LANGUE DES NOMBRES : MÉMOIRE OU AMNÉSIE ?

Stella BARUK.

Je voudrais commencer par une petite anecdote destinée à illustrer le fait que s'il y a *langue des nombres*, il y a d'abord "langue", tout court, matière première à la nécessité évidente quand elle se trouve, en pays inconnu, faire défaut à propos d'un questionnement consistant à demander son chemin ; mais dont on a tendance à oublier l'existence quand il s'agit de nombres, supposés être un 'langage' universel. [1]

Il y a quelques années de cela, j'avais projeté un voyage en ce qui était encore l'U. R. S. S. ; et, imaginant les quelques échanges qui ne pourraient manquer de se produire entre la touriste que j'allais être et les naturels des lieux, il me parut utile de tenter de m'initier à quelques rudiments de leur langue. Hélas ! En quinze jours, bien qu'armée de la talentueuse méthode *Assimil*, j'avais à peine consommé quelques mots et l'alphabet. En revanche, et grâce à la numérotation des pages je croyais savoir compter. Je n'étais arrivée qu'à la page "trente-six" ; mais en connaissant les mots de un à dix, en ayant repéré leurs racines, et leur mode d'assemblage pour fabriquer les expressions de la dizaine, ça ne paraissait pas trop compliqué. Jugez-en :

odin, un, *diesiatt*, dix, *dva*, deux, *dvatsatt*, vingt, *tri*, trois, *trisatt*, trente, apparemment il suffisait de continuer avec

chetyrê quatre, *pjatj* cinq, *chest* six, *siemj* sept, etc.

et "trente-six", de façon aussi logique que rassurante se disait *trisatt chest*.

Or, un jour où j'avais quelques cartes postales à payer, après une manipulation sur son boulier effectuée à une vitesse qui ne me laissait pas la moindre chance de comprendre ce qui se passait, la préposée m'annonce une somme qui me laisse bouche bée : ça semblait se monter à un nombre de dizaines suivi de "sept", et je n'y comprenais rien ! Petit scandale que la

1 Note des éd. : Le texte de cette conférence est un avant-courrier de l'ouvrage de S. Baruk, *Pour une intelligence du nombre*, à paraître aux éd. du Seuil, coll. "*Science ouverte*".

dame au boulier interprète autrement. La séquence boulier reprend en accéléré, suivie du même énoncé, incompréhensible. Et comme j'avais toujours l'air extrêmement étonné, la dame en me faisant comprendre qu'il fallait s'exécuter inscrit la somme à payer sur un bout de papier.

Et alors, je vois irrévocablement écrit 47. Quarante-sept ! Mais j'aurais dû savoir l'entendre, le comprendre ! Puisque donc, avec trois, *tri*, on "obtenait" *trisatt* pour trente, et que quatre se disait *chetyri*, quarante aurait dû être *"chetyrisatt"*, et non pas ce mot incompréhensible !

Ce mot incompréhensible, c'était *sôrok* !

Aussitôt éprouvé le choc de *sôrok*, et puisque comme nous l'a dit André Cauty, ce sont les irrégularités qui dans une langue sont riches de sens, bien sûr je n'ai cessé de questionner autour de moi tous ceux qui étaient susceptibles de me dire le pourquoi de celle-ci. Personne ne savait. Alors, à peine rentrée, je consulte le merveilleux Menninger-qui-sait-tout [MK], et qui, évidemment, ici encore, savait.

Il commence par faire état de l'importance de quarante[2], chez les Sémites, puisque, pêle-mêle, on le trouve dans *Ali-Baba et les quarante voleurs*, que le Déluge dure quarante jours et quarante nuits, que Moïse attend quarante jours l'apparition de Dieu sur le Sinaï, que Jésus passe quarante jours dans l'angoisse de la tentation, et ainsi de suite.

Depuis, j'ai trouvé dans un livre d'Annemarie Schimmel qui vaut mieux que son titre racoleur, *The mystery of numbers* [SA], de pleines pages racontant les hauts faits de ce quarante : disparition des Pléiades pendant quarante jours, fêtées à leur réapparition (nouvel an babylonien) ; dans l'Ancien Testament, la longueur idéale d'une vie, trois fois quarante ans[3] ; règnes de Salomon et de David, quarante ans ; entre l'Exode et la construction du temple, douze générations de quarante ans ; à Stonehenge[4] : quarante pierres sont arrangées en cercle de quarante pas de diamètre ; dans de nombreux lieux, la grossesse serait comptée comme étant de sept fois quarante jours, et l'Islam considère que le fœtus a une âme après trois fois quarante jours.

Donc, soit : "quarante" a une importance considérable de "nombre rond" ; mais pourquoi *sôrok*, et qu'est-ce que ce mot veut dire ? Après un suspens à peine soutenable, où Menninger explique que quarante a enfanté *quadragésime*, qui est le quarantième dimanche avant le Vendredi saint, qui a donné *quaresima* en italien, d'où notre carême ; et que, en Grèce, le carême est encore appelé *sarakosté* qui provient de *sarakostos*, - qui veut

---

2 Qualifié, dans la traduction anglaise, de *prominent and commonly used round number*.

3 Ce que semble confirmer Madame Jeanne Calment, dont le 120ème anniversaire a été fêté par toute la France le 21 Février 1995.

4 Ville d'Angleterre, datant vraisemblablement de l'âge de bronze (entre ~2000 et ~1500) comportant le plus grand ensemble mégalithique connu et probablement voué au culte solaire.

dire *"de quarante"* (période de) - ; et qu'alors *sôrok* pourrait provenir de *sarak(ostès)...* il tranche : impossible. Impossible pour des raisons phonétiques, ce mot manquant dans les rites de l'église slavone, pourtant directement et fortement influencée par les Grecs. Menninger pense donc que *sôrok* est probablement dérivé de l'ancien norvégien, *serk(r)* "peau". Oui, peau, "fourrure". Que ce mot se fait un chemin dans la langue populaire à travers le commerce des peaux, entre les Slaves et Germains/Norvégiens ou Hommes du Nord : 40 fourrures pour 1 *timbr* (*Zimmer*, chambre) et 5 *timbr* pour 1 *serkr*.

Pourquoi est-ce *sôrok* qui colle à la peau de "quarante" ? Et pourquoi les peaux se comptabilisaient-elles par quarante ? Était-ce, comme on pourrait l'imaginer en lisant des récits d'explorateurs ou d'anthropologues par un croisement de quatre avec dix, ou le contraire, ou encore de deux avec vingt ? On trouve, selon un auteur [DLG] aux opinions par ailleurs "pittoresques"[5] que, en *yoruba*[6] quarante se dit *ogodzi*, qui signifie "cordon", parce que les cauris, coquillages qui servaient de monnaie sont attachés par quarante ; que dans les Îles Marquises, les insulaires attachent le fruit de l'arbre à pain par quatre, d'où *pona*, "nœud" devient le nom de quatre, et comme ils comptent ces nœuds par dizaines, *takau*, qui voulait dire "dix" est devenu le mot désignant quarante.

Arrachons-nous à ce tout petit aperçu de la diversité, de la complexité dans les raisons d'être des désignations de nombres, pour en venir à la problématique que je voulais évoquer à partir de l'anecdote que je vous ai racontée : ce qui colle à la peau non seulement de quarante, mais des nombres d'une manière générale est leur origine supposée concrète, "explication" que parmi bien d'autres vocables, *sôrok*, ou *ogodzi* ont l'air de conforter. Or, précisément, si pour *ogodzi*, je n'en sais encore rien, et qu'il me faut encore quelques temps pour me faire une opinion[7], pour *sôrok*, en revanche, étant donnée ce qu'est l'ignorance générale de ses origines, il est clair que, quelle que soit la raison pour laquelle ce mot l'a emporté sur celui qui, régulièrement, veut dire quarante, personne ne pense à des fourrures en disant quarante-sept. Il est alors amusant d'imaginer la sorte de bégaiement qu'amènerait la nécessité de devoir dire, en russe, "quarante fourrures", bégaiement qui ne peut attirer l'attention et produire l'amusement que de gens avertis, c'est-à-dire, Menninger, et maintenant vous, et moi.

* * * * *

5 Quand il parle des capacités ou incapacités des "sauvages" et de la supériorité en matière de possibilités conceptuelles des aryens.

6 Langue la plus importante du Golfe de Guinée, actuellement parlée par près de 16 millions de personnes ; cf. [MM].

7 Je pense qu'elle sera faite dans le livre qui est en préparation, qui paraîtra en Octobre 96 aux Éditions du Seuil et qui aura comme titre *Pour une intelligence du nombre*.

À quoi sert une langue ? À dire les choses. Ce en quoi elle est antérieure à toute écriture, personne n'en disconviendra, puisque le langage aurait 100 000 ans, l'écriture 5 000 ans. La langue des nombres s'est constituée comme une langue tout court, pour se faire comprendre et pour comprendre autrui. L'idée de "langue *naturelle*" cache en réalité l'existence d'une *faculté* naturelle - l'aptitude au langage - mais qui ne peut s'exercer que

> *"développée dans un cadre culturel comme le montre l'exemple des enfants sauvages chez qui l'aptitude au langage s'atrophie, faute d'exposition à une langue quelconque."* [8]

En effet :

> *"Langue et société sont pour les hommes des réalités inconscientes, l'une et l'autre représentant la nature, si l'on peut dire, le milieu naturel et l'expression naturelle, ceux qui ne peuvent pas être conçus comme autres qu'ils ne sont et qui ne peuvent pas être imaginés absents."* [9]

Comme on pense qu'il y a aujourd'hui au moins 3 000 langues parlées dans le monde, il y a donc eu au moins 3 000 façons de dire les mots de la quantité, façons de dire qui, comme les mots de la langue tout court, pour être "naturelles", vont d'abord être culturelles.

Et là, pour simplifier, deux conceptions prévalent : soit celle du modelage de la pensée par la langue[10], au point que des locuteurs de langues différentes *penseraient* différemment le monde, soit celle d'une expérience cognitive qui, au contraire,

> *"peut être rendue et classée dans n'importe quelle langue existante. Là où il y a des déficiences, la terminologie sera modifiée et amplifiée par des emprunts, des calques, des néologismes, des déplacements sémantiques et finalement par des circonlocutions..[...] Les langues diffèrent essentiellement par ce qu'elles doivent exprimer, et non par ce qu'elles peuvent exprimer. L'hypothèse de données ineffables ou intraduisibles serait une contradiction dans les termes."* [11]

Je ne suis pas une adepte des "justes milieux", mais il me semble qu'en matière de langue des nombres, ce que peut nous apporter le *sôrok*/quarante procède de ces deux caractères en apparence contradictoires, "contradiction" qui pourrait être une parfaite illustration d'une très remarquable spécificité de la langue des nombres ; en attendant de lui en ajouter encore quelques autres.

---

8 Cf. [YM].
9 Benveniste, cité par Marina Yaguello, dans *Les fous du langage.*
10 Hypothèse dite de Sapir et Whorf.
11 Jakobson, cité par Marina Yaguello, *op. cit.*

Ce colloque présente avec beaucoup d'esprit le nombre dans tous ses états ; c'est-à-dire le propose pour ce qui est de ses multiples désignations, dans les meilleurs cas, pourvu d'un adjectif et, dans les pires, phagocyté par ce qui le qualifie. Pour nous, "nombre" tout seul, sans l'appui de termes qui lui apportent soutien, sens et rigueur, semble, dans la pratique mathématique, être tombé en désuétude. Seulement, voilà : c'est un mot de la langue, qui pour autant n'a ni disparu de l'usage courant, ni, semble-t-il, réussi à acquérir une signification "savante" pour tous ceux qui, au moins passés par le collège et le lycée, l'utilisent. Il m'a donc semblé intéressant sinon utile de nous interroger ici, sur la ou les signification(s) que pourrait éventuellement avoir, tout seul, le mot "nombre" ; signification commune, signification "savante", avec comme enjeu de leur confrontation pour nous qui enseignons, la réussite de la tentative consistant à édifier la seconde aux côtés de la première. Réussite dont la condition numéro zéro est, au moins, dans l'identification de l'obstacle qui se révèle premier et dernier : à savoir ce qui est entendu quand le mot "nombre" est prononcé.

Mettons de côté les "profs de maths" et l'infime fraction de population ayant fait carrière dans les mathématiques, pour nous demander ce que "nombre" signifie pour les autres.

Inutile en effet de "construire" quoi que ce soit autour de la notion de nombre, c'est-à-dire de lui adjoindre des adjectifs ou de la sous-entendre en parlant de rationnels ou de réels sans préalablement s'assurer qu'il n'y aura pas d' "autre entendu" - expression que je préfère à *malentendu* - que celui à partir duquel on peut "parler le même langage". Voici donc au moins deux décennies que dans les cours, conférences, et plus particulièrement encore séminaires de formation d'enseignants du primaire je pose la question : qu'est-ce qu'un nombre ?

* * * * *

Les réponses montrent que pratiquement la totalité d'entre eux ont une conception du "nombre" qui est bien celle de la population en général : soit étonnamment loin du compte et très souvent marquée par l' "impérialisme de l'écrit"[12], soit qui date de plusieurs siècles, comme en témoigne cette 'définition' prise dans une *encyclopédie populaire* datant de 1840[13], (document 1) : pour la majorité d'entre eux, en effet, "nombre" veut encore, et toujours, dire "quantité". En voici le texte :

12 Parmi les réponses les plus surprenantes : "c'est un code", "c'est ce qui a au moins deux chiffres", etc.

13 *Abrégé des Sciences et des Arts*, Martial Ardant Frères Éditeurs, Limoges, 1840, p. 204. Les passages en caractères gras sont 'soulignés' par l'auteur de l'article.

Document 1. Une page d'une encyclopédie populaire (1840).

204 MATHÉMATIQUES.

2. *Mathématiques mixtes* qui traitent des propriétés de la quantité appliquée à la matière, telle que l'astronomie, la géographie, la physique, etc.

3. *Mathématiques speculatives* qui contemplent les proportions ; les rapports abstraits des corps.

4. *Mathématiques pratiques* ou leur application aux usages de la vie.

565. L'Arithmétique est la science des nombres, l'art de les calculer.

Calculer, est composer et décomposer les nombres : la base des nombres, est l'unité.

L'unité, est une quantite arbitraire et relative aux opérations que l'on fait ; elle est le terme de comparaison pour toutes les quantités d'une même espèce.

Il y a plusieurs sortes d'unités.

Ainsi : l'*unité monétaire*	est le franc,
l'*unité linéaire*,	le mètre,
l'*unité de surface*,	l'are,
l'*unité de volume*,	le stère,
l'*unité de capacité*,	le litre,
l'*unité de poids*,	le gramme,
l'*unité de temps*,	l'heure.

Nous avons dit qu'un *nombre* était une ou plusieurs unités, et que l'unité était une quantité relative. En effet, 30 francs, 100 mètres, 12 ares, 25 stères, 50 litres, 20 grammes, et 5 heures, sont des nombres, ayant pour base, ou terme de comparaison, une unité différente, suivant qu'on s'occupe de compter de l'argent, de mesurer des longueurs, de calculer des surfaces, d'apprécier des volumes, de juger des capacités, d'examiner des poids, ou enfin d'exprimer un temps passé ou à venir.

L'unité fondamentale de tout système des mesures admises en France, est le *mètre*, qui a été obtenu, par la division de la circonférence de la terre en 40 millions de parties. Chacune de ces parties est appelée mètre. Le mètre, comparé aux anciennes mesures, vaut 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$.

Le mètre quoique mesure de longueur, a servi par ses multiples et par ses diviseurs à former 1. la mesure de longueur dont il est l'unité ; 2. celle de surface, en formant l'*are*, qui est de 100 mètres superficiels, ou un carré dont chaque côté a dix mètres ; 3. celle de volume, en formant le *stère*, qui est un mètre cube ou un mètre appliqué en longueur, largeur et hauteur ; 4. celle de capacité en formant le *litre*, qui est un décimètre cube, ou un dixième de mètre appliqué en longueur, largeur et hauteur, pour faire une capacité ; 5. celle de poids, en formant le *gramme*, qui n'est autre chose que le poids d'un centimètre

"Nous avons dit qu'un **nombre** ***était une ou plusieurs unités****, et* ***que l'unité était une quantité relative****. En effet, 30 francs, 100 mètres, 12 ares, 25 stères, 50 litres, 20 grammes, et 5 heures,* ***sont des nombres****, ayant pour base, ou terme de comparaison, une unité différente, suivant qu'on s'occupe de compter de l'argent, de mesurer des longueurs, de calculer des surfaces, d'apprécier des volumes, de juger des capacités, d'examiner des poids, ou enfin d'exprimer un temps passé ou à venir."*

Mais les encyclopédies "populaires" ne proposent que des notions devenues communes. J'ai la chance de disposer d'une *Arithmétique* de Bezout[14] dont nous dirions aujourd'hui qu'elle a très longtemps fait un succès de librairie. Voici ce qu'on y trouve :

"Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement trois *ou* trois fois, *quatre ou* quatre fois, *s'appelle un* nombre abstrait ; *et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit* quatre livres, cent tonneaux[15], *on l'appelle* nombre concret".

'Problématique' pédagogique dont nous verrons qu'elle est parvenue absolument inchangée dans les classes de ce vingtième siècle finissant, celle du "concret" et de l' "abstrait" : et qui a connu une sorte de 'pic' au moment des "maths modernes", où je me suis souvent entendu dire, alors que je déplorais les 'ensembles' d'objets hétéroclites qui faisaient précocement perdre leur sens aux 'nombres-de', que de mettre une étiquette "5" à un "ensemble" constitué d'un ballon, d'un canard, d'un livre, d'une pomme et d'un bonnet "favorisait l'accès à l'abstraction".

* * * * *

Pour en revenir à la question de la "quantité" en général, et de la façon dont elle a pesé sur les nombres négatifs, on pourrait donc croire qu'il ne s'est rien passé dans l'histoire des mathématiques, par exemple depuis que d'Alembert, dans l'*Encyclopédie* [E], essayait vainement d'interpréter les *"quantités négatives"* sous forme de *"dettes"* ; que cette histoire n'a pas été traversée par les interrogations des mathématiciens, n'a pas été secouée par "la crise des fondements", et n'a pas, après toutes ces péripéties, réussi à donner à la notion de "nombre" forme et visages, parfaitement inconnus à la masse d'une population - "grand public" y compris - pourtant passée par collèges et lycées.

14 Étienne Bezout (1730-1783), académicien des sciences en 1758, et qui a laissé son nom à deux théorèmes, l'un d'arithmétique, l'autre de géométrie analytique. Cf. [BE].

15 Car on parlait encore en livres et tonneaux.

Remettons nous en mémoire les embrouilles[16] qu'entraînent les interprétations "quantitatives" des nombres négatifs : dans l'*Encyclopédie*, dont le premier tome paraît au milieu du XVIIIème siècle, l'embarras qu'ils suscitent ne s'est pas encore dissipé. Alors que l'algèbre a progressé et que la théorie des équations de degré supérieur à 1 pousse de plus en plus à chercher des règles générales de résolution, et donc à accorder le même statut à des nombres réels - interprétables dans la réalité - ou imaginaires - qui, pensait-on, ne pouvaient qu'être imaginés, sans correspondre à des situations concrétisables -, les auteurs de divers articles sont encore englués dans les significations "substantielles" attribuées aux nombres négatifs.

L'article *"NÉGATIF"*, qui est de d'Alembert, commence ainsi :

> "Quantités négatives, en algèbre, *sont celles qui sont affectées du signe " - " et qui sont regardées par plusieurs mathématiciens comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment.* V. QUANTITÉ ."

Si on obtempère, et qu'on "va" à l'article en question, qui est de l'Abbé de la Chapelle, on trouve ceci :

> *"Puis donc que + est le signe de l'addition, et - celui de la soustraction, il s'ensuit qu'il ne faut pour produire une quantité positive, qu'ajouter une quantité réelle à rien : par exemple,* 0 + 3 = + 3 ; et 0 + a = + a. *De même pour produire une quantité négative, il ne faut que retrancher une quantité réelle de* 0 ; *par exemple* 0 - 3 = - 3 ; 0 - a = - a.
>
> *Éclaircissons ceci par un exemple. Supposez que vous n'ayiez point d'argent et que quelqu'un vous donne cent écus ; vous aurez alors cent écus plus que rien, et ce sont ces cent écus qui constituent une quantité positive.*
>
> *Si au contraire vous n'avez point d'argent, et que vous deviez cent écus, vous aurez alors cent écus moins que rien, car vous devez payer ces cent écus pour être dans la condition d'un homme qui n'a rien et qui ne doit rien : cette dette est une quantité négative."*

Si donc, un peu consterné, on retourne à la lecture interrompue de d'Alembert, c'est pour apprendre que

> *"les quantités négatives sont le contraire des positives : où le positif finit, le négatif commence.* Voy. *POSITIF."*

Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. »

---

16 J'ai abordé cet aspect ailleurs : cf. [BS], article *"négatifs (nombres)"*.

Certes ; mais alors, faudrait savoir... Les négatifs sont oui ou non "en dessous de rien" ? On peut déjà se demander ce qu'il en est **à ce propos** de la cohérence, ou de la cohésion des articles de l'*Encyclopédie*. Mais ce n'est pas tout. D'Alembert revient ensuite sur cette controverse qui agitait les mathématiciens, et qui consistait à débattre de l'égalité ou de la non égalité des quotients 1/- 1 et - 1/1. Il la trouve sans raison d'être puisque dit-il, on est constamment amené en algèbre à diviser par - 1, et que d'autre part (avec nos notations) :

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow 1^2 = (-1)^2.$$

De plus, ajoute-t-il, les calculs avec les nombres négatifs sont si simples, qu'il n' y a vraiment pas lieu d'aller chercher des choses très compliquées pour justifier les nombres négatifs, et renvoie de nouveau à l'article "*COURBE*".

Or, effectivement, entre temps, Descartes avait inventé la 'géométrie des coordonnées', et une courbe - ou une droite - dessinée dans le plan pouvait être obtenue - 'traduite' - par une relation entre les deux coordonnées d'un point. Et par exemple, à partir d'une droite d'équation "$y = 5 - x$" telle qu'on peut apprendre à la construire au collège on pourrait dire comme d'Alembert le fait à l'article "*COURBE*" que lorsque les ordonnées sont positives - c'est-à-dire pour x inférieur à 5 - elles appartiennent toutes à la droite, mais quand elles sont négatives aussi ; et qu'on "*voit*" bien que la droite passe sous l'axe des x - soit "*en dessous de zéro*" - pour des valeurs de x supérieures à 5 ; et enfin que des valeurs attribuées à x, et elles-mêmes négatives permettent aussi d'obtenir des points de cette même droite ; qu'elles sont donc de ce fait justifiées, etc.

Tout semble donc aller pour le mieux, et l'interprétation de ces nombres qui ici parviennent à déjouer la "quantité" paraît claire ; sauf que, poursuivant la lecture de l'article "*NÉGATIF*" on constate, tout de même, que ces nombres négatifs restent parfaitement inconfortables. En effet, il y apparaît que :

* si un nombre négatif se trouve être la solution d'un problème, c'est que ce problème est mal posé, par exemple : si on cherche

> "*la valeur d'un nombre x, qui, ajouté à* 100 *fasse* 50, *on aura, par les règles de l'Algèbre,* $x + 100 = 50$ *et* $x = -50$ *; ce qui fait voir que la quantité x est égale à* 50, *et qu'au lieu d'être ajoutée à* 100 *elle doit en être retranchée.*"

Il faut donc transformer l'énoncé

> "*car le signe - que l'on trouve avant une quantité sert à redresser et corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse.*"

* *"Il n' y a donc point réellement et absolument de quantités négatives isolées : - 3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée ; mais si je dis qu'un homme a donné à un autre - 3 écus, cela veut dire en langage intelligible qu'il lui a ôté 3 écus."*

On a du mal à suivre d'Alembert pour ce qui est de l'intelligibilité de cette interprétation. Mais, bien sûr, il n'est pas le seul à peiner. Lazare Carnot (1753-1823) dans des textes bien connus, et postérieurs, dit encore que

> *"avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres"* [17] ;

et en effet, plusieurs années plus tard, l' "impénétrabilité" des négatifs est intacte, les "paradoxes" qu'ils entraînent aussi. Ainsi, dit-il,

> *"- 3 serait moindre que 2, cependant* $(-3)^2$ *serait plus grand que* $(2)^2$ *; c'est-à-dire qu'entre ces deux quantités inégales 2 et - 3 le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et* ***réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.****"* [18]

Dans le commentaire qui est fait par [I] de la citation précédente, il est dit que

> *"Carnot préfère refuser l'extension d'un champ opératoire par une création de nouveaux nombres plutôt que d'abandonner des propriétés usuelles, ici la préservation de la relation d'ordre par élévation au carré."*

Je ne sais pas si on peut expliquer le comportement de Carnot par du 'psychologique' ; il me semble à ce moment-là plus sûr de prendre en compte du 'psycho-linguistique', à savoir toujours cette fameuse interprétation en termes de **quantité**, que j'ai soulignée plus haut, et qui a une longue tradition derrière elle. En effet, à partir du moment où on convoque la "quantité", il est clair qu'il n'est guère possible d'échapper à tout ce qu'elle évoque, en particulier pour ce qu'est le "grand", le "petit", le "rien", les racines "fausses", les "vraies", les "imaginaires", etc. C'est toujours la "quantité" qui fabrique un 'zéro-rien' par soustraction, 'zéro-rien' qui 'adhère' encore suffisamment au zéro-repère pour que l' "en-dessous de zéro" qui permettrait d'y voir clair, et qui est clairement établi par d'Alembert à l'article "*COURBE*" soit hypothéqué par le "moindre que rien" de "*NÉGATIF*" ; et c'est encore elle qui empêche de désolidariser les signes "+" et "-" de ceux de l'addition et de la soustraction.

---

17 Carnot, L. : *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797. Cité par [I].
18 Carnot, L. : *Géométrie de position*, 1803, cité par [I]. C'est moi qui souligne.

La controverse à laquelle il était fait allusion tout à l'heure, et qui *nous* paraît ridicule ou dérisoire, non seulement ne l'est aucunement, mais au contraire est parfaitement révélatrice de ces impasses - qui se donnent sous forme de paradoxes ou de défis à l'entendement - dans lesquelles elle conduit. Quand un quotient de "quantités" de la même nature est tel que le dividende est "plus grand" que le diviseur, il est incontestablement "plus grand que 1", alors que si c'est l'inverse, il est "moindre que 1". Si donc nombres positifs et négatifs sont respectivement interprétés comme "plus que rien", et "moins que rien", alors 1/-1 est le quotient de "grand divisé par petit", et -1/1, "petit divisé par grand", il est donc quasiment évident que, comme le diraient nos élèves, *"ça peut pas faire pareil"*, ce qui, bien sûr frappe d'autant plus les esprits que les quotients de ce que nous appellerions les *valeurs absolues*, eux, *"font pareil"*.

On voit donc pourquoi d'Alembert dont les idées et les explications sont toujours si claires s'enlise dans ces histoires de dettes, se contredit, et finit par renvoyer les nombres négatifs dans les limbes dont ils auraient plus aisément pu sortir en se libérant de la quantité. Comme par exemple lorsque Nicolas Chuquet, trois siècles auparavant, s'il est gêné comme il se doit pour accepter dans les problèmes qu'il résout des solutions nulles ou négatives, utilise avec facilité les nombres négatifs comme exposants pour justifier et généraliser le calcul sur les puissances.

* * * * *

Curieusement, au plus fort des enseignements "formalistes" du début de l'ère dite des "maths modernes", et alors que de nos jours la théorie a donc donné un statut "mathématique" à ces nombres, dans un manuel de terminale des années 70, où la construction de $\mathbb{Z}$ à partir de l'existence de $\mathbb{N}$ est tout ce qu'il y a de rigoureux, et assortie de considérations psychologiques tout à fait intéressantes, voici que le démon du "concret" réapparaît pour souffler que ces "êtres" diaphanes, apparus de façon si satisfaisante ont besoin des semelles de plomb de l'exemple classique du déficit, c'est-à-dire de la dette ... (document 2)[19]. Ce qui nous ramène aux "problèmes précédents", à savoir qu'il faudra comprendre ce que soustraire un déficit veut dire, etc. De plus, dire que "l'ensemble des entiers relatifs doit permettre d'exprimer qu'une différence est négative" présuppose déjà la "relativisation" des termes d'une différence, c'est-à-dire les suppose déjà tous deux *positifs* ; sinon, cette différence - entre deux nombres "sans signe" comme 3 et 5 - ne peut avoir le statut de nombre en tant que tel, et suppose que 2 reste "en attente" d'être soustrait de quelque chose à venir.

19 Cf. [PC, pp. 84-85].

Document 2. Deux pages d'un manuel de Terminale (1968)[20].

3 LES ENTIERS RELATIFS STRUCTURE D'ANNEAU

Construction de l'ensemble des entiers relatifs.
Structure d'anneau.
Division euclidienne et sous-groupe de Z.

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS

37 *Introduction* L'ensemble N des entiers naturels n'est pas un groupe pour l'addition ; étant donné deux entiers naturels a et b, il n'existe pas toujours d'entier naturel x tel que $a = b + x$, autrement dit $a - b$ n'est pas défini quels que soient a et b dans N.

Nous voulons, ici, construire à partir de N un ensemble Z :

- contenant N,

- possédant une addition qui prolonge celle de N,

- qui soit un groupe commutatif pour cette addition,

- dont tout élément soit la différence (c'est-à-dire le résultat de la loi de composition inverse de l'addition) de deux éléments de N.

On ne peut guère, *a priori*, deviner comment construire Z ; on ne sait même pas, théoriquement, si un tel nombre existe ; on a affaire à un problème d'existence et on pourra donc employer la méthode déjà signalée au paragraphe 18 : une première partie de l'étude consistera à déterminer quelle forme peut avoir un tel ensemble ; ensuite, il suffira de vérifier qu'un ensemble trouvé possède les propriétés demandées, ce qui est la seule partie essentielle sur le plan logique, mais ne saurait demander beaucoup d'invention. La première partie peut, comme il a été dit au paragraphe 18, consister en une **analyse** de la situation : on suppose que Z existe, ce qui permet d'étudier les propriétés qu'il doit posséder ; ces propriétés peuvent alors permettre de déterminer un, ou des, Z possibles. Cette méthode est certainement le plus souvent la meilleure pour un esprit exercé aux mathématiques. D'autres esprits préfèrent cependant une méthode moins rigoureuse, plus intuitive, permettant plutôt de deviner ce que peut être l'ensemble cherché ; une telle méthode ne saurait être rejetée : elle n'a pas d'inconvénient logique, puisque la première partie de l'étude n'a pas d'importance logique (tout au moins si on ne cherche pas à établir l'unicité de l'être cherché). Nous proposons ci-dessous d'abord (paragraphe 38) une recherche intuitive de Z tenant compte du fait qu'on a déjà utilisé Z, puis (paragraphe 39) une recherche par analyse du problème. Le lecteur pourra, à son gré, étudier l'une ou l'autre ; mais ensuite, il ne devra pas oublier que l'essentiel est la construction effective de Z et la démonstration que cet ensemble possède bien les propriétés imposées (paragraphe 40).

---

20 Les passages soulignés le sont par l'auteur de l'article ; ceux en caractères gras sont dans le texte original.

38 *Étude intuitive* L'ensemble des entiers relatifs doit permettre d'exprimer qu'une différence est négative, c'est-à-dire, par exemple, qu'un bilan recettes-dépenses est déficitaire ; on peut considérer que l'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble des bilans, mais à condition d'admettre que la seule chose qui importe est la différence entre les dépenses et les recettes, c'est-à-dire que deux couples (r, d) et (r', d') donnent lieu au même bilan si

$$\left\{\begin{matrix} r \geq d \\ r' \geq d', \end{matrix} \quad r - d = r' - d'\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{matrix} r < d \\ r' < d', \end{matrix} \quad d - r = d' - r'\right\}$$

c'est-à-dire, dans les deux cas, si $r + d' = r' + d$.

Si, par abstraction de cette situation, nous passons à une situation mathématique, nous sommes conduits à penser que $\mathbf{Z}$ peut être, non pas l'ensemble $\mathbf{N}^2$ des couples d'entiers naturels (r, d), mais son ensemble quotient par la relation d'équivalence définie par :

$$(r, d) \sim (r', d') \iff r + d' = r' + d.$$

Dans cet ensemble, nous aurons à introduire une addition, qui peut avoir pour modèle la fusion des bilans : la somme des bilans représentés par (r, d) et (r', d') serait le bilan représenté par $(r + r', d + d')$. [...]

Déficit et dette ne peuvent être considérés comme "stables"[21], ils restent en attente d'être soustraits d'un avoir futur ; ce ne saurait, évidemment, être un statut pour un nombre négatif, dont l'existence n'a pas à être suspendue à une opération qui de plus, l'annihilera.

Pourquoi le "nombre-quantité", dont on peut sur ces quelques exemples mesurer les effets dévastateurs pour la compréhension du "nombre" tout court dure-t-il et perdure-t-il comme inchangé à travers les siècles et les avancées théoriques et conceptuelles qui sont acquises aujourd'hui ? Je crois que les raisons pour lesquelles l' "enseignement du nombre", lorsqu'il existe, ne *prend* pas, forment un réseau complexe, d'autant plus indéchiffrable que l'on ne songe pas à le déchiffrer en tant que tel : en simplifiant beaucoup, on peut dire que d'une part la signification de "nombre" que charrie la langue commune est si fortement implantée dans les esprits que si on n'en tient pas compte, elle hypothèque toute possibilité d'en avoir en mathématiques ; et que d'autre part cette signification est nourrie, entretenue par une idéologie depuis très longtemps mise en place, qui a procédé aux amalgames qui assimilent un usage socialisé de la "quantité" à du mathématique ; et ce singulièrement à l'école primaire, qui pratique aujourd'hui encore, mais sous le nom de "mathématiques du citoyen", le vieux "calcul" cher à Jules Ferry.

21 Ou alors ce sont les huissiers qui entrent en scène ...

Argent et consommation sont supposés mettre en relation le jeune enfant avec les "choses de la vie", et donc avec la nécessité de "compter". "Compter" prendra donc appui sur les "choses de la vie", ce qui a, en plus de sa supposée utilité formatrice, le double avantage de fournir pense-t-on "des mathématiques de tous les jours" et d'emboîter le pas à des présupposés psychologiques sur la construction du nombre chez les enfants : ceux qui en appliquant ontogenèse sur phylogenèse réinventent une double théorie des origines, et de ce fait proposent de partir du "concret" pour parvenir à l' "abstrait". Je vous propose à ce sujet de lire le très remarquable *Pour en finir avec les mentalités* de Geoffray Lloyd [LG], ouvrage dans lequel les dégâts causés par Piaget en psychologie et Lévy-Bruhl en sociologie et anthropologie sont mis en parallèle. Malheureusement on n'arrive pas si vite que ça à se débarrasser de "concepts" aussi commodes - commodes pour toutes sortes de raisons, avouables ou non - que la "théorie des stades" pour l'un et la "mentalité primitive" pour l'autre.

* * * * *

Ce qu'on voudrait être un apprentissage du nombre pour l'enfant va donc s'enraciner dans la "quantité". Seulement, la quantité n'est pas le nombre. Si le nombre peut rendre compte de la quantité, la réciproque n'est pas forcément vraie, et je suis tout à fait d'accord avec ce que disait hier Jim Ritter à propos de la fameuse boutade de Kronecker : les entiers naturels ne se trouvent pas plus "dans la nature" que les autres nombres, c'est-à-dire ne sont pas moins une création humaine que les irrationnels ou les transcendants. Thomas Crump dans son *Anthropologie des nombres* [CT] dit que toute société, aussi primitive soit-elle, dispose d'un modèle numérique conscient ou inconscient. Pour ma part, ce que j'appelle le "quantitatif" désigne le "produit de la quantité par une société donnée", c'est-à-dire la façon dont une société dans son ensemble, et à travers les individus qui la constituent, traite la quantité ; traitement qui généralement non seulement n'a rien de mathématique, mais de plus, au-delà des nécessités de vie ou de survie qui sont rarement le fait des enfants qui vont à l'école, a pour domaine tout un 'irrationnel', lié à des 'pulsions' de désirs de biens, de consommations de biens[22].

Parmi les *innombrables* manifestations de cet amalgame auquel procède la pédagogie entre *du* quantitatif et *du* mathématique, examinons celle-ci, en apparence parfaitement anodine. Il s'agit d'une "introduction à la multiplication" en classe de CM_1.

---

22 On pourra voir [BS], articles "*quantitatif*" et "*mathématiques*".

"Bernard, Caroline, Didier, Eugène ont gagné chacun plusieurs agates qu'ils échangent contre des billes de terre en respectant la règle : une agate donne 5 billes de terre." [23]

Donc il est question de compléter et de dire ce que "multiplier par 5" fait obtenir, 3 devant produire 15, 5 devant produire 25, etc.

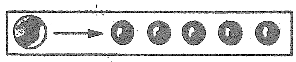
Je voudrais savoir ce que vous pensez de cette introduction à la *multiplication*. Il semble bien que, du fait de cette présentation, avec, par exemple 3 agates équivalant à 15 billes de terre, on ait plutôt :

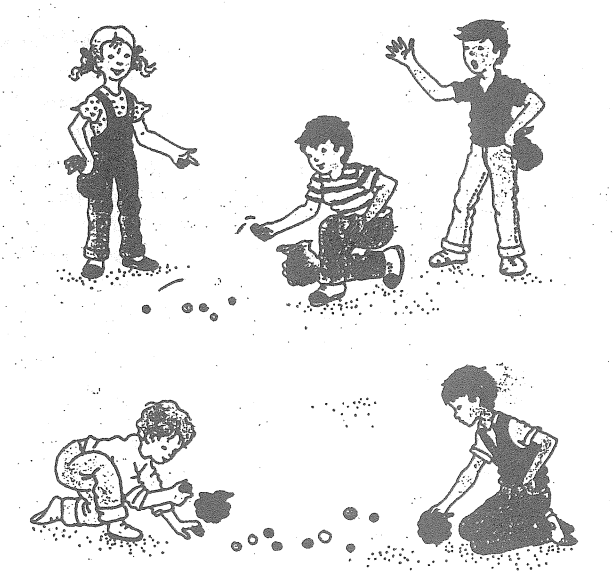
$$3\,a = 15\,b.$$

Document 3. Une page d'un manuel de CE 1 (1986).

60 Multiplier par un nombre

1 Cinq enfants, Alain, Bernard, Caroline, Didier et Eugène ont gagné chacun plusieurs agates. Ils les échangent contre des billes de terre en respectant la règle d'échange :





	agates	billes
a	3	
b	5	
c	2	
d	6	
e	4	

Complète la colonne de droite du tableau ci-contre en y inscrivant le nombre de billes de terre obtenues après échange.

Complète. m____

---

23 Cf. [ER].

Où est la multiplication ? Or, il y en a bien une ! Elle s'effectue sur le 3 qui est multiplié par 5 ; mais sur les objets ? Il n'est pas supposé y en avoir, puisque les enfants *échangent* des "biens", supposés équivalents. C'est-à-dire qu'il se passe ici la même chose que celle qui a lieu quand vous écrivez 2 mètres = 200 centimètres, et d'ailleurs à une *convention implicite* près qui consiste simplement à écarter, précisément, le cas "concret" où un affreux Jojo de service, à qui on dirait que 200 centimètres de ruban sont *la même chose* que 2 mètres se mettrait en mesure de constituer 200 *fois* 1 centimètre en lieu et place des 2 mètres en question.

Donc, dans cette situation dont on essaie de faire croire à l'enfant qu'elle est une situation de réalité, la multiplication ne vaut que pour les nombres, mais non pour ce que j'appelle les *nombres-de*. Les 'nombres-de' ne sont pas des nombres : 5 agates, ce n'est pas un nombre, c'est un nombre **d'agates** ; 3 pommes ce n'est pas un nombre, c'est un nombre **de pommes**. Donc, pour arriver à faire comprendre aux enfants le traitement différent que supposent des entités différentes, il est très important justement de pouvoir procéder à ce que j'appelle un *repérage épistémologique* : en mathématiques, des nombres ; dans la vie courante, des 'nombres-de'. Il y a donc lieu de distinguer la façon dont on va traiter les nombres en mathématiques et les 'nombres-de' dans la vie courante : ce ne sont pas les mêmes conditions de sens.

Alors pourquoi, avec *un* exemple pris parmi tous ceux qui de l'école au collège foisonnent, je vous fais faire ce détour par ce qui est proposé "aux enfants" ? Parce que ce sont eux qui sont les révélateurs de cette confusion qui est dans la tête des adultes, qui, par exemple, acceptent volontiers qu'un enfant à qui on demande ce que valent 7 kilos de pommes de terre à 5 francs le kilo vous donne comme réponse, 5 *fois* 7, sous prétexte que "la multiplication est commutative". Mais ce qui est commutatif, c'est la multiplication en nombres, pas en 'nombres-de' ! Pour un restaurateur, installer 7 fois 5 personnes n'est pas la même chose qu'installer 5 fois 7 personnes, même si ça fait, dans les deux cas, 35 personnes à nourrir. Vous pouvez acheter un objet en 2 versements de 1 000 francs, mais pas en 1 000 versements de 2 francs, etc.

Dans la mesure même où *dire* 5 *fois* 7 **vide** de son sens la réponse à l'énoncé précédent, il ne faut pas s'étonner de voir, à force, les enfants renoncer au sens, et répondre aussi bien "5 + 7", ou "7 + 5", puisqu'on a recours à une situation "concrète" pour ensuite la nier par l'expression qui en sera donnée.

Évidemment, 'nombres-de' et nombres entretiennent des relations[24] ; mais elles seraient d'autant plus claires que la distinction entre eux serait plus clairement définie, surtout à un niveau élémentaire. Bien sûr, les enfants jouent aux billes, et font des échanges. Mais les voir constituer ou

24 [BS], articles *"nombre"* et *"nombre-de"*.

consulter un 'tableau de conversion' serait pour le moins étonnant. Et là je voudrais préciser un aspect 'psychologique' de cette problématique à partir de laquelle j'essaie de mettre en jeu un enseignement du nombre - au sens large - avec les élèves ou les enseignants. Il ne s'agit en aucune façon de prôner une quelconque 'supériorité' des nombres sur les 'nombres-de' ; et si quelques termes utilisés plus haut donnent à penser que la quantité 'étouffe' le nombre, ou l'empêche d'advenir, c'est précisément parce qu'on la sollicite là où elle n'a que faire. Dans leurs domaines respectifs, c'est-à-dire le quantitatif pour la quantité, et le mathématique pour le nombre, aussi bien l'un que l'autre peuvent exciter l'imagination, ou produire de l'invention ; ce qui n'empêche ni la quantité de "poser des problèmes" aux mathématiques, ni les mathématiques de se nourrir et d'extrapoler pour leur propre compte certaines des questions ainsi proposées, d'où les incursions bien connues des mathématiques dans les choses de la vie. Mais plutôt qu'à l'amalgame producteur d'absurdités c'est à leur co-existence pacifique, ou à leur tolérance mutuelle qu'il s'agit d'arriver.

* * * * *

Donc, ce qui est très important à repérer, ce sont ces différences de statut entre nombres et 'nombres-de', et les enfants y sont très sensibles. Mais indépendamment de la pédagogie où cette distinction s'avère aussi essentielle que féconde, j'ai donc l'intention d'examiner ultérieurement ce que pourrait apporter comme éclairage sur l'histoire du nombre l'hypothèse d'une différence de statut entre nombres et 'nombres-de' portée par leurs formulations diverses, formulations qui me paraissent elles-mêmes devoir être distinguées dans des *finalités* différentes. Je crois pour ma part que cette différence de statut a toujours accompagné des entités distinctes, et que l'*idéalité* qu'est un nombre a existé aussitôt qu'il y a eu des *mots* pour dire la "quantité pure" : mots permettant tout autant la spéculation, que l'expression de "quantités" effectives, la réciproque n'étant pas vraie. Des mots donc, d'abord, mais il est vrai, à certaines conditions. Par exemple, l'auteur dont je disais qu'il était pittoresque tout à l'heure, s'exclame ainsi :

> "*Quand on apprend que les Yancos, sur les bords du fleuve des Amazones, pour exprimer 3, disent* Poettarrar-orincoaroac, *on est tenté de s'écrier : Heureusement que leur arithmétique ne va pas plus loin !*" [25]

Effectivement. Les mots du quantitatif, 'originellement', ne désigneraient, au coup par coup, et par des expressions éventuellement hétérogènes entre elles *que ce dont il a besoin.* Pour donner une idée analogique et approximative de ce que je ne peux développer ici, un mot français comme "grosse", par exemple, désigne un quantitatif courant d'une

---

25 Cf. [DLG].

douzaine de douzaines ; mais il n'est rien pour désigner onze douzaines, ou treize douzaines. Et pour en revenir au *sôrok* dont je vous ai raconté l'irruption, s'il s'est substitué à quarante, on ne le retrouve nulle part ailleurs - dans quatre-vingts, ou cent vingts, ou même vingt.

Nulle contradiction, donc, entre l'éventuelle naissance "concrète" d'une désignation, et son utilisation "abstraite" : le matériau langagier, quelle que soit son origine, a vocation à "abstraire", pourvu, dans le cas de la langue des nombres, qu'il obéisse à certaines conditions, comme par exemple que les paroles utilisées soient d'abord douées du pouvoir de 'phagocyter' du "un de plus" indéfiniment réitérable, sans pour autant que juxtaposition ou réitération soient 'matérialisées' par les sons.

Les paroles-nombre constituent une partie d'une langue que j'appelle "langue numérale". Elles peuvent donc 'passer' à l'écriture comme le reste, sans, dans un texte, se distinguer des autres mots. Mais l'invention du chiffrage fait que les mots numéraux sont *les seuls mots* d'une langue à avoir *deux* écritures[26], cette écriture seconde prenant son matériau où elle peut, et s'en débrouillant comme elle peut : encoches, lettres, idéogrammes, ou chiffres à proprement parler. Quand l'écriture s'est trouvée être concentrée dans une façon de signifier économique à son tour, je dirai que le nombre a trouvé sa 'vraie' matière, 'matière à penser', à manipuler : car ce qui est essentiel à la possibilité de penser le nombre dans sa spécificité, qui lui est consubstantiel, c'est la répétition, la réitération, qu'elles mettent en jeu *"une pluralité innombrable ou une grandeur incommensurable"*[27], l'une comme l'autre n'étant nulle part "observables" dans la matérialité d'un dénombrement ou d'une mesure, mais "pensables" comme processus indéfiniment réitéré. Autrement dit, et pour en arriver directement à une de ses caractéristiques essentielles, le nombre est ce qui permet de penser et mettre en jeu l'infini, dont le quantitatif non seulement n'a que faire, mais qui 'secrète' des 'nombres-de' qui sont par définition "à quantité limitée", et qui emprisonnent le pensable dans le vraisemblable.

* * * * *

Que l'écriture chiffrée, - que, par abus de langage j'appelle "langue numérique", par opposition à langue numérale - puis symbolique, ait une "consistance" qui en fait la "matière" du nombre, c'est grâce aux enfants, et aux mathématiciens que j'en ai pris vraiment conscience. Les premiers m'ont donné les preuves de ce que pouvait être son 'étrangeté', sa 'résistance' à exprimer par un matériau *étranger à la langue* des expressions *d'abord* langagières, les seconds ce que désignations, formalisations,

---

26 Parfois plus, quand on dispose, comme avec les chiffres romains, d'un mode de chiffrage peu usité, mais familier, qui a subsisté pour des raisons culturelles.
27 Cf. [CL].

resserrement et économie d'écriture pouvaient représenter comme dynamique de sens, relançant la pensée aussitôt qu'un objet numérique *ne pouvait plus se dire* dans, toujours, cette spécificité du réitérable. Euler, dont ses contemporains disaient qu'il était *"l'analyse incarnée"* et dont Condorcet, dans l'éloge qu'il en fit dit qu'il *"cessa tout à la fois de vivre et de calculer"*[28], en donne d'extraordinaires exemples dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale.* Je ne peux résister à la tentation de vous faire partager la sorte d'émotion que produit cette page où un certain nombre, qui ne peut se concevoir qu'en relation avec une réitération infinie s'incarne littéralement (document 4)[29].

> *"122. Comme on peut prendre à volonté la base* a *pour établir un systême de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que* k *devienne* = 1. *Supposons donc* k = 1 ; *la série trouvée ci-dessus* (art. 116) *deviendra* $a = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c$, *dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour* a *cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre est encore exact. Les logarithmes calculés sur cette base, s'appellent Logarithmes* naturels *ou* hyperboliques, *parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au reste, pour abréger nous désignerons constamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre* e, *qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de* k = 1 ; *c'est-à-dire, que cette lettre* e *exprimera la somme de la série* $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c$ *continuée à l'infini."*

Enfermer un infini d'écriture dans une seule lettre, voici qui est un extraordinaire tremplin pour en inventer - ou en découvrir ? - d'autres. Par exemple $e^e, e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}$, etc. Et de découvrir - ou d'inventer ? -, comble de la réitération, qu'une fonction telle que $f(x) = x^{x^{x^{\cdots}}}$ est définie sur $\left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$. On connaît aussi la très célèbre série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qui avait résisté à Jacques Bernouilli. Après avoir trouvé par intégrales une valeur 'approximative' - soit 1,644 934 - Euler, qui veut une valeur 'exacte' arrive à $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$, "exactitude" qui ne peut manquer de donner à penser.

Il y a donc une "matière" des nombres, qui, même 'élémentairement' constituée de chiffres, inspire aux mathématiciens des jeux combinatoires... innombrables, qui fait dire que le nombre de Champernowne - c'est-à-dire 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ...[30] - est *normal*[31] en base 10, ce qui paraît ...

28 Cf. [BET].
29 Cf. [EL, p. 89].
30 ... obtenu à partir des entiers consécutifs.
31 Chaque chiffre apparaît avec la même fréquence.

Document 4. Une page d'Euler (1748, éd. fr. 1796).

ET LOGARITHMIQUES EN SÉRIES. 89

$\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$. Soit maintenant $\frac{1+x}{1-x}=a$, de maniere que $x=\frac{a-1}{a+1}$, à cauſe de $la=1$, $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c.\right)$; équation qui donne la valeur du nombre k, lorſqu'on connoît celle de la baſe a. Ainſi en faiſant $a=10$, on aura $k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\&c.\right)$; ſérie aſſez convergente, pour qu'on en puiſſe tirer promptement la valeur approchée de k.

122. Comme on peut prendre à volonté la baſe a pour établir un ſyſtême de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que k devienne $=1$. Suppoſons donc $k=1$; la ſérie trouvée ci-deſſus (*art.* 116) deviendra $a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c$, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour a cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre eſt encore exact. Les logarithmes calculés ſur cette baſe, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent repréſenter la quadrature (q) de l'hyperbole. Au reſte, pour abréger nous déſignerons conſtamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre e, qui indiquera par conſéquent la baſe des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de $k=1$; c'eſt-à-dire, que cette lettre e exprimera la ſomme de la ſérie $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c.$ continuée à l'infini.

123. Telle eſt donc la propriété des logarithmes hyperboliques, que celui du nombre $1+\omega=\omega$; ω ſignifiant une quantité infiniment petite, &, comme en vertu de cette propriété, $k=1$, on pourra obtenir les logarithmes hyperboliques de tous les nombres. Ainſi, en écrivant e à la place du nombre trouvé ci-deſſus, on aura toujours $e^z=1+\frac{z}{1}$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. M

Document 5. Une page de *Nice-Matin* (25 octobre 1992).

Le choc anglais

René DABERNAT

Dimanche noir aujourd'hui à Londres : par dizaines de milliers, les mineurs défilent dans la capitale pour réclamer le départ de John Major et une nouvelle politique. Leur colère met soudain en lumière l'ampleur des mutations économiques et sociales outre-Manche. Elle éclaire aussi les problèmes qui se posent au reste du Marché commun et de l'Occident.

Le choc national que provoquent les gueules noires révèle une réalité fondamentale : l'Angleterre passe aujourd'hui, dans la douleur, d'une société industrielle classique (charbon, métallurgie, textiles, chantiers navals) à une société post-industrielle. Celle-ci se fonde sur la technologie, les services et les secteurs de pointe.

Le choc est si rude que, le 21 octobre, le Premier ministre Major n'a évité la censure travailliste que par trois cent vingt voix contre trois cent sept. Huit députés conservateurs ont voté avec l'opposition.

Certes, les mineurs ont obtenu que le gouvernement limite à dix la fermeture de puits charbonniers, au lieu des trente et un prévus. Mais leur drame illustre les difficultés considérables qu'entraîne le passage d'une ère révolue à une ère nouvelle pour l'ensemble des économies occidentales.

Dickens

Les romans de Dickens décrivent comment la révolution industrielle du XVIII^{e} siècle fit la richesse de l'Angleterre. Elle reposait sur le roi charbon (king coal) et le roi coton. Ce dernier tirait sa puissance des ressources de l'empire colonial britannique. L'Inde et l'Egypte fournissaient la matière première textile transformée ensuite dans les usines anglaises.

Aujourd'hui les deux rois ont perdu leur trône. La première victime fut l'industrie cotonnière du Lancashire regroupée autour du port de Liverpool et la grande cité industrielle de Manchester. Elle succomba, durant les années 1930 sous les coups des textiles asiatiques.

L'Asie commençait déjà à s'éveiller. On sait qu'en 1992, elle met aussi en danger bien d'autres secteurs dans toute l'Europe et en Amérique : automobiles, ordinateurs, électronique grand public.

Quant au « king coal », la crise tient en deux chiffres : le Royaume-Uni produisait 226 millions de tonnes de charbon en 1973 ; il n'en produit actuellement que 72.000.

« Émeutes sociales »

Le pétrole, le gaz, l'énergie nucléaire ont renversé le roi charbon, qui perd, chaque année davantage les perles de son ancienne couronne. Or, à la crise des mines et du textile, s'ajoute celle des chantiers navals et de la métallurgie. Bref, l'ancien monde industriel britannique bascule.

En quinze mois, le chômage est passé de 7 % à 10,5 % de la population active. On approche les trois millions de sans emploi surtout, précisément, dans les fiefs traditionnels du roi charbon (« pays noir » autour de Birmingham) et du roi coton au nord-ouest de l'Angleterre.

Les jeunes chômeurs organisent parfois des « émeutes sociales de la misère », comme à Newcastle, Birmingham, Cardiff en septembre 1991. En deux ans, un million et demi de salariés ont perdu leur « job ». La crise n'épargne pas les classes moyennes, techniciens, artisans, commerçants, ouvriers qualifiés, qui, au parti conservateur, relayent les ducs et les propriétaires fonciers.

Les petites et moyennes entreprises, les grandes firmes sont touchées aussi. L'an dernier, 47.777 entreprises ont fermé (cent trente par jour en moyenne), et la baisse du produit intérieur brut a été, avec 2,5 % la plus forte depuis 1931. En deux ans, les ventes de voitures neuves ont chuté de 52 %. Les usines automobiles ne survivent, à peu d'exceptions près, qu'en étant le cheval de Troie du Japon en Europe. Les banlieues populaires de la capitale fourmillent de gens misérables, Européens ou de couleur (Antilles, Asiatiques) souvent désespérés.

Des atouts

Au temps des travaillistes, la superfiscalité, les nationalisations et un coûteux Etat-providence ont fini de déstabiliser l'économie britannique. Mais celle-ci a gardé des atouts.

En plus du pétrole de la mer du Nord, l'Angleterre parie sur les activités du XXI^{e} siècle. Concernant la distribution, les assurances, les communications, l'agro-alimentaire, elle se situe dans le peloton de tête européen.

Mais, à la différence de l'Allemagne, la Grande-Bretagne passe presque sans transition de l'industrie ancienne à l'ère post-industrielle. C'est sur ce point essentiel que John Major va maintenant concentrer ses efforts pour relancer la croissance et créer des emplois.

normal, mais que 0,2 3 5 7 11 13 17 19 23 ...[32] l'est aussi, ce qui semble moins naturel. Eh bien cette même matière, dont ces quelques exemples attestent la ... matérialité, est absolument transparente à la plupart des adultes alphabétisés ; et elle leur paraît si naturelle, que lorsqu'il s'agit d'exprimer de la "quantité", on trouve sous leur plume, et de manière semble-t-il totalement indifférente, tantôt du numérique et tantôt du numéral.

* * * * *

Vous avez ici un exemple[33] tout à fait significatif parmi tous ceux que vous pouvez trouver tous les jours dans la presse et dans toutes sortes de publications de cet arbitraire qui montre à quel point cette écriture n'est pas perçue dans sa spécificité (document 5). En voici deux extraits[34] :

> a) *"Quant au «king coal», la crise tient en deux* ***chiffres*** *: le Royaume-Uni produisait 226,4* ***millions*** *de tonnes de charbon en 1973 ; il n'en produit actuellement que 72.000."* [...]
>
> b) *"Les petites et moyennes entreprises, les grandes firmes sont touchées aussi. L'an dernier, 47.777 entreprises ont fermé (****cent trente*** *par jour en moyenne), et la baisse du produit intérieur brut a été, avec 2,5 %, la plus forte depuis 1931. En* ***deux*** *ans, les ventes de voitures neuves ont chuté de 52 %."* [...]

Ici, en *a* que faut-il comprendre : *"le Royaume-Uni produisait 226,4 millions de tonnes de charbon en 1973 ; il n'en produit actuellement que 72 000"* : 72 000 quoi ? Tonnes, ou millions de tonnes ? À moins qu'il ne s'agisse, ce qui paraît plus vraisemblable, de 72 millions. "Mille", "millions", mots numéraux écrits ou non écrits avec des zéros, et qui finissent eux-mêmes par ne plus savoir où ils en sont. Et en *b*, quelle logique d'écriture fait que *"47 777 entreprises"* sont proposées en numérique, et, *"cent trente"* en numéral ? Est-ce parce qu'on est là entre parenthèses, et qu'on baisse le ton ?

Cette indistinction acquise après coup entre numéral et numérique est particulièrement dommageable quand il s'agit d'enseigner la numération aux enfants. Car on oublie l'antériorité des mots numéraux par rapport à leur écriture chiffrée, et les précautions à prendre pour établir une correspondance entre un capital linguistique qui a ses arbitraires et ses singularités, et un *système*, 'lisse', cohérent, et ordonné.

* * * * *

32 ... obtenu à partir des nombres premiers consécutifs.
33 Exemple qui m'a été fourni et commenté par Jean-Marc Lévy-Leblond.
34 Les passages en caractères gras sont 'soulignés' par l'auteur du présent article.

Un exemple particulièrement frappant de cette non-conscience de ce que représente l'irruption de l'écriture chiffrée décimale dans un contexte où elle n'est *pas encore* un donné allant de soi - exemple qui présente certaines analogies avec ce qui se passe avec les enfants - m'a été fourni par une traduction en français d'une version latine du *Calcul indien* d'al-Khwarizmi[35]. On dispose en termes ordinaires d'un bilingue, latin et français. Mais en termes d'écriture des nombres, je dirais que le texte latin (voir le document 6a, en double page suivante) nous propose un *trilingue*, à savoir : dans une mise en scène où, par la grâce de son traducteur, al-Khwarizmi va expliquer les avantages de ce nouveau calcul, figurent le numéral latin, le numérique contemporain en chiffres romains, et celui du "nouveau calcul", indissociable d'une *nouvelle* écriture qui en est la condition nécessaire, celle bien sûr des chiffres *inconnus jusqu'alors* des interlocuteurs auxquels s'adresse al-Khwarizmi, chiffres dont on dira plus tard qu'ils sont arabes.

On pourra donc déjà constater (dans le document 6a) que le mélange numérique/numéral latin n'est pas moins arbitraire qu'aujourd'hui : les 'petits nombres' comme *unum, duo* et *tria* sont en numéral, - comme presque toujours dans la plupart des textes de problèmes aujourd'hui - mais aussi des 'grands' : voyez ligne 6 (doc. 6a) un "XC" et ligne 14 (6a), un *nonaginta* ; et toujours ligne 14 (6a), où un "X" précède *nonaginta,* et ligne 17 (6a), avec un "*mille* in IX M", la tranquille coexistence des deux manières.

Mais c'est donc la traduction qui est révélatrice de la transparence dont je parlais tout à l'heure, transparence qui rend le texte tout à fait ... opaque (document 6b) ; car ce trilingue d'écriture des nombres est restitué par un *bilingue* qui, je vous le disais tout à l'heure, en faisant comme si l'histoire de l'humanité s'était écrite *depuis toujours* dans le système décimal, me fait penser à tous ceux qui dans leur enseignement procèdent comme si ils disposaient*depuis toujours* de cette écriture, alors qu'elle est *seconde* par rapport à l'écriture numérale, elle-même seconde par rapport à la parole.

Dans ce premier paragraphe al-Khwarizmi rappelle donc pour situer son propos ce qu'est le mode d'écriture présent, soit X pour "dix", XX pour "vingt", C pour "cent", CC, puis CCC, pour "deux cents", "trois cents", etc. Et c'est *par opposition* que cette écriture familière, rassurante, devra apparaître incommode là où la nouvelle, certes inconnue, voire étrange, s'avérera néanmoins d'un naturel "astucieux" et d'un maniement aisé ; maniement dont al-Khwarizmi va précisément expliquer les principes, préconiser l'emploi et louer la facilité. Or que voit-on dans la traduction française, qui par ailleurs reproduit fidèlement le mélange de numérique et de numéral ... : X remplacé par 10, XX par 20, C par 100, etc. L'arrivée révolutionnaire et fracassante du "*petit cercle en ressemblance avec la lettre O*" ne fait alors même pas l'effet d'un pétard mouillé : *circulum*, y a rien à voir, rien à savoir, puisqu'on sait déjà.

35 Cf. [KM].

Document 6a[36]. Deux pages d'al-Khwarizmi (version latine du XIIème siècle).

"Inveni, inquit Algorizmi, omne quod potest dici ex numero et esse quicquid excedit unum usque in IX, id est quod est inter IX et unum. Id est duplicatur unum et fiunt duo, et triplicatur idem unum fiuntque tria, et sic in ceteris usque in IX. Deinde ponuntur **X in loco unius**, et duplicantur X ac triplicantur quemadmodum factum est de uno, fiuntque ex eorum **duplicatione XX, ex triplicatione XXX, et ita usque ad XC**. Post hec redeunt C in loco unius, et duplicantur ibi atque triplicantur quemadmodum factum est de uno et X, efficiunturque ex eis CC et CCC et cetera usque in DCCCC. Rursum ponuntur mille in loco unius, et duplicando et triplicando ut diximus, fiunt ex eis II milia et III et cetera usque in infinitum numerum secundum hunc modum. Et inveni quod operati sunt Yndi ex his differentiis. Quarum prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et IX, secunda differentia decenorum, in qua duplicatur vel triplicatur quicquid est a **X in nonaginta**, tercia differentia centenorum, in qua duplicatur vel triplicatur quicquid est a C in DCCCC. Quarta vero est differentia milium, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a **mille in IX M**. Quinta differentia est $\overline{X}$ hoc modo : quocienscumque ascenderit numerus adduntur differentie. Erit dispositio numeri ita : omne unum quod fuerit in superiori differentia erit in inferiori que est ante ipsam X, et quod fuerit X in inferiori erit unum in superiori que precedit eam. Et erit initium differentiarum in dextera scriptoris, et hec erit prima earum, et ipsa posita est unitatibus. Cum autem ponerentur **X in loco unius** et fierent in secunda differentia, essetque figura eorum figura unius, necesse fuit eis figura decenorum eo quod similis esset figure unius, ut scirent per eam quod essent X. **Preposuerunt igitur ei unam differentiam et posuerunt in ea circulum parvulum in similitudine O litere, ut per hoc scirent quod differentia unitatum esset vacua et nichil numeri esset in ea preter circulum parvulum quem diximus occupare eam, et ostenderent quod numerus qui est in sequenti differentia esset decenus et quod hec esset differentia secunda que est differentia decenorum. Et posuerunt post circulum in predicta differentia secunda quicquid voluerunt ex numero decenorum de hoc quod est inter X et XC. Et he sunt figure decenorum : figura X est hec 10, figura XX, 20, et similiter figura XXX est ita 30.** Et ita usque ad IX erit scilicet circulus in prima differentia et caracter pertinens ad ipsum numerum in secunda differentia.

36 Les passages en gras sont 'soulignés' par l'auteur du présent article.

Document 6b[37]. Deux pages d'al-Khwarizmi (traduction française).

"J'ai trouvé, dit al-Khwarizmi, tout ce qui peut être dit par le nombre et qu'existe tout ce qui excède un jusque 9, c'est-à-dire qui est entre 9 et un. C'est-à-dire qu'on double un et on obtient deux, on triple le même un et on obtient ***trois****, et ainsi de suite jusque 9. Ensuite, on pose* ***10 à la place de un****, et on double 10 et on triple comme on l'a fait pour un, et on obtient* ***20 de ce doublement, 30 de ce triplement, et ainsi jusque 90****. Après cela arrivent 100 à la place de un, et on double et on triple comme on l'a fait pour un et pour 10, et on obtient de ces opérations 200 et 300 et ainsi de suite jusque 900. On pose de nouveau mille à la place de un, et en doublant et triplant comme nous l'avons dit, on obtient de ces opérations 2 milliers et 3 milliers et ainsi de suite jusqu'un nombre infini selon cette manière. Et j'ai trouvé que les Indiens ont opéré à partir de ces positions. Dans celles-ci, la première position est celle des unités, où est doublé et triplé tout ce qui est entre un et 9, la seconde position celle des dizaines, où est doublé ou triplé tout ce qui est de* ***10 à quatre-vingt-dix****, la troisième position celle des centaines, où est doublé ou triplé tout ce qui est de 100 à 900. La quatrième position est celle des milliers, où est doublé et triplé tout ce qui est de* ***mille à 9 000****. La cinquième position est* ***10 000*** *de cette manière : autant de fois que croît un nombre s'ajoutent les positions. La disposition d'un nombre sera la suivante : tout nombre qui se trouve en position supérieure sera 10 dans la position inférieure qui se trouve avant la première, et tout ce qui est 10 en position inférieure sera un en position supérieure qui la précède. Et le début des positions sera à la droite de celui qui écrit, et ce sera la première, posée elle-même pour les unités. Mais comme on pose* ***10 à la place de un*** *et qu'ils arrivent en seconde position, et que leur représentation est la représentation de un, une représentation de dizaines a été pour eux nécessaire puisqu'elle était semblable à la représentation de un, afin que l'on sache par elle qu'il s'agissait de 10.* ***Ils ont donc posé devant celle-ci une position et posé en elle un petit cercle en ressemblance avec la lettre O, pour savoir par là que la position des unités était vide, qu'il n'y avait en elle rien d'un nombre sinon ce petit cercle dont nous avons dit qu'il l'occupait, et pour montrer que le nombre qui se trouve en position suivante était une dizaine et que c'était là la seconde position qui est la position des dizaines. Et ils ont posé après le zéro dans la seconde position susdite ce qu'ils ont voulu de nombre de dizaines qui est entre 10 et 90. Et les représentations des dizaines sont celles-ci : la représentation de dix est 10, celle de vingt 20, et de même la représentation de trente est 30.*** *Et ainsi jusque 9 il y aura un zéro en première position et un chiffre convenant au nombre lui-même en seconde position.*

[37] Les passages en gras sont 'soulignés' par l'auteur du présent article, et renvoient aux passages latins soulignés dans le document 6a.

Hoc autem sciendum est quod caracter qui significat in prima differentia unum in secunda significat X, in tercia C, atque in quarta $\bar{I}$. Et similiter qui significat in prima differentia duo in secunda significat XX, et in tercia CC, et in quarta $\bar{I}\,\bar{I}$. Et sic de ceteris intellige ; nos autem redeamus ad librum. Post differentiam decenorum sequitur differentia centenorum in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a C in DCCCC, et ejus figura est sicut figura unius in tercia differentia posita ita 100, et figura ducentorum est sicut figura duorum posita similiter in tercia differentia ita 200."

Or il faut savoir qu'un chiffre qui signifie un en première position signifie 10 en seconde, 100 en troisième, 1 000 en quatrième. Et de même un chiffre qui signifie deux en première position signifie 20 en seconde, 200 en troisième, 2 000 en quatrième. Comprends ainsi pour le reste, mais nous, revenons au livre. Après la position des dizaines suit la position des centaines où est doublé et triplé tout ce qui est de 100 à 900, et sa représentation est comme la représentation d'un un posé en troisième position ainsi : 100, et la représentation de deux cents est comme la représentation de deux posée de même en troisième position ainsi : 200."

Et ici, le traducteur, qui avait jusqu'alors respecté le mélange numérique/numéral, et tout de même gêné de devoir livrer un texte qui va devenir complètement tautologique, est amené à travestir le texte original : au lieu - ligne 36 (doc. 6b) - de *la représentation de X est 10,* qui sur la lancée précédente l'aurait amené à écrire "la représentation de 10 est 10", il traduit *"la représentation de dix est 10"*, ce qui court-circuite quelque chose d'essentiel : remplacement, non d'un numéral par un numérique, mais d'un numérique par un autre. Et aussitôt l'écueil dépassé, revient - lignes 41 à 44, ci-dessus - à "un" qui signifie 10 en seconde position, 100 en troisième, expliquant le non connu par lui-même, perdant l'apport du nouveau, et le sens de ces pages, tant pour qui les aurait lues hier, que pour qui les lirait aujourd'hui en voulant comprendre de quoi hier était fait.

On voit que l'amnésie de ce qu'a pu être pour soi l'apprentissage d'un savoir peut empêcher de reconnaître ce que peut être dans l'histoire une rupture dans le savoir, c'est-à-dire un essentiel moment de *son* histoire, et de *sa* spécificité. Et il me semble, pour conclure, que si nous étions attentifs aux réactions de nos élèves, quelque chose de cette mémoire perdue des nombres pourrait leur être restituée, en même temps que leur attrait.

*

* *

Bibliographie.

[BE] Bezout, É.
- *Arithmétique de Bezout, avec des notes nombreuses, par Prince, professeur de mathématiques.* Gauthier Frères et Cie, Libraires. Paris, M.DCCC.XXXIII.

[BET] Bell, E. T.
- *Men of Mathematics*. Simon anf Schuster. New-York, 1965.

[BS] Baruk, S.
- *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Éd. Seuil. Paris, 1995.

[CL] Couturat, L.
- *De l'infini mathématique*. Lib. Blanchard. Paris, 1973.

[CT] Crump, Th.
- *Anthropologie des nombres*. Éd. Seuil, Paris,1995.

[DLG] Dupasquier, L.-G.
- *Le développement de la notion de nombre.* Éd. Attinger Frères. Paris, 1921.

[E] D'Alembert, J. Le Rond, Bossut, l'abbé, & alii.
- *Encyclopédie méthodique, Mathématiques,* par MM d'Alembert, l'abbé Bossut, De La Lande, le marquis de Condorcet, etc. (1784-1789). Rééd. du Bicentenaire, fac-similé, ACL Éditions. Paris, 1987.

[EL] Euler, L.
- *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1748, éd. fr. 1796). Rééd. en fac-similé, ACL Éditions. Paris, 1987.

[ER] Eiler, R.
- *Math et Calcul, CE1*. Éd. Hachette. Paris, 1986.

[KM] Al-Khwarizmi, M. Ibn Musa.
- *Le calcul indien (Algorismus)*. Versions latines du XIIème siècle et trad. fr. par André Allard. Lib. Blanchard. Paris, 1992.

[I] IREM, Groupe *Épistémologie et Histoire.*
- *Mathématiques au fil des âges*. Éd. Bordas. Paris, 1987.

[LG] Lloyd, G.
- *Pour en finir avec les mentalités*. Éd. *La Découverte*, Paris, 1993.

[MK] Menninger, K.
- *Number Words and Number Symbols*. MIT Press, 1969 (original allemand, 1958).

[MM] Malherbe, M.
- *Les langages de l'humanité*. Éd. Laffont. Paris, 1995.

[PC] Pair, C.
- *Mathématiques* (Terminale C, Tome 1). Éd. Bordas. Paris, 1968.

[SA] Schimmel, A.
- *The mystery of numbers*. Oxford University Press, 1993.

[YM] Yaguello, M.
- *Les fous du langage*. Éd. Seuil. Paris, 1984.

*

* *

*