

DE LA THÉORIE DES PROPORTIONS À LA THÉORIE DES NOMBRES RÉELS.

Éliane COUSQUER.

Lors des journées de Cherbourg, j'ai présenté un atelier où nous avons commenté des textes consacrés essentiellement à la théorie des proportions, cadre dans lequel ont été traitées pendant deux mille ans, les questions qui pour nous relèvent des nombres réels. Depuis, en formation initiale et en formation continue, j'ai eu l'occasion d'approfondir ce thème et j'ai utilisé ces mêmes textes. Je présente donc ici une version plus rédigée du travail que j'avais fait à Cherbourg, les textes utilisés seront largement cités et non pas reproduits.

*
* * *

I. - Un problème d'enseignement.

I.1. - Qu'est ce qu'un nombre réel ?

Demandons nous à quel moment un élève trouve la réponse à la question : "Qu'est ce qu'un nombre réel ?". À l'école primaire, il découvre les entiers, les décimaux et les fractions. Au collège, il découvre les nombres relatifs, et la calculatrice devient le recours constant dès qu'il s'agit d'activités numériques, au point de lui faire parfois oublier ses connaissances antérieures : est-ce que $13/7$ est un nombre pour un élève de collège, ou n'est-ce que le signe d'un calcul à effectuer sur la calculatrice, calcul qui donne le nombre 1,8571429 ? Après avoir vu des étudiants de CAPES de mathématiques utiliser leur calculatrice pour répondre oui à la question : "est-ce que $13/7$ est un décimal ?", je ne doute pas de la réponse à la question précédente.

Il faut dire que les programmes eux-mêmes sont tout à fait contestables. Lors de sa première apparition, le nombre $\sqrt{2}$ est présenté comme ce qu'on obtient en appuyant sur les touches 2 et $\sqrt{}$ de la calculette. Ce qui explique parfaitement ensuite la démarche d'élèves, qui, voulant utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, vérifient sur leurs calculettes que le carré de l'hypoténuse est à peu près égal à la somme des carrés des côtés.

La définition des nombres réels, la question de l'irrationalité de nombres est un non-dit qui traverse tout l'enseignement secondaire. Autrefois, dès la première année de l'université, les nombres réels étaient construits, soit par la méthode des coupures de Dedekind, soit par les suites de Cauchy selon la méthode de Cantor. Ensuite les propriétés des nombres réels étaient démontrées et tous les calculs avec les radicaux justifiés. Aujourd'hui ces questions ont été abandonnées comme trop difficiles pour les étudiants de premier cycle de l'université, et la construction des nombres réels n'est plus faite nulle part. De sorte que la critique que Lebesgue adressait vers 1910 à l'enseignement secondaire dans son livre *La mesure des grandeurs*¹, est valable pour tout le cursus secondaire et universitaire.

* * * * *

I.2. - Le point de vue de Lebesgue.

[...] *"Ma principale critique porte sur ce qu'on dit, ou plutôt sur ce qu'on ne dit pas au sujet des nombres irrationnels."*

"Dans les plus hautes classes de l'enseignement secondaire, comme dans la plus basse, on ne parle des nombres irrationnels que par prétérition. On reprend ce qui est déjà clair dans l'esprit pour enseigner aux élèves à le formuler en mots ; on n'essaie pas de leur préciser ce qui est resté plus que vague, bien que ce soit ce qui leur a le plus servi depuis quatre années et dont, cependant, on ne leur a jamais parlé : le nombre rationnel ou irrationnel. On le rencontre partout ; partout on évite d'en parler nettement. En arithmétique, à l'occasion de la mesure des grandeurs on reprend la comparaison des longueurs, mais on ne s'étend que sur les cas de commensurabilité. Les autres, on les escamote avec plus ou moins d'habileté. On se livre aussi à un véritable tour de passe-passe à l'occasion des valeurs approchées. On ne peut parler que des valeurs approchées des nombres rationnels, puisque c'est des nombres rationnels seuls que l'on a parlé ; or, pour eux, ces valeurs approchées sont infiniment moins intéressantes que pour les autres nombres. Mais ceux-ci n'existent pas en quelque sorte ; c'est bien simple, on va parler de valeurs approchées qui ne seront approchées de rien."

¹ Lebesgue, H. : *La mesure des grandeurs*. Lib. A. Blanchard. Paris, 1975 (nouv. tir.), p. 18.

La question de l'irrationalité et de la définition des nombres réels est donc au cœur de la critique de Lebesgue, critique qui est toujours d'actualité : on peut se demander quel sens ont des développements savants en analyse, si cette question est escamotée comme actuellement.

* * * * *

I.3. - Ma pratique d'enseignement.

Depuis quelques années, j'enseigne en DEUG première année, et je fais des compléments de cours en parallèle à la préparation du CAPES. J'ai pu constater que des étudiants de maîtrise butaient sur des questions simples sur les nombres, mais aussi que les constructions des nombres réels les intéressaient vivement et leur apportait un éclairage important sur leur futur enseignement. Leurs difficultés m'ont amené à réfléchir sur l'ensemble du cursus d'enseignement sur les nombres et à constater son incohérence. Ma conviction est que depuis la dernière grande réforme des mathématiques, dite réforme des mathématiques modernes, il a été procédé pour les programmes des collèges et lycées, à des ajustements locaux successifs, allègements par ci, modifications par là et que l'ensemble n'a pas été discuté. Dans l'enseignement supérieur, nous nous sommes adaptés de la même façon à l'arrivée des nouveaux étudiants. Certaines questions sont supposées connues à un moment donné, sans avoir jamais été enseignées. Les exemples les plus frappants à Lille concernent les nombres réels, les structures quotients, et l'intégrale de Riemann parfois escamotée en première année, et *définie* par les étudiants de maîtrise comme *un cas particulier de l'intégrale de Lebesgue*. En première année le corps des nombres réels est introduit de façon axiomatique, à l'aide par exemple de l'axiome de la borne supérieure ou de tout autre axiome équivalent. Il n'y a rien à reprocher sur le plan de la rigueur formelle. On peut toutefois se demander si cette méthode est satisfaisante et éclairante pour les étudiants. Mais, après tout, on pourrait aussi envisager qu'avec la pratique numérique acquise par les étudiants avec leurs calculatrices, ces constructions et justifications des nombres réels soient devenues superflues.

Nous allons suivre au cours de l'histoire cette question de l'irrationalité et des nombres réels, afin de comprendre l'élaboration du concept de nombre réel et éclairer par cette histoire notre questionnement. La difficulté que nous allons rencontrer est la suivante : suite à la découverte de l'irrationalité, pour faire des démonstrations rigoureuses concernant ce que nous appelons maintenant la mesure des grandeurs, les Grecs ont élaboré une théorie entièrement géométrique appelée théorie des proportions, qui utilise des rapports géométriques de grandeurs. Reconnaître que ces rapports sont des nombres, est un processus qui a duré deux mille ans. En quoi ceci peut-il nous intéresser directement pour

l'enseignement ? Un élève ou un étudiant ne peut avec sa calculette qu'approcher certaines quantités. Est-il si évident pour lui que ce sont des nombres ? Bien sûr, les enseignants le disent, mais est-ce donc si évident quand on voit les difficultés que cette question a posé aux mathématiciens des siècles passés ?

*
* *

II. - La découverte de l'irrationalité.

Les nombres sont issus de deux activités, le dénombrement et la mesure. Ce qui a posé dans la civilisation grecque le problème du discret et du continu. Les autres civilisations antiques, bien qu'elles aient développé des mathématiques comportant de nombreux résultats géométriques et numériques, n'ont pas laissé de traces écrites de réflexions sur ce thème.

* * * * *

II.1. - Les civilisations antiques.

La civilisation babylonienne, civilisation antique la plus avancée en mathématiques, disposait d'un système de notation de nombres très performant en base soixante ; nous avons retrouvé des calculs de racines carrées extrêmement précis, à l'aide de l'algorithme appelé plus tard l'algorithme de Héron, mais nous n'avons retrouvé aucune trace de distinction entre rationnels et irrationnels. La seule distinction qui est faite est celle entre nombres qui s'expriment exactement en base 60 et nombres "qui n'existent pas", ou qui sont remplacés par une valeur approchée, sans donner d'explications.

La civilisation égyptienne est restée, en mathématiques, très dépendante d'un système de nombres peu adapté avec écriture des parties fractionnaires à l'aide de "fractions égyptiennes" de numérateur 1, système limité et peu performant.

La civilisation grecque est l'héritière en mathématiques de ces civilisations. Les Grecs ont disposé d'un système de notation des entiers en base dix à l'aide des lettres de l'alphabet. Bien que limité sur le plan de l'écriture des grands nombres, ce système était utilisé pour la notation des nombres parallèlement à l'utilisation d'une abaque pour les opérations. Pour noter les parties fractionnaires, les Grecs avaient recours, soit aux fractions égyptiennes, soit à l'utilisation des soixantièmes adaptée à leur

notation avec des lettres. Puis plus tard une notation des fractions à l'aide de couples d'entiers est apparue. Tous les calculs pratiques étaient désignés sous le terme de *logistique* par les Grecs et considérés comme une activité réservée aux artisans et aux marchands. La "partie noble" des activités numériques, concernant les réflexions sur la nature des nombres relevait de l'activité des mathématiciens et était désignée sous le nom d'*arithmétique*.

Dans les textes de mathématiciens de l'époque classique la notion de nombre recouvre exactement celle de nombre entier naturel. Plus tard, à la fin de la période classique chez des mathématiciens comme Archimède, Héron ou Diophante, la notion de nombre englobe aussi celle de fraction.

* * * * *

II.2. - La découverte de l'irrationalité.

Dans l'école pythagoricienne se sont développées les techniques de démonstration initiées par Thalès. Le nombre entier joue un rôle central dans la philosophie pythagoricienne : "*Tout est nombre*". On n'a pas gardé de trace écrite de leur œuvre, mais on sait que beaucoup de démonstrations en géométrie ont été faites dans cette école en supposant que deux longueurs quelconques étaient commensurables, c'est-à-dire que le rapport de deux longueurs se ramenait à un rapport de deux entiers.

La découverte de l'irrationalité, probablement à propos de la diagonale et du côté du carré bouleverse leur philosophie. On connaît deux démonstrations de cette irrationalité. L'une d'elles est désignée par Aristote comme "*la démonstration par le pair et l'impair*", c'est-à-dire que si la diagonale était commensurable au côté on pourrait montrer qu'un même nombre est à la fois pair et impair. L'autre démonstration utilise une méthode appelée "*antiphérèse*", ou soustraction réciproque. Elle est essentiellement celle de l'algorithme d'Euclide appliquée à des longueurs. Elle distingue le cas commensurable où cet algorithme est fini et le cas incommensurable où cet algorithme ne s'arrête pas ; dès les origines, la notion d'irrationalité est donc associée à celle d'un processus infini.

* * * * *

II.3. - La nature du continu, la nature de l'infini.

À la fin du Vème siècle avant notre ère, un débat sur la nature du continu divise différentes écoles philosophiques grecques. Une ligne est-elle indéfiniment divisible ou est-elle constituée de lignes insécables ? Même problème pour le temps, les aires et les volumes.

Contre les tenants des deux écoles, partisans des lignes insécables ou partisans du continu indéfiniment divisible, Zénon d'Élée a avancé quarante paradoxes dont quatre nous ont été conservés par Aristote. Ils mettent en question l'usage de l'infini et alimenteront les débats des philosophes pour longtemps.

Aristote a établi une théorisation de l'infini, théorie qui fera autorité pendant deux mille ans. Aristote applique à l'infini sa distinction entre l'existence en acte et l'existence en puissance. Il montre que le seul usage de l'infini dont a besoin le mathématicien est l'infini en puissance, ou infini potentiel, comme possibilité d'accroissement (par exemple que pour tout entier, on peut en trouver un plus grand), ou comme possibilité de division, (par exemple la possibilité de diviser toute longueur). Une grandeur n'est pas infinie en acte.

"L'infini n'est pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais au contraire ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose".

L'infini est donc associé à l'inachevé, à l'indéterminé, et a une connotation négative. Toute la rigueur mathématique des Grecs s'est exercée pour éliminer le recours à l'infini dans les raisonnements mathématiques.

Ceci a une grande importance pour notre propos. Si le rapport de deux grandeurs incommensurables ne peut être défini comme le rapport de deux entiers, comment le définir ? Nous avons gardé trace d'une première définition de ce rapport comme la suite infinie des quotients qui apparaissent dans le processus d'antiphérèse, définition inacceptable, si l'infini est à éviter en mathématiques. La solution sera trouvée par Eudoxe et exposée dans le Livre V des *Éléments* d'Euclide qui traite des rapports de grandeurs.

*
* *

III. - La mesure des grandeurs chez les Grecs.

III.1. - La mesure des grandeurs chez Euclide.

- Les grandeurs.

Le terme grandeur n'est nulle part défini dans l'œuvre d'Euclide. Par le contexte, nous comprenons qu'il s'agit de longueurs, d'aires, de volumes,

d'angles, d'arcs de cercle, mais sans mettre derrière ces termes de notions numériques. Les seuls nombres utilisés sont les entiers. Le terme mesurer est employé dans le sens suivant : une grandeur en mesure une autre de même nature si la seconde est obtenue en juxtaposant un nombre entier de fois la première. L'opération associée est donc une opération de juxtaposition, de longueurs mises bout à bout, de surfaces planes, de volumes.

- Les critères d'égalité.

Un instrument indispensable est celui de critères d'égalité de grandeurs. Ceux-ci sont purement géométriques. Pour les segments, les angles et les arcs, il s'agit de la possibilité d'amener en co-incidence. Pour les triangles, les trois cas d'égalité montrent que l'égalité de trois éléments, côtés ou angles bien choisis, entraîne l'égalité des trois autres éléments et *l'égalité des triangles*. On comprend que cette égalité de triangles désigne ce que nous appelons égalité des aires des triangles, (mais en utilisant ici une notion numérique qui n'existe pas chez Euclide), en lisant l'énoncé de la proposition 37 du Livre I des *Éléments* d'Euclide :

"Des triangles de même base et entre les mêmes parallèles sont égaux".

Cela montre que cette notion de "*triangles égaux*" est un correspondant purement géométrique de notre notion numérique d'égalité d'aires de triangles. Les égalités d'autres figures planes sont montrées par des procédés de découpage. Des notions analogues sont aussi développées pour les volumes : par exemple, les parallélépipèdes de même base entre les mêmes plans parallèles sont égaux.

- Quadratures et cubatures.

L'expression "problèmes de quadrature" (respectivement "cubature") désigne la construction à la règle et au compas d'un carré (respectivement d'un cube), égal à une surface donnée (respectivement un volume donné). Les plus célèbres de ces problèmes concernent la quadrature du cercle et la duplication du cube, problèmes qui ne trouveront leur "solution" qu'au XIX^{ème} siècle où l'impossibilité de ces constructions sera montrée dans le cadre de la théorie des nombres.

La notion de quadrature au sens d'associer un nombre à une grandeur et une unité n'existe pas chez les Grecs. On ne trouve donc dans Euclide aucune formule de calcul d'aires ou de volumes, bien que de nombreux problèmes de quadrature et de cubature soient traités. À titre d'illustration de ce point donnons le théorème dit "de Pythagore" qui figure à la fin du

Livre I. Il est à comprendre ainsi : le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle peut être décomposé en deux rectangles "égaux" (en aire) respectivement aux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

- La méthode des aires.

Cette méthode consiste à passer, pour démontrer des égalités de lignes, par des égalités d'aires. Elle est abondamment utilisée par Euclide. De même, la démonstration d'égalité de rapports entre des lignes sera démontrée en utilisant des rapports entre des surfaces. Elle sera critiquée plus tard par des mathématiciens comme les mathématiciens de Port Royal comme ne respectant pas le "*vrai ordre de la nature*", qui selon eux hiérarchise les grandeurs en longueurs, surfaces et volumes et demande de ne pas faire appel, contrairement à Euclide, à des surfaces pour démontrer des théorèmes sur des longueurs.

- Les opérations sur les grandeurs.

Les opérations de juxtaposition portent sur des grandeurs de même nature dites homogènes par les Grecs, et donnent un résultat de même nature. Cette juxtaposition n'est pas notée comme une addition. Par contre, on en déduit explicitement une multiplication des grandeurs par les entiers, obtenue en répétant l'opération de juxtaposition de grandeurs égales.

Une multiplication de grandeurs existe de façon limitée : Le produit de deux longueurs donne le rectangle construit sur ces deux longueurs. Le produit de trois longueurs donne le parallélépipède rectangle construit sur ces trois longueurs. Le produit de plus de trois longueurs n'a donc pas de sens. De même pour le produit de deux aires, ou d'une longueur et d'un volume, ou d'une aire et d'un volume, etc.

On désigne sous le nom d'algèbre géométrique grecque, toute une série de problèmes qui figurent dans le Livre II et le Livre VI des *Éléments* d'Euclide, qui sont exprimés et résolus géométriquement, et que nous pouvons associer maintenant à des identités remarquables, ou à des résolutions d'équations du second degré, portant sur des nombres, mais qui dans le livre grec n'ont rien de numérique.

* * * * *

III.2. - La théorie des rapports de grandeurs d'Eudoxe-Euclide.

- Les rapports de grandeurs dans le Livre V des *Éléments*.

Les premières définitions du Livre cinq portent sur les raisons (ou rapports) de grandeurs et sur les proportions (égalité de raisons). On ne peut établir de raison qu'entre deux grandeurs homogènes, (*définition 3*), qui de plus vérifient une propriété désignée maintenant sous le nom d'axiome d'Archimède; c'est la *définition 4*: "les grandeurs étant multipliées doivent se surpasser mutuellement", c'est-à-dire qu'on ne peut établir un rapport entre A et B que s'il existe deux entiers n et p tels que $n.A > b$ et $p.B > A$.

Une proportion est une identité de raisons, (*définition 5*). En notations modernes, la *définition 6* donne un critère d'égalité de raisons: A est à B comme C est à D si, pour tous les entiers n et p possibles:

- i) Si $nA > pB$ alors $nC > pD$;
- et ii) si $nA = pB$ alors $nC = pD$;
- et iii) si $nA < pB$ alors $nC < pD$.

La *définition 6* est une définition opératoire, en ce sens qu'elle intervient effectivement dans les démonstrations, par exemple pour montrer que des triangles entre les mêmes parallèles sont entre eux comme leurs bases, proposition qui servira à établir le théorème que les manuels français désignent sous le nom de théorème de Thalès.

De même est définie une relation d'ordre entre les raisons. Dans la suite du Livre V sont établies des relations sur les proportions; il faut remarquer qu'on n'opère pratiquement pas sur ces raisons. Seule une composition (produit) limitée au carré d'un rapport (appelé rapport double, *définition 10*) et au cube d'un rapport (appelé rapport triple, *définition 11*) figure. Un seul théorème du Livre VI (*proposition 18*) utilise une composition de raisons, nulle part définie:

"Des parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison composée de celles des côtés".

Une lacune des *Éléments* concerne l'existence d'une quatrième proportionnelle à trois grandeurs, abondamment utilisée par Euclide pour des aires et des volumes dans le Livre XII et démontrée seulement dans le cas de longueurs.

- La mesure des grandeurs et la méthode d'exhaustion.

Tous les théorèmes qui pour nous relèvent de la mesure des grandeurs, des aires et des volumes, seront exprimés dans le langage des

proportions dans le Livre XII. La plupart de ces théorèmes se présenteront sous une forme analogue à celui ci :

“Proposition 2. Les cercles sont entre eux comme les carrés de leur diamètre”.

La démonstration se fait par une double réduction à l’absurde, appelée plus tard *“méthode d’exhaustion”*. Pour montrer que $A/B = C/D$, on montre que $A/B > C/D$ est impossible et que $A/B < C/D$ est impossible ; on en déduit l’égalité des rapports.

L’outil utilisé pour ces démonstrations par l’absurde est le *théorème 1* du Livre X qui dit que :

“Deux grandeurs inégales étant proposées, si on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l’on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées”.

La théorie des rapports de grandeurs fournit donc un procédé pour des démonstrations rigoureuses en géométrie. Elle restera la référence obligée pour deux mille ans. Elle est le seul moyen trouvé par les Grecs pour traiter dans un cadre géométrique la question du rapport de grandeurs incommensurables.

* * * * *

III.3. - Les approximations d’irrationnelles.

Il importe de remarquer que le terme d’irrationnel désigne pour nous un nombre irrationnel. C’est pour cette raison que nous parlons d’irrationnelles pour indiquer que cette notion n’a chez les Grecs rien de numérique et reste dans un cadre géométrique.

La théorie du rapport des grandeurs fut un instrument remarquable entre les mains d’Archimède pour démontrer rigoureusement des quadratures et des cubatures qu’il avait trouvées en utilisant des analogies mécaniques. En particulier il montra des encadrements célèbres du rapport de l’aire du cercle au carré du rayon. D’autres mathématiciens comme Héron, ont beaucoup développé les calculs de valeurs approchées de quantités irrationnelles.

Parallèlement cette théorie des rapports de grandeurs développée dans le Livre V pour les grandeurs et dans les Livres VII, VIII et IX d’arithmétique pour les rapports de nombres, fournit un développement de

la logistique, en proposant des théorèmes applicables aux fractions, ce qui explique l'élargissement de la notion de nombre aux fractions, à la fin de la période classique de la mathématique grecque.

* * * * *

III.4. - Proclus, sur les rapports.

Nous concluons cette partie consacrée au problème de l'irrationalité dans la mathématique grecque par des citations de Proclus extraites du prologue des *Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*². Les calculs numériques développés ont posé la question : que sont ces rapports de nature géométrique que l'on peut encadrer, approcher par des nombres ?

"Le fait que le rapport est toujours rationnel appartient à l'arithmétique seule, et pas entièrement à la géométrie, car il existe aussi des rapports irrationnels dans celle-ci [...] là où il y a division à l'infini, il y a aussi l'irrationnel. [...]"

Quant aux théorèmes qui leur sont communs, l'un se transporte de la géométrie dans l'arithmétique, d'autres, au contraire de l'arithmétique dans la géométrie ; enfin d'autres, qui leur sont dévolus de la même manière par la mathématique toute entière, les intéressent toutes les deux. C'est en effet de cette manière que la permutation, les inversions, les compositions et les divisions de rapports sont communs aux deux sciences ; que l'arithmétique est la première à considérer les choses commensurables ; que la géométrie les considère après avoir pris l'arithmétique comme modèle, et établit par là même que les choses commensurables sont toutes celles qui ont entre elles le rapport d'un nombre à un nombre, parce que la commensurabilité existe primordialement dans les nombres. Car partout où il y a nombre il y a aussi du commensurable et partout où il y a du commensurable, il y a aussi du nombre".

*
* *

² Proclus de Lycie : *Les Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, trad. du grec, introd. et notes par P. Ver Eecke. Éd. Desclée de Brouwer. Bruges, 1948, prologue, pp. 51-52.

IV. - Les apports des mathématiciens arabes.

IV.1. - Réflexions sur la théorie des proportions.

Nous savons que les mathématiciens arabes ont beaucoup travaillé sur le texte d'Euclide, en particulier sur la théorie des proportions et sur la théorie des parallèles. Nous avons un exemple avec le travail d'Omar Khayyam (1048-1123), où il cherche à définir l'égalité de deux rapports.

"Étant [données] quatre grandeurs [telles que] la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien [telle que] la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien [telle que] la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique."

Ce paragraphe énumère donc les cas suivants d'égalité de rapports :

- i) $A = B$ et $C = D$;
- ou ii) $A = B/n$ et $C = D/n$;
- ou iii) $A = p.B/n$ et $C = p.D/n$;

pour conclure que dans ces cas $A/B = C/D$ (en langage moderne). Notons bien la conclusion : ce rapport est numérique.

"Si les [grandeurs] ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première [contenus dans la seconde] jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la troisième, et que le nombre de multiples de la première contenu dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième [contenu] dans la quatrième. Et si après [cela], on retranche [de la première] tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde, et que de la même [manière], on retranche [de la troisième] tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre de multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième ; [...] Et si, lorsque de la même manière, on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre correspondant de la troisième et de la quatrième, [et ce] indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique [des grandeurs]."

Ce texte est extrait de la "*Seconde Épître sur les proportions, de l'idée de proportionnalité et de leur sens véritable*"³. On voit ici décrire en mots l'algorithme d'Euclide appliqué aux grandeurs ; la définition de l'égalité des rapports est donc donnée par l'égalité, à tous les stades, des quotients. On voit opposer ce type de rapports aux précédents, comme rapports de type géométrique. C'est là la définition pré-eudoxienne des rapports à l'aide de la suite des quotients dans le processus d'antiphérèse.

* * * * *

IV.2. - Développement de l'algèbre.

Nous ne développerons pas ce point, mais l'invention de l'algèbre fut une contribution essentielle des arabes ; en désignant l'inconnue, par un mot "la chose", en utilisant son "carré", les arabes ont explicité la résolution de l'équation du second degré, en distinguant différents cas, puisqu'ils n'utilisaient que des coefficients positifs. Les algébristes italiens de la Renaissance ont résolu les équations du troisième et du quatrième degré. Parallèlement commence en Europe le développement du symbolisme algébrique dont l'unification sera très longue à réaliser. Cette algèbre et ses développements en Europe jouent aussi un rôle dans le développement de la notion de nombre réel, en amenant un calcul uniforme, que l'inconnue porte sur des nombres (rationnels) ou sur les grandeurs.

* * * * *

IV.3. - L'invention des décimaux.

Cette invention faite à différentes époques, par Al Samawal et par Al Kashi en particulier, ne semble pas avoir joué un rôle important dans les mathématiques arabes. Pourtant, elle conduit à une graduation sur les nombres, graduation aussi fine qu'on veut, et permet des comparaisons entre nombres beaucoup plus facile que par l'usage des représentations fractionnaires. La redécouverte des décimaux en Europe à la fin du XVIème siècle par Stevin, sera suivie de leur usage généralisé dans les tables de calculs, en particulier les tables de logarithmes. Elle a une importance considérable pour l'unification du champ numérique.

*

* *

³ Traduction de l'arabe par Ahmed Djebbar.

V. - Processus de numérisation des rapports.

Nous allons indiquer très brièvement quelques étapes du long processus historique qui a conduit les mathématiciens à considérer les rapports géométriques comme des nombres.

* * * * *

V.1. - Les opérations sur les rapports et les grandeurs.

- Oresme.

Le premier développement important sur la théorie des rapports est apporté par le traité d'Oresme, écrit entre 1351 et 1360, et intitulé : *De proportionibus proportionum*. Ce texte développe des opérations sur les rapports :

- i) ajouter, soustraire, diviser, augmenter, diminuer ;
- ii) développement de la composition de rapports (produit), de rapports de rapports, étude du caractère rationnel ou non de rapports de rapports ; et l'affirmation que les rapports se comportent comme des grandeurs continues : entre deux rapports inégaux, il est possible d'insérer autant de moyennes que l'on voudra ; un rapport est divisible à l'infini.

- Viète (1540-1603).

Écrit en 1591, *In artem analyticem Isagoge* décrit en mathématiques un nouvel art, l'analytique, (en fait l'algèbre), comme procédé de découverte de vérités mathématiques. Cette nouvelle algèbre est autant arithmétique que géométrique, et décrit une théorie générale des proportions. Il distingue la logistique numérique de la logistique spéieuse, (calculs sur les grandeurs et les nombres inconnus, les espèces). Des théories grecques, Viète conserve la loi des homogènes : on ne peut additionner et soustraire que des grandeurs homogènes. Le produit de deux grandeurs homogènes (ou non), donne une grandeur d'une autre dimension. De même la division de grandeurs, est définie en référence à la notion grecque d'application d'une grandeur sur une autre. La hiérarchie des grandeurs ne se limite pas aux longueurs, aires et volumes, mais comporte des grandeurs de dimensions quelconques, 4, 5, 6 ... ainsi que Diophante l'avait déjà fait. Ce qui l'autorise à montrer que quatre grandeurs sont proportionnelles si et seulement si le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, et établit un lien entre l'écriture des équations et celle des proportions. Viète montre comment mettre en équation un problème, comment transformer cette équation pour passer à

une forme canonique qui fournit la solution, comment exploiter numériquement ces résultats.

* * * * *

V.2. - Représenter les grandeurs par des longueurs.

- Descartes.

Les règles pour la direction de l'esprit et la Géométrie montrent les conceptions de Descartes sur l'algèbre, la géométrie et les mathématiques. Il recherche une mathématique universelle qui ne peut être représentée et conçue que symboliquement. L'algèbre est une théorie générale des proportions et des équations, dont les objets acquièrent d'abord leurs caractéristiques d'après le champ numérique, mais dont les objets symboliques s'identifient avec les objets du monde physique. Cette mathématique universelle identifie l'algèbre conçue comme logistique symbolique, avec la géométrie interprétée pour la première fois comme science symbolique.

Un des apports essentiels de Descartes est la rupture de la loi de l'homogénéité. Descartes montre que tous les résultats d'opérations sur les grandeurs, une fois choisie une unité de longueur, peuvent être représentés par des longueurs. Premier pas essentiel : les rapports géométriques, les produits, les aires, les volumes, peuvent être représentés par des longueurs. La demi-droite représente tous les résultats des calculs. Cette géométrie de Descartes est une **algèbre des longueurs**.

Même s'il ne se prononce pas clairement, sur la nature du rapport géométrique, (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt (à ma connaissance), même s'il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l'avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante.

* * * * *

V.3. - Trouver une meilleure définition des rapports.

- Arnauld.

Dans son traité de géométrie, les *Nouveaux Elemens de Geometrie* (1667), au Livre second consacré à la théorie des proportions, Arnauld

donne une nouvelle définition des rapports et des proportions, plus proche, comme le remarque R. Bkouche, de la pratique de la mesure que la définition euclidienne. Ici, contrairement au texte euclidien, la théorie des proportions se situe dans les chapitres préliminaires du cours de géométrie.

“La maniere dont une grandeur est contenuë dans une autre que nous avons dit s'appeler raison, est encore de deux sortes. L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenuë tant de fois précisément dans une autre, ce qui s'appelle raison exacte, ou raison de nombre à nombre, parce que tous les nombres ont entr'eux cette raison ayant tous au moins l'unité pour une de leurs aliquotes qui est contenuë précisément tant de fois dans tout autre nombre que ce soit.

Les grandeurs qui ont entr'elles cette raison de nombre à nombre sont appellées commensurables, parce qu'elles ont quelque aliquote qui leur sert de mesure commune.

L'autre maniere selon laquelle une grandeur est contenuë dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre. De sorte que l'une & l'autre ayant une infinité d'aliquotes & de mesures, il n'y en a aucune neanmoins qui mesure précisément l'une & l'autre grandeur, mais celle qui mesure précisément la premiere ne mesurera jamais précisément la seconde, & celle qui mesure précisément la seconde ne mesure jamais précisément la premiere. Cette raison s'appelle sourde.

*Et les grandeurs qui n'ont entr'elles que cette sorte de raison s'appellent incommensurables, parce qu'elles n'ont entr'elles aucune mesure commune.”*⁴

Pour la définition d'une proportion, deux définitions sont nécessaires. La première concerne l'égalité des raisons de nombre à nombre.

*“Lorsque la raison d'un antecedent à son consequent est égale à celle d'un autre antecedent à un autre consequent, cette égalité de raisons [...] s'appelle proportion Geometrique, & absolument proportion.”*⁵

Voici la seconde :

*“Deux raisons sont appellées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antecedens sont chacunes également contenües dans chaque consequent.”*⁶

Que signifie cette deuxième définition, avec nos notations ? On aura $A/B = C/D$, si, prenant des aliquotes pareilles des antécédents, c'est-à-dire ici,

⁴ Arnauld, A. : *Nouveaux Elemens de Geometrie*, Paris, 1667, p. 23.

⁵ *Ibid.*, p. 26.

⁶ *Ibid.*, p. 29.

partageant A et C par le même entier, on obtient que ces aliquotes sont chacune également contenues dans B et D , c'est-à-dire que :

$$p.A/n < B < (p + 1).A/n \text{ et } p.C/n < D < (p + 1).C/n.$$

On voit que ce processus est le processus pratique de mesure, en utilisant des aliquotes des antécédents comme unités.

Les *Nouveaux Elemens de Geometrie* d'Arnauld deviendront une référence importante pendant plus d'un siècle.

* * * * *

V.4. - Les rapports sont-ils des nombres ?

- Stevin.

Indépendamment de son opuscule, *La Disme*, où il redécouvre les décimaux, Stevin (1548-1620) est intéressant par des prises de positions très modernes sur la nature des nombres et des grandeurs, en rupture totale avec la tradition. Ses thèses développées dans le *Traité des incommensurables grandeurs* (*Arithmétique*, 1585) sont célèbres.

[i] Que l'unité est nombre.

[ii] Que nombres quelconques peuvent être nombres carrés, cubiques, de quatre quantités, etc.

[iii] Qu'une racine quelconque est nombre.

[iv] Qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds.

De nombreux mathématiciens participeront à ce type de discussion. Le nombre entier, défini par Euclide comme multiplicité, excluait l'unité par sa définition même. Le statut du zéro posait aussi problème. Pascal s'est aussi prononcé dans *De l'esprit géométrique* sur ce thème, démontrant que l'unité est un nombre mais que zéro n'en est pas un.

L'originalité de Stevin est manifeste par sa position sur les nombres et les grandeurs :

"La communauté et la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identité."

Les nombres sont pour lui une structure continue et non une structure discrète :

"Que nombre n'est point quantité discontinue."

Il distingue nombre arithmétique (sans adjectif de grandeur) et nombre géométrique, mais tout est dénommé nombre. Cette position ne pouvait pas être justifiée et relevait d'une prise de position, voire d'un acte de foi, qui fut violemment combattue par les mathématiciens de Port-Royal en particulier. Elle ne pouvait pas convaincre celui qui restait dans le cadre de pensée euclidien.

- Newton.

Dans son livre publié en 1707, *Arithmétique universelle*, Newton répond sans aucune ambiguïté par l'affirmative :

"On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, le fractionnaire et le sourd. L'entier est mesuré par l'unité ; le fractionnaire par un sous-multiple de l'unité ; le sourd est incommensurable avec l'unité."

- D'Alembert.

L'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert donne à l'article *nombre* une définition juxtaposant des points de vue contradictoires : multiplicité d'unités dans le premier paragraphe, rapport abstrait d'une quantité à une autre selon Newton au second ; dans le troisième paragraphe, selon la définition de Wolff, ce qui a le même rapport avec l'unité qu'une ligne droite avec une autre ligne droite, avec un retour dans la suite de l'article à la notion euclidienne de multiplicité d'unités.

Pour comprendre, il est intéressant de se reporter aux *Essais sur les Éléments de la Philosophie naturelle*, de d'Alembert (1759), où il développe longuement son point de vue :

[...] *Le mot mesure en mathématiques, renferme l'idée d'un rapport explicitement exprimé. Or il est des rapports qui offrent plus de difficultés que les autres, soit pour en présenter la notion d'une manière bien nette, soit pour les démontrer de manière rigoureuse : ce sont les rapports des quantités incommensurables.*

On dit par exemple, que la diagonale du carré est à son côté comme la racine carrée de 2 est à 1 ; pour avoir une idée bien nette de la vérité que cette proposition exprime, il faut d'abord remarquer, qu'il n'y a point de racine carrée du nombre 2, ni par conséquent de rapport proprement dit entre cette racine et l'unité, ni par conséquent de rapport proprement dit entre la diagonale et le côté d'un carré, ni par conséquent enfin, d'égalité entre ces rapports, puisqu'il n'y a point

proprement d'égalité entre des rapports qui n'existent pas. Mais il faut remarquer en même temps, que si on ne peut trouver un nombre qui multiplié par lui-même produise 2, on peut trouver des nombres qui multipliés par eux-mêmes produisent un nombre aussi approchant de 2 qu'on voudra, soit en dessus, soit au dessous.

[...] Cette facilité qu'on a de représenter des rapports incommensurables, non par des nombres exacts, mais par des nombres qui en approchent aussi près qu'on voudra, sans jamais exprimer rigoureusement ces rapports, est cause que les mathématiciens aient étendu la dénomination de nombre aux rapports incommensurables, quoiqu'elle ne leur appartienne qu'improprement, puisque les mots de nombre et nombre supposent une désignation exacte et précise, dont ces sortes de rapports ne sont pas susceptibles. Aussi n'y a-t-il à proprement parler que deux sortes de nombres, les nombres entiers et les nombres rompus ou fractions.

[...] De là il est aisé de voir, que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres proprement dits, il ne s'en faut de rien, pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, puisque la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite qu'on voudra." ⁷

- Legendre.

La pratique de Legendre est claire. Dans son livre, *Éléments de Géométrie*, paru pour la première fois en 1794, il développe le "vrai sens des proportions" au Livre III :

"Si on a la proportion $A : B :: C : D$, on sait que le produit des extrêmes $A \times D$ est égal au produit des moyens $B \times C$.

Cette vérité est incontestable dans les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment, ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D , sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D , représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable ; et la proportion entre les lignes A, B, C, D , devient une proportion de nombres." ⁸

* * * * *

⁷ D'Alembert, J. *Le Rond : Essais sur les Éléments de la Philosophie naturelle*, Paris, 1759, p. 328.

⁸ Legendre, A.-M. : *Éléments de Géométrie*. Paris, 1794, p. 58.

V.5. - Argand et les rapport de grandeurs dirigées.

On sait que les nombres négatifs et les nombres imaginaires, en usage depuis la Renaissance, ont posé aux mathématiciens des problèmes redoutables. En voulant étendre à ces nombres ou quantités toutes les règles valables pour les nombres entiers ou fractionnaires, des contradictions sont apparues : difficultés avec les inégalités et la justification de la règle des signes pour les négatifs, difficultés avec les logarithmes des nombres complexes. Le problème de la justification de l'usage de ces quantités s'est trouvé posé jusqu'au début du XIX^{ème} siècle. Deux sortes de théories furent élaborées : une de nature géométrique par un certain nombre de mathématiciens peu connus comme Argand, Warren, Murrey, consiste à étendre aux grandeurs dirigées la théorie des proportions, en associant à l'idée de rapport une combinaison de l'idée de rapport de grandeurs et de l'idée d'angle ; l'autre, ou les autres théories, élaborées par des mathématiciens plus connus, Gauss, Hamilton, Cauchy, sont des justifications de nature algébrique.

La dernière extension de la théorie des proportions voit donc le jour quelques décennies avant le moment où, par la découverte des géométries non euclidiennes, les mathématiciens prennent conscience que les fondements des mathématiques ne peuvent être assurés en prenant comme base la vérité de la géométrie euclidienne. Le problème des fondements de l'analyse est posé. Dans ce processus, la théorie des proportions va être abandonnée au profit d'une construction des nombres réels à partir des nombres rationnels.

* * * * *

V.6. - L'arithmétisation de l'analyse.

Après une longue période de développement où les résultats obtenus dans les divers secteurs de la mécanique et de la physique suffisaient à montrer le bien-fondé des méthodes employées en analyse, avec Cauchy en particulier, le souci de fonder l'analyse sur des bases rigoureuses devint une préoccupation importante, en particulier pour les besoins de l'enseignement.

Bolzano, vers 1817, se livre à une critique des démonstrations géométriques employées pour démontrer un théorème comme le théorème des valeurs intermédiaires, affirmant que :

"Il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire des vérités des mathématiques pures (ou générales) [c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse],

des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie."

Il rejette de même le recours à des considérations de mouvement ou de temps.

De nombreux mathématiciens se sont à cette époque efforcés de justifier les théorèmes fondamentaux de l'analyse, en démontrant d'abord les propriétés des nombres, ou plutôt en faisant une construction explicite de ces nombres à partir des nombres rationnels supposés connus à ce premier stade. Nous n'allons pas ici décrire les différents modes de constructions des réels à partir des rationnels, ce qui pour moi, fait l'objet d'un travail suivant. Mon but dans cet article était simplement de montrer que les nombres réels ont posé question dans l'histoire. Ces questions, dans les termes mêmes où des mathématiciens se les ont posées, sont intéressantes, car on se doute que les étudiants peuvent se les poser à peu près dans les mêmes termes.

*

* *

VI. - Que faire dans l'enseignement ?

Si les constructions des nombres réels ont été abandonnées en début de premier cycle universitaire, c'est qu'effectivement elles ne pouvaient plus passer. Impossible de définir les réels par des suites de Cauchy, à des étudiants qui ont un mal fou à s'habituer aux raisonnements avec les ϵ ou η . La construction par les coupures serait possible si les étudiants avaient l'habitude de raisonnements de plus de deux lignes ...

Il est sûr que dans la situation actuelle, il faut renforcer la formation des maîtres sur cette question car le dilemme est le suivant : nous devons au cours des études secondaires développer chez les élèves une intuition juste des nombres, en étant dans l'impossibilité d'apporter des justifications complètes. Si le maître est suffisamment formé, s'il a des idées claires sur cette question, à chaque étape il peut faire progresser les élèves. Mais que peut faire un maître qui a des idées floues ou carrément fausses, comme certains étudiants de CAPES que je vois tous les ans. Il ne peut que reproduire cette confusion chez ses élèves.

Que penser de l'enseignement de l'analyse où on fait converger des suites vers des choses qu'on n'a pas définies comme $\sqrt{2}$ ou qu'on ne peut qu'approcher ? Comment quand l'enseignement est ainsi incohérent faire

autre chose en analyse que passer d'une activité à l'autre, sans trop savoir ce qu'on fait ni pourquoi on le fait ? Nous constatons toujours que l'idée principale sur les suites des étudiants de première année de DEUG en arrivant à l'université, est que c'est très dur et qu'ils n'y comprennent rien. Quant à la définition des limites, il faut commencer à corriger celle utilisée dans les programmes.

Nous pensons, à l'IREM de Lille, que pour sortir de cette situation, il faudrait que les IREM développent un travail de réflexion vertical sur différentes notions, au cours des cycles primaire, collège, lycée, et enseignement supérieur. La question de l'enseignement des nombres est une de ces questions, qui rejoint la question de l'enseignement de l'analyse, objet de malaise pour la plupart des enseignants de terminale que je connais. Cet enseignement doit être repensé en tenant compte de l'usage actuel des calculatrices, mais sans escamoter comme actuellement toute question théorique. Quel est le sens d'un calcul exact, d'un calcul approché ? La conception des nombres réels, de la mesure des grandeurs, de l'enseignement de l'analyse est le résultat d'un processus historique, dont nous devons tenir compte. Comment rétablir une cohérence entre le numérique et le géométrique, entre le numérique et l'analyse dans l'enseignement ? Il est nécessaire de s'engager dans un processus de réflexion qui mette l'accent sur la cohérence verticale des apprentissages.

*
* *

Bibliographie abrégée.

ARNAULD, A.

- *Nouveaux Elemens de Geometrie*. Paris, 1667. Rééd. IREM de Dijon.

BKOUICHE, R.

- *Autour du théorème de Thalès*. IREM de Lille, 1994.

COLLETTE, J.-P.

- *Histoire des Mathématiques*. 2 tomes. Éd. du Renouveau Pédagogique. Montréal, Ottawa, 1973-79. Diff. Vuibert. Paris, 1973-79.

COUSQUER, É.

- *Histoire du Concept de Nombre*. IREM de Lille, 1992.

DAHAN-DALMEDICO, A. et PEIFFER J.

- *Histoire des Mathématiques, Routes et dédales*. Axes, coll. *Études vivantes*, Paris, Montréal, 1982. Rééd. Éd. du Seuil, coll. *Points-Sciences* n° 49. Paris, 1986.

D'ALEMBERT, J. Le Rond.

- *Essai sur les Éléments de Philosophie naturelle* (1759). Rééd. Fayard, coll. *Corpus des œuvres de philosophie en langue française*. Paris.

DEDEKIND, R.

- *Essays on the theory of numbers*. Rééd. Dover. New York, 1963.

DEDRON, P. et ITARD, J.

- *Mathématiques et mathématiciens*. Éd. Magnard. Paris, 1959.

DESCARTES, R.

- *La Géométrie*, faisant suite au *Discours de la Méthode* (1637). Rééd. Fayard, coll. *Corpus des œuvres de philosophie en langue française*. Paris, 1986.

- *Règles pour la Direction de l'Esprit*. In *Œuvres philosophiques*, t. 1, éd. de F. Alquié. Éd. Garnier. Paris, 1963.

DHOMBRES, J.

- *Nombre, mesure et continu - Épistémologie et Histoire*. Éd. Cedic, Fernand Nathan. Paris, 1978.

EUCLIDE.

- *Les Éléments*. Deux tomes, trad. F. Peyrard. Lib. A. Blanchard, Nouveau tirage. Paris, 1966.

- *The thirteen books of Elements*. 3 vol., transl. by T. L. Heath. Éd. Dover. New York, 1956.

GAUD, D., et GUICHARD, J.-P.

- *Les nombres relatifs : Histoire et enseignement*. In *Repères-IREM* n° 2, janvier 1991.

GILLING, R. J.

- *Mathematics in the time of pharaohs*. The MIT Press. Cambridge (Massachusetts), 1972. Rééd. Dover. New York, 1982.

HEATH, T.

- *A History of greek Mathematics*. Éd. Clarendon Press. Oxford, 1921. Rééd. Dover, 2 vol. New York, 1981.

IFRAH, G.

- *Histoire universelle des chiffres*. 2 vol., éd. R.Laffont. Paris, 1994.

Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques.

- *Mathématiques au fil des âges*. Collectif dir. par Dhombres, J., Dahan, A., Bkouche, R., Houzel, Ch. et Guillemot, M. Éd. Gauthier Villars. Paris, 1987.

- *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*. Collectif. Éd. Ellipses. Paris, 1993.

KLEIN, J.

- *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. The MIT Press. Cambridge (Massachusetts), 1968. Rééd. Dover. New York, 1992.

KLINE, M.

- *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Éd. Oxford University Press. New York, 1972.

- *Mathématiques : la fin de la certitude* (1980). Trad. fr., Éd. Ch. Bourgois, coll. "Épistémè essais". Paris, 1989.

LEBESGUE, H.

- *La mesure des grandeurs*. Lib. A. Blanchard. Paris, 1975.

LUBET, J.-P.

- *De proportionibus proportionum de N. Oresme*. IREM de Lille.

NEUGEBAUER, O.

- *The exact sciences in Antiquity*. Éd. Dover. New York, 1957.

NOËL, É. et alii.

- *Le matin des mathématiciens. Entretiens sur l'Histoire des Mathématiques, présentés par Émile Noël*. Éd. Belin. Paris, 1985.

PROCLUS de Lycie

- *Les commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, Desclées de Brouwer 1948. Rééd. Lib. A. Blanchard.

SERRES Michel,

- *Éléments d'Histoire des Sciences*. Éd. Bordas. Paris, 1989.

VAN DER WAERDEN, B. L.

- *Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics*. Science Editions, John Wiley. New York, 1963.

VIÈTE, F. (VAULÉZARD, J. Sieur de, Éd.).

- *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1591), précédée de l'*Introduction à l'art analytique*. Trad. fr. de I. L. Sieur de Vauléazard (1630). Éd. Fayard, coll. *Corpus des œuvres de philosophie en langue française*. Paris, 1986.

YOUSCHKEVITCH, A. P.

- *Les Mathématiques arabes du huitième au quinzième siècle*. Éd. Vrin. Paris, 1976.

*
* *
*