NOMBRE ET ALGORITHME DANS L'HISTOIRE DE L'ÉLÈVE.

Ninon GUIGNARD, Françoise HIRSIG.

L'histoire du nombre et l'histoire des algorithmes numériques ont connu à certaines époques des développements parallèles en dépit de leur proximité.

Les Grecs distinguaient l'arithmétique de la logistique, c'est-à-dire l'étude des nombres de la pratique des calculs. De l'Antiquité au Moyen Âge, on effectue les calculs sur des abaques. Les traités d'arithmétiques s'appellent d'ailleurs *abacus*.

Ce n'est qu'à partir de l'introduction des chiffres indo-arabes qu'on commence à parler d'*algorisme*. Cette nouvelle129arbitraire, elle scelle la relation entre une notation du nombre symbolique positionnelle et des procédés de technique de calcul. Ceux-ci permettent de résoudre des opérations portant sur les nombres entiers, puis sur les rationnels grâce à
Fibonacci.

Il est regrettable que l'enseignement néglige aussi souvent l'histoire des mathématiques, car cette approche permettrait de mieux comprendre certains obstacles aux apprentissages. La dichotomie entre l'apprentissage du nombre et du système décimal et l'apprentissage des algorithmes empêche la maîtrise de ces deux domaines chez beaucoup d'élèves.

Le temps imparti à l'exercice des techniques de calcul est au détriment d'activités plus constructives. Au lieu d'être un but en soi, l'apprentissage des techniques pourrait s'inscrire dans un domaine de réflexion au même titre que le nombre. L'algorithmique constituerait un champ conceptuel en relation avec d'autres.

Une recherche, en cours, entreprise auprès d'élèves de 11-12 ans, porte sur la description détaillée des actions nécessaires à la pose en colonnes et au calcul d'une addition.

Les premiers résultats obtenus nous ont amenées à poser l'hypothèse suivante : les difficultés d'énonciation et de compréhension de l'algorithme tiennent autant à la numération qu'à la mémorisation du procédé. De plus, il apparaît que les élèves véhiculent des règles et des savoir-faire transmis par l'enseignement qui ne se justifient pas forcément et qui pourraient bien être la cause d'obstacles. À titre d'exemple, l'ordre des termes d'une addition présentée en ligne est très rarement conservé. Au moment de la mise en colonnes, les nombres sont classés du plus grand au plus petit. L'origine de cette procédure est à trouver dans le souci - de l'enseignant - d'avoir d'emblée le bon nombre de "colonnes" pour favoriser un bon alignement. La façon de décrire l'algorithme d'addition tient plus de la recette mémorisée que d'une compréhension du procédé algorithmique. D'autres observations ont été transmises lors du séminaire, mais il serait beaucoup trop long de les exposer ici.

Dans l'objectif de créer un lien entre nombre et technique de calcul, et de donner du sens aux différentes actions constitutives de l'algorithme, certains maîtres du secteur primaire genevois introduisent dans leur classe la pratique du boulier chinois. C'est pourquoi la deuxième partie de l'atelier lui est consacrée. Les participants sont invités à en comprendre le fonctionnement, à écrire des nombres, puis à effectuer quelques additions et soustractions (encadré ci-contre).

Les participants essaient ensuite d'imaginer les procédés utilisés par les élèves pour découvrir le nombre correspondant à l'activation de toutes les boules.

Voici quelques procédures relevées chez des élèves de 10 à 16 ans, dont la plus élaborée reste loin de la formule du mathématicien : $\dfrac{15\left(10^{13}-1\right)}{9}$.

a) <u>Procédures correctes.</u>

	– – – – – – –	5 5 5 5 5
	– – – – – – –	5 5 5 5 5
... ...	——————— ...	———————
Première procédure :	– – – – – – –	1 1 1 1 1
	– – – – – – –	1 1 1 1 1
	– – – – – – –	1 1 1 1 1
	– – – – – – –	1 1 1 1 1
	– – – – – – –	1 1 1 1 1
	Représentation de l'extrémité droite du boulier.	Représentation de la valeur correspondantes des boules.

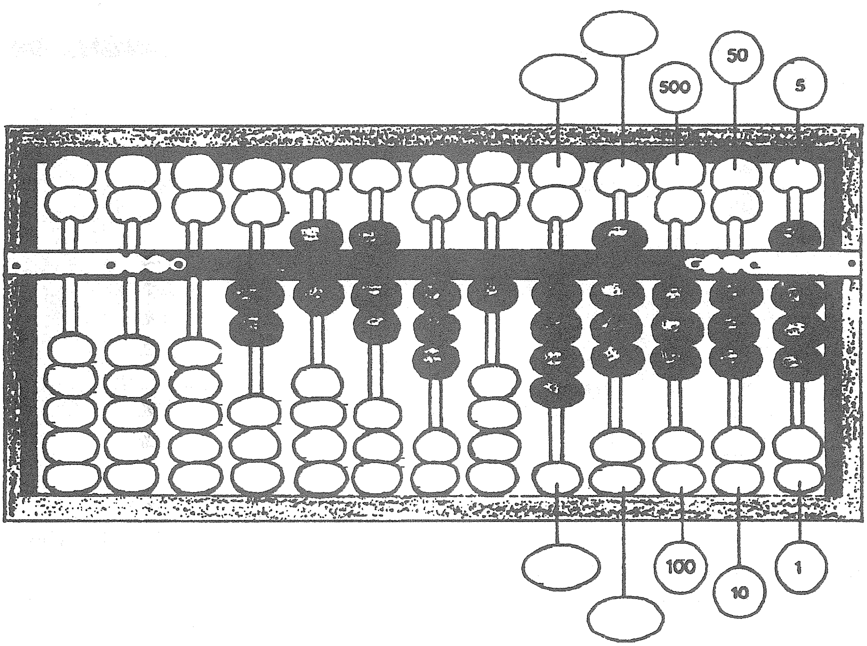
$$(10 + 5) + (100 + 50) + (1000 + 500) + \dots (10^{13} + 5 \,.\, 10^{12}) = 16\,666\,666\,666\,665$$

Le contenu de chaque parenthèse représente la valeur de toutes les boules d'une tige et l'ordre des sommes correspond à l'ordre des tiges.

Valeur des boules et règles d'échange.

La valeur des boules change selon :
- la position "en haut ou en bas"
- la position "droite-gauche".

Chaque boule vaut :



Règles d'échange :

On peut échanger	5	boules de	1	contre	1	boule de	5
et inversement	1	boule de	5	contre	5	boules de	1
On peut échanger	2	boules de	5	contre	1	boule de	10
et inversement	1	boule de	10	contre	2	boules de	5
On peut échanger	5	boules de	10	contre	1	boule de	50
et inversement	1	boule de	50	contre	5	boules de	10

On peut échanger ....

et inversement ....

Une autre procédure consiste à additionner d'abord les boules situées en dessous de la barre horizontale puis celles du dessus :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 50 \\ 500 \\ 5000 \\ + \quad \ldots \end{array} \qquad \text{puis} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ + \quad \ldots \end{array}$$

L'élève procède ensuite à l'addition des deux sommes obtenues.

b) <u>Procédures proches de celles qui viennent d'être décrites, mais incorrectes.</u>

$$\left.\begin{array}{l} 5 \\ 50 \\ 500 \\ 5000 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{ inversion dans la numération de position.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 15 & \\ 150 & \\ 1500 & 15^2 \\ 15000 & 15^3 \\ 150000 & 15^4 \\ \ldots & \ldots \end{array}\right\} \text{ erreur dans la notation des puissances de 10.}$$

On observe également beaucoup d'erreurs dues à une confusion entre algorithmes additifs et algorithmes de numération.

Par exemple, les valeurs des boules sont additionnées mais écrites ensuite non comme des additions mais en numération de position :

150 + 15 ne donne pas 165 mais 15 015.

On trouve aussi une confusion entre les schèmes additifs et multiplicatifs inhérents à la numération de position : au lieu d'être additionnées, les valeurs correspondant aux colonnes sont multipliées entre elles.

Enfin, beaucoup d'élèves, pour qui ces confusions sont dépassées, produisent des erreurs au niveau de la généralisation du procédé.

Ces erreurs, révélatrices d'une construction et d'une compréhension insuffisantes du système de numération de position, produites par des élèves de l'école post-obligatoire sont du même type que celles que nous observons chez les élèves de 7-8 ans. Ceux-ci les surmontent en quelques mois en ce qui concerne la numération jusqu'à 100 ou 1000. Et les enseignants pensent à tort que la généralisation va de soi... Il conviendrait, à tous les niveaux scolaires, de fournir aux élèves des problèmes qui réactivent leurs connaissances du nombre et des algorithmes pour les faire évoluer.

*
* *

Bibliographie.

BRUNET, P.
- *"La science dans l'Antiquité et le Moyen Âge"*, in *Histoire de la science*, Encyclopédie de *La Pléiade*. Paris, 1957 ; Bruxelles, 1963.

CONDORCET, (le Marquis de).
- *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.* Paris, 1799 (Éd. posthume, par les soins de Mme Condorcet). Rééd. ACL-Éd. Paris, 1988.

GOFFINET, D.
- *"Qu'est-ce qu'un algorithme ?"* in *Quadrature*, n° 13, sept.-oct. 1992.

GROUPE MATHÉMATIQUE DU S. R. P. (Service Pédagogique de la Recherche, Direction de l'Instruction Publique, Genève).
- *Sur les pistes de la mathématique.* Document S. R. P., D. I. P. Genève, 1991.

GUILLEMOT, M.
- *"À propos de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires"*, in *Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques de La Rochelle.* IREM de Poitiers, 1988.

De SIEBENTHAL, J.
- *Les mathématiques dans l'Occident médiéval.* Éd. Terre Haute. Lausanne, 1993.

YOUSCHKEVITCH, A. P.
- *Les mathématiques arabes (VIIIè-XVè siècles).* Trad. M. Cazenave & K. Jaouiche. Éd. Vrin. Paris, 1976.

*
* *
*