plus une collection d'unités de même espèce mais une entité ayant sa propre existence avec ses qualités et ses défauts opératoires.

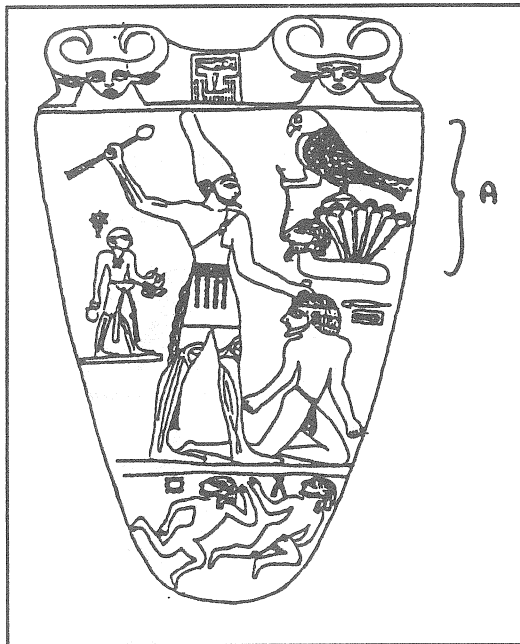
Le principe additif de l'arrangement par paquet devient efficace et narratif.

¹¹ Newberry : *Proceedings of the Society of Biblical Archeology*, 1912, vol. XXXIV, pp. 279-289.

¹² Cf. Emery, W. B. : *Excavations at Saqqarah. The Tomb of Hemaka*, Le Caire, 1938.

¹³ D'après Vandier, J. : *op. cit.*, Tome I, vol. II, p. 845, fig. 565.

A *contrario* de l'explication de Sir A. Gardiner¹⁴, nous pensons expliquer le document n° 11 (A) comme "Horus qui subjugue 6 000 têtes (de la tribu des) "wš" ("ouash") et par extrapolation de 𓆎 , "t3-mḥt", l'Égypte du Nord. Ce groupement, par paquets de 2, 3, 4 voire 6, du signe de la fleur de lotus 𓆎 (i. e. mille) sera une constante de l'Ancien Empire.



Document n° 11.

Palette du roi Naimer, Ière dynastie. Musée du Caire, JE 32 169 = CG 14 716¹⁵.

Avec les statues jubilaires du Pharaon Khasekhem (IIème dynastie, 2 800 av. J.-C.), on a des paquets par 3 et par 4 (doc. 12 et 13, ci-contre). Il s'agit du dénombrement de 47 209 cadavres.

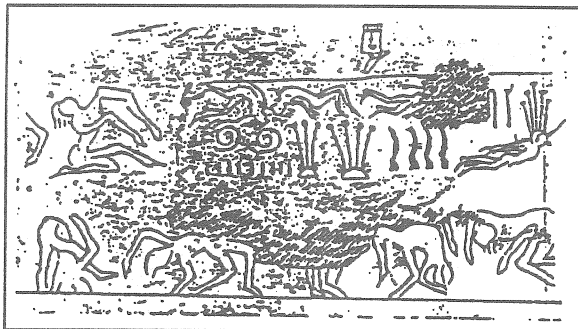
À la Vème dynastie, vers 2 500 av. J.-C., un bas-relief du temple funéraire de Sahouré nous propose un butin d'animaux pris sur les Libyens (doc. 14)¹⁶. Nous avons sélectionné le comptage des 223 000 ânes où l'on remarquera le paquet de 3 000.

¹⁴ Cf. Gardiner, Sir A. : *op. cit.*, p. 7.

¹⁵ Cf. Gardiner, Sir A. : *Egyptian Grammar*, Londres, 1957, p. 7.

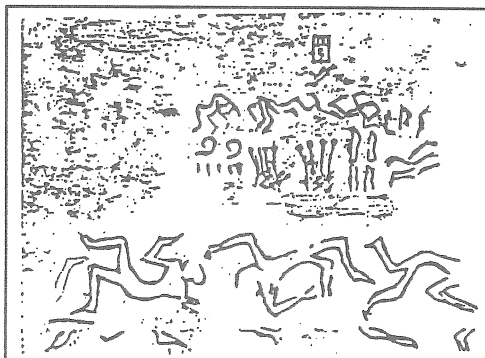
¹⁶ D'après Erman, A. et Ranke, H. : *La Civilisation égyptienne*, Paris, 1963, p. 699, fig. 262.

Documents n° 12.



Statue de Heb-Sed du roi Khasekhem. Ashmolean Museum, Oxford.
À droite, détail de la partie frontale du socle¹⁷.

Documents n° 13.

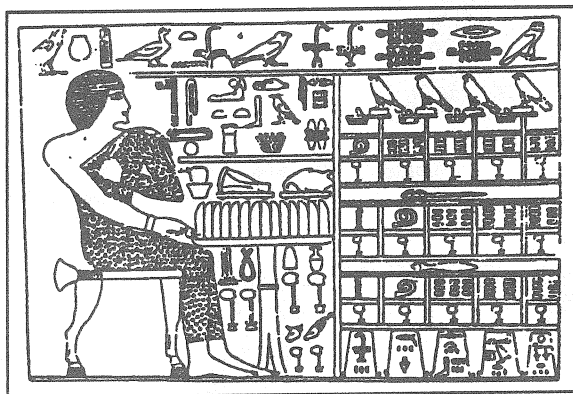


Statue de Heb-Sed du roi Khasekhem. Musée du Caire, n° d'exposition 3 056, P 42 Ouest.
À droite, détail de la partie latérale du socle. Musée du Caire, n° JE 32 161.

¹⁷ D'après Capart, J. : *L'art égyptien, choix de documents*, Bruxelles, 1948, planche 206.

Document n° 14.





Document n° 15.

Stèle d'Iounou, IV^{ème} dynastie, env. 2 700 av. J.-C. Musée d'Hildesheim¹⁸.

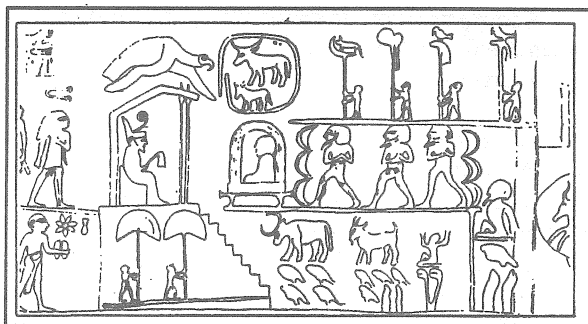
Dans le document 15, le défunt est face au guéridon chargé d'offrandes et à la "pancarte" mentionnant les étoffes et le nombre rituel de la fleur de lotus (mille), pour chacune d'entre elles. Sous le guéridon, figure la formule d'offrande, répétée pendant trois mille ans, de mille pains, de mille cruches de bière, etc. On remarquera l'arrangement vertical :

𓆎	tête de bétail	[1]
𓆏	mille	[2].

Tout est ordonné, qualifié. Que de progrès réalisés depuis les graphies frustes des deux premières dynasties, mais dont la force créatrice fut déterminante pour l'avenir de l'Égypte !

L'ordonnement "déterminant-nombre" ([1]-[2]) est bien attesté depuis la première dynastie et la fameuse tête de massue du roi Naimer si souvent reprise par les manuels en est un témoignage.

¹⁸ D'après Vandier, J. : *op. cit.*, Tome I, vol. II, pp. 756-758.



Document n° 16.

Développement de la tête de massue historiée du Roi Namer, Ière dynastie, provenant de Hierakonpolis. Musée du Caire¹⁹.

La traduction habituelle est : bovidés, 400 000 ; chèvres, 1 422 000 ; prisonniers, 120 000.

On voit bien que le signe du personnage accroupi et les bras levés (à droite de la chèvre), Ψ (pour un million), ne semble pas respecter la décroissance des signes en fonction de la classe unitaire à laquelle ils appartiennent. Ce signe aurait du se trouver devant les têtards, ∇ . D'ailleurs la traduction "million" n'est pas évidente, et il faudrait peut-être retenir la traduction "beaucoup" telle qu'elle est attestée par Gardiner au paragraphe 99 de sa grammaire²⁰. Mais si on s'en tient à la logique des déterminants,

bovidés 400 000, chèvres 420 000,

on peut penser que le personnage accroupi, Ψ , désigne les bouviers et chevriers désespérés, levant les bras au ciel en signe d'affliction, et qu'ils sont 2 000 dans cet état.

D'ailleurs le signe Ψ n'a pas été pris en compte par Champollion²¹ pour marquer la classe de 10^6 , en matière de grands nombres. Il avait déjà noté à son époque que les Égyptiens utilisaient un système de combinaisons multiplicatives pour lesquelles nous donnerons quelques indications plus avant dans l'exposé et sur laquelle nous reviendrons plus longuement dans une prochaine communication, car nous pensons que cette pratique quelque peu liée au positionnement n'a pas retenu toute l'attention souhaitée.

¹⁹ D'après Ifrah, G. : *Histoire universelle des chiffres*, Paris, 1981, p. 220.

²⁰ Cf. Gardiner, Sir A. : *op. cit.*, p. 79. Pour la liste des signes, voir supra.

²¹ Cf. Champollion, J.-F. : *Principes généraux de l'écriture sacrée égyptienne*, rééd., Paris, 1984. De même à l'article "mathématiques" de : Posener, G. et Sauneron, S. et Yoyotte J., *Dictionnaire de la civilisation égyptienne*, Paris, 1959, pp. 163-165.

La rigueur de la pagination des nombres atteint son apogée à la Vème dynastie (2 500 av. J.-C.). Nous le savons par la découverte des archives d'Abousir²².

Le document n° 17 présente des notes relatives au transfert des biens du temple solaire au temple funéraire de Néferirkaré. Sur ce document, les lignes horizontales sept à trente-six correspondent aux trente jours du mois. Il y a des colonnes verticales qui se regroupent en trois parties et en sections par parties.

partie 1 : le revenu est noté ;

partie 2 : les noms de responsables et la provenance des produits sont indiqués ;

partie 3 : un compte spécial concernant la viande est fourni avec les noms des responsables du transport.

Document n° 17.

PLATE XXIV

Feuille de compte mensuel des revenus du temple solaire Aset-Ib-Ré du pharaon Néferirkaré.
Musée du Louvre, E 25 416 C²³.

²² Site, entre Guizah et Saqqarah, des pyramides de la Vème dynastie.

²³ D'après Posener-Kriéger, P. et de Cénival, J.-L. : "The Abousir Papyri", in *Hieratic Papyri in the British Museum*, 5ème série, Londres, 1968.

À l'extrême droite on reconnaîtra :  le nombre (a)

puis :  ce qui est livré (b)

et :  le solde (c).

Pour chaque produit, il y a donc une section verticale comprenant trois colonnes consacrée respectivement aux quantités devant être livrées, aux quantités livrées et au reste.

L'Égypte, en sus de la crue, est ainsi submergée de comptes : journaliers, mensuels, d'offrandes, de rations, de brouillons de compte, de récapitulatifs de comptes. Le dénombrement et la maîtrise des grandes quantités sont indispensables au bon fonctionnement de l'économie pharaonique. Ce qui étonne est la précision quasi maniaque apportée à ces données chiffrées ; ce qui peut induire les esprits peu préparés au vécu de ces temps anciens à considérer tout cela comme le fruit de la pure fantaisie et le sentiment d'une fausse rigueur quand un bas-relief annonce 232 413 pièces de gros bétail²⁴. Un début de réponse (mais le sujet mériterait un long essai) est de signaler qu'aux époques anciennes le compte des années s'effectuait à partir du recensement du gros et du petit bétail. La formule était : "*Commencement de la (tantième) fois du dénombrement du gros et du petit bétail*". On conçoit que la tâche est immense. C'est pourquoi le dénombrement était pratiqué tous les deux ans, puis la pratique comptable s'améliorant, il deviendra annuel à partir de la VI^{ème} dynastie. Ce recensement n'est pas "gratuit". Il est lié à la perception de l'impôt. Avec le problème n° 67 du Papyrus de Rhind²⁵, on a une réminiscence du phénomène sous la forme des taxes perçues par un comptable sur les bêtes confiées à un bouvier.

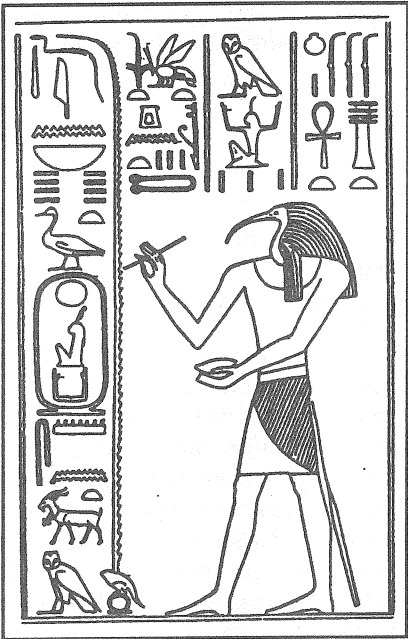
Le comptage en millions et en puissances supérieures prend sa source dans la maîtrise de la superposition de signes spécifiques.

Dans le document n° 18²⁶, le dieu Thot écrit sur une nervure de palme. Les crans sont les aides-mémoire du comptage. Ce signe évoque la multiplicité des années. L'échelle des crans est fichée sur le têtard, qui signifie cent mille, et il est placé lui-même sur le signe , "šnw", qui évoque l'orbe du monde et donc sa totalité.

²⁴ Il s'agit du bas-relief du temple funéraire du pharaon Sahouré, V^{ème} dynastie.

²⁵ Cf. Austin, D. et Guillemot, M. : version française du Papyrus de Rhind, à paraître.

²⁶ D'après de Cénival, J.-L. : *Architecture Universelle. Égypte, époque pharaonique*, Fribourg, 1964, p. 8.



Document n° 18.

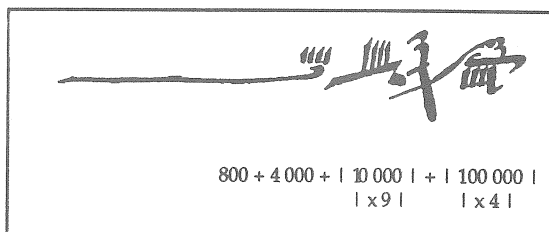
À la très Basse Époque les jeux graphiques relatifs à la maîtrise des grandes quantités est une pratique courante.

heh  , a great but indefinite number;
Copt. 222.
 = one million years in Ptolemaic times.
 = one hundred thousand millions of years.
 = ten millions of millions of years.
 = ten million hundred thousand millions of years.
heh-en-sep                                                                                                                                  



soit : $(100\,000 \times 4) + (10\,000 \times 9) + 4\,800 = 494\,800$.

Ce qui correspond à l'écriture hiératique suivante²⁹ :



Document n° 20.

La grande affaire est là. C'est que les nombres en égyptien participent du monde intellectuel des scribes qui ne s'expriment qu'en hiératique. Et *a priori* ce système est plus lourd à manipuler que les hiéroglyphes. En effet là où pour écrire des nombres en hiéroglyphes nous avons un stock de sept signes :

	1
∩	10
∩	100
∩	1 000
∩	10 000
∩	100 000

1 000 000 (ce nombre, nous avons vu qu'il pose problème), en hiératique, il y a des signes spécifiques pour 10, 20, 30, ... , 100, 200, ... , etc.

De plus avec le temps et les tics graphiques des scribes, les écritures sont très différentes pour un même nombre. Exemple, pour écrire 3 000,

le Papyrus Reisner (env. 1 800 av. J.-C.) donne :

le Papyrus Rhind (env. 1 650 av. J.-C.) donne :

Le "dressage" mathématique s'impose³⁰.

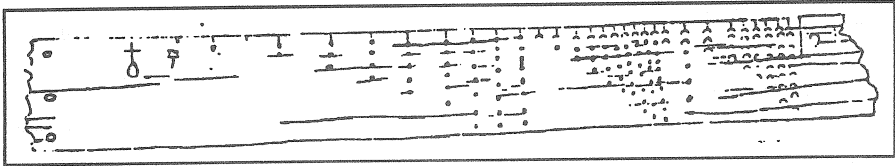
Dans un premier temps, on apprend avec les moyens du bord, sur tout support autre que le papyrus, qui est un produit de grand prix. En l'occurrence, il s'agit, pour le document n° 21, d'un élément de menuiserie. On reconnaît à gauche les trois trous qui furent autant de mortaises. On remarquera un comptage par points.

²⁸ Cf. Grandet, P. : *Le papyrus Harris I*, BM 9999, 2 vol., IFAO, Le Caire, 1994.

²⁹ D'après Ifrah, G. : *Histoire universelle des chiffres*, Paris, 1981, p. 387.

³⁰ Un proverbe égyptien dit que : "L'élève écoute avec son dos".

Document n° 21.



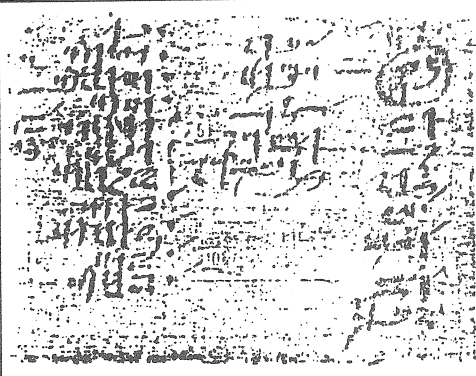
University College, Londres, n° UC 7091.

On a : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 ;
puis : 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

En tête de la liste :  , qui signifie “rien”, “l’absence de”³¹. Quant au signe  , nous ne pouvons, pour l’heure, lui donner un sens par rapport au contexte, bien que nous sachions le traduire.

Avec la partie gauche³² du document n° 22, l’apprenti scribe est face à des nombres. Il n’y a aucun discours. Il s’agit d’un problème de volume et de capacité pour lequel les chercheurs se disputent encore sur la méthode de résolution. Alors à nous de jouer, en essayant de vous transporter quasiment 4 000 ans en arrière.

Document n° 22.



11	12	13	14
	110 	256 	
	13 	512 	
	12 	1024 	8 
1 	11 	85 	
3 	10 	1365 	8 
3 	9 		4 
	8 		16 
	7 		16 
	6 		160 
			80 
			256 

IV. 3

On reconnaît les principes
de la duplication : 256,
 512,
 = 1 024 ;
de la dimidiation : 2 tiers 8,
 1 tiers 4 ;

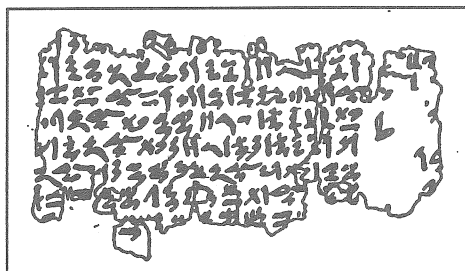
³¹ Cf. Faulkner, R. O. : A concise Dictionary of Middle Egyptian, Oxford, 1986, p. 132. Il donne : nfr n “not”, expression reprise par Gardiner, *op. cit.*, p. 351.
³² D’après Griffith, F. LL. : *Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*, Londres, 1898, planches VII, VIII, problème IV, 3.

mais aussi du passage aux deux tiers³³ : comme le principe du passage
à la classe unitaire supérieure :

$$\sim \begin{array}{l} 256, \\ \frac{2}{3} \quad 85 \frac{1}{3}; \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} 16, \\ 10 \quad 160. \end{array}$$

Enfin il y a le "problème", ou mieux "l'exemple", avec un contenu narratif et un processus algorithmique qui sous entend la connaissance de tables.



Document n° 23.

Papyrus n° 6619. Bodemuseum, Berlin.

Nous avons choisi ce problème "géométrique" du nombre parce qu'il est proche dans le temps du document n° 22, soit vers 1 800 av. J.-C., et qu'il montre ainsi les progrès accomplis par rapport aux années 3 000.

*
* *

Problème "géométrique" du Papyrus 6 619 de Berlin³⁴.

La première ligne est très détériorée et la fin de chaque ligne manque. Les lacunes sont indexées [A], [B], ... , à [G], interprétées entre crochets et explicitées plus bas³⁵. En substance, ce problème s'énonce ainsi :

"Il est donné deux carrés dont la somme des surfaces est 100. La relation entre les deux surfaces est 1 et 2 4. Trouver le côté de chaque carré".

³³ Il existe d'autres fragmentations de la quantité. Ainsi pour la décomposition de $\frac{2}{25}$ on passe par le $\frac{1}{15}$ de 25.

³⁴ Cf. Schack-Schackenburg, H. : *Zeitschrift für ägyptische Sprache*, 38, 1900, pp. 135-140. Référence notée [ZAS] dans ce qui suit.

³⁵ Les restitutions sont dues à l'auteur du présent article.

- Ligne 1 :



ky [A] mī dd(ω) n.k [B] m^c h^c [t 2 4 n]

Autre [exemple (calcul) ...]. S'il est dit à toi [une quantité] dans la quantité [2 4 de]

- Ligne 2 :



h^c t 1 n ky h^c t hω3 dī.k 2ht.ī h^c [t ω^c t nb]

la quantité 1 de l'autre quantité. Veuillez faire que je connaisse la quantité [d'un chacun],

- Ligne 3 :



i^{rt} h3yt m ω^c r nhh hn^c irt 2 4 n ω^c [irt]

pour faire une bande de un jusqu'à "l'éternité" et faire le 2 4 de un, [donc faire] [C]

- Ligne 4 :



2 4 [h^c]t ω^c n ky hpr 2 4 fr.hr.k st [stōty]

le 2 4 de la quantité un, de l'autre apparaît 2 4 et tu feras ceci³⁶ [D]

- Ligne 5 :



fω h^c t ω^c m ω^c ky m 2 4 fr.hr.k ω^c [nb]

La quantité de l'une est un, l'autre est dans 2 4. Tu feras [la somme] de chacun

- Ligne 6 :



hpr 1 2 4 16 fr.hr.k knbt.f hpr m 1 4 fr.hr.k [knbt.f 100]

Il apparaît [E] 1 2 4 16 [F]. Tu feras sa "racine carrée" qui apparaît dans 1 4.

Tu feras [la racine carrée de 100].

³⁶

Ou : la bande, la rayure ; cf. Papyrus de Moscou, problème 6, ligne 2.

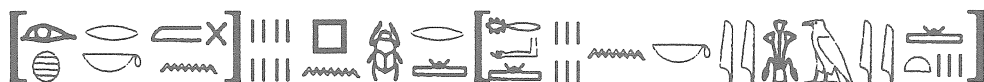
- Ligne 7 :



hpr [10] irt 1 4 pn r gmt 10 hpr 3 8i[wh3yt ωc]

Il apparaît [10]. Faire ce 1 4 jusqu'à trouver 10.
Apparaît la grandeur 8 [G], elle est la bande de l'une.

- Ligne 8 :



[ir.hr.k 2 4 n] 8 pn hpr [3 6 n ky h3yt]

[Tu feras le 2 4 de] ce 8. Il apparaît [la grandeur 6 de l'autre bande].

Pour [A], on peut restituer quelque chose comme : , (tp n

irt), "début pour faire" (exemple) ; , (tp n nls), "début du calcul" (du processus) ;

Pour [B], on peut restituer : , voire  37 ;

Pour [C], comprendre : "un partout", 1×1 ;

Pour [D], un mot commençant par "st" est possible, comme "stwtj" (bande, rayure, cf. M6, ligne 238) ;

Pour [E], Schack-Shakenburg [ZAS] donne : "  " ;

Pour [F], le 4 est en trop ;

Pour [G], il y a glissement de sens de "h 3t", quantité indéterminée, à "3", qui est une notion définie de "grandeur". Cette hypothèse est anéantie dans [ZAS 40, p. 60] où l'auteur abandonne "3" pour "sp",  : "Il apparaît 8 fois".

Le document n° 23 permet de proposer un exemple d'algorithme et de manipulation des quantités.

L'Égyptien pose :

a) 1 et $\frac{3}{4}$ pour l'autre quantité à trouver ; en fait 1 et $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$.

b) Chaque nombre est élevé au carré et il additionne le tout :

$$1^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4}\right)^2 ;$$

37 Cf. Schack-Schackenburg, H. : [ZAS], *op. cit.*, p. 136.

38 I. e. Papyrus de Moscou, problème 6, ligne 2.

pour le 2ème "paquet" l'Égyptien pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\ \backslash \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \\ \backslash \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \end{array} \right. \quad \text{donc } \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 \frac{1}{16} ;$$

et $1 + \frac{1}{2} \frac{1}{16} = 1 \frac{1}{2} \frac{1}{16}$ (cette écriture permet de rendre compte de l'aspect additif du système égyptien).

c) Il extrait la racine carrée ; par commodité nous transposons dans notre propre système³⁹ :

$$1 \frac{1}{2} \frac{1}{16} = \frac{25}{16}, \text{ et } \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}.$$

d) Il extrait la racine carrée de 100, soit 10.

e) Il cherche combien de fois $1 \frac{1}{4}$ est contenu dans 10 ; réponse : 8.

f) Le nombre de base, 1, est multiplié par 8 ; réponse 8.

g) Il pose le $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ de 8 ; réponse : 6. On a défini une proportionnalité, à savoir que 1 est à 8, ce que $\frac{3}{4}$ est à 6.

En termes modernes il s'agit de diviser une surface carrée de cent en deux carrés tels que le côté de l'un soit à celui de l'autre ce que 1 est à $\frac{3}{4}$. Le lieu n'est pas ici de traiter de ce problème car il déborderait du cadre du sujet. Néanmoins, on peut formuler quelques remarques :

1 - Sans donner la méthode d'extraction, le scribe donne $1 \frac{1}{4}$ comme racine carrée de $1 \frac{1}{2} \frac{1}{16}$.

2 - On peut supposer qu'il y a des tables de carrés qui renvoient à des tables de racines et inversement. Ces tables étaient peut-être inspirées des pratiques babyloniennes. Quelquefois les quantités à élever au carré sont complexes. Ainsi au "problème" 42 du Papyrus de Rhind la quantité $8 \frac{2}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{18}$ est multipliée par elle-même, et le résultat $79 \frac{1}{108} \frac{1}{324}$ est donné par la pratique opératoire égyptienne de la duplication qui, en l'occurrence, se révèle efficace par rapport à notre système de distribution des produits qui apparaît fastidieux pour $(a + b + c + d)^2$. Nous donnons (ci-contre) l'algorithme du n° 42.

3 - De plus l'Égyptien à cette époque pense-t-il la mise au carré comme un carré dans la mesure où la géométrie d'arpentage tend vers des surfaces que l'on peut qualifier de linéaires et pour laquelle les surfaces unitaires sont des bandes ? Autrement dit, a-t-il dans sa tête le schéma de la division du carré en quatre régions (schéma A, ci-contre) ? ⁴⁰

³⁹ L'Égyptien utilisait une forme de $\frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{1}$ au même dénominateur, que nous appelons les auxiliaires "rouges", qui auraient donné $\frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{1}$ pour $1 \frac{1}{2} \frac{1}{16} = \frac{25}{16}$.

⁴⁰ La figure du carré est fondamentale mais pour le monde de l'art et de l'architecture.

Algorithme du problème n° quarante-deux⁴¹ :

1	8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
2	17	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	
4	35	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	
$\backslash 8$	71	$\frac{1}{9}$		
$\backslash \frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\backslash \frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
$\backslash \frac{1}{18}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
Total :	79	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{324}$	

Le *setchat* (unité agraire de surface) valant en coudées 100×100 ne doit pas faire illusion : il est le résultat de l'empilement de 100 bandes de 100×1 (schéma B).

Schéma A.

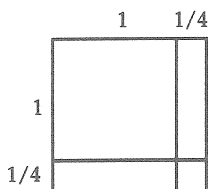
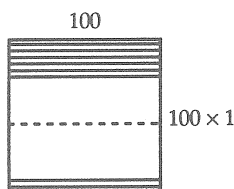


Schéma B.



4 - Et pour des carrés pour lesquels les racines seront connues par approximation, va-t-il mettre en pratique la formule en vigueur en Mésopotamie ? Nous avons bien des exercices de la très Basse Époque qui donnent en algorithmes la formule héronienne mais où est la part de l'Égypte, et de l'influence grecque ?

5 - De plus, il faut noter l'importance des valeurs numériques intermédiaires et de la proportionnalité. Dans l'Égypte ancienne, la valeur et la nature du 1 sont considérables. Il joue quelque peu le rôle de l'inconnu et du modèle.

6 - Enfin il ne faut pas extrapoler et affirmer que : puisque $6^2 + 8^2 = 10^2$, on a affaire à un triplet pythagoricien.

⁴¹ La notion du $\frac{2}{3}$ dans les quantités est fondamentale ; son emploi n'est pas fortuit. Il répond à un système opératoire dont la pertinence est encore à définir.

* L'Égyptien propose un carré. De ce carré, il faut trouver deux carrés dont la somme égale le carré initial et dans un rapport mettant en relation les racines des deux carrés :

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{où } z^2 \text{ est donné, et où } y \text{ est un rapport de } x.$$

* Les Pythagoriens partent de la valeur d'une racine de la somme et définissent que pour $x = m$ (m impair), on a :

$$y = \frac{m^2-1}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{m^2+1}{2}; \quad \text{ainsi :} \quad m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2.$$

On voit que le processus mathématique est le fruit d'une évolution et qu'il convient de ne pas brûler les étapes. Ceci dit, on remarque une "géométrisation" du nombre pratiquée par les Égyptiens et qui se marie bien avec la manipulation des fractions.

Le système opératoire par duplication et dimidation (ou segmentation de la qualité initiale) est lié au système des "quantièmes" et réciproquement. Cette manière de penser les nombres s'oppose radicalement à l'utilisation des décimaux.

Prenons un exemple :

Posons $\sqrt{1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{64}}$; en termes modernes : $\frac{\sqrt{113}}{8}$; en valeurs décimales : $\frac{\sqrt{113}}{8} \approx \frac{10,6301}{8} \approx 1,3287$.

Par application de la formule héronienne $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, il vient :

$$\sqrt{113} = \sqrt{100 + 13} \approx 10 + \frac{13}{20} = 10 + \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20}, \quad \text{et en valeurs égyptiennes,}$$

$$\left(10 \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20}\right) + 8 \text{ donne :}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & 10 & \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{4} \frac{1}{20} \frac{1}{40} \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{40} \frac{1}{80} \\ \backslash \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} \frac{1}{16} \frac{1}{80} \frac{1}{160} \end{array} \text{ soit : } \left(10 \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20}\right) + 8 = 1 \frac{1}{4} \frac{7}{16} \frac{1}{80} \frac{1}{160}.$$

Par les décimales : $\frac{10,6301}{1,3287} \approx 8,0003$; à l'Égyptienne : $\frac{10 \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20}}{1 \frac{1}{4} \frac{1}{16} \frac{1}{80} \frac{1}{160}} = 8.$

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 & \frac{1}{4} \frac{1}{16} \frac{1}{80} \frac{1}{160} \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{40} \frac{1}{80} \\ 4 & 5 & \frac{1}{4} \frac{1}{20} \frac{1}{40} \\ \backslash 8 & 10 & \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{20}. \end{array}$$

Le procédé égyptien est très élégant et les décimaux ne sont pas des "scories" dont il faut toujours à un moment ou à un autre décider du sort.

Enfin quelques mots du bon usage des quantités.

Prenons $5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14}$, extrait du problème 34 du Papyrus de Rhind. Cela correspond à $5 \frac{5}{7}$. Dédoublons. À l'Égyptienne, cela est facile, visuellement.

On obtient : $2 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{14} \frac{1}{28}$. Par contre : $\frac{5}{2} \frac{5}{7} = 2 \frac{6}{7}$, il faut avouer que ce n'est pas évident.

Il est évident qu'un sujet si vaste ne peut être traité globalement et d'une manière exhaustive dans un article qui se veut le compte-rendu d'un atelier. C'est par la force des exemples et le regard porté sur les documents que nous avons travaillé. Appréhender des réalités mathématiques vieilles de 5 000 ans et plus conduit à se heurter à une difficulté majeure : celle d'utiliser des concepts "modernes" pour cerner des "concepts" peut-être voisins mais qui ne sont plus obligatoirement les nôtres. D'où l'immense difficulté du travail de traduction.

Traduire , "amount" "number" ⁴² est très aléatoire si on extrait le mot de son contexte. Et il en va de même pour tous les termes mathématiques égyptiens, c'est ce qui constitue le charme de toute étude. Ceci dit, chacun aura compris que les mathématiques égyptiennes sont tout sauf primitives au sens péjoratif du terme. Elles sont premières au même titre que les mathématiques babyloniennes, qui ont développé d'autres systèmes.

Pour terminer, disons que la conquête du nombre, c'est la démarche qui va du concret vers l'abstrait. De ce fait, l'absence du zéro et de la numération de position peuvent nous fourvoyer dans des jugements péremptoirs. Conscients d'un phénomène qu'ils pressentaient "certains scribes ont eu l'idée de ménager un espace vide à l'endroit où une puissance de 10 manquait" ⁴³ ; tout comme les prémices du positionnement des unités de capacité sont subodorés dans le Papyrus de Rhind.

*
* *
*

⁴² Cf. Gardiner, Sir A. : *op. cit.*, p. 619.

⁴³ Cf. Posener, G., Sauneron, S., Yoyotte, J. : *op. cit.*, p. 164.