

RÉFLEXION SUR LA REPRÉSENTATION DE L'INCONNUE.

Jean-Marie NICOLLE.

Introduction : le paradoxe de la recherche.

Comment se représenter exactement ce que l'on ne connaît pas et que l'on recherche ? Dans le *Ménon*, Platon expose ainsi le paradoxe de la recherche :

*"L'homme ne saurait chercher ce qu'il sait, puisqu'il le sait, et qu'en ce cas, il n'a pas besoin de le chercher, ni ce qu'il ne sait pas par la raison qu'il ne sait même pas ce qu'il doit chercher."*¹

En effet, même en supposant qu'il tombe sur ce qu'il cherche, comment reconnaîtra-t-il que c'est ce qu'il cherche puisque ce qu'il cherche lui est inconnu ? Il faut donc que celui qui cherche ait déjà une certaine connaissance de l'inconnu - et donc que l'inconnu ne soit pas absolument inconnu.

On se trouve là dans la situation de l'attente d'un objet dont on sait qu'il existe, mais dont on ignore tout le reste (À quoi ressemble-t-il ? Quand va-t-il se présenter ? Comment le désigner ? etc.). Comment se re-présenter dans l'esprit ce qui n'est pas encore présent de lui-même ?

*
* *
*

¹ Platon, *Ménon*, 80d.

I. - L'évolution du symbolisme algébrique de la fin du XV^{ème} siècle au XVII^{ème} siècle.

L'évolution de l'algèbre dans l'Occident, à la Renaissance, nécessitait de nombreuses inventions dans la formalisation des concepts : la description des opérations se faisait encore complètement par des phrases ; le déclin du latin et la diversité des langues gênaient la communication entre les mathématiciens ; l'invention de l'imprimerie exigeait une unification des symboles.

Comment élaborer une notation algébrique simple, économique, sans équivoque et facile à transmettre ? Voilà le problème auquel les auteurs du XV^{ème} siècle au XVII^{ème} siècle se sont trouvés confrontés. Chacun contribua à sa manière à l'unification de la notation, mais ce ne fut pas une mince affaire...

Pour représenter la difficulté, dressons un tableau de différentes écritures (page ci-contre).

Par ce tableau nous ne prétendons pas donner la liste exhaustive de tous les symboles algébriques de cette époque ; nous avons sélectionné les représentations les plus caractéristiques afin de mener des comparaisons ; ce tableau n'est donc pas un document historique, mais plutôt un outil de réflexion. Les cases blanches ne signifient pas qu'il n'existait aucune expression, mais que celle-ci était entièrement rédigée en mots.

Par un regard vertical, on peut constater globalement que les formules se raccourcissent, les expressions latines disparaissent et les symboles se détachent du support des mots. Partant de mots, on passe à des abréviations, puis à des symboles, et parfois on parvient à des signes. Mais voyons de plus près cette évolution par une lecture horizontale.

Nicolas Chuquet écrit les puissances en exposant et en maîtrise bien la multiplication ; il désigne l'inconnue par "*premier*", son carré par "*champ*", son cube par "*cubiez*" et la puissance 4 par "*champs de champ*" ; dans l'écriture d'une équation, l'inconnue est donc escamotée et seule sa puissance est représentée. On peut déjà remarquer une première difficulté : il y a un risque de confusion entre $2^2 = 4$ et $2^2 = 2 \times 2$.

Stifel introduit en Allemagne les signes + et -. Il parle de "*coss*" pour la chose inconnue, d'où les "nombres cossiques" pour désigner les puissances. Certes, l'inconnue est mieux objectivée que chez Chuquet, mais elle reste peu explicite. Stifel introduit plus tard une lettre pour la seconde inconnue, répétée autant de fois que sa puissance ($A^2 = AA$; $A^3 = AAA$).

AUTEURS	addition	égalité	puissances 1 ^{ère} inconnue	puissances 2 ^{de} inconnue	l'équation : $2x^2 = 3x + 5$
Chuquet (XV ^{ème})	$\bar{p}$		1, 2, 3		2^2 egaulx a $3^1 \bar{p} 5$
Stifel (XVI ^{ème})	+		$\mathfrak{a}, Z, \mathfrak{c}$	A, AA	2 Z æquatus 3 $\mathfrak{a}$ + 5
Cardan (XVI ^{ème})	$\bar{p}$		co, ce, cu	qp^a , ce de qp^a	2 ce equale a 3 co $\bar{p} 5$
Bombelli (XVI ^{ème})	$\bar{p}$		$\downarrow, \downarrow, \downarrow$		$\frac{2}{2}$ equale a $\frac{1}{3} \bar{p} 5$
Stevin (fin XVI ^e)	+		①, ②, ③	sec, sec ②	2 ② æquatus 3 ① + 5
Viète (fin XVI ^e)	+		A, Aq, Ac	E, Eq, Ec	2 in Aq æquatur 3 in A + 5 plano
Neper (? - 1617)	+	$\equiv$	R, Q, C		$2Q \equiv 3R + 5$
Harriot (1631)	+	$\equiv$	a, aa, aaa		$2aa \equiv 3a + 5$
Hérigone (1634)	+	$2 \mid 2$	a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$	b, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$	$2 \mathfrak{a} \ 2 \mid 2 \ 3a + 5p$
Descartes (1637)	+	$\propto$	z, zz, z^3	y, yy, y^3	$2zz \propto 3z + 5$

Cardan parle de "*cosa*" (la chose) pour l'inconnue ; il utilise des abréviations dérivées :

co = "*cosa*" = la chose ;
ce = "*censo*" = le carré ;
cu = "*cubo*" = le cube.

Il perçoit la difficulté pour désigner la seconde inconnue ; il parle alors de " qp^a " = "*quantitas prima*". Ainsi, "ce de qp^a " signifie "carré de la seconde inconnue". On peut relever une seconde difficulté dans l'appellation *première* quantité pour une *seconde* inconnue.

Pour éviter les confusions, Bombelli écrit les puissances avec des exposants dans une cuvette : $\frac{2}{8} \triangleleft 8^2$, car $8 \times^2 \triangleleft 8^2$.

Stevin, lui, écrit les puissances de l'inconnue dans un cercle.

Viète introduit les voyelles pour les inconnues A, E, et des abréviations littérales des puissances :

Aq = A *quadratus* ;

Ac = A *cubus*.

Une nouvelle difficulté surgit pour comprendre ce double mouvement d'une innovation (les voyelles) aussitôt contrée par une régression (l'indication de la puissance par une abréviation). Son écriture est encore rédigée et alourdie par son inspiration géométrique ; il exige de comparer des grandeurs homogènes. Ainsi, dans l'équation $[2 \times^2 = 3 \times + 5]$, il faut préciser la dimension du "5" (*plano*).

Néper reprend le signe $\equiv$ introduit en 1557 par l'Anglais Recorde et utilise des symboles différents pour les différentes puissances de l'inconnue.

Harriot reprend l'idée de Stifel pour la première inconnue :

a, aa, aaa.

Hérigone reprend les lettres de Viète suivies de leur puissance, mais il symbolise l'égalité par un rapport : $2 | 2$.

Descartes, enfin, rassemble les convergences : il prend les dernières lettres de l'alphabet pour désigner l'inconnue ; dans ses *Regulæ*, il joint les lettres aux exposants : a, a², a³. À la suite du succès de sa *Géométrie*, son symbolisme est définitivement adopté en 1679.

On voit dans cette histoire que l'inconnue n'est pas désignée en tant que telle ; elle n'a pas de symbole propre. Cela n'a pas empêché de résoudre des équations dès le deuxième millénaire avant J. C. à Babylone. Mais jusqu'au XVII^{ème} siècle, elle n'est désignée que par les opérations que l'on effectue sur elle (par exemple, l'élévation à une puissance), ce qui ne va pas sans quelques confusions.

Lorsqu'on cherche à désigner plus spécifiquement l'inconnue, on trouve des noms assez indéfinis (*res, cosa, chose, coss...*) qui ne sont utilisés que pour différencier deux inconnues. Par exemple, Cardan distingue "co" et "ce".

L'objet mathématique "inconnue" n'est pas cerné en lui-même : il est pris dans une chaîne d'opérations ; symptomatique est à cet égard

l'appellation "*quantitas prima*" pour la seconde inconnue, chez les Italiens, comme si la véritable première inconnue n'existait pas.

Mais par ailleurs, il arrive qu'on distingue assez bien l'opération de l'objet sur lequel elle s'applique, par exemple le + de l'addition ou le $\sqrt{\quad}$ des racines. On ne peut pas dire non plus que l'inconnue soit considérée comme n'existant pas puisque c'est justement ce que l'on cherche.

Qu'est-ce qui empêchait de nommer l'inconnue ? À quels obstacles épistémologiques se heurtait-on avant Viète et Descartes ?

*
* *

II. - Trois hypothèses explicatives.

a. - La théorie platonicienne de la connaissance.

Pour Platon, connaître, c'est avoir une représentation exacte d'une chose, c'est-à-dire avoir en l'esprit une idée adéquate à l'objet connu. Par quels moyens connaît-on une chose ?

Dans sa *Lettre VII* (342a-e), Platon donne les cinq facteurs de la connaissance : le nom, la définition, la représentation ou figure, la connaissance elle-même, et la chose elle-même. Il illustre ces cinq facteurs par l'exemple du cercle : le nom "cercle", la définition du cercle (ce dont les extrémités se trouvent en tous points à égale distance du centre), la figure du cercle qu'on dessine et qu'on efface (la représentation matérielle), la connaissance du cercle qui est une représentation intellectuelle de l'idée de cercle, mais qui n'est pas le cercle lui-même, et la chose, c'est-à-dire le cercle en soi, l'essence (*ousia*) du cercle. Les quatre premiers facteurs donnent une certaine représentation de la chose, et non la chose elle-même. La connaissance est une certaine approche de l'être, mais elle ne nous donne pas l'être lui-même. L'être est une réalité nécessairement séparée de la représentation qu'on peut s'en donner, car la représentation est une imitation, un reflet, une sorte de copie de l'être représenté.

Cette théorie platonicienne de la connaissance, qui marque les penseurs jusqu'à Galilée, assimile ce qui est connu à ce qui est nommé, défini, figuré matériellement ou intellectuellement. On peut donc connaître ce qui est représentable (des lignes, des nombres, des opérations arithmétiques), mais comment pourrait-on connaître ce qui échappe à la représentation ? Et réciproquement, comment pourrait-on se représenter ce qu'on ne connaît

pas ? C'est pourquoi l'inconnue, bien qu'admise dans le raisonnement, ne peut être désignée. On ne peut donner un nom précis à ce qu'on ne connaît pas. Elle est là, sous-jacente dans l'équation, mais n'apparaîtra que dans le résultat final de l'équation, c'est-à-dire dans sa quantification. C'est ce nombre final qui pourra la présenter.

* * * * *

b. - La ruse de l'analyse.

Cet obstacle est surmonté par Viète et Descartes qui nomment **arbitrairement** des lignes par des lettres. Ils en sont à une tout autre conception du nombre. Comment en sont-ils arrivés là ?

Dans les textes de Pappus d'Alexandrie (IV^e s.ap.J.C.) qui avaient été retrouvés à la fin du XVI^e siècle, on trouve la définition de l'analyse qui permet, lorsque l'on ne connaît pas une chose, de la chercher tout de même grâce à une ruse.

*"L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé"*²

La ruse consiste donc à faire **comme si** l'on avait trouvé la chose cherchée, à en déduire les conséquences, puis à remonter de ces conséquences jusqu'à leur cause, pour découvrir l'inconnue.

Les deux pages de Pappus sur l'analyse ont été exhumées par Viète à la fin du XVI^e siècle. dans son *Introduction à l'art analytique* (1591). Il y définit l'analyse comme "la science de bien trouver dans les mathématiques" et propose "une logistique nouvelle beaucoup plus heureuse que la logistique exposée par les nombres" (la logistique numérale), celle "qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet". C'est la logistique spécieuse.

"Afin que cette méthode soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y et les grandeurs données par les lettres B, G, D ou par d'autres consonnes."

² Pappus d'Alexandrie, *Collection Mathématique*, L. VII.

Viète propose même de remplacer l'appellation "algèbre", d'origine arabe, par "l'art analytique".

Descartes reprend la définition de l'analyse dans sa *Géométrie* de 1637 :

"Voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres..."

On parcourt la difficulté suivant l'ordre de dépendance des lignes les unes par rapport aux autres. On trouve une équation pour chaque ligne inconnue, et, de proche en proche, on réduit toutes les inconnues à des équations connues. Descartes, comme Viète, n'hésite donc pas à donner un nom (une lettre) à une inconnue en faisant comme si elle était connue.

Le nom n'a alors aucun rapport naturel avec la chose ; le nom n'est utile que pour établir des rapports. Peu lui importe qu'on appelle telle réalité a, b, c ou x, y, z . Ce qui importe, ce sont les relations établies entre ces réalités.

L'exigence de **représenter** exactement l'objet de la connaissance a fait place à la nécessité de **construire** l'objet que l'on cherche à connaître. Il n'est pas certain que celui-ci existe a priori ; peut-être n'y a-t-il pas de solution à telle ou telle équation.

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE

Université Claude Bernard - LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

* * * * *

c. - L'obstacle du réalisme.

Les mathématiciens de la Renaissance exerçaient des professions variées (médecin, ingénieur, juriste, comptable...). Leur formation en mathématiques est mal connue. Jusqu'au milieu du XV^{ème} siècle, l'enseignement scientifique de la Faculté des Arts se réduit à un peu d'arithmétique, un peu de géométrie, un peu d'astronomie. Bologne et Cracovie sont à peu près les seules universités où l'enseignement des mathématiques soit organisé, et encore l'est-il en fonction de l'astronomie, voire de l'astrologie. Vers la fin du XV^{ème} siècle et au début du XVI^{ème} siècle, la place de cet enseignement augmente, mais les mathématiciens de la Renaissance développent leurs connaissances surtout en vue d'applications concrètes : comptabilité, cartographie, optique, astronomie, artillerie, architecture... À côté de l'enseignement universitaire, on trouve des écoles professionnelles de comptables répondant à des besoins strictement

IREM de LYON

pratiques. La plupart des ouvrages d'arithmétique de l'époque sont des ouvrages d'arithmétique commerciale.

Derrière les chiffres, il y avait de l'argent. Tant qu'une inconnue n'était pas chiffrée, c'est-à-dire présentifiée par une quantité, elle n'existait que virtuellement. La conception réaliste du nombre, assimilant celui-ci à une quantité, excluait la conception idéaliste du nombre. Derrière l'impossibilité de nommer l'inconnue sinon par l'appellation "chose" ou "*res*", il y avait tout le problème de la réalité des nombres. Aujourd'hui, nous considérons que les nombres ne sont ni des choses ni de purs symboles, mais qu'ils sont des objets caractérisés par leur place dans une fonction.

On peut remarquer d'un point de vue linguistique que la représentation moderne de l'inconnue est plus exactement un signe et non un symbole. Dans un symbole, le rapport entre le signifiant et le signifié reste naturel ; ainsi les deux segments égaux et parallèles inventés par Recorde pour représenter l'égalité manifestent une ressemblance avec l'idée d'égalité entre deux grandeurs. En revanche, dans le signe, le rapport entre le signifiant et le signifié est arbitraire ; ainsi la lettre *x* n'indique par elle-même aucune idée de quantité, ni de chose à découvrir ; elle est un pur signifiant dans la mesure où, choisie par convention vers la fin de l'alphabet, elle renvoie à une absence de signifié précis dans l'esprit de qui la prononce. Elle est une invitation à la recherche ; elle est un signifiant qui fait signe d'aller lui chercher un signifié.

Dans *Les mots et les choses*, M. Foucault montre la rupture déterminante opérée dans l'usage du signe entre la Renaissance et l'âge classique :

*"Au seuil de l'âge classique, le signe cesse d'être une figure du monde ; et il cesse d'être lié à ce qu'il marque par les liens solides et concrets de la ressemblance ou de l'affinité."*³

La ressemblance du signe à ce qu'il représente n'est plus un critère de vérité de ce signe. On comprend rétrospectivement l'incapacité des mathématiciens de la Renaissance à inventer un signe qui ressemble à ce qui est inconnu. Mais,

*"À partir du XVII^e s. [...] il n'y a de signe qu'à partir du moment où se trouve connue la possibilité d'un rapport de substitution entre deux éléments déjà connus."*⁴

C'est-à-dire que la voie est ouverte pour admettre l'arbitraire du signe. M. Foucault récapitule cette réflexion en faisant de cette rupture dans l'usage du signe la condition même de possibilité de la pensée classique :

³ Foucault, M., *Les mots et les choses*, p. 72.

⁴ *Ibid.*, p. 73.

*"[...] si on interroge la pensée classique au niveau de ce qui archéologiquement l'a rendue possible, on s'aperçoit que la dissociation du signe et de la ressemblance au début du XVII^e s. a fait apparaître ces figures nouvelles que sont la probabilité, l'analyse, la combinatoire, le système et la langue universelle, non pas comme des thèmes successifs, s'engendrant ou se chassant les uns les autres, mais comme un réseau unique de nécessités."*⁵

*
* *

Conclusion : Quelques prolongements pédagogiques.

Comment admettre l' X de l'inconnue ? Les difficultés de nos élèves face à tous ces x et y qui jalonnent les équations peuvent en partie être éclairées par cette histoire de la représentation de l'inconnue. Il me semble que ce mystère de l' X peut tomber si les trois conditions psychologiques suivantes sont réunies :

- le dépassement de la peur face à l'inconnu, notamment s'il ne peut être provisoirement désigné ; connaître, c'est apprivoiser, c'est se rendre familier le connu. L'innommable effraie ; c'est le monstrueux, ce dont on ne peut même pas parler.

- le plaisir du jeu avec le signifiant, procuré par les substitutions de noms, l'appellation arbitraire des choses, la création d'expressions inédites ; il faut être un peu poète pour aimer jouer avec les mots.

- la confiance dans l'abstraction, c'est-à-dire la confiance dans les pouvoirs de sa propre raison qui, sans appui sur le réel, se lance dans l'exploration d'une idée dont elle n'entrevoit pas a priori le contenu de vérité.

Dans une séance de programmation sur ordinateur, un élève avait prévu d'appeler "prix" une variable de type entier. L'utilisateur du programme aurait à entrer par exemple la valeur "52" ; «*Mais, Monsieur, croyez-vous que l'ordinateur va savoir qu'il faut mettre "52" dans "prix" ?*» Dans cette projection anthropomorphique sur la machine se manifeste toute l'angoisse de ne pas saisir une réalité sous une idée.

*
* *

⁵ Ibid., p. 77.

Sources bibliographiques.

CARDAN, G.

- *Hieronymi Cardani, Præstantissimi Mathematici, Philosophi, ac Medici, Artis Magnæ, sive de Regulis Algebraicis, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod opus perfectum inscripsit, est in ordine Decimus.* Nüremberg, 1545.

COLLECTIF (sous la direction de R. Taton).

- *Histoire Générale des Sciences*, P. U. F. Paris, 1969.

DESCARTES, R.

- *Regulæ ad directionem ingenii* (Les règles pour la direction de l'esprit). Vers 1628. Édition latine en 1701. Éd. consultée : *Œuvres de Descartes*, publiées par Ch. Adam & P. Tannery, rééd. CNRS/Vrin, Paris, t. X, 1974.

DESCARTES, R.

- *Géométrie*, suite au *Discours de la méthode* (1637). Éd. consultée : *Œuvres de Descartes*, publiées par Ch. Adam & P. Tannery, rééd. CNRS/Vrin, Paris, t. VI, 1982.

FOUCAULT, M.

- *Les mots et les choses*. N. R. F. Gallimard, Paris, 1966.

PLATON.

- *Ménon*, Garnier-Flammarion, Paris, 1966.

PLATON.

- *Lettre VII*, Garnier-Flammarion, Paris, 1966.

RUSSO, F.

- "La constitution de l'algèbre au XVIème siècle", in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, n° 12, Paris, 1959.

*
* *
*