

NOMBRES COMPLEXES À LA RECHERCHE D'UNE IMAGE.

Gérard HAMON.

Le thème de ce colloque est la *Mémoire des nombres* ; aussi il ne pouvait être omis d'y parler des nombres complexes. Ces nombres complexes sont aujourd'hui bien maîtrisés puisqu'ils figurent au programme des classes terminales, mais leur "évidence" actuelle, au moins pour les enseignants, n'est pas toujours allée de soi. En particulier, le cheminement qui a conduit à leur représentation géométrique ne s'est pas fait sans à-coups et sans impasses.

C'est ce que je me propose de faire entrevoir dans ce bref exposé. Il n'est bien sûr pas exhaustif mais tente de présenter les travaux de quelques uns des principaux acteurs et les arguments des partis en présence.

Le tableau ci-contre ne signifie pas une filiation absolue entre les travaux des différents auteurs cités mais pour la plupart au moins une connaissance de leurs prédécesseurs. Bombelli a parlé de la controverse Cardan-Tartaglia ; John Wallis cite l'ouvrage de Bombelli dans une lettre à Roger Cotes. Buée cite Kühn, Warren cite Buée ... Je commencerai par Euclide et Al Khwarizmi pour situer le poids de la représentation géométrique qui s'est imposée jusqu'à Cardan. Ce dernier a une place importante car c'est lui qui initie un dépassement des pratiques antérieures. À partir de lui, cet objet mal connu est abordé de deux manières :

- d'une part essentiellement comme outil de calcul,
- d'autre part comme projet de représentation géométrique.

Parmi ceux qui calculent je n'en citerai que deux, Bombelli et d'Alembert, afin de mieux situer l'état d'avancement de chacun de ces deux parcours l'un par par rapport à l'autre.

Pour la recherche d'une représentation géométrique des imaginaires trois tendances me semblent se dessiner :

- L'interprétation par une aire négative, tentée par Wallis, Kühn et Buée.

- L'approche par les notions de moyenne proportionnelle et d'orthogonalité, chez Wallis par exemple, approche connue d'Euler, puis reprise ou développée par Buée, Argand, Français, Gergonne, Warren, Gauss, Cauchy, Transon ...

- Le point de vue des transformations évoqué par Wessel, entrevu par Buée puis approfondie par Mourey, Faure, Cauchy, Bellavitis ...

Ces tentatives ont été ignorées voire combattues, c'est pourquoi je citerai Descartes, Foncenex, Playfair, Servois, Lefébure de Fourcy et Poncelet. Enfin, j'évoquerai le cas atypique du capitaine autrichien Lill, qui avait construit un appareil permettant de "visualiser" les racines réelles d'une équation puis les racines imaginaires un an plus tard.

Avant de passer à l'examen des arguments de ces différents protagonistes, une première remarque s'impose : nombre des gens cités sont peu connus, voire inconnus. C'est Buée qui, parlant de Kühn, le fait connaître, et surtout Montucla qui insistera sur sa transformation erronée de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{1}$ et sur un essai déraisonnable relatif aux différences d'altitude dans les embouchures des fleuves. L'ouvrage de Wessel, arpenteur-cartographe au Danemark, ne sera connu réellement que 100 ans après sa publication par une traduction du danois au français. D'après Cauchy, un certain Henri Dominique Truel aurait écrit l'essentiel de ce qu'il y avait à connaître sur la représentation des complexes dès 1788. Aucune autre trace, ni de cet auteur, ni de ses écrits, ne nous est restée. L'abbé Buée était organiste à Saint-Martin-de-Tours ; il émigre en Angleterre le 10 août 1793, et on ne lui doit qu'un seul ouvrage de mathématiques. Ses autres écrits ne sont considérés que comme des facéties. Argand, teneur de comptes à Paris, publie son essai sans se citer comme auteur. Six ans plus tard, il se fera connaître quand l'attention sera attirée sur le texte qu'il avait publié. De Mourey on ne connaît que très peu de choses, parmi lesquelles un ouvrage qui se proposait d'amorcer une refondation complète des mathématiques.

*
* *

Une longue tradition de représentation géométrique.

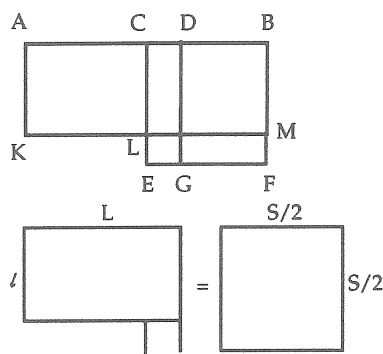
La géométrie euclidienne, enrichie et transmise par les Arabes, a été l'une des plus importantes sources du renouveau mathématique européen. Elle fut à la fois un moyen de formation et de réflexion, la base de nouveaux

développements mais aussi un obstacle à dépasser. C'est en partie en réaction contre cet héritage que la représentation géométrique des complexes a dû se fonder.

Cette tradition sera illustrée ici par deux exemples empruntés à Euclide et Al Khwarizmi. Au deuxième Livre des *Éléments*, Euclide énonce :

"Proposition 5.

*Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite."*¹



$$L - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} - l$$

Cette proposition permet de résoudre des équations de la forme

$$P + \left(X - \frac{S}{2}\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2$$

où P est le "rectangle des segments inégaux" et S leur somme ; X représente la longueur L ou la largeur l du rectangle. Il s'agit donc, en substance, de la résolution d'une équation du second degré dont on connaît la somme S et le produit P des racines. Mais - différence fondamentale - les solutions doivent être construites à l'aide de rectangles et de carrés et donc ne peuvent être que des longueurs (c'est-à-dire des nombres positifs quand on substitue des mesures aux longueurs).

Voici par exemple la résolution de l'équation $X^2 - 10X + 9 = 0$, qui exprime une question qu'en termes de géométrie euclidienne on pourrait poser ainsi : "En quels lignes (segments) inégales de rectangle 9, partager la ligne de longueur 10 ?"

¹ Euclide d'Alexandrie : *Les Éléments* (Livres I à IV). Trad., notes et commentaires par B. Vitrac, P.U.F, Paris, 1990, p. 333.

On peut d'ailleurs penser qu'il suffisait de savoir que c'était théoriquement réalisable.

Résolution de $X^2 - 10X + 9 = 0$

(voir planche 1).

1) Construction de $\sqrt{P} : 1.P = (\sqrt{P})^2$.

2) Représentation de $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$:

aire ACDF = $\left(\frac{S}{2}\right)^2$ et aire BCDE = aire GCIH = $(\sqrt{P})^2 = P$

d'où aire ABEF = $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$.

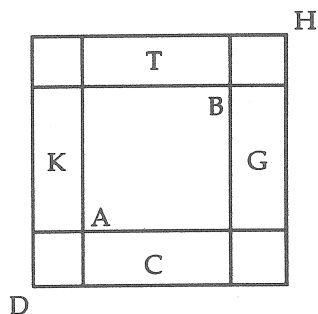
3) Quadrature de $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$:

aire ABEF = $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$ = aire JKEL = $\left(\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}\right)^2$.

4) Application de la proposition 5 du Livre II.

Al Khwarizmi résout dans le *Hisab al Jabr wa'l Muqabala* (vers 830) le problème suivant :

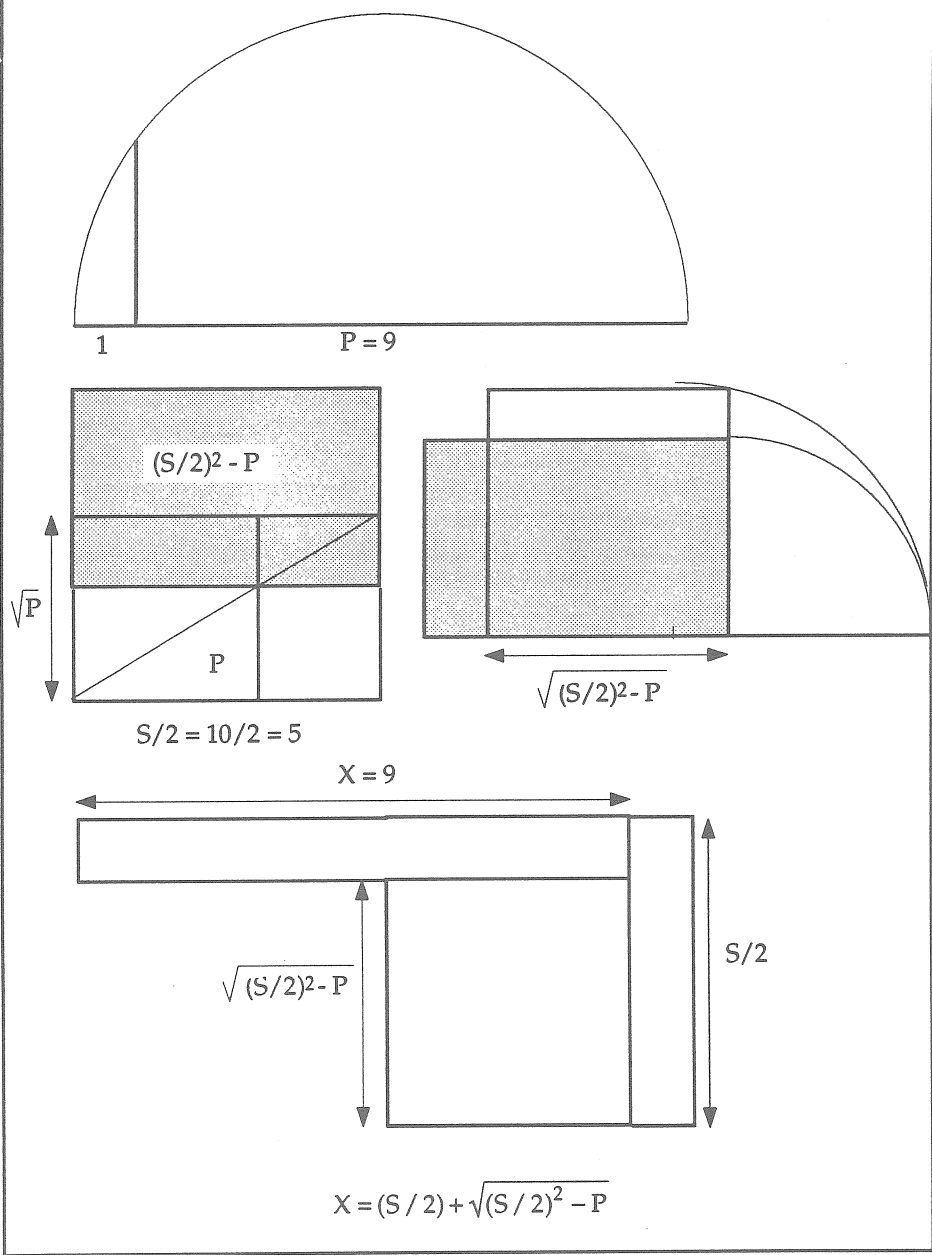
"Un carré et dix racines sont égaux à trente-neuf Dirhems."
["dirhem" signifie "constante"].



Il s'agit, pour nous, de résoudre l'équation $X^2 + 10X = 39$, X est le côté du carré intérieur (de diagonale [AB]). Ce carré est complété par les rectangles C, G, T et K. Ils ont pour longueur celle du côté du carré intérieur et pour largeur 2,5 (le quart du "nombre" des racines, i. e. du coefficient de x), cela représente une surface de $X^2 + 4 \cdot (2,5 \cdot X) = X^2 + 10X$. Si l'on complète la figure par les quatre carrés de coin, d'aire totale $4 \cdot (2,5)^2 = 25$, on obtient le grand carré de diagonale DH.

Comme on veut avoir $X^2 + 10X = 39$, l'aire du grand carré doit mesurer : $39 + 25 = 64$, et son côté : 8, et par conséquent : $X = 8 - 2 \cdot (2,5) = 3$.

PLANCHE 1. - Résolution de $X^2 - 10 X + 9 = 0$.



Cette méthode de résolution du problème ne mène qu'aux solutions positives. On constate d'autre part une nuance avec la méthode d'Euclide, vue auparavant. Alors que la question était un problème de construction et que sa résolution se faisait par une représentation effective des solutions, on ne peut, dans la méthode d'Al Khwarizmi, effectuer une construction qui conduirait à exhiber une ou plusieurs solutions avant de connaître ces solutions par un calcul.

*
* *

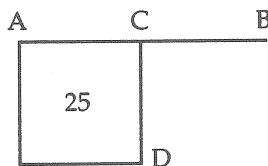
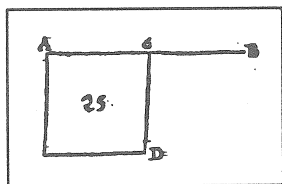
Jérôme Cardan : une initiative essentielle.

Nous voici arrivés au XVIème siècle : Jérôme Cardan (1501-1576) publie son *Ars Magna* (1545) dans lequel apparaît une initiative qui dépasse les pratiques antérieures. Reprenant des problèmes d'un type analogue à ceux d'Euclide, il en amorce la résolution sur le mode classique. Mais les données qu'il s'est fixées ne permettant pas la construction, il passe alors outre. Et, changeant de registre, il continue comme nous l'avons vu avec Al Khwarizmi, sous une forme théorique qui le mène à de nouveaux nombres sophistiqués, les racines carrées de nombres négatifs, qu'il présente dans les termes suivants au chapitre XXXVII :

"Règle II.

Je donne un exemple : si on vous dit, partage 10 en deux parties dont le produit est 30 ou 40, il est évident que ce cas ou question est impossible. Néanmoins nous le résoudrons de cette manière : divisons 10 en deux parties égales faisant chacune 5 ; multiplié par lui même cela donne 25. De 25 soustrait le produit lui-même : 40. Cela, comme je vous l'ai enseigné dans le chapitre sur les opérations dans le sixième livre, laisse un reste m : 15.

La racine de ceci ajoutée et puis soustraite de 5 donne les parties qui multipliées entre elles produisent 40. Celles-ci, par conséquent, sont $5p : \mathfrak{R}_x m : 15$ et $5m : \mathfrak{R}_x m : 15$.²



² $m : 15$ signifie -15 ; $5p : \mathfrak{R}_x m : 15$ et $5m : \mathfrak{R}_x m : 15$ signifient $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.

Preuve.

Qu'une vraie signification de cette loi peut être donnée clairement. Soit le segment AB, que nous dirons être 10, qui doit être divisé en deux parties dont le rectangle doit être 40.

Maintenant, comme 40 est le quadruple de 10, nous voulons obtenir quatre fois AB en entier. Par conséquent construis le carré AD sur AC la moitié de AB. De AD soustrais quatre fois AB, sans porter d'attention particulière à ce nombre. S'il y a un reste, sa racine doit être ajoutée et retranchée de AC, la moitié de AB, te montrant alors les parties [en lesquelles AB devait être divisé]. Même lorsqu'un tel reste est négatif, on doit néanmoins imaginer $\Re_x m : 15$ comme étant la différence entre AD et le quadruple de AB, laquelle doit être ajoutée et soustraite de AC pour trouver ce qui était cherché.

C'est $5p : \Re_x v : 25m : 40$ et $5m : \Re_x v : 25 : m40$ ou $5p : \Re_x m : 15$ et $5m : \Re_x m : 15$.³

En multipliant $5p : \Re_x : m15$ par $5m : \Re_x m : 15$, $5p : \Re_x m : 15$
les parties imaginaires étant perdues, $5m : \Re_x m : 15$
cela donne $25m : m : 15$ qui est $p : 40$.

Par conséquent le produit est 40. $25m : m : 15$ quid est 40.

Toutefois la nature de AD n'est pas la même que celle de 40 ou de AB parce qu'une surface est éloignée de la nature d'un nombre ou de celle d'une ligne quoique très proche de cette dernière. Ceci en vérité est sophistiqué, cette quantité est vraiment imaginaire car les opérations ne peuvent être réalisées avec elle comme avec un pur nombre négatif, ni comme avec les autres nombres. Nous ne pouvons pas plus la trouver en ajoutant le carré de la moitié du nombre [donné] au nombre du produit et, à ou de la racine carrée de cette somme en ajoutant ou retranchant la moitié de ce qui doit être divisé."⁴

Ce texte donne la "résolution de l'équation du second degré" définie par la donnée de la somme des racines 10 ("divise 10 en deux parties") et par leur produit ("dont le produit est 30 ou 40"); en notation actuelle, il s'agit de l'équation : $X^2 - 10X + 40 = 0$.

La résolution de Cardan se termine par cette construction inachevée, et nous voici à la rupture. La construction géométrique traditionnelle ne suffit plus pour rendre compte de ces quantités nouvelles avec lesquelles il vient d'effectuer un calcul. Ce premier calcul très simple va être rapidement suivi par ceux de Bombelli qui témoignent d'une maîtrise très rapide des techniques opératoires. Mais surtout, en les utilisant pour trouver des solutions aux équations du troisième degré, Bombelli donne un fondement à la réalité des nouvelles quantités utilisées.

³ Dans " $5p : \Re_x v : 25m : 40$ ", le v symbolise les parenthèses en notations modernes, ce qui donne $5 + \sqrt{(25 - 40)}$

⁴ Cardan, J. : *Ars Magna*, 1545. Chap. XXXVII, f° 66r. Traduit du latin par l'auteur de l'article.

Dès lors la construction géométrique inachevée de Cardan suggère une question, qui sera ouvertement posée beaucoup plus tard :

Quelle représentation géométrique pour les imaginaires ?

*
* *

PLANCHE 2. Une page manuscrite de Bombelli.

*A*ncora si può procedere nella equazione di questo Caplo in un' altro modo co-
me se si haue ad agguagliare $x^3 + 15x = 125$: pigliarsi il cotto de le cose,
che è 5. cubasi fa 125. et questo si cava del quadrato della metà del num.^o che è
4, restara o m. 121, che de questo pigliata la Radice, dirà $\sqrt{121}$, che ag-
giunta con la metà del numero, fara
Eguale a 15 p. 4. $2. p. 310 m. 121$, che pigliatone il co-
accor cubico, et aggiunto col suo residuo
fara $312 p. 310 m. 121 / p. 312 m. 310 m. 121$,
et tanto uale la cosa: Et benché questo modo si
possa più tosto chiamar sofistico, che alim^o
come fu detto innanti nel Capitolo
de Confi; et h' d. eguali a cose,
che pure nell' operationi seoue
senza difficoltà niuna, et assai
uolte si troua la ualuta de la
Cosa per numero, come questo, et
ha creatore; che l' Creatore di

5
5
25
125
310 m. 121

2
4
125
310 m. 121

Soma 310 m. 121 / qua 310 m. 121
312 p. 310 m. 121 / p. 312 m. 310 m. 121
Creatore 2 p. 310 m. 1 / p. 2 m. 310 m. 1
2 m. 310 m. 1

Somma 4: et tanto uale la Cosa.

Ceux qui calculent.

Pour témoigner du décalage entre le nombre complexe-outil de calcul et le nombre complexe-objet géométrique voici deux courts extraits. Le premier est extrait du manuscrit de Bombelli, l'*Algebra* (1572) où apparaît la résolution de l'équation de l'équation $X^3 = 15X + 4$ dont la solution 4 est obtenue par l'intermédiaire de $\sqrt{-121}$ ($\mathcal{R}_x 30 m.121$), (cf. planche 2.)

Le second est de Jean Le Rond d'Alembert, dans sa *Reflexion sur la cause generale des vents* (1747); il y démontre que toute expression complexe, quelle qu'elle soit, peut se mettre sous la forme $A + B\sqrt{-1}$ (cf. planche 3.)

PLANCHE 3. Une page imprimée de D'Alembert.

2°. Que $[a + b\sqrt{-1}]^g + h\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$,

Car faisant varier A & B , aussi-bien que a & b , & prenant les différentielles Logarithmiques, on a $(g + h)\sqrt{-1} \times$

$$\frac{da + db\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{dA + dB\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}}; \text{ c'est-à-dire (n. 1. art. pref.)}$$

$$\frac{AdA + BdB + (ADB - BDA)\sqrt{-1}}{AA + BB} =$$

$$\frac{gada + gbdb - ahdb + bhda}{aa + bb} +$$

$$\frac{(hada + bbdb + gadb - gbda)\sqrt{-1}}{aa + bb};$$

$$\text{donc } AA + BB = [aa + bb]^g \times c^{-hf \frac{adb-bda}{aa+bb}}$$

$$\& \int \frac{ADB - BDA}{AA + BB} = h \log. \sqrt{[aa + bb]} + g \int \frac{adb - bda}{aa + bb}.$$

Or $\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$, & $\int \frac{ADB - BDA}{AA + BB}$ sont des expressions des

angles dont les tangentes sont $\frac{b}{a}$ & $\frac{B}{A}$: donc B & A sont les Sinus & Cosinus d'un angle dont le rayon est

$$\sqrt{[aa + bb]}^g \times c^{-hf \frac{adb-bda}{aa+bb}}, \& \text{ dont la valeur est } h$$

$$\log. \sqrt{[aa + bb]} + g \int \frac{adb - bda}{aa + bb}.$$

Même si les fondements de ces calculs ne sont pas encore solidement établis, nous voyons les imaginaires intervenir dans le calcul différentiel bien avant que l'on se soit assuré d'une quelconque interprétation géométrique. Il faudra attendre Wessel (1797) (resté méconnu) mais surtout Argand (1805) pour que la question de cette représentation, laissée en suspens par Cardan, commence à recevoir une réponse fondée.

*
* *

Les nombres complexes à la recherche d'une image.

Les trois chemins que j'ai indiqués en introduction me semblent recouvrir les différentes directions prises pour exprimer géométriquement les nombres complexes. Pour certains, comme Buée, les différentes interprétations s'appuient mutuellement, pour d'autres, comme Wallis, elles sont assez distinctes.

* * * * *

Des aires négatives.

La surface d'un carré étant mesurée par le produit de deux longueurs égales, l'idée que cela pouvait être aussi le carré d'un nombre négatif de même valeur absolue a induit la considération d'aires négatives pour donner un sens aux imaginaires.

UNE PREMIÈRE TENTATIVE, PAR JOHN WALLIS.

Après avoir imaginé des "longueurs négatives" aux côtés des positives, en les associant au fait de reculer plutôt que d'avancer, il déclare : *"Maintenant ce qui est admis pour les lignes, doit, par la même raison, l'être pour les plans"*. Cette affirmation, suffisante à ses yeux, l'autorise à introduire des surfaces négatives :

"Des Carrés Négatifs et leurs Racines Imaginaires en Algèbre.

Par exemple, supposons que dans un endroit, on gagne sur la mer 30 Acres, mais que dans un autre endroit on perde 20 Acres. Si maintenant il est demandé : combien d'Acres a-t-on gagné en tout ?

La réponse est, 10 Acres, ou + 10 (parce que $30 - 20 = 10$). Ce qui fait 1600 Perches Carrées (parce que l'Acre anglaise est égale à une surface de 40 Perches de longueur, et de 4 de large, dont l'aire fait 160 ; 10 Acres feront 1600 Perches Carrées). Représenté sous forme d'un carré cela nous donne un côté de 40 Perches de longueur ou (en admettant les racines négatives) - 40.

Mais si dans une troisième place, nous perdons 20 Acres de plus et que la même question est à nouveau posée : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être - 10 Acres (parce que $30 - 20 - 20 = -10$). Ce qui veut dire, le Gain est 10 Acres moins que rien qui est la même chose que dire : il y a une perte de 10 Acres ou 1600 Perches Carrées.

Et jusqu'ici il n'y a pas de nouvelle difficulté à apparaître ni autre impossibilité que celles que nous avons déjà rencontrées.

(En supposant une Quantité Négative ou quelque chose de moins que rien). Excepté seulement que $\sqrt{1600}$ est ambigu ; et peut être + 40 ou - 40. Et que d'une telle ambiguïté il ressort que les équations quadratiques admettent deux Racines.

Mais maintenant (en supposant cette surface Négative, - 1600 Perches, ayant la forme d'un carré) ce Carré supposé ne pourrait-il avoir un côté ? et si c'est ainsi, quel doit-être ce côté ?

Nous ne pouvons dire c'est 40 et pas plus - 40 (parce que chacun d'eux multiplié par lui-même donnera + 1600 et non - 1600) mais que c'est plutôt $\sqrt{-1600}$ (la Racine supposée d'un Carré Négatif) ou (ce qui est équivalent toutefois) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$.⁵

xxx

KÜHN, TEL QU'IL NOUS EST CONNU PAR SES DÉTRACTEURS.

Buée cite Kühn dans une note de son texte *On imaginary quantities* paru dans les *Philosophical Transactions*, édité en 1806, soit plus de quarante ans après la publication du texte de Kühn :

"Je n'ai pas cru devoir parler d'un mémoire de Mr. Kühn qui se trouve dans le 3ème tome des nouveaux Mémoires de Saint Pétersbourg, où ce professeur entreprend de construire les quantités imaginaires, parce qu'il y suppose tacitement $\sqrt{-1} = -\sqrt{1}$."

Montucla en parle dans son *Histoire des mathématiques* :

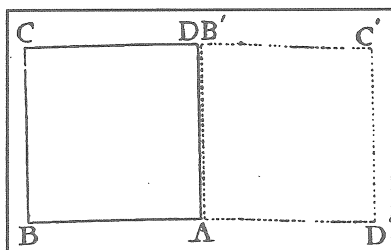
"Remarquons ici que M. Kühn, professeur de mathématiques à Dantzick, dans un ouvrage intitulé *De aequationum cubicarum resolutione*, ne donne sur ce sujet que des idées très fausses et fondées

⁵ Wallis, J. : *Algebra*, vol. 2, Chap. LXVI, Londres, 1673, p. 286 de l'éd. en latin ; pp. 265-266 de l'éd. en anglais.

bornes donne une aire algébrique négative, c'est le cas de δ . Une interprétation de β peut être donnée de la même manière.

BUÉE : UNE AIRE NÉGATIVE PAR ROTATION.

Buée s'est appuyé sur trois notions associées aux nombres imaginaires : l'orthogonalité, une rotation de $\frac{\pi}{2}$ et des aires négatives, chacune de ces notions s'appuyant sur les deux autres, comme le montre cet extrait du *Mémoire sur les quantités imaginaires* (1805) :



"Voici une autre manière de parvenir au même résultat. Soient AB, AD deux côtés contigus du carré ABCD. Supposons $AB = \pm 1$, et par conséquent $AD = \pm 1$ et mettons en A le point de départ de la description des lignes AB et AD, en sorte que AB et AD portent le même signe + ou -, et que le carré ABCD soit positif.

Faisons maintenant faire à ce carré ABCD un quart de révolution autour du point A pris comme centre. Après ce mouvement, le point B sera en B', le point C en C', et le point D en D. Chacune des lignes AB, BC, CD, DA prendra une situation perpendiculaire à celle qu'elle avait, et, au lieu du carré ABCD, on aura le carré AB'C'D'. Or A étant le point de départ il est clair que, si le carré ABCD est positif, le carré AB'C'D' doit être négatif, et vice versa. Par conséquent si $ABCD = +1^2$ dont le côté AB ou BC ou CD ou DA est $= \pm 1$, on a $AB'C'D' = -1^2$ dont le côté AB' perpendiculaire à AB, ou B'C' perpendiculaire à BC, ou C'D' perpendiculaire à DA est $= \pm \sqrt{-1}$. On voit donc que, si l'on donne à tous les côtés d'un carré des positions perpendiculaires à celles qu'ils ont, sans cependant changer leurs positions respectives et en faisant le plus petit mouvement possible (c'est à dire, en n'ajoutant pas le mouvement de translation à celui de rotation) on obtient le même résultat qu'en joignant le signe $\sqrt{-1}$ au signe de ces côtés."⁷

Si le fait que le carré AB'C'D' doit avoir une aire négative ne semble pas poser de problème à Buée, cela ne l'est pas autant pour nous. La notion

⁷ Buée, A. Q. : "Mémoire sur les quantités imaginaires" in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bulmer and Co, Londres, 1805, p. 28.

d'aire algébrique n'est peut être pas loin mais moins présente que dans les explications de Kühn.

Les travaux de Wallis, Kühn et Buée constituent les trois tentatives marquantes d'un essai d'interprétation de la racine carrée d'un nombre négatif par une aire négative. Les interprétations de Wallis et de Buée tentent de garder la trace d'une histoire, les aires négatives ne prenant un sens que par rapport à ce qui s'est passé avant. c'est le constat d'un état final dont on ne voit pas l'utilité calculatoire. L'interprétation de Kühn, pourtant très controversée, paraît beaucoup plus opérationnelle bien que lui-même n'ait pas décrit les calculs possibles.

* * * * *

Orthogonalité et moyennes proportionnelles.

WALLIS : UNE PREMIÈRE APPROCHE ARGUMENTÉE.

Wallis fut aussi un précurseur dans ce domaine, il termine le texte cité précédemment de la manière suivante :

" $\sqrt{\quad}$ implique une moyenne proportionnelle entre une Quantité Positive et une Quantité Négative. Donc de la même manière que $\sqrt{bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$ ou entre $-b$ et $-c$ (chacun d'entre eux donne par multiplication $+bc$), $\sqrt{-bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$ ou entre $-b$ et $+c$, chacun d'entre eux étant multiplié donne $-bc$. Et ceci considéré algébriquement est la vraie nature des Racines Imaginaires, $\sqrt{-bc}$." ⁸

Il confirme son point de vue dans une lettre à Roger Cotes de la même année 1673 :

"Si nous supposons avoir ainsi des carrés négatifs, nous pouvons aussi bien les supposer avoir un côté n'ayant pas en vérité une longueur positive ou négative mais une moyenne proportionnelle supposée entre un négatif et un positif. Cela peut être désigné par $\sqrt{-n}$ ou plutôt $\sqrt{-n^2}$ qui est $\sqrt{+n \cdot -n}$, une moyenne proportionnelle entre $+n$ et $-n$. Seulement, quoique dès le début j'avais l'idée de le faire, je ne l'osais pas sans précédent, j'étais un si jeune algébriste ..."

Cette notion de moyenne proportionnelle associée à l'orthogonalité était alors très près de se concrétiser, une première fois autour de la notion de sinus et de tangente :

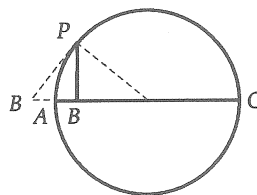
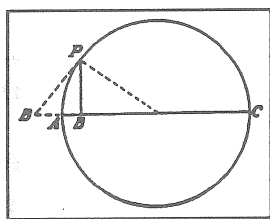
"La même chose représentée en Géométrie.

Ce qui a été déjà dit de $\sqrt{-1}$ en Algèbre, (en tant que Moyenne Proportionnelle entre une quantité Positive et une quantité Négative) peut nous être représenté en Géométrie.

Si par exemple en avant de A, je prends $AB = +b$; et en avant de cela, $BC = +c$ (faisant $AC = +AC + BC = +b + c$, le Diamètre d'un Cercle) alors il s'agit du Sinus ou Moyenne Proportionnelle $BP = \sqrt{bc}$.

Mais si en arrière de A, je prends $AB = -b$, et alors en avant de ce B, $BC = +c$; (faisant $AC = -AB + BC = -b + c$, le Diamètre du cercle) alors il s'agit de la Tangente ou Moyenne Proportionnelle $BP = \sqrt{-bc}$.

*Donc là où $\sqrt{bc}$ signifie un Sinus ; $\sqrt{-bc}$ signifie une Tangente, pour le même Arc (du même cercle) AP, du même Point P au même Diamètre AC."*⁹



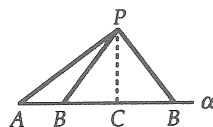
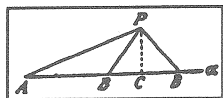
Quand B est intérieur au cercle, l'angle droit est en B et il s'agit de la racine d'un nombre positif ; quand B est extérieur au cercle, l'angle droit est en P et il s'agit de la racine carré d'un nombre négatif. La notion d'angle droit commence donc à pointer. Elle est confirmée dans le même ouvrage par un autre chapitre dans lequel Wallis se propose de résoudre le problème suivant : où placer le sommet B d'un triangle ABP dont on connaît la longueur AP, l'angle B et par conséquent la longueur PC, [PC] étant la hauteur relative au côté [AB] et la longueur PB ?

Si la longueur PB est supérieure à la longueur PC, la différence de leurs carrés nous donne le carré de BC.

"Supposons maintenant (pour illustrer davantage) un triangle de support la droite AC (de longueur indéfinie) dont le côté $AP = 20$ est donné avec (l'angle PAB et par conséquent) la hauteur $PC = 12$ et la longueur de l'autre côté $PB = 15$, avec lesquels nous devons trouver la longueur de la base AB.

⁹ Ibid., chap. LXVII, p. 267 de l'éd. en anglais.

Il est évident que le carré de AP étant 400 et celui de PC 144, leur différence 256 (= 400 - 144) est le carré de AC.



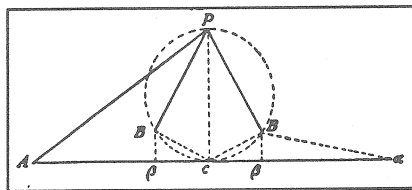
Et alors AC (= $\sqrt{256}$) = + 16 ou - 16, en avant ou après selon que nous choisissons la racine positive ou négative. Mais ici nous prendrons la positive.

Alors comme le carré de PB est 225 et celui de PC 144, leur différence est 81, c'est le carré de CB et donc CB = $\sqrt{81}$ qui est indifféremment + 9 ou - 9 et peut donc être pris avant ou après C.

Cela donne deux valeurs pour la longueur AB, à savoir AB = 16 + 9 = 25 ou AB = 16 - 9 = 7, toutes deux positives."

Ensuite Wallis se pose le problème en prenant la longueur PB inférieure à la longueur PC :

"Mais si nous supposons AP = 20, PB = 12, PC = 15, (et alors AC = $\sqrt{175}$), quand on arrive à la soustraction comme précédemment, le carré de PC (225) ôté de celui de PB (144) pour trouver le carré de BC, nous trouvons que nous devons le faire avec un reste négatif, 144 - 225 = - 81.



C'est ainsi que le carré de BC est (en vérité) la différence des carrés de PB, PC, mais une différence déficiente (celui de PC apparaissant le plus grand alors qu'il était supposé le plus petit, et le triangle PBC, rectangle, pas comme supposé en C mais en B) et alors BC = $\sqrt{-81}$.

Cela donne en fait (comme avant) deux valeurs pour AB, $\sqrt{175} + \sqrt{-81}$, et $\sqrt{175} - \sqrt{-81}$. Mais ceci fait référence à une nouvelle impossibilité en Algèbre, pas celle d'un racine négative ou une quantité moins que rien (comme avant) mais la racine d'un carré négatif. Ce qui à strictement parler ne peut être, car aucune racine réelle (positive ou négative) étant multipliée par elle-même ne donnera un carré négatif." ¹⁰

¹⁰ Wallis, J. : op. cit.

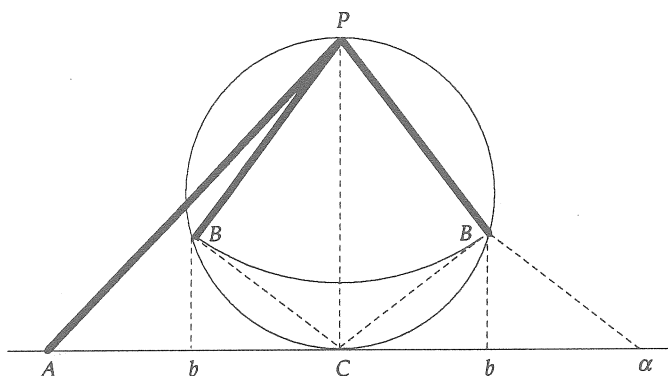
$$AP = 20, PC = 15, PB = 12.$$

$$AC^2 = AP^2 - PC^2 = (20)^2 - (15)^2 = 175, \text{ d'où } AC = \sqrt{175}.$$

$$CB^2 = PB^2 - PC^2 = (12)^2 - (15)^2 = -81 \text{ et donc } BC = \sqrt{-81} \text{ ou } -\sqrt{-81}.$$

L'angle droit n'est pas en C mais en B.

$$AB = \sqrt{175} + \sqrt{-81} \text{ ou } \sqrt{175} - \sqrt{-81}.$$

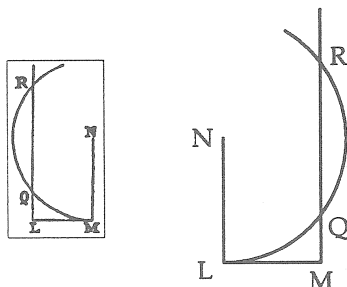


B n'est pas sur le cercle de diamètre [AC] mais au dessus. B est sur le cercle de diamètre [PC] et sur le cercle de centre P et de rayon 12 (= BP).

La notion d'angle droit est toujours présente, le point B s'extraît de l'axe réel.

DESCARTES : L'INDICATION D'UNE CONSTRUCTION IMPOSSIBLE.

On peut remarquer que l'attitude de Wallis fut tout à fait différente de celle de Descartes. Les mêmes constructions géométriques mènent Descartes à ne citer que les solutions positives, l'impossibilité d'une construction géométrique classique est l'indice de l'absence de solution. À propos de la résolution des équations du type $Z^2 = aZ - b^2$, il précise au premier livre de *La Geometrie* :



*"Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point ML ne coupe ni ne touche la ligne MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible."*¹¹ [...]

puis au troisième livre :

*"Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est à dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine."*¹²

Là où Wallis s'efforce de réaliser une construction géométrique des racines carrées de nombres négatifs, Descartes ignore cette représentation. Wallis qui avait lu Bombelli connaissait une certaine existence des imaginaires, ce qui peut expliquer ses tentatives multiples ; pour Descartes on ne peut le savoir puisqu'il ne fait aucune référence à ses sources.

FONCENEX : UNE PREMIÈRE OPPOSITION.

En ce qui concerne la perpendicularité, Foncenex, dans les *Mémoires de Turin*, fait le commentaire suivant :

"6. Si l'on réfléchit sur la nature des racines imaginaires, qui comme on sait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de construction Géométrique possible, puisqu'il n'est point de manière de les considérer, qui lève la contradiction qui se trouve entre les données immuables par elles-mêmes.

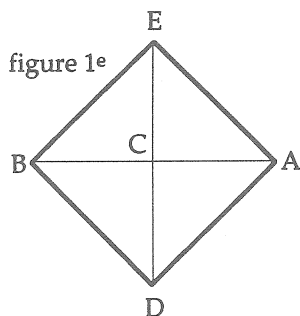
Cependant pour conserver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Auteur dont nous avons un cours d'algèbre d'ailleurs fort estimable a prétendu les devoir prendre sur une ligne perpendiculaire à celle où on les avait supposées, si par exemple (pl.1.Fig.1) on devait couper la ligne $AB = 2a$ de façon que le rectangle des parties $x \cdot (2a - x)$, fut égal à la quantité $2a^2$ on trouverait $x = a \pm \sqrt{-a^2}$, pour trouver donc cette valeur de x , qu'on prenne sur la ligne AB , la partie $AC = a$ partie réelle de la valeur de x , & sur la perpendiculaire ED les CE , CD aussi $= a$, on aura les points D , E qui résolvent le problème en ce que $AD \cdot DB$, ou $AE \cdot EB = 2a^2$, mais puisque les points E , & D sont pris hors de la ligne AB , & qu'une infinité d'autres points pris de même, auraient aussi une propriété semblable,

¹¹ Descartes, R. : *Discours de la méthode ... plus la Dioptrique, les Meteores et la Geometrie* (1ère éd. : 1637), Fayard, coll "Corpus des œuvres de philosophie en langue française", Paris, 1986, p. 338.

¹² *Ibid.*, p. 404.

il est visible que si cette construction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait absolument rien connaître, c'est cependant là une un des cas où elle pourrait paraître plus spécieuse, car le plus souvent on ne voit absolument pas comment le point trouvé pourrait résoudre la question, quelques changement que l'on se permit dans l'énoncé du problème.

Les racines imaginaires n'admettent donc pas une construction géométrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la résolution des problèmes : on devrait par conséquent s'attacher à les écarter autant qu'il est possible des équations finales, puisque prises dans quel que sens que ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme les racines négatives dont toute la contradiction consiste dans leur manière d'être à l'égard des positives." ¹³



L'auteur dont Foncenex parle sans citer le nom semble être Wallis. Pour Foncenex, il n'y a pas d'ambiguïté, pour lui les nombres imaginaires ne peuvent avoir de représentation géométrique. Son objection essentielle est la multiplicité, selon lui, des possibilités. On retrouvera cet argument très tard chez Poncelet.

EULER S'INTÉRESSE PEU À LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

Euler a beaucoup écrit et donc beaucoup écrit sur les nombres complexes ; c'est son nom qui a été retenu pour la notation exponentielle complexe du sinus et du cosinus qui est l'objet des formules dites d'Euler. Dans les *Éléments d'Algèbre* (1770, trad. fr. 1774), il donne son sentiment sur l'existence de ces nombres :

"Or puisque tous les nombres qu'il est possible d'imaginer sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou font 0 même, il est clair qu'on ne peut même pas compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, & il faut donc dire que c'est une quantité

¹³ Foncenex, D. (de) : "Réflexion sur les quantités imaginaires" in *Miscellanea taurinensis*, Turin, 1759, t. 1, p. 122.

*impossible. C'est de cette façon que nous sommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature sont impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des quantités imaginaires parce qu'elles existent purement dans l'imagination."*¹⁴

Avec une telle déclaration, tardive il est compréhensible qu'il n'ait pas cherché à représenter quelque chose qui n'existait que dans l'imagination. Pourtant dès 1749 dans son commentaire *De la controverse entre Mrs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, il déclare :

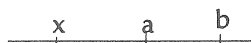
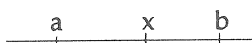
"Dans chacun des autres cas x est imaginaire ; pour le trouver on a seulement à prendre sur le cercle unité un arc g et déterminer son sinus et son cosinus. Le nombre cherché est alors $x = \cos g \pm \sqrt{-1} \sin g$."

Ce n'est rien d'autre que la représentation dans le plan complexe d'un nombre complexe de module 1 et d'argument g , $\sqrt{-1}$ étant clairement associé à l'orthogonalité. Bien qu'il n'ait pas insisté sur la représentation des nombres complexes Euler en avait une idée qui semble fort claire.

DISTANCES ENTRE POINTS SUR UNE DROITE, LA STRATÉGIE DE CARNOT.

Lazare Carnot, dans la *Géométrie de Position* (1803), a donné son interprétation des nombres négatifs et imaginaires ; pour lui un problème menant à de telles solutions a pu *"être mal mis en équation, parce que l'on aurait fait les raisonnements sur une figure qui n'était pas celle que l'on devait considérer."*¹⁵

Il donne par exemple la figure où l'on cherche un point x tel que le produit des longueurs $xa \cdot xb$ soit égal à une surface donnée à savoir la moitié du carré de ab , problème qui ressemble beaucoup à ceux que Cardan se posait deux siècles et demi plus tôt. Cela donne $xa \cdot xb = \frac{1}{2} ab^2$ et $ax + xb = ab$; la résolution de cette équation donne $xa = \frac{1}{2} ab(1 \pm \sqrt{-1})$.



¹⁴ Euler, L. : *Éléments d'Algèbre*, t. 1, *De l'analyse indéterminée*, chez Bruyset, Lyon, An III (1794-1795), art. 143, p. 104.

¹⁵ Carnot, L. : *Géométrie de position*, chez Duprat, Paris, An XI-1803, p. 54.

En plaçant x à la gauche du segment ba , le système d'équations est alors $xa \cdot xb = \frac{1}{2} ab^2$ et $xb - xa = ab$; ce nouveau système a des solutions réelles. Carnot en tire la conclusion suivante :

*"On voit que le signe imaginaire des racines d'une équation n'annonce pas plus que le signe négatif l'impossibilité de résoudre le problème... On ne doit considérer la question telle qu'elle a été résolue que comme une question partielle, dont les racines négatives et imaginaires indiquent d'autres questions plus ou moins analogues à la première, lesquelles pourraient être réunies à celles-ci dans un énoncé général auquel l'équation qu'on trouverait alors serait toujours applicable immédiatement et sans aucune modification de la règle des signes."*¹⁶

Les équations étudiées ne sont pas algébriques, elles dépendent des positions relatives des points a , b et x et les inconnues sont des longueurs : xa ou ax désignent la distance de a à x . Le point x étant placé entre a et b , une résolution algébrique donne $ax + xb = ab$ et donc $xb = ab - ax$ ou $ab - xa$. La

résolution du système nous mène alors à $xa \cdot (ab - xa) = \frac{1}{2} ab^2$,

soit $xa^2 - xa \cdot ab = -\frac{1}{2} ab^2$ ou encore $(xa - \frac{1}{2} ab)^2 = -(\frac{1}{2} ab)^2$,

d'où les deux solutions $xa = \frac{1}{2} ab(1 + \sqrt{-1})$ ou $xa = \frac{1}{2} ab(1 - \sqrt{-1})$.

Pour Carnot donc, imaginaires et négatifs n'apparaissent que parce que les problèmes ne sont pas posés comme il faut. Ce qui est juste si l'on s'en tient uniquement à des problèmes de distances entre points situés sur une même droite. Cette stratégie permet d'éviter de s'engager sur les pistes ouvertes par Cardan, Wallis et Kühn.

BUÉE : UNE AFFIRMATION DESCRIPTIVE.

Nous avons déjà rencontré Buée pour son interprétation par les aires négatives, nous le retrouvons sur l'interprétation orthogonale. Sa justification est plus une explication linguistique qu'une explication mathématique fondée. Cependant cette réflexion sur les symboles et leur relation avec les quantités, exprimée dans son *Mémoire sur les quantités imaginaires* (1805) n'en est pas moins nouvelle :

Du signe $\sqrt{-1}$.

10 - Je mets en titre, du signe $\sqrt{-1}$, et non de la quantité ou de

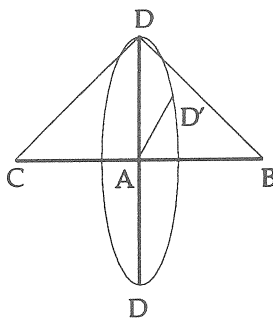
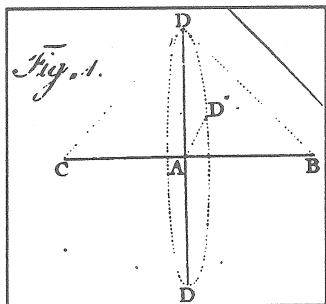
¹⁶ Ibid. p. 55.

l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; parce que $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1 ; et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif.

Mais que veut dire ce signe ? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes + et -. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est ni additive ni soustractive, ni égale à zéro. La quantité marquée par $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qui indique +, ni à celle qui indique -. Qu'est-elle donc ?

Pour le découvrir, supposons trois lignes égales AB, AC, AD qui partent toutes du point A. Si je désigne la ligne AB par + 1, la ligne AC par - 1, la ligne AD qui est une moyenne proportionnelle entre AB et AC sera nécessairement $\sqrt{-1^2}$ ou plus simplement $\sqrt{-1}$. Ainsi $\sqrt{-1}$ est le signe de la PERPENDICULARITÉ dont la propriété caractéristique est que tous les points de la perpendiculaire sont également éloignés de points placés à égale distance, de part et d'autre de son pied. Le signe $\sqrt{-1}$ exprime tout cela et il est le seul qui l'exprime.

Ce signe mis devant a (a signifiant une ligne ou une surface) veut donc dire : qu'il faut donner à a une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donnerait si l'on avait simplement + a ou - a." ¹⁷



UNE NOUVELLE CRITIQUE, ANONYME, DE L'INTERPRÉTATION PAR ORTHOGONALITÉ.

Une critique anonyme mais serrée du travail de Buée est parue dans le numéro de juillet 1808 de l'*Edinburgh Review* ; cependant le contenu de ce texte permet de penser que son auteur n'est pas novice en mathématiques ; d'ailleurs Chasles, dans une note de son *Rapport sur les progrès de la géométrie* (1870) avance que cette critique serait dûe au "célèbre professeur Playfair" ¹⁸ :

¹⁷ Buée, A. Q. : op. cit. , p. 27.

¹⁸ Chasles, M. : *Rapport sur les progrès de la géométrie* , Imprimerie Nationale, Paris,

"De même, dans le langage de l'algèbre lui-même, la partie qui est la plus curieuse, et est pour ainsi dire, l'extrême d'un extrême, est l'application des expressions imaginaires dans la démonstration de théorèmes où la vérité est parfois découverte à l'aide des seuls signes, sans la moindre assistance des idées qu'ils peuvent représenter ...

*C'est ainsi par exemple qu'il est demandé de diviser un segment de 10 pieds de long en deux parties telles que le rectangle construit avec ces deux parties doive avoir une aire de 26 pieds carrés. Il devrait apparaître rapidement que la chose demandée est impossible à réaliser c'est à dire qu'il n'y a aucune manière par laquelle un segment de seulement 10 pieds de long puisse être divisé de telle sorte que le rectangle construit sur les deux parties ait une grandeur suffisante pour avoir une surface de 26 pieds carrés. Le fait est que le rectangle construit avec les deux parties d'un segment donné ne peut excéder le carré du demi-segment, carré qui dans le cas présent est 25. Si nous cherchons les parties en supposant que le rectangle est de 26, nous les trouvons égales à $5 \pm \sqrt{-1}$ [...]"*¹⁹

L'article est de 1806 et il semble, pour ce passage, répondre au problème que Cardan s'était posé en 1545, soit deux siècles et demi plus tôt : *"diviser un segment de longueur donnée en deux parties dont le produit excède le carré de la moitié du segment"* ; mais le plus surprenant est que, deux cent cinquante ans plus tard, le point de vue de certains n'ait pas évolué. Cardan apparaissait même plus ouvert puisqu'il ne tranchait pas sur l'impossibilité du problème et laisse une piste ouverte en affirmant qu'il s'agit d'un problème de nature différente. Playfair poursuit en ces termes :

*"Quoique la géométrie n'ait pas de caractère qui exprime l'impossibilité, cela peut s'exprimer par une sorte d'expression négative ou indirecte. Dans la construction générale d'un problème, la chose à trouver est généralement déterminée par l'intersection d'une courbe et d'un segment droit ou d'une courbe avec une autre. Maintenant, lorsque les conditions du problème sont telles qu'il n'y ait pas d'intersection de ces courbes, la solution est impossible. Cette incompatibilité des conditions est la même que celle qui en algèbre est signalée par le symbole $\sqrt{-1}$ ou plus généralement $\sqrt{-a}$."*¹⁹

Ce second passage qui concerne le point de vue général de l'auteur sur la question, confirme la vision fermée qu'il a des mathématiques ; pour lui les solutions imaginaires ne sont que l'expression de la fermeture d'un problème. Au lieu d'élargir le champ de la recherche, ce que Buée s'est efforcé de faire en cherchant des solutions hors du plan initialement considéré, Playfair préfère se maintenir dans le vase clos des mathématiques

1870, p. 61, note 1.

¹⁹ [Playfair, J. ?] : *Edinburgh Review*, vol. XII, 1808, pp. 306-318. Traduction de l'auteur de l'article.

balisées de son époque. Il est alors conduit à une condamnation sans rémission des travaux de Buée :

"Le papier devant nous est l'une de ces tentatives. L'auteur, quoiqu'homme ingénieux et bien que nous le reconnaissons volontiers comme un habile mathématicien, a été livré à l'inconsistance par une sorte de raisonnement métaphysique qui, nous le confessons nous même, ne sommes pas toujours apte à comprendre. Il fait la distinction entre la marque d'impossibilité, comme caractère arithmétique, et le terme d'un langage algébrique indiquant certaines opérations qui ont été réalisées. Dans le premier de ces cas, il considère le symbole $\sqrt{-1}$ comme réellement faisant état d'une impossibilité, dans le second il le considère comme quelque chose qui peut être réellement montré.

Cette distinction, dans son fondement même, nous semble être extrêmement précaire ; une expression qui dans son état le plus simple et le plus abstrait a une certaine signification radicale et primitive, ne peut, en étant appliquée à quelque chose de moins abstrait, acquérir une signification quasiment opposée et en aucune façon être analogue à ce qu'elle était plus avant..

[...]

C'est ainsi que nous le comprenons, la marque de l'impossibilité ne peut être regardée comme ayant un sens par considération arithmétique et un autre complètement opposé quand on la considère comme un terme de langage algébrique ou quand on l'applique à la géométrie." ¹⁹

Après avoir rappelé le passage où Buée explique comment il déduit que $\sqrt{-1}$ exprime le signe de la perpendicularité, Playfair déclare :

"Maintenant nous devons reconnaître que bien qu'ayant relu ces quelques lignes de nombreuses fois nous sommes incapables de trouver une force quelconque dans l'argumentation qu'elles déclarent contenir, ou de concevoir comment un homme, si érudit et si ingénieux que l'auteur, comme nous l'admettons pleinement, puisse s'être torturé un instant afin de se tromper comme cela. [...]

N'importe quelle conclusion imaginable aurait pu être obtenue, nous semble-t-il, de la même manière. Le troisième segment ne nécessite pas d'être placé à angle droit par rapport aux deux autres. Mais faisant un angle, supposons, de 120° avec le premier et de 60° avec l'autre, cela signifierait toujours une moyenne proportionnelle entre eux. Son carré serait par conséquent, suivant la méthode de raisonnement citée ci-dessus, égal à $+1 \times -1 = -1$; de sorte que le segment lui-même serait égal à $\sqrt{-1}$, et ceci, $\sqrt{-1}$, ne signifierait pas la perpendicularité, ou la situation dans laquelle le segment fait des angles adjacents égaux mais celle dans laquelle il fait l'un de ses angles égal au double de l'autre.

*Ces arguments sont aussi justes les uns que les autres et aucun d'eux, bien sûr, n'est d'une valeur quelconque."*¹⁹

ROBERT ARGAND, UNE PREMIÈRE TENTATIVE DE FONDEMENT :
l'Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (1806).

C'est à la suite d'un article de J.-F. Français, professeur à l'École Impériale d'Artillerie et du Génie, paru en 1813 dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, dites de Gergonne (t. IV), qu'Argand déclare être l'auteur de l'Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques qu'il avait publié anonymement en 1806. La modestie de Robert Argand transparaît tout au long de son écrit ; à la suite d'un rappel sur le sens des nombres négatifs, il s'empresse d'ajouter :

*"Au reste, on ne s'est nullement proposé de donner ici des principes plus rigoureux ou plus évidents que ceux qu'on trouve dans les Ouvrages traitant ce sujet ; on a eu simplement pour but de faire deux remarques sur les quantités négatives."*²⁰

Plus loin, dans une note concernant les termes nouveaux qu'il se propose d'introduire, il renchérit de précaution :

*"Il a été remarqué plus haut que les rapports qu'on dit exister entre les lignes, en vertu des directions auxquelles elles appartiennent, ne peuvent être regardées, quant à présent, que comme hypothétiques. On est donc fort éloigné de prétendre que les dénominations proposées dans cet article soient propres à remplacer celles que l'usage a consacrées ; si on les emploie ici, c'est qu'en général il convient d'éviter de se servir de termes dont la signification propre soit contradictoire avec les idées qu'on veut exprimer, même lorsqu'il s'agit de supposition."*²¹

Enfin il termine son essai en exprimant à la fois la conscience qu'il a des limites de son travail mais aussi des enjeux que ce travail représente pour le fondement des théories mathématiques :

"La méthode dont on vient d'exposer l'essai repose sur deux principes de construction, l'un pour la multiplication, l'autre pour l'addition des lignes dirigées ; et il a été observé que, ces principes résultant d'inductions qui ne possèdent pas un degré suffisant d'évidence, ils ne pouvaient, quant à présent, être admis que comme

²⁰ [Argand, R.] : Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris : chez Vve Blanc, 1806, art. 2, p. 4.

²¹ Ibid., art. 7, p. 14, note.

des hypothèses, que leurs conséquences ou des raisonnements plus rigoureux pourront faire admettre ou rejeter." ²²

Le titre choisi par Argand va au cœur du sujet, en ce qu'il annonce clairement l'objectif : représenter géométriquement les imaginaires. Si l'on excepte le texte de Wessel (1797), c'est la première fois qu'apparaît aussi nettement, dans le domaine de la représentation géométrique des complexes, la volonté d'une argumentation structurée. Argand s'appuie sur des définitions et des propriétés rappelées ou établies dans l'*Essai*, d'autre part il rédige des démonstrations étayées. Il commence par une définition des lignes en grandeur et en direction, ce qui correspond aujourd'hui à la notion de représentant de vecteur dans le plan.

Voici le passage essentiel où il donne un sens géométrique aux imaginaires, tout en étant conscient de la faiblesse de son raisonnement inductif :

"Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues [rapport des longueurs de deux segments], on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: 1 : -1 \quad [\text{plus un est à plus un comme moins un est à moins un}],$$

$$+1 : -1 :: -1 : +1 \quad [\text{plus un est à moins un comme moins un est à plus un}].$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est à dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : x :: x : -1.$$

On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de 0 la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif ; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de grandeur absolue avec l'idée de direction, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives ?" ²³

En se souvenant des critiques émises par Playfair à l'encontre de Buée dans l'*Edinburgh Review*, on peut constater l'importance du pas effectué. Le cadre des nombres positifs n'étant pas suffisant pour résoudre certains

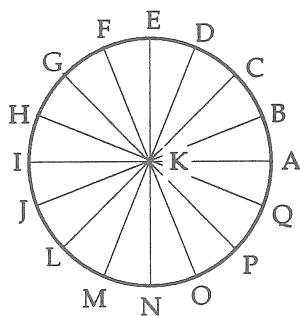
²² Ibid., art. 32, p. 60.

²³ Ibid., art. 3, pp. 5-6.

problèmes, on a introduit les nombres négatifs et on a placé leurs représentants géométriques sur une droite, ceux-ci étant imaginaires par rapport au cadre initial. Les positifs et les négatifs étant insuffisants pour résoudre de nouveaux problèmes, cela entraîne la création d'une nouvelle espèce de nombres, imaginaires par rapport au cadre initial de ces problèmes mais bien réels dans le nouveau cadre. Au lieu de se restreindre aux nombres déjà connus comme voulait l'imposer Playfair, Argand s'engage dans la construction de nouveaux nombres. La résolution du problème induit le dépassement des nombres usuels au lieu que ce soient ces nombres qui qualifient le problème d'insoluble. Le premier point de vue ouvre le champ de la découverte, le second masque toutes les perspectives et empêche tout progrès.

Argand définit les lignes en grandeur et direction de la sorte :

"Si on prend un point fixe K et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne $\overline{KE}$, perpendiculaire aux précédentes et considérée comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$.



En effet la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme + 1 et - 1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.²⁴

²⁴ Ibid., art. 4, pp. 6-7.

C'est dans ce passage que réside un sujet à polémique. Le lien entre construction géométrique et réponse algébrique n'est pas fermement établi, Argand se contentant de déclarer que les lignes qu'il décrit correspondent à "ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ ". En fait il s'agit de quelque chose qui n'est pas aussi ordinaire qu'il l'affirme.

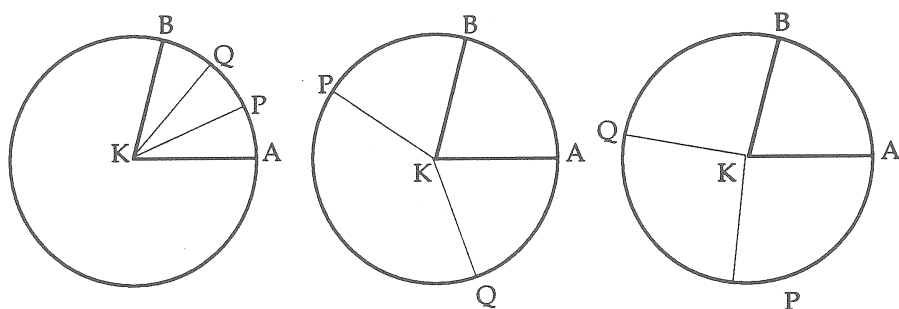
D'un point de vue algébrique, sa question revenait à vouloir résoudre l'équation $x^2 = -1$ ou $\frac{x}{1} = \frac{-1}{x}$, ce qu'il n'a d'ailleurs écrit nulle part.

Sa manière géométrique de présenter les choses lui permet de l'éviter mais aussi de se poser la question du sens géométrique d'une telle équation, l'orthogonalité est surtout affirmée. Dire qu'une première direction est à une deuxième comme cette deuxième est à une troisième repose plus sur une analogie avec la proportionnalité des nombres que sur un sens propre ; ce point sera l'objet d'une des critiques de Servois examinées plus loin.

Cependant sa volonté d'être objectif et son perpétuel souci de fonder quelque chose en délimitant avec soin le travail qui reste à faire, est à nouveau attesté par une note annexe dans laquelle il rappelle :

"Mais, quoique ce principe soit, en quelque manière, une extension de celui sur lequel on établit le rapport géométrique entre une ligne positive et une ligne négative, on ne le présente ici que comme une hypothèse, dont il restera à établir la légitimité, et dont, jusque-là, les conséquences devront être confirmées par une autre voie." ²⁵

À partir de là, Argand construit toutes les représentations dont il a besoin ; il lui suffit d'avoir fait accepter la méthode mise en place pour associer des représentations géométriques à $\sqrt{-1}$ et à $-\sqrt{-1}$:



"S'il s'agit par exemple de construire deux moyennes $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$ entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports

²⁵ Ibid., art. 4, p. 9, note.

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB},$$

il faut que l'on ait

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB},$$

le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases $\overline{AK}$, $\overline{PK}$, $\overline{QK}$. Or on peut y parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales : 1° l'angle AKB ; 2° l'angle AKB , plus une circonférence ; 3° l'angle AKB , plus deux circonférences."²⁶

Si Argand s'était arrêté là, sa création de lignes dirigées exprimées par des nombres complexes n'aurait eu qu'un intérêt descriptif. L'aspect principal est qu'il définit deux opérations sur ces lignes dirigées, opérations géométriques associées à des opérations sur les nombres complexes associés. Après l'addition de deux lignes dirigées, devenue notre "relation de Chasles", Argand construit ainsi le produit de deux lignes dirigées :

"Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit : c'est encore une multiplication logarithmique. Il n'est pas nécessaire de montrer que cette règle a lieu pour un nombre quelconque de facteurs.

Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\overline{KB}$, $n.\overline{KC}$, ... m , n , ... étant des coefficients ou lignes primes positives ; et le produit sera

$$(mn \dots) . (\overline{KB} . \overline{KC} \dots) = (mn \dots) . \overline{KP}." ²⁷$$

Il manque ici à Argand la définition de la nature de l'opération géométrique qu'il exécute par son produit de lignes dirigées. Quel est l'effet géométrique de ce produit, quel sens lui donner afin de le rendre opérationnel ? Il laisse à d'autres la résolution de cette question.

PARTISANS ET OPPOSANTS : FRANÇAIS, GERGONNE, SERVOIS.

C'est dans les *Annales de Mathématiques*, dites de Gergonne que le texte anonyme de Robert Argand a été cité la première fois et c'est dans ces mêmes *Annales* qu'une discussion sur la validité du mémoire a été entreprise. J.-F. Français, professeur à l'École Impériale d'Artillerie, se range du côté d'Argand dans les *Nouveaux principes de géométrie de position et interprétation géométrique des symboles imaginaires* (1813-1814) :

"Je dois au surplus, à la justice de déclarer que le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M.

²⁶ Ibid., art. 4, pp. 8-9.

²⁷ Ibid., art.11, p. 21.

Legendre à feu mon frère, dans laquelle ce grand géomètre lui fait part (comme d'une chose qui lui a été communiquée, et comme objet de pure curiosité) du fond de mes définitions ... Je désire que la publicité que donne aux résultats auxquels je suis parvenu puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaître, et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-même sur le sujet." ²⁸

Servois, professeur aux Écoles d'Artillerie, déclare de son côté :

"J'accueille ordinairement avec ferveur, mon vieux camarade, les idées nouvelles en fait de doctrine, surtout lorsqu'elles se présentent sous la garantie de noms connus honorablement par d'autres travaux scientifiques. Loin donc que je songe à donner aux idées de MM. Argand et Français sur les imaginaires les qualifications odieuses d'inutiles et d'erronées, etc, qui ne prouveraient autre chose que peu de courtoisie et peu de prévention de ma part, je désire vivement, au contraire, qu'elles puissent acquérir avec le temps ce qui leur manque sous le rapport de l'évidence et de la fécondité." ²⁹

Enfin, Gergonne écrit :

"Il serait sans doute fort à désirer que l'esprit humain procédât comme on le fait dans les Traités ex professo et sur les bancs des écoles ; mais malheureusement cela n'arrive presque jamais ... M. Servois compterait-il pour peu de voir enfin l'analyse algébrique débarrassée de ces formes inintelligibles et mystérieuses, de ces non-sens qui la déparent et en font, pour ainsi dire une sorte de science cabalistique ? J'ai toute sorte de raison pour ne point lui prêter cette pensée. Or c'est là principalement ce que M. Argand a eu en vue, comme il nous l'apprend lui-même au commencement de son opuscule." ³⁰

Avec ces trois déclarations le ton est donné, le deux derniers prenant bien soin de décrire ce qu'ils ne pensent pas, mettant ainsi une ambiguïté voulue dans leurs déclarations de bonnes intentions.

Français, qui a signalé le premier le texte d'Argand, a repris les idées de ce dernier mais avec une notation différente :

"Définition 1. Nous appellerons rapport de grandeur le rapport numérique entre les grandeurs de deux droites et le rapport de position l'inclinaison des deux droites l'une vers l'autre, ou l'angle qu'elles font entre elles. Pour comparer deux droites données à la fois de grandeur et de position, il faut considérer non seulement le rapport que leurs

²⁸ Français, J. F. : "Nouveaux Principes de Géométrie de Position et Interprétation géométrique des symboles imaginaires", in *Annales de Mathématiques*, t. IV, 1813-1814, p. 71.

²⁹ Servois, F. J. : article dans les *Annales de Mathématiques*, t. IV, 1813-1814, p. 364.

³⁰ Gergonne, J. D. : article dans les *Annales de Mathématiques*, t. IV, 1813-1814, p. 365.

grandeurs font entre elles, mais encore comment ces droites sont placée l'une relativement à l'autre ; c'est ce qu'exprime notre rapport de position.

Définition 2. Nous dirons que quatre droites sont en proportion de grandeur et de position, lorsqu'entre les deux dernières il y aura même rapport de grandeur et même rapport de position qu'entre les deux premières.

Exemple : Ainsi pour avoir la proportion de grandeur et de position $a_\alpha : b_\beta : : c_\gamma : d_\delta$, il faut que l'on ait à la fois $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $\beta - \alpha = \delta - \gamma$.³¹ [Note : a_α désigne un segment de longueur a faisant avec le demi-axe des abscisses positives un angle α .]

La relation simultanée entre longueurs (nos modules) et angles (nos arguments) amène Français à décrire en une seule fois une proportion de grandeur et de position :

"Corollaire 1er. Il suit de là que, dans une proportion de grandeur et de position, les grandeurs absolues des droites sont en proportion géométriques, tandis que les angles que font ces mêmes droites avec l'axe des abscisses positives sont en proportion arithmétique."³²

Avec cette seule phrase le produit des nombres complexes est défini. Toute la suite est une succession de définitions, de théorèmes avec leurs démonstrations qui nous sont facilement accessibles :

" $+a = a.e^{0\pi\sqrt{-1}}$, $-a = a.e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$, [...]. Il suit du théorème précédent que l'on a aussi $a_\alpha = a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$, [...]. Les quantités dites imaginaires sont donc toutes aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position, qui est perpendiculaire à cette dernière."³³

Quant à Servois, ses objections portent d'abord sur le point faible de la théorie, cité par Argand lui-même, l'interprétation de $\pm a\sqrt{-1}$ comme moyenne de position entre celles de $+a$ et $-a$ et leur représentation perpendiculaire à celle-ci :

" $\pm a\sqrt{-1}$ Moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$ est évidente, et l'autre $\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de position entre $+a$ et $-a$ n'est pas prouvée, et renferme précisément le théorème dont il s'agit.

³¹ Français, J. F. : *op. cit.*, p. 62.

³² *Ibid.*, p. 62.

³³ *Ibid.*, p. 66.

*Cela est d'autant plus fâcheux que tout le reste du Mémoire porte sur ce premier théorème. Quant à M. Argand, il s'est contenté d'appuyer cette proposition sur une sorte d'analogie et de convenance. Or il me paraît que, lorsqu'il s'agit de fonder une doctrine extraordinaire, opposée en quelque sorte aux principes reçus, dans une science telle que l'analyse mathématique, la simple analogie n'est point un moyen suffisant."*³⁴

La seconde objection porte sur ce qui a déjà été dit, une utilisation en géométrie très limitée de cette construction géométrique des imaginaires :

"Pour moi, j'avoue que je ne vois encore, dans cette notation, qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. [...]

*Comment, en effet, peut-on dire d'une droite dirigée qu'elle est double, triple ...d'une autre ?"*³⁵

Les deux derniers points de la critique sont des plus intéressants car ils portent en partie des clarifications qui seront données bien plus tard sur la nature de la relation entre un complexe, sa représentation géométrique et la notion de transformation à associer aux complexes :

"La grandeur d'une droite et sa position, c'est à dire l'angle qu'elle fait avec un axe fixe, sont deux quantités qu'on peut regarder même comme homogènes ; or comment les liera-t-on pour en faire un nouvel être appelé ligne droite de grandeur et de position, ou plus brièvement droite dirigée ? Voilà une question qui ne me paraît pas encore assez approfondie. [...]

La table à double argument que vous [Français] proposez, étant appliquée sur un plan conçu divisé par points ou carreaux infinitésimes, de manière qu'à chaque carreau correspondît un nombre qui en serait l'indice ou la cote, serait très propre à indiquer la grandeur et la position des rayons vecteurs qu'on ferait tourner autour du point ou carreau central portant ± 0 ; et il est bien remarquable qu'en désignant par a la longueur d'un rayon vecteur, par α l'angle qu'il ferait avec la ligne réelle ..., $-1, \pm 0, +1, \dots$, par x, y les coordonnées rectangles du point extrême opposé à l'origine, rapporté à cette ligne réelle comme axe des x , la cote de ce point serait exprimée par $x + y\sqrt{-1}$, et par conséquent, à cause de $x = a \cos \alpha$, $y = a \sin \alpha$, Par $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$. Ainsi voilà une nouvelle interprétation géométrique de la fonction $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$, qui vaut bien, à mon avis, celle de MM. Argand et Français ..." ³⁶

³⁴ Servois, F. J. : op. cit., p. 364.

³⁵ Ibid., p. 365.

³⁶ Ibid., p. 367.

Donnons enfin le point de vue de Gergonne :

"La moyenne proportionnelle de grandeur entre $+a$ et $-a$ est et ne saurait être que a ; car, lorsqu'on parle uniquement de grandeur, on doit faire abstraction des signes, et $\sqrt{(a.a)} = a$. Mais lorsqu'on prend pour la moyenne $\pm a \sqrt{-1}$ on annonce par la même qu'on a eu égard aux positions inverses de $+a$ et $-a$; la moyenne doit donc conserver l'empreinte de cette considération ; elle est donc, par le fait même, une moyenne de position aussi bien que de grandeur : l'interprétation du symbole $\pm a \sqrt{-1}$ est donc réduite à chercher une droite de laquelle on puisse dire qu'elle est posée par rapport à $+a$, comme $-a$ est posée par rapport à elle.

Mr Servois trouve évident que, dans l'ancienne doctrine, $\pm a \sqrt{-1}$ soit moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$. Il me paraît pourtant difficile de concevoir qu'une négation de grandeur, un être de raison, puisse être moyen entre deux grandeurs effectives." ³⁷

WARREN : UNE CONVICTION EMPORTÉE PAR LA PHYSIQUE

John Warren est l'auteur d'un ouvrage *A treatise of the geometrical representation of the square roots of negative quantities* (1825), dans lequel il parvient à des conclusions du même type que celles d'Argand, Mourey et d'autres, par une autre approche. C'est une approche physique, la composition des mouvements en dynamique. En février 1829, dans une communication aux *Philosophical Transactions* il rappelle son cheminement :

"Il y a quelques années mon attention fut attirée par ces quantités algébriques, communément appelées racines impossibles ou quantités imaginaires ; il apparaissait extraordinaire que les mathématiciens soient capables au moyen de ces quantités de poursuivre leurs recherches, à la fois dans les mathématiques pures et appliquées, et d'arriver à des résultats qui sont en accord avec ceux obtenus par un autre procédé indépendant, et ceci bien que la nature de ces quantités soit entièrement inconnue, et même que leur existence réelle soit niée. Une chose était évidente en ce qui les concerne, c'étaient des quantités apte à subir des opérations algébriques analogues aux opérations réalisées sur ce qui est appelé quantités possibles et de produire des résultats corrects." ³⁸

Après avoir exprimé son point de vue sur l'état des définitions et

³⁷ Gergonne, J. D. : op. cit., p. 365.

³⁸ Warren, J. : "Considérations sur les objections élevées contre la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives", in *Philosophical Transactions*, Londres, 1829, p. 241.

principes fondamentaux de l'algèbre qu'il estime déficients, il rappelle la démarche qui l'a amené à la publication de son ouvrage :

"[...] et j'ai trouvé que, par la considération de l'algèbre appliquée purement à la géométrie, de tels principes et définitions pouvaient être obtenus. Les principes fondamentaux et définitions auxquels je suis arrivé étaient ceux-ci : que toutes les lignes droites tracées dans un plan donné, à partir d'un point donné, dans quelque direction que ce soit, peuvent être représentées algébriquement, à la fois en longueur et en direction ; que l'addition de telles lignes (quand elles sont exprimées à la fois en longueur et en direction) doit être effectuée de la même manière que la composition des mouvements en dynamique ; et que quatre telles lignes sont proportionnelles, à la fois en longueur et en direction, quand elles sont proportionnelles en longueur et que la quatrième est inclinée du même angle sur la troisième que la seconde sur la première. À partir de ces principes j'ai déduit que, si une ligne droite tracée dans une direction quelconque est considérée comme une quantité positive, et en conséquence son opposée comme une quantité négative, une ligne droite à angle droit sur la direction positive ou négative devra être la racine carrée d'une quantité négative, et une ligne tracée dans une direction oblique sera la somme de deux quantités, la première positive ou négative, et l'autre, la racine carrée d'une quantité négative.

Ceci peut être illustré par l'exemple suivant :

(1) Qu'il soit demandé de trouver la longueur et la direction de $\sqrt{-1}$;

D'abord trouver la direction de $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ est évidemment une moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1 ; maintenant par la définition de la proportion, [...] si quatre lignes sont proportionnelles, la quatrième est inclinée sur la troisième du même angle que la seconde sur la première [...]. Une moyenne proportionnelle entre deux lignes quelconques doit se situer dans une direction telle qu'elle soit bissectrice de l'angle de l'inclinaison d'une de ces lignes sur l'autre, [...] $\sqrt{-1}$ est bissectrice de l'angle d'inclinaison de -1 sur $+1$. Mais -1 est incliné sur $+1$ à 180° , [...] $\sqrt{-1}$ est incliné sur $+1$ à 90° ;

Ensuite trouver la longueur de $\sqrt{-1}$; comme $\sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1 , et que $+1$ et -1 sont égaux en longueur, $\sqrt{-1}$ est égal en longueur à $+1$ ou -1 ;

[...] $\sqrt{-1}$ est une ligne égale en longueur à $+1$, et tracée à angle droit sur $+1$;

(2) De là, si a est une quantité positive, une ligne égale en longueur à a et tracée à angle droit sur $+1$ sera égale à $a\sqrt{-1}$." ³⁹

³⁹ Ibid., p. 242.

On le constate, Warren ne s'entoure pas de précautions théoriques. Il affirme simplement ou pour le moins appuie son argumentation sur des définitions non étayées, une analogie avec la composition des mouvements en physique et des affirmations d'évidence. Si l'on songe aux objections opposées à Argand et à Français, bien qu'il dise que les exemples donnés suffisent à l'illustration sa définition, le travail de Warren ne pouvait non plus rester sans objections. Il les relève dans la même communication aux *Philosophical Transactions* :

*"Depuis la publication de ce travail, plusieurs objections ont été opposées à la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives. Premièrement, que les racines impossibles sont simplement des signes d'impossibilité ; que si dans la solution d'une question quelconque nous arrivons à une équation dont les racines sont impossibles, l'unique conclusion à en tirer est que la question renferme une impossibilité et par conséquent qu'il est absurde de supposer que les racines carrées d'une quantité négative puissent avoir une existence réelle. Une seconde objection est qu'il n'y a pas de lien obligatoire entre algèbre et géométrie et par conséquent qu'il est impropre d'introduire des considérations géométriques dans des questions purement algébriques et que la représentation géométrique, s'il en existe une quelconque, ne peut être que seulement analogique et ne peut être une vraie représentation des racines. Une troisième objection est que cette représentation géométrique, même si c'est une représentation correcte des racines, est simplement un sujet de curiosité, et ne peut être d'une utilité quelconque aux mathématiciens."*⁴⁰

La réponse de Warren à la première objection est que lorsque l'on trouve des solutions fractionnaires ou négatives à un problème qui ne peut avoir de telles solutions on n'en conclut pas pour autant que les nombres fractionnaires ou négatifs n'ont pas d'existence réelle ; il n'y a donc aucune raison d'avoir une attitude différente vis à vis des nombres imaginaires. Pour illustration il propose la résolution d'un problème de physique concernant un corps décrivant une circonférence sous l'action d'une force centripète qui varie inversement à la puissance n de la distance au centre et la recherche de la hauteur à laquelle on doit lâcher un autre corps de sorte qu'il arrive sur la circonférence avec la même vitesse.

La réponse à la deuxième objection repose sur une démonstration purement algébrique du lien racines imaginaires et cercle :

"[...] À partir de ce qui vient juste d'être prouvé, il apparaît qu'il y a une relation entre les propriétés du cercle et les quantités communément appelées racines impossibles, ce qui veut dire entre géométrie et algèbre. Par conséquent l'introduction de considérations

⁴⁰ Ibid., p. 243.

géométriques dans les questions purement algébriques est tellement éloignée d'être impropre que c'est dans la géométrie que nous devons regarder (et à la géométrie aussi isolée que nous le savons à présent), si nous désirons arriver à une théorie vraie respectant les racines carrées des quantités négatives. [...]

À la seconde partie de cette objection : que la représentation géométrique peut seulement être analogique et pas une vraie représentation algébrique des racines ; il peut être répondu que la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives repose sur le même fondement que la représentation géométrique ou toute autre représentation des quantités négatives elles-mêmes." ⁴¹

À la suite de ceci, Warren entreprend un examen des principes concernant les nombres négatifs, les démonstrations et les raisonnements insatisfaisants qui ont été appliqués afin de leur donner une représentation et une existence réelle. S'appuyant sur cela, il justifie à nouveau les représentations géométriques imaginaires.

Pour la troisième objection, à propos de l'inutilité pratique de la représentation géométrique des imaginaires, il estime qu'il n'est pas nécessaire de s'étendre :

"Dans les travaux qui ont été récemment écrits, soit sur les mathématiques pures soit sur les mathématiques appliquées, on peut observer la grande utilisation qui est faite des racines impossibles, et nous devons impartialement conclure que si ces quantités rendent de si grands services aux mathématiciens, même quand il en ignorent la nature réelle, elles seront d'un plus grand service encore quand la vraie théorie les prenant en compte sera connue. Nous devons raisonnablement nous attendre à ce que notre connaissance en algèbre augmentera quand la nature des racines impossibles sera aussi bien connue que celle des racines possibles. Ce sont là les avantages généraux qui dérivent de la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives ; mais il y a un avantage particulier et cela est d'une grande importance. Il est issu de la définition de l'addition ; l'addition est réalisée de la même manière que la composition des mouvements en dynamique, c'est pourquoi toute question de dynamique où le mouvement des corps a lieu dans un plan devient une pure question d'algèbre, les lois du mouvement étant contenues dans les définitions de l'algèbre." ⁴²

Il semble que ce qui a le plus marqué Warren, et il le répète plusieurs fois, c'est la similitude de la composition des mouvements et de l'addition des complexes, en fait la relation entre un complexe et le vecteur dont il est l'affixe et c'est sur cet aspect utilitaire qu'il essaye d'emporter la conviction

⁴¹ Ibid., p. 245.

⁴² Ibid., p. 250.

de ceux qui pourraient douter de la réalité des imaginaires. La question est d'ailleurs fort importante pour lui puisqu'il écrit à nouveau une communication qui sera lue en juin 1829. Warren qui connaît alors les travaux de Mourey, a relevé que ce dernier annonce qu'il a traité dans un plus grand ouvrage manuscrit, de la représentation géométrique des expressions $a\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, $\sin(\sqrt{-1})$, etc., expressions auxquelles il s'intéresse aussi sous une autre notation. Par conséquent, les travaux de Mourey n'ayant pas été publié à ce sujet, il décide :

"Ce papier, donc, a pour intention de continuer mon "Traité sur la représentation géométrique des racines carrées de quantités négatives" et l'objectif est d'étendre la représentation géométrique aux puissances des quantités dont l'indice inclut les racines carrées de nombres négatifs." ⁴³

Avant de développer ses démonstrations qui sont essentiellement analytiques et algébriques il tient encore à réaffirmer :

"Art.1. Def: Les Mathématiciens appliquent les mots "possibles" et "impossibles" aux quantités algébriques, la première signifiant quantité positive ou quantité négative; la suivante, des quantités comprenant les racines carrées des quantités négatives. Dans ce sens, par commodité, ces mots seront utilisés dans ce qui suit. Il doit être compris en même temps que par le mot "impossible" il ne doit être impliqué aucune impossibilité, mais au contraire, que les quantités appelées impossibles ont une existence réelle et sont capables d'être représentées géométriquement." ⁴⁴

LEFÉBURE DE FOURCY : UNE INTERPRÉTATION PERSISTANTE.

Les notions se précisent, les difficultés s'aplanissent mais dans de nombreux esprits l'impossibilité de la représentation géométrique persiste. Exemple parmi beaucoup d'autres, Lefébure de Fourcy précise dans ses *Leçons de géométrie analytique* (1827) :

"Si l'on emploie l'algèbre pour résoudre un problème de géométrie, et qu'on prenne pour inconnue une distance comptée sur une ligne donnée, à partir d'un point fixe situé sur cette ligne, les valeurs négatives de cette inconnue devront être portées dans un sens opposé à celui où l'on a supposé que cette distance était placée.

Au reste, ce principe n'est pas du nombre de ceux qu'on peut démontrer à priori: on y parvient par analogie ou par extension

⁴³ Warren, J.: "Sur la représentation géométrique des puissances dont l'exposant implique les racines carrées des quantités négatives", in *Philosophical Transactions*, Londres, 1829, p. 340.

⁴⁴ *Ibid.*, p. 340.

d'idées, et les applications viennent ensuite le confirmer.

18. Nous allons encore nous servir du même problème pour prémunir le lecteur contre une erreur grave, dans laquelle on tombe quelque fois. Nous n'avons jamais supposé que le point cherché pût se trouver du côté BY, parce que pour un point quelconque N situé de ce côté, la distance AN étant plus grande que AB et que BN, on ne saurait avoir $AN^2 = AB \cdot BN$, ainsi que l'exige la question. Mais admettons, pour un moment, que cette remarque ait échappé, et qu'on veuille déterminer le point N d'après la condition $AN^2 = AB \cdot BN$, et qu'on prenne pour inconnue la distance BN. Faisant $BN = x$, on aura $AN = a + x$, et l'équation à résoudre sera

$$(a + x)^2 = ax$$

$$\text{ou } x^2 + ax + a^2 = 0,$$

et l'on tire $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2}$, valeurs qui sont imaginaires, et qui

indiquent une impossibilité. Mais on se tromperait grossièrement si l'on concluait que l'impossibilité se trouve dans la question même; car ce qui a été dit plus haut montre le contraire. L'impossibilité réside ici tout entière dans la supposition que le point cherché soit placé du côté BY. Pour nous en assurer, cherchons s'il existe de l'autre côté BX quelque point qui puisse remplir la condition de l'énoncé. On désignera encore par x la distance du point B à ce point inconnu; sa distance au point A sera $a - x$ ou $x - a$, selon que ce point inconnu sera avant ou après le point A. Dans le premier cas on aura l'équation

$$(a - x)^2 = ax$$

et dans le second $(x - a)^2 = ax$

Ces deux équations reviennent toutes les deux à l'équation

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0.$$

Par conséquent celle-ci donnera en même temps le point M et le point M'. En effet, si on résout, on trouve

$$x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

valeurs qui sont réelles positives.

On voit donc que, lorsqu'on cherche une distance inconnue, l'erreur de la supposition n'est pas toujours rectifiée par des valeurs négatives, ainsi qu'on pourrait le penser: cette erreur n'a été indiquée, dans l'exemple ci-dessus, que par des expressions imaginaires." ⁴⁵

Pour Lefébure comme pour Carnot, les imaginaires n'ont pas de signification géométrique, ils ne sont, comme les nombres négatifs, que l'indication d'un problème mal posé.

⁴⁵ Lefébure de Fourcy : *Leçons de Géométrie analytique*, Paris, 1827, pp. 21-22.

GAUSS : UNE REPRÉSENTATION DANS LE PLAN

Gauss a publié beaucoup de lettres et s'est peu attardé sur la représentation géométrique des complexes, cependant c'est lui qui introduit une notation qui va nous rester, i à la place de $\sqrt{-1}$.

Il considère depuis longtemps que les imaginaires ont une existence objective ; il rappelle que dès 1799 il y a fait allusion. La description qu'il donne ci-après dans les *Annonces savantes de Goettingue* (1831) est voisine de la définition du plan complexe :

"Mais les quantités imaginaires, anciennement et parfois encore de nos jours, quoiqu'à tort, nommées impossibles, furent encore plutôt tolérées qu'entièrement naturalisées, et elles apparaissent plutôt comme un vain jeu de symboles auquel tout substratum imaginaire est dénié sans hésitation par des gens qui ne songent pourtant pas à déprécier la riche contribution dont ce jeu de symboles a enrichi le trésor des relations entre elles des quantités réelles.

Il y a nombre d'années déjà que l'auteur a considéré cette importante partie des mathématiques sous un tout autre point de vue, à savoir que pourtant une existence objective peut être assignée aussi bien aux valeurs imaginaires qu'aux valeurs négatives. Mais si jusqu'à ce jour il n'a pas cru à l'opportunité de publier ses vues, cependant les lecteurs que cela intéresse peuvent en trouver trace dans le mémoire sur les équations paru en 1799, et encore dans le mémoire couronné, sur les Transformations des surfaces. [...] .[...]

Les mathématiciens font entièrement abstraction de la nature des objets et ne s'occupent que de leurs relations. Il n'ont à faire que l'énumération et la comparaison de leurs rapports, et la ressemblance qui existe entre les relations marquées par + et - peut être certainement étendue aux quatre éléments +1, -1, +i, -i.

Ces relations ne peuvent être intuitives que par une représentation géométrique, et pour le faire le plus simplement possible il n'y a pas de raison d'employer une autre manière que la manière carrée, c'est à dire que dans un plan illimité l'on trace des carrés au moyen d'un double système de lignes parallèles se coupant à angle droit, et on prend les points d'intersection comme symboles. Chacun de ces points est entouré de quatre points adjacents, et si l'on désigne le rapport du point A à n'importe lequel des points voisins par +1, le sens du symbole -1 est déterminé par cela même : après on peut prendre pour +i lequel on voudra des deux autres points, c'est à dire qu'on peut marquer par -i le passage au point de droite ou à celui de gauche. La distinction entre la droite et la gauche, dès que nous avons fixé à volonté ce que nous appellerons en avant et en arrière dans le plan, au dessus et au dessous par rapport aux deux côtés du plan, est complètement déterminée par elle-même, bien que nous ne puissions faire partager à d'autres notre intuition qu'au moyen d'objets matériels

existants." 46

Dans cette définition voisine de celle du plan complexe, Gauss établit un positionnement géométrique de chaque point et de ses points voisins, sans s'étendre aux autres et l'orthogonalité est seulement justifiée pour des raisons de simplicité et d'absence de raison de faire autrement ... Ce qui manque principalement c'est l'utilité calculatoire, il y voit d'abord un support géométrique à l'intuition mais aucune indication sur des calculs ayant un sens géométrique.

* * * * *

Le point de vue des transformations.

CASPAR WESSEL : UN TRAVAIL MÉCONNU

Bien que ses travaux aient été longtemps méconnus et que somme toute il n'aient pas eu d'influence sur la représentation géométrique des complexes, il serait injuste d'ignorer Caspar Wessel car ses travaux n'en restent pas moins remarquables et très modernes. Ils posent même une énigme : par quels cheminements, à la suite de quelles études et comment dans un tel contexte d'isolement relatif, Caspar Wessel a-t-il pu en arriver à un écrit d'une telle qualité mathématique ? Né en 1745 en Norvège, il travaille comme arpenteur pour l'Académie des Sciences du Danemark de 1764 à 1805, il prend part en particulier à la triangulation et la cartographie de ce pays et c'est uniquement dans ce domaine qu'il est reconnu. N'étant pas membre de l'Académie Royale, c'est le conseiller d'État Tetens, président de la section des Sciences qui présente en 1797 l'*Essai sur la représentation analytique de direction* par Caspar Wessel, arpenteur.

Comme l'a été ultérieurement celui de Robert Argand, ce texte aurait pu être un tournant dans l'approche de la représentation des imaginaires, imaginaires que Wessel désignait par "impossibles". En effet il marque une rupture dans la méthode. Alors que jusqu'à la fin du XVIII^{ème} siècle, y compris chez Buée, en partant de $\sqrt{-1}$ et de nombres complexes on essayait d'adapter une représentation géométrique, Wessel puis Argand s'intéressent à la "*représentation analytique de direction*" pour le premier et à la notion de "*lignes en direction*" pour le second. Ces deux expressions recouvrent en fait l'approche du même concept, celui de vecteur et c'est en élaborant des méthodes et des règles de calcul sur des objets caractérisés par une longueur, une direction et un sens que Wessel rencontre $\sqrt{-1}$.

46 Gauss, K. F. : "*Compte-rendu du « Theoria residorum quadraticorum, commentio secunda »*", in *Annales savantes de Goethingue*, avril 1831.

Dès la première ligne de son ouvrage il fixe ses objectifs :

*"Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est à dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu."*⁴⁷

Quand à la réalité des opérations sur les imaginaires il la situe aussi dès le début :

*"Il n'est donc pas absurde d'exiger que l'on fasse en géométrie les opérations dans un sens plus étendu qu'en arithmétique. On admettra aussi sans difficulté qu'il sera possible de faire varier d'une infinité de manières la direction des segments. Par là précisément (et on le démontrera plus loin) non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour chercher le possible, mais encore on pourra exprimer la direction des segments de manière aussi analytique que leur longueur, sans que la mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nouvelles règles."*⁴⁸

Ensuite Wessel définit les opérations qu'il effectue entre segments, en tenant compte à la fois de leur longueur et de leur orientation, opérations qui sont celles que nous définissons actuellement pour les vecteurs :

*"Pour ajouter deux segments, on suit la même règle : on les combine de façon que l'extrémité du premier coïncide avec le premier point du second, l'extrémité de celui-ci avec le premier point du troisième, etc ; puis on joint par un segment le point où le premier segment commence au point où le dernier se termine, et on appelle ce dernier segment la somme de tous les segments donnés."*⁴⁹

Ce n'est autre que la relation de Chasles.

Enfin, arrivons en à la définition du produit des segments :

"Chapitre IV. Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est à dire que :

1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils

⁴⁷ Wessel, K. : *Essai sur la Représentation analytique des directions*, Copenhague, 1897, p. 3.

⁴⁸ *Ibid.*, p. 4.

⁴⁹ *Ibid.*, p. 8.

puissent être placés dans le même plan que l'unité positive ;

2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;

3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de l'origine la même unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs." ⁵⁰

Par ces définitions, Wessel décrit une similitude, l'un des segments étant l'objet transformé, l'autre définissant le rapport et l'angle de la similitude. Associant alors des couples d'unités opposés aux couples de directions orthogonales opposées, l'application de ses définitions préliminaires l'amène à trouver une interprétation de $\sqrt{-1}$:

"Chapitre 5. Désignons par +1 l'unité rectiligne positive, par + ϵ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de +1 sera égal à 0°, celui de -1 à 180°, celui de + ϵ à 90° et celui de - ϵ à -90° ou à 270° ;

et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura : (+1) . (+1) = +1, (+1) . (-1) = -1, (-1) . (-1) = +1, (+1) . (+ ϵ) = + ϵ , (+1) . (- ϵ) = - ϵ , (-1) . (+ ϵ) = - ϵ , (-1) . (- ϵ) = + ϵ , (+ ϵ) . (+ ϵ) = -1, (+ ϵ) . (- ϵ) = +1, (- ϵ) . (- ϵ) = -1.

Il en résulte que ϵ est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires." ⁵¹

L'objet de l'essai de Wessel était en particulier la détermination des polygones plans et des polygones sphériques mais en quelques pages de définitions préliminaires il avait décrit tout ce qu'il y avait à savoir sur la représentation géométrique des complexes, leur forme algébrique et leur forme trigonométrique.

BUÉE : UN PROBLÈME DE NOTATION POUR LES ROTATIONS.

C'est John Warren qui a attiré l'attention sur un passage de l'essai de Buée. Il déclare dans les *Philosophical Transactions* en 1829 :

"Il donne alors des exemples pour illustrer sa théorie : certains de ces exemples je ne peux les comprendre ; d'autres sont plus clairs, mais dans presque tout cela il y a un grand défaut : il est obligé d'introduire

⁵⁰ Ibid., p. 9.

⁵¹ Ibid., p. 9.

une limitation arbitraire dans la question, de sorte à faire que la réponse soit en accord avec la racine de l'équation. De ceci surgit la nécessité d'une définition géométrique générale de la proportion ou de la multiplication pour rendre la théorie complète. Il s'efforce aussi de prouver que $(\sqrt{-1})^n = n \sqrt{-1}$, ceci je ne peux le comprendre. Toutefois, en dépit de ces défauts ou erreurs, les principes généraux sur lesquels il raisonne sont bons." ⁵²

Si l'on examine de plus près les explications de Buée, la seule difficulté de compréhension vient d'une notation identique pour les rotations d'un quart de tour et l'angle de ces rotations, $\pi/2$.

" $(\sqrt{-1})^n = n \cdot T(\pi/2) = n \sqrt{-1}$. Cette équation toute singulière qu'elle peut paraître n'est que l'expression algébrique du principe posé au commencement de ce mémoire, savoir, que $\sqrt{-1}$ est le signe de la perpendicularité, abstraction faite de toute longueur de ligne. En effet le premier membre $(\sqrt{-1})^n$ marque que le signe $\sqrt{-1}$ de la perpendicularité est répété n fois, c'est à dire est attaché n fois à la même ligne 1. Le 2d. membre $n \cdot T(\pi/2)$ marque que l'arc $\pi/2$ qui est la mesure de la perpendicularité est tracé n fois." ⁵³

En effet dans le plan complexe une rotation de $\pi/2$ est caractérisée par le produit d'une affixe, rapportée au centre de la rotation, par $i \cdot (\sqrt{-1})$ et donc pour n rotations successives on a un produit par i^n soit $(\sqrt{-1})^n$ et cela correspond à une rotation d'un angle de $n \cdot \pi/2$ (ce que Buée note par $n \cdot T(\pi/2)$). Pour Buée, ce $n \cdot \pi/2$ peut être noté $n \cdot \sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ désignant indifféremment l'angle droit et le quart de tour. Buée avait pratiquement mis en évidence l'utilisation des imaginaires pour exprimer une rotation.

Ceci est confirmé d'ailleurs quelques lignes plus loin :

" $(\sqrt{-1})^{\pm \frac{n}{m}} = \pm \frac{n}{m} \cdot T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ exprimeront l'inclinaison $\frac{\pi}{2m}$ répétée n fois." ⁵⁴

Ceci n'est rien d'autre que l'expression d'une rotation d'un angle sous-multiple de $\pi/2$.

⁵² Warren, J.: "Considérations sur les objections élevées contre la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives", in *Philosophical Transactions*, Londres, 1829, p. 252.

⁵³ Buée, A. Q.: "Mémoire sur les quantités imaginaires" in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bulmer and Co, Londres, 1805, p. 72.

⁵⁴ *Ibid.*, p. 73.

MOUREY : UNE TENTATIVE DE REFONDATION.

La vraie theorie des quantites negatives et des quantites pretendues imaginaires, tel est le titre de l'ouvrage de Mourey, daté de 1828. Titre sans ambiguïté : la théorie est affirmée vraie et le vocable imaginaire remis à sa place. Si l'ouvrage d'Argand débute par un "*Salut fraternel aux citoyens du monde*", celui de Mourey est dédié aux "*Amis de l'evidence*". D'autre part si le terme imaginaire apparaît dans le titre, il n'est utilisé que trois fois dans l'ouvrage pour signaler au passage les rapports avec les "anciennes" théories. On ne sait que peu de chose sur Mourey dont le projet est immense : donner de nouveaux fondements aux mathématiques. L'ouvrage est annoncé comme partie d'un ensemble plus vaste et la difficulté de la tâche déclarée :

"Je réclame à cet égard, non seulement l'indulgence du lecteur, mais pour ainsi dire sa coopération ; je ne puis espérer quelque succès qu'autant qu'il voudra bien m'aider par ses propres réflexions, et par un peu de zèle pour le triomphe de la vérité. Le système que je propose est tout neuf ; il rencontrera des ennemis puissants : des idées qui règnent depuis des siècles, des habitudes invétérées, des espèces de droits acquis... Sans doute il finira tôt ou tard par triompher, comme doit le faire tout ce qui est bon et vrai ; mais est-il réservé à son auteur de jouir de ce triomphe ?" ⁵⁵

L'originalité de Mourey consiste à introduire le mouvement dans ses définitions. Cela l'amène sous un vocabulaire différent du notre, nouveau à son époque, à définir les vecteurs et les transformations du plan et les opérations associées.

Pour les vecteurs :

"Nous appellerons ligne directive ou chemin, la ligne considérée comme représentant un voyage, c'est à dire comme conduisant dans un seul sens. Il est bon de concevoir le chemin comme fluant, et indiquant par son flux le sens dans lequel il conduit." ⁵⁶

Pour les rotations :

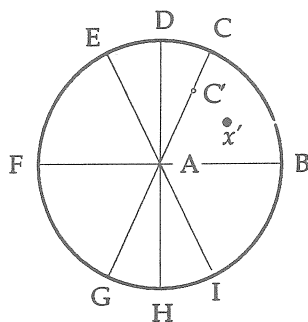
"Angle directif. Verseur. ar."

Appelons r l'angle compris entre AB et AC ; les deux chemins AB et AC ayant même origine et même longueur, AB deviendrait AC, si on le faisait tourner sur son origine A, de droite à gauche, en lui faisant décrire l'angle r . Pour dire faire tourner, nous dirons verser. Ainsi verser AB de r , ou par r , c'est faire tourner AB sur son origine, de

⁵⁵ Mourey, C. V. : *La vraie Théorie des Quantités négatives et des Quantités prétendues imaginaires*, Mallet-Bachelier, Paris, 1828, préface, p. X.

⁵⁶ *Ibid.*, p. 4.

*manière à lui faire décrire l'angle r , donc
AB versé par $r = AC$.*



C'est ce que nous exprimerons ainsi $AB = AC$; lisez. par abréviation AB versé $r = AC$.

L'angle r est alors le verseur de AB, et le rapport directeur de AC à AB est donc l'angle qui conduit de AB en AC.

*L'angle considéré comme un verseur, ou comme rapport directeur est une espèce de chemin conduisant d'une direction à une autre ; en un mot c'est un angle directif."*⁵⁷

Ces définitions lui permettent de construire des nombres directifs dont on voit immédiatement qu'ils sont nos nombres complexes :

"DES NOMBRES DIRECTIFS. Si l'on prend AB pour unité, on aura $AB = 1$; $AD = 1_1$; $AF = 1_2 = -1$; $AH = 1_3 = -1_1$. On aura pareillement $AC = 1_{\frac{1}{2}}$... Ainsi, on aura une infinité de nombres de même longueur que l'unité, mais différents par leurs directions.

Puis sur chaque direction, l'on aura une infinité de nombres concurrents entre eux, mais différents par leurs longueurs."

⁵⁸

On en arrive alors à ce que nous appellerions une similitude :

"MULTIPLICATEUR DIRECTIF. Tout nombre directif se forme de l'unité directive, par multiplication, division et version (j'appelle ainsi l'opération par laquelle on verse un chemin)..[...]

Donc, en général, pour multiplier par b_s , il faut multiplier par b , et verser par s . Ainsi,

$$a_r \times b_s = (a_r \times b)_s = ((ab)_r)_s = ab_{r+s}$$

Ainsi par exemple,

$$1_{\frac{1}{2}} \times 1_{\frac{1}{2}} = 1_1$$

⁵⁷ Ibid., p. 19.

⁵⁸ Ibid., p. 25.

$$1_1 \times 1_1 = 1_{1+1} = 1_2 = -1.^{59}$$

[ce que nous écrivions $i.i = i^2 = -1$]

Tout est dit, la notation b_i n'ayant rien de plus troublant que be^{is} . Pour conclure un point de vue général et l'une de rares fois où Mourey utilise le terme imaginaire :

"Par rapport à cette définition de la multiplication, je ferai la même observation que j'ai faite relativement à celle de l'addition ; il ne faut pas la regarder comme une vérité à démontrer, mais seulement comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention si elle est utile ; or, elle est très utile, car il en résulte comme on le verra, que toutes les formules de l'algèbre expriment des quantités réelles, et qu'elles s'appliquent très avantageusement à la Géométrie (et par conséquent à la Mécanique). [...]"

Corollaires. Les racines de l'équation $x^2=1$,
sont $1 = AB$, et $1_2 = -1 = AF$.

En général, les racines de l'équation $x^n=1$, sont $1, 1_{\frac{1}{n}}, 1_{\frac{2}{n}}, 1_{\frac{3}{n}}, \dots, 1_{\frac{(n-1)}{n}}$. Donc l'équation $x^n=1$ a un nombre de racines réelles égales à n , ni plus ni moins.

*Voilà les racines de l'unité. Voilà les quantités prétendues imaginaires."*⁶⁰

FAURE : UN MÉMOIRE QUI PRODUIT.

En 1845, un *Essai sur la theorie et l'interpretation des quantites imaginaires* est publié par A. Faure. Dans ce premier mémoire il étudie la variation des fonctions algébriques d'une variable complexe :

*"La variable x peut varier et dans sa longueur et dans son inclinaison, c'est à dire, que son extrémité peut parcourir le plan des xy. Nous allons voir les variations qu'éprouve une fonction (algébrique) de cette variable, ou bien ce que parcourt son extrémité."*⁶¹

Il examine par exemple l'effet des variations de x sur sa puissance 7 et au cours de ses explications il introduit le mouvement :

*"Nous voyons donc ici, ainsi que le disait Monge un spectacle mouvant dans une figure de géométrie, ou nous pouvons suivre de l'œil les variations simultanées de la variable et de la fonction."*⁶²

⁵⁹ Ibid., p. 30.

⁶⁰ Ibid., p. 45.

⁶¹ Faure, A. : *Essai sur la Théorie et l'Interprétation des Quantités imaginaires*, Bachelier, Paris, 1845, p. 19.

⁶² Ibid., p. 20.

La suite de l'essai est une approche des fonctions complexes que Faure soumet en 1846 à la Société Philomatique ainsi que les premières feuilles imprimées d'un second mémoire où il se propose de rechercher la dépendance entre les chemins parcourus par les extrémités de deux variables inclinées et liées entre elles par une équation générale telle que $F(x,y) = 0$. La discussion qu'entraîne ces feuilles même entre autre les conséquences suivantes résumées par Transon :

*"2° Comme exemple des figures planes à l'aide d'équations entre coordonnées tournantes, on donnait, d'une part, la discussion de l'équation du premier degré $y=ax+b$, qui renferme toutes les lois des figures homothétiques, si le coefficient a est supposé sans inclinaison propre, et celle des figures semblables et non homothétiques dans le cas contraire ..."*⁶³

On pourrait dire qu'en 1846 la question de la relation entre complexes et transformations est pratiquement réglée. Il faudra pourtant encore attendre pas mal de temps pour cela "rentre dans les mœurs" mathématiques.

G. BELLAVITIS : LES CHOSES CONTINUENT À SE PRÉCISER LENTEMENT.

C'est Houël qui a fait connaître en France les travaux de Bellavitis par une publication dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1869 alors que les premiers travaux publiés en italien datent de 1835.

"1. Carnot, dans sa Géométrie de position, parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la direction des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir des résultats cherchés par l'application de quelques lois générales.

Le désir de Carnot est complètement réalisé depuis trente cinq ans par le Calcul des équipollences dû au génie inventif de M. Bellavitis. Bien que cette méthode féconde ne soit pas encore connue dans notre pays, cependant les principes sur lesquels elle repose ont été établis pour la première fois en France, il y a plus de soixante ans, par Argand, et développés ensuite à diverses reprises par les travaux de Français, de Mourey, de Saint-Venant, de Cauchy ...

2. La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants :

⁶³ Transon, A. : "Des Quantités prétendues imaginaires et de leur Emploi pour la Transformation des Figures", in *Bulletin de la Société Philomatique*, 1865, p. 61.

1° L'abondance des théorèmes, qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan dès que l'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds ;

2° La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes : pour les questions mêmes qui passent pour difficiles, la méthode fournit directement des solutions plus courtes que celles que l'on avait découvertes par des combinaisons artificielles de théorèmes géométriques ..." ⁶⁴

Comme nous l'avons déjà vu chez Mourey, Bellavitis propose une théorie de ce qui prépare celle des vecteurs.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES (1854).

"Principes de la méthode des équipollences

Définitions et notations préliminaires.[...]

2. Nous indiquerons une droite, comme d'habitude, au moyen de deux lettres qui marquent ses extrémités ; toutefois, on doit remarquer qu'on exprime ainsi, non seulement la grandeur de la droite, mais bien sa grandeur et sa direction à la fois. C'est pourquoi par exemple, il n'est pas permis de remplacer MQ par QM. Ces deux notations MQ et QM indiquent bien une même droite, mais prise en sens opposés. La confusion de l'une avec l'autre serait pareille à celle d'une quantité positive avec une quantité négative d'égale valeur ; nous verrons en effet, que MQ est identique avec -QM, et -MQ avec QM. Cette convention est souvent admise dans la Géométrie moderne.

3. Pour qu'une droite puisse être substituée à une autre, il ne suffit pas qu'elle lui soit égale (c'est à dire d'égale grandeur) ; mais il faut en outre que ces deux droites soient parallèles et dirigées dans le même sens. Deux droites qui ont de telles relations sont dites équipollentes ; et, dans le calcul des équipollences, on peut toujours substituer à une droite une autre qui lui soit équipollente. [...]

D'après cela, il pourrait se produire quelque confusion en employant, dans un même calcul, des équipollences telles que AB - DC, et de simples égalités telles que AB = EF ; aussi, pour indiquer la grandeur d'une droite indépendamment de son inclinaison, se servira-t-on de la caractéristique gr.. Par exemple

$$\text{gr.}AB = \text{gr.}EF$$

indiquera que les longueurs de ces droites sont égales." ⁶⁵

⁶⁴ Houël, J. : "Sur la Méthode d'Analyse géométrique de M. Bellavitis", in *Annales de Mathématiques*, 1869, pp. 290-291.

⁶⁵ Bellavitis, G. : "Principes de la Méthode des Équipollences", in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854.

Les grandeurs et les orientations étant clairement définies, Bellavitis peut alors envisager des déplacements :

"48 [...] Le coefficient $\sqrt{u}$ servira à accroître l'inclinaison d'une droite de u angles droits, u étant un nombre entier ou fractionnaire. Par suite, le coefficient $\sqrt{4}$ ne produira aucun effet, c'est à dire que nous pouvons écrire $\sqrt{4} = 1$; $\sqrt{2}$ change le sens de la droite ; par exemple, $\sqrt{2}OM = OL$, ou $\sqrt{2} = -1$; Ainsi $\sqrt{}$ représente ce qui se désigne en Algèbre par $\sqrt{-1}$, et s'énonce par racine de moins un. Par contraction nous donnerons au signe $\sqrt{}$ le nom de ramuno (radice di meno di uno). Le plus souvent, au lieu de $\sqrt{u}$, nous écrirons ϵ^u , auquel cas l'angle u , au lieu d'être rapporté à l'angle droit comme unité, doit être considéré comme étant la longueur de l'arc correspondant de rayon 1.

Les analystes verront que ϵ correspond à leur $e^{\sqrt{-1}}$. [...]

49. [...] Il en résulte que $z\sqrt{u}$ représente une droite égale à z fois l'unité de longueur, et qui est inclinée de u droits sur l'origine des inclinaisons.

50. Comme complément de cette exposition des principes de la méthode des équipollences, nous énoncerons encore les règles suivantes, relative au ramuno et aux droites conjuguées ; ces règles sont des conséquences immédiates des définitions. Lorsqu'on aura à multiplier $\sqrt{u}$ par $\sqrt{v}$, on obtiendra $\sqrt{(u+v)}$, parce que pour former un produit, il faut ajouter les inclinaisons u et v . Le produit de $\sqrt{}$ par $\sqrt{}$ donnera $\sqrt{2}$ ou le coefficient -1 ; en divisant l'unité par $\sqrt{}$ on aura $-\sqrt{}$. [...] Donc :

Règle VI. $\sqrt{}$ le ramuno se calcule précisément comme se calcule en algèbre l'imaginaire $\sqrt{-1}$,"⁶⁶

L'approche de Bellavitis ne se propose pas de refonder toutes les mathématiques comme se le proposait Mourey mais on voit que la définition des objets mathématiques utilisés et la formulation des relations entre eux deviennent de plus en plus précises.

PONCELET : LA DERNIÈRE RÉSISTANCE D'ENVERGURE

Dans son *Rapport sur les progres de la geometrie*, Chasles déclare :

"Le général Poncelet, alors capitaine de génie, a fait connaître en 1817, par quelques articles insérés dans les *Annales de Gergonne*, et par des réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique, sa prédilection bien prononcée pour les recherches de pure géométrie. Il était bien inspiré, car cette voie l'a conduit à de brillantes découvertes.

⁶⁶ Ibid., p. 200.

En 1822 il mit au jour le *Traité des propriétés projectives des figures*, qui marque un pas considérable pour la science. [...]

Outre la théorie des figures homologiques, l'ouvrage de Poncelet renferme une autre méthode de transformation des figures, dans laquelle ce sont des droites qui correspondent à des points et des points à des droites. C'est la théorie des polaires réciproques, construites à l'aide d'une section conique prise arbitrairement." 67

Poncelet est un géomètre pur et n'est donc pas resté indifférent aux théories nouvelles sur l'interprétation géométrique des imaginaires. Élève de Servois, il a adopté une position semblable. Position explicable en 1816 mais maintenue jusqu'à la fin, puisqu'il les confirme dans les commentaires de son *Traité des propriétés projectives des figures* édité en 1864 :

"Je prie le lecteur de se rappeler que ces réflexions ont été écrites en 1816 pour moi seul, et sans nulle intention de les publier sous la forme qui leur a été conservée ici. C'était, comme on voit, peu après l'époque où l'auteur de la *Technie de l'Algorithmie*, fondée sur la doctrine philosophique de la soi-disant raison pure, déjà cité à la page 495 du précédent volume, essayait non sans succès, d'attaquer les écrits mathématiques de nos plus grands géomètres, défendus par M. Servois et d'autres ; ce qui a conduit de plus jeunes savants algébristes à se laisser entraîner à l'attrait de discuter, de refondre même et de démontrer à priori les plus anciennes vérités mathématiques, celles qui sont dues aux lents et pénibles progrès des siècles antérieurs." 68 [...]

"Ces deux problèmes avaient été proposés à la page 36 du même volume des *Annales*, Cahier d'août 1817 ; j'ai saisi la circonstance toute naturelle de leur solution, pour obtenir plus aisément du rédacteur la rare faveur de faire imprimer un extrait des recherches, qui m'avaient dès lors préoccupées, sur la théorie des polaires réciproques, et dont, plus tard, M. Gergonne et d'autres ont su habilement tirer un si avantageux profit, sans jamais avouer ni vouloir reconnaître l'emprunt fait aux méthodes et aux idées du présent *Mémoire* ; procédé scientifique peu honorable sans doute quand il est calculé, volontaire, mais qui, en revanche, permet, au dernier survenu, de passer de son vivant pour un esprit original et inventif, tout en accordant d'ailleurs une scrupuleuse justice aux médiocrités du jour et des temps passés." 69

Voilà pour les relations avec quelques uns des autres mathématiciens de son époque.

67 Chasles, M. : *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Imprimerie Nationale, Paris, 1870, p. 39.

68 Poncelet, J.-V. : *Applications d'Analyse et de Géométrie*, Gauthiers-Villars, Paris, 1864, p. 205.

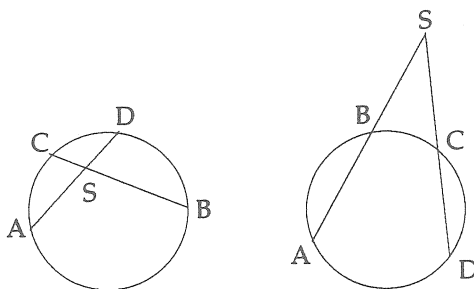
69 *Ibid.*, pp. 476-477.

La géométrie de Poncelet repose, entre autre, sur l'hypothèse de la continuité qui consiste à examiner l'évolution des figures géométriques quand des points de la figure se déplacent et étudier les incidences sur les grandeurs algébriques caractérisant la position des points :

"Nous admettrons, à priori, l'hypothèse de la continuité sans la discuter ni l'approfondir à l'avance, aussi bien que les règles anciennes et indiscutables du calcul algébrique, fondées sur le rapprochement, l'analogie logique des idées ou des résultats antérieurement acquis, et non pas simplement sur des conventions à priori et arbitraires, telles qu'on en adopte trop souvent en faveur des élèves paresseux de l'esprit. Au contraire, nous repousserons comme vaines et dangereuses toute idée préconçue, toute interprétation a priori des quantités isolées, positives, négatives et imaginaires, quelques séduisantes qu'elles puissent paraître.

Ainsi nous n'adopterons nullement, avec certains métaphysiciens algébristes, les soi-disant êtres de raison détachés de leurs attributs concrets et des signes de représentation géométrique, algorithmique ou figuratifs en langage convenu et exactement défini. Pour nous, qui admettons la génération des grandeurs simples, fussent-elles isolées, nous aurons plus spécialement à considérer le double mode de cette génération dans le sens progressif ou rétrograde, positif ou négatif (additif ou soustractif), à compter d'une origine commune, exactement indiquée et définie." ⁷⁰

Poncelet ne rejette donc pas les imaginaires mais il situe bien les limites de son acceptation et sa méthode. Un exemple simple, traité par Poncelet, permet d'illustrer cette méthode ; il s'agit de l'intersection d'un cercle par deux sécantes dont le point commun est intérieur ou extérieur au cercle :



"Au lieu de nous étendre sur cet objet, considérons en particulier (à gauche), l'angle ASB formé par la rencontre intérieure de deux cordes quelconques AD, BC d'un cercle : on a, sans discussion, en substituant d'après les principes de la Géométrie élémentaire, les arcs aux angles formés au centre du cercle par les rayons parallèles à ces cordes,

$$\text{ang. ASB ou CSD} = \frac{1}{2}(\text{arc AB} + \text{arc CD}) ;$$

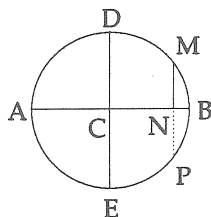
mais quand le sommet S venant franchir la circonférence d'une manière continue quelconque, se place comme dans la figure de droite, on a, au contraire,

$$\text{ang. ASB ou CSD} = \frac{1}{2}(\text{arc AB} - \text{arc CD}),$$

parce que l'arc AD est devenu inverse en passant par zéro, tandis que l'arc AB a conservé son signe primitif." ⁷¹

Cet exemple, suffisant pour comprendre la méthode de Poncelet, nous mène à un commentaire désignant une grave erreur de raisonnement, selon Poncelet, et qui est une sorte d'écho à un travail mené deux siècles plus tôt par Wallis que nous avons déjà examiné :

"En particulier, c'est une grave erreur analytique et géométrique que d'attribuer le signe négatif au second membre de l'équation $MN^2 = -AN \cdot NB$, qui exprime que l'ordonnée MN d'un cercle, perpendiculaire en un point quelconque N du diamètre AB, est moyenne proportionnelle entre les segments adjacents et opposés NA et NB de ce diamètre ;



de sorte que l'on aurait algébriquement $MN^2 = -AN \cdot NB$, $AB = NB - AN$, en attribuant, selon la convention admise en Géométrie analytique, le signe - au segment situé à gauche de l'origine et le signe + à celui de droite ; ce qui viole le principe de continuité et la loi des signes de position, tels que nous les avons définis ou entendus, et conduit, par une fausse interprétation, à une fausse extension de la règle des signes algébriques, justement combattue par Carnot, à des conséquences absurdes, qui deviennent manifestes quand on suppose le pied de l'ordonnée au centre même du cercle. En attachant trop d'importance à l'ancienne dispute relative à l'existence isolée des quantités négatives, imaginaires, etc., Mr Carnot, dans sa Géométrie de position a peut-être plutôt encouragé que détourné les esprits aventureux, d'ailleurs bien moins géomètres qu'algébristes, à s'occuper de semblables questions qui, par elles-mêmes, sont peu aptes à fortifier et agrandir le domaine de l'analyse, supposât-on qu'on admis, avec MM. Français et Argand, que le signe $\sqrt{-1}$ représente en Géométrie la perpendicularité comme le signe - y exprime l'opposition

⁷¹ Ibid., p. 195.

des distances. Au surplus, on éviterait sans aucun doute ces difficultés, ces fausses interprétations masquées par des notations symboliques et algorithmiques séduisantes, mais qui jettent comme un voile obscur sur les vérités premières de la Géométrie et de l'Algèbre, rendues par là sciences spécieuses et mystiques ; on éviterait dis-je, ces difficultés si l'on voulait bien se ressouvenir que, dans le cercle notamment, on a, en réalité, en prolongeant l'ordonnée MN jusqu'à l'extrémité P de la corde à laquelle elle appartient, non pas simplement $MN^2 = -NA \cdot NB$, mais bien $NM \cdot (-NP) = (-NA) \cdot NB$, ou $NM \cdot NP = NA \cdot NP$ sans aucun signe algébrique de position, conformément aux principes exposés ci-dessus.

Cette conclusion est même tout à fait d'accord avec les vrais principes de l'Algèbre où les signes - et $\sqrt{-1}$, n'apparaissent d'une manière détachée que dans la résolution finale des problèmes." 72

Dans une note complémentaire, Poncelet donne son opinion sur l'interprétation géométrique de $\sqrt{-1}$:

"Les signes -1 et $\sqrt{-1}$, considérés isolément et abstraction faite de leurs attributs implicites ou explicites, ont une origine purement algébrique, conventionnelle et analogique ; ils ne sauraient dériver à priori d'aucune considération purement géométrique. Cela résulte des Notes du IIIème Cahier de ce volume, où je prouve que les relations à deux termes de la Géométrie rationnelle ne comportant explicitement aucun signe de position, il est impossible d'admettre les interprétations graphiques proposées, à diverses époques, pour ces signes, notamment : que le symbole $\sqrt{-1}$ est le signe algorithmique de la perpendicularité ; en un mot, comme je l'ai dit, ces interprétations ne doivent être considérées que comme le résultat d'analogies trompeuses, quoique séduisantes, relatives à l'expression analytique des cordes ou doubles ordonnées imaginaires des coniques. [...]

Dans toute recherche mathématique, on est incontestablement en droit de poser des définitions nouvelles, quelque étranges qu'elles puissent d'ailleurs paraître, quelque contraires quelles soient aux notions généralement admises. Mais alors on a pris de toute nécessité l'engagement de raisonner juste sans sortir des définitions premières, et sans se permettre des pétitions de principe qui, admises comme vraies en général, sont opposées à ces même définitions. [...]

Dans cette note, dis-je, j'insistais principalement sur l'argumentation de M. Français, qui, imaginant dans un même plan et autour d'un point fixe ou pôle, des droites ou longueurs $a, b, c, d, \dots$, diversement dirigées et formant avec un axe fixe passant par ce pôle, des angles respectifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ prenait, pour représenter ces distances en grandeur et en direction, les expressions symboliques $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta, \dots$, et admettait que les angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, croissaient exactement en

proportion ou progression arithmétique, quand les longueurs $a, b, c, d, \dots$ suivaient elles mêmes la loi des proportions ou progressions géométriques ; ce qui implique toute la théorie des fonctions exponentielles et angulaires, déjà bien connues par les anciens travaux de Viète, de Côte, de Moivre, d'Euler, de Bernoulli, etc., relatifs à la division géométrique du cercle et à la résolution des équations à deux termes ... ; les raisonnements ou soi-disant corollaires, sous des apparences logiques et séduisantes, reposant sur de véritables pétitions de principes et des hypothèses contradictoires, sont, sinon radicalement fausses au point de vue géométrique ou algébrique, du moins illusoires. [...]

À l'égard de l'équation symbolique

$$a_\alpha = a \cdot 1_\alpha = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} = a \cos \alpha + a \sin \alpha \sqrt{-1}$$

à laquelle M. Français arrive dans son *Mémoire* pour exprimer la valeur véritable des lignes polaires ou dirigées, je montre à la fin de la note précitée de 1816, qu'elle revient à supposer que toutes les ordonnées $y = a \sin \alpha$, perpendiculaires à un axe fixe quelconque dans un plan, soient à priori affectées du signe d'imaginarité $\sqrt{-1}$, tandis que les abscisses correspondantes $x = a \cos \alpha$ resteraient réelles ; de sorte que l'équation ci-dessus n'appartiendrait, non à une circonférence de cercle, comme l'auteur le suppose ou sous-entend, mais bien à une spirale logarithmique imaginaire. Or il serait arrivé à des conséquences tout autres relativement à la courbe ou à la valeur du signe 1 de corrélation des angles polaires, s'il eut substitué à priori la considération de l'hyperbole équilatère à celle du cercle, etc." ⁷³

Il est évident que Poncelet est hostile aux tentatives d'interprétation géométrique des imaginaires. Il s'acharne à appliquer les raisonnements et descriptions usuels aux expressions complexes et ne veut pas voir de différence, confondant l'écriture complexe $z = a \cdot e^{it} = a \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ qui désigne les points d'un cercle de rayon a quant t varie et l'écriture $r = a \cdot e^t$ qui désigne une spirale quand t varie. La première notation désigne l'affixe d'un point rapporté au repère du plan complexe, la deuxième désigne une courbe dont les coordonnées d'un point courant sont exprimées en coordonnées polaires. Passer de la seconde à la première en changeant t en it et parler de spirale imaginaire relève d'une substitution *a priori*, procédé pourtant longuement dénoncé par Poncelet. Sans vouloir péjorer ses travaux, il se caractérise cependant par une certaine rigidité d'esprit et une volonté de ne pas sortir de ce qui est confirmé depuis longtemps. À la formule de d'Alembert : "Allez en avant, et la foi vous viendra", qu'il a pourtant souvent reprise à son compte, il oppose :

"Dans tout enseignement élémentaire, on ne doit jamais courir au devant des difficultés." ⁷⁴

⁷³ Ibid., p. 592.

⁷⁴ Ibid., p. 598.

De plus il confirme tout ce qu'il a écrit vers les années 1815 dans la réédition de ses œuvres en 1864. Date à laquelle les connaissances sur les imaginaires avaient beaucoup évolué et s'étaient clarifiées, ce qui aurait pu l'amener à réexaminer ses positions. En réponse à un article de Cauchy de 1850, il déclare :

*"On serait induit à conclure que le coefficient algorithmique $\sqrt{-1}$ n'est point exclusivement le signe de la perpendicularité ; mais qu'il peut tout aussi bien représenter l'obliquité des droites dirigées sous un angle d'inclinaison quelconque. D'après cela, il me paraît difficile de s'expliquer rationnellement comment Cauchy, notre célèbre et très habile transformateur de formules, d'équations algébriques, ait appuyé de sa plume élégante et facile, l'interprétation exclusive du signe $\sqrt{-1}$, en se fondant sur un genre de considérations géométriques pour le moins discutables au point de vue des principes."*⁷⁵

Trançon d'ailleurs, s'étonnera de voir cette position encore confirmée par la revue scientifique *Les Mondes* de février 1868 :

*"Quelques personnes on cru pouvoir dire que, dans cet ouvrage (Applications d'Analyse et de Géométrie), M. Poncelet aurait jugé à fond et réfuté la doctrine proposée par Argand et Français et développée par Mourey. Mais je n'y trouve que quelques fragments d'une Note composée en 1816 et reproduite en 1864 où l'auteur se borne à affirmer que les équations du nouveau calcul manquent d'homogénéité et que le symbole a_w ; où a est une longueur constante et w un angle variable, ne peut pas représenter un cercle et qu'il représente nécessairement une spirale logarithmique imaginaire!. Il n'y a rien à répondre à ces deux assertions ; mais si les circonstances dans lesquelles a été composé le dernier ouvrage de M. Poncelet suffisent à expliquer quelques méprises de sa part, il est moins facile d'expliquer comment, dans un journal scientifique, on a pu considérer de telles méprises comme constituant un jugement de fond !"*⁷⁶

CAUCHY : UNE PREMIÈRE SYNTHÈSE.

Contrairement à Poncelet, Cauchy n'a pas eu d'inhibition vis à vis des imaginaires. Il les a d'abord considérés sous leur seul aspect calculatoire, et à la suite des travaux cités précédemment, sa position a évolué pour en venir à reconnaître pleinement les imaginaires comme outil géométrique. Il prône l'abandon de la notation $\sqrt{-1}$ pour celle de i et nous savons ce qu'il en est advenu. Par contre le mot imaginaire qu'il proposait d'abandonner a bien résisté. En 1819, il écrit dans un *Mémoire sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination* :

⁷⁵ Ibid., pp. 243-244.

⁷⁶ Trançon, A. : *Les Mondes*, février 1868.

$$"x = -\sqrt{-1}, \quad x = \sqrt{-1},$$

ne seront plus que des expressions algébriques qui ne signifient rien par elles-mêmes, et qui, pour cette raison, sembleraient être exclues de l'algèbre. Néanmoins il peut être utile de les conserver dans le calcul. [...]

Quantités géométriques, définitions, notations.

Menons dans un plan fixe, et par un point fixe, pris pour origine ou pôle, un axe polaire OX. Nous appellerons quantité géométrique et nous désignerons par la notation r_p un rayon vecteur tracé dans ce plan, et dont la longueur r sera mesurée dans la direction, qui formera avec l'axe fixe, l'angle polaire p . La longueur r sera la valeur numérique ou le module de la quantité géométrique r_p , l'angle p en sera l'argument. [...]

La quantité géométrique comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique et à plus forte raison la notion de quantité arithmétique ou de nombre comme cas particulier de la quantité algébrique." 77

Il revient sur ces questions, avec des points de vue plus tranchés en 1847 dans les Exercices d'analyse et de géométrie :

"Mémoire sur les quantités géométriques : La théorie des expressions imaginaires a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue. Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique, contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. [...]

Dans mon Analyse Algébrique, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir que l'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires, en considérant ces expressions et ces équations comme symboliques. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre, me paraît être d'abandonner l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai géométriques, en mettant à profit les idées émises et les notations proposées non seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par monsieur de Saint-Venant, dans un mémoire digne de remarques sur les sommes géométriques." 78

Puis il résume ses propositions :

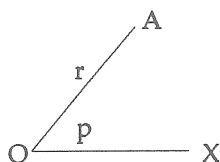
" r distance OA

p angle polaire positif ou négatif décrit par un rayon mobile, qui en

77 Cauchy, L. A. : "Sur les Quantités géométriques et sur une Méthode nouvelle pour la Résolution des Équations algébriques de degré quelconque", in Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 1849, 2d semestre, T. XXXIX, n° 10, Paris, 1849, p. 251.

78 Ibid., p. 250.

tournant autour de l'origine O , passe de la position OX à la position OA ."



À partir de là Cauchy donne toutes les définitions utiles et règles de calcul sur les modules et les arguments telles que nous les connaissons.

TRANSON : LE BILAN DE PRÈS D'UN SIÈCLE DE RECHERCHES.

Nous voici arrivés à l'avant-dernier des protagonistes annoncés. Nous sommes en 1868 et, après tout ce que nous venons de voir, on peut affirmer que tout ce qui concerne les notions premières sur les complexes et leur interprétation géométrique a été dit. Le deuxième mémoire de Faure n'a pas été publié, mais des discussions qu'il a entraîné en est sortie une conception claire de l'association : nombres complexes - transformations du plan. Voici ce qu'en dit Transon dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1868 :

"L'équation du premier degré entre deux variables directives correspond à une transformation des figures planes par similitude. En effet, supposons d'abord que dans l'équation

$$y = b + ax$$

le coefficient a soit un nombre sans inclinaison ; y sera en grandeur et en direction le troisième côté d'un triangle dont les deux côtés sont 1° le chemin correspondant au nombre b ; 2° un chemin parallèle à celui de x , mais avec une longueur augmentée dans le rapport du nombre a à l'unité. Si au contraire a est un nombre incliné de l'angle w sur la direction positive, il faudra faire tourner de ce même angle le côté de triangle que dans la première supposition on avait fait parallèle à x . C'est pourquoi dans le premier cas la figure transformante est homothétique à la figure transformée, au lieu que dans le second les deux figures sont encore semblables, mais non placées semblablement.

[...]

Si les x et les y ont la même origine on trouvera le point unique qui est lui-même son transformant. Sa position est déterminée par

$$y_1 = x_1 = \frac{b}{1-a}$$

c'est le centre de similitude des deux systèmes des x et des y .

[...]” 79

79 Transon, A. : "Application de l'Algèbre directive à la Géométrie", in *Annales de Mathématiques*, 2ème série, T. VII, Paris, 1868, p. 146.

Pour terminer avec Transon, citons quelques réflexions d'ordre général et d'autres plus particulières aux imaginaires extraites de *L'Application de l'algèbre directive à la géométrie* (Annales de Mathématiques) :

"Ni les vérités de la Géométrie ne sont les résultats de l'expérience ; puisque, par exemple, si on nous fait voir à l'aide de polygones inscrits au cercle que la longueur de la circonférence est comprise entre vingt et une et vingt deux fois la septième partie du diamètre, notre conviction ne sera pas plus augmentée par le résultat conforme d'un mesurage effectif qu'elle ne serait ébranlée par un résultat contraire : c'est le théorème démontré qui jugera si ce mesurage est bon, et ce n'est pas ce mesurage qui fera le jugement du théorème ; et ce que nous disons d'une vérité déduite de principes de la Géométrie, nous pouvons le dire aussi de toutes les vérités premières ou conceptions qui sont ces principes mêmes ; puisque par exemple, s'il est vrai que la raie grossière ou le rond irrégulier tracés sur le tableau par notre premier professeur ont éveillé en nous les idées de la ligne droite et du cercle, il est également vrai que jamais des yeux du corps nous n'avons vu l'un ou l'autre. [...]"

Et lorsqu'à notre second pas nous rencontrons, rencontre inattendue ! la racine carrée d'un nombre négatif ! c'est bien en vain que nous lui disons "Tu n'existe pas ! tu es impossible ! tu es imaginaire ! ..." Malgré toutes nos dénégations et toutes nos objurgations la racine tient bon ; elle ne se laisse pas extraire (si ce n'est par Argand, Français, Mourey, etc.) ; et nous, tout en lui déniaient la possibilité d'être, nous sommes forcés de l'admettre, de la subir ; et bientôt à sa suite surgissent de tous côtés, je veux dire à tous les degrés de l'algèbre, une infinité d'autres racines qu'elles aussi nous appelons impossibles ! ... Oui, on les déclare impossibles mais bien en vain voudrait-on établir la convention de les déclarer inutiles ; car elles se retrouvent à tous les niveaux de la science et elles en sont l'instrument le plus précieux ; et au milieu de leur multitude les autres racines que nous jugions seules possibles n'apparaissent plus qu'à titre d'exception ; et enfin, le calculateur arrive à ce résultat aussi incontesté qu'il est étrange que ce qu'il appelait exclusivement le réel n'est plus qu'un cas particulier de ce qu'il avait appelé l'imaginaire. [...]"

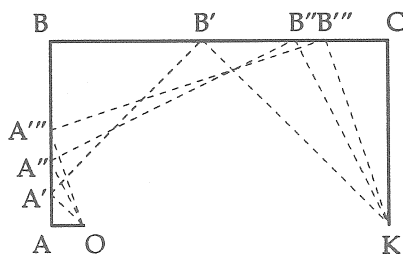
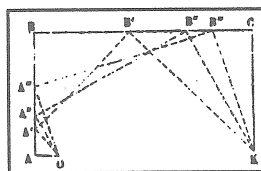
C'est donc à l'égard seulement des problèmes de Géométrie que nous avons à justifier l'assertion que toutes les racines des équations sont réelles ; et à cet effet, ne suffit-il pas d'opposer à l'opinion commune exprimée par M. Poncelet [...] ne suffit-il pas d'opposer à cette opinion, d'abord que bien évidemment si l'on change les grandeurs des données sans changer les hypothèses sur la situation des inconnues, non seulement les racines imaginaires mais aussi les négatives peuvent devenir constructibles (en sens positif) ; mais de plus que les racines imaginaires, comme les négatives, indiquent des solutions réelles, à la condition de changer les hypothèses sur les conditions des inconnues sans changer d'ailleurs aucunement les

grandeurs des données. C'est là un des plus importants résultats de la nouvelle Algèbre ; aussi est-il rigoureusement exact de dire que la plupart des problèmes déterminés de la Géométrie dont on a depuis longtemps la solution n'ont jamais été complètement discutés et ne pouvaient pas l'être avant l'introduction du calcul directif, puisque la circonstance d'une racine imaginaire paraissait être l'indication d'une impossibilité absolue et ainsi excluait toute idée d'un examen ultérieur. Cependant, si le lecteur veut s'exercer sur quelqu'un de ces problèmes élémentaires, il reconnaîtra aisément que, dans le cas des imaginaires, toujours quelques chemins inclinés satisfont pleinement et exclusivement aux équations du problème, et, par conséquent en représentent les racines, quoique à la vérité ils ne puissent le plus souvent correspondre à l'énoncé verbal de la question primitive que si l'on modifie convenablement cet énoncé. Mais n'est-ce pas sous cette réserve expresse qu'on admet comme réelles les solutions négatives, et qu'on en fait l'interprétation ?" ⁸⁰

Long passage d'un texte beaucoup plus long qui résume l'acharnement du combat mené autour des imaginaires. À chaque nouvelle étape il semble que tout soit dit, mais pourtant la publication de tels textes montre bien que la conviction générale n'est toujours pas emportée.

E. LILL : RÉOLUTIONS GRAPHIQUES.

Pour conclure nous en venons à E. Lill, capitaine du génie au service de l'Autriche. Dans une première publication de 1867, dans le cadre de l'exposition universelle de Vienne, il a proposé une résolution graphique des équations numériques de tous degrés à une seule inconnue et donné la description d'un instrument inventé dans ce but, un ancêtre des calculatrices en quelque sorte. La méthode permettant de trouver les racines réelles repose sur la construction d'un polygone aux côtés orthogonaux, côtés proportionnels aux coefficients du polynôme et orientés vers la droite ou la gauche à partir du dernier côté construit selon que le coefficient est positif ou négatif. Le cas particulier représenté est le suivant :



"Pour rendre ceci plus clair encore par un un exemple, soit

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

l'équation donnée. On fera conformément à ce qui vient d'être expliqué, la construction du contour polygonal rectangulaire de quatre côtés OABCK. Cela fait, on peut aller du point O au point K en suivant les trois contours rectangulaires (de trois côtés chacun) OA'B'K, OA''B''K, OA'''B'''K. Les trois lignes AA', AA'', AA''' représentent les trois racines de l'équation, et comme ces lignes sont respectivement égales à OA, double de OA, triple de OA et situées à droite de OA, ces racines sont + 1, + 2, + 3." ⁸¹

La partie qui précède ce cas particulier de quelques lignes, ne contient aucune démonstration mais seulement une description générale de la méthode de construction à suivre. La considération de triangles semblables nous mène aux égalités de rapports suivantes : $\frac{A''A}{AO} = \frac{B''B}{BA''} = \frac{CK}{B''C}$, ce qui peut nous donner les valeurs absolues des solutions. La mise en évidence de l'équation résolue ainsi pose le problème de signes des valeurs des solutions. Le schéma de Hörner permet de s'en approcher.

Si $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, on a : $x \cdot (x^2 - 6x + 11) = 6$
et aussi : $x \cdot (x \cdot (x - 6) + 11) = 6$.

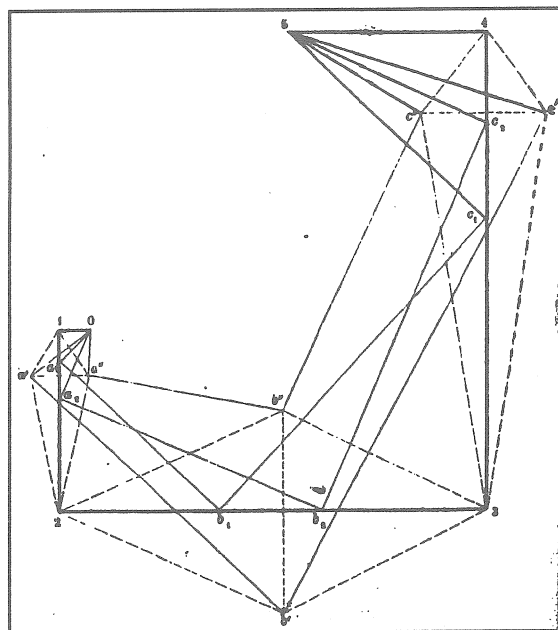
En posant $AA'' = x$, $-BB'' = y = x \cdot (x - 6)$, on obtient $x \cdot (y + 11) = 6$ et $y = x \cdot (x - 6)$ soit $\frac{x}{1} = \frac{6}{y+11}$ et $\frac{x}{1} = \frac{y}{x-6}$, ce qui traduit correctement les rapports de similitude des triangles en convenant que x (soit AA'') est un nombre positif inférieur à 6 et que y (soit $-BB''$) est un nombre négatif.

Voici la description de "l'appareil permettant d'effectuer promptement la construction"

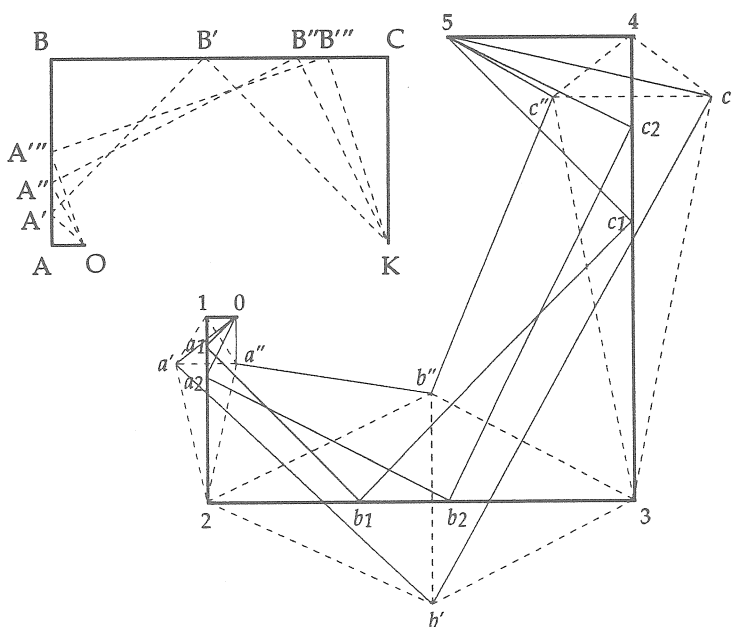
"Un cercle gradué dans le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre et sur la surface duquel sont, en outre, tracés deux systèmes rectangulaires de cordes parallèles espacées de 1 millimètre, pivote autour de son centre, au dessus d'une planchette fixe munie d'un repère et d'un vernier, et au dessous d'une glace mate et transparente, sur laquelle on peut marquer des traits au crayon.

Pour résoudre une équation donnée, on commence par établir la coïncidence entre le zéro du limbe et celui du vernier. Le rayon OY, qui sert de direction à l'une des séries de cordes parallèles, passe alors par ce point, tandis que l'autre rayon OX se dirige sur le point 270 degrés de la graduation du limbe.

⁸¹ Lill, E. : "Résolution graphique des Équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et Description d'un Instrument inventé dans ce but", in *Nouvelles Annales*, 1867, 2ème série, T. VI, Paris, 1867, p. 360.



On marque, sur la glace mate, les points $A, B, C, \dots, G, K$, de la manière qui a été expliquée plus haut, et, grâce aux lignes parallèles équidistantes, cette opération se fait très rapidement. On trace ensuite, avec un crayon fin, le contour $OABC \dots GK$.



Alors on desserre la vis de pression et on fait tourner le cercle gradué mobile, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une position telle, qu'un contour polygonal rectangulaire dont les sommets s'appuient consécutivement sur les lignes AB, BC, CD, ... vienne aboutir au point K, et l'on obtient pour chaque contour de ce genre, une longueur AA' qui représente une racine de l'équation." ⁸²

L'appareil était visible à l'Exposition universelle, partie autrichienne (section militaire). C'est Charles Hermite qui fera la démonstration mathématique de la méthode employée par Lill dans les Comptes-rendus de l'Académie en 1867. En voici le début :

"Soit $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Mx + N = 0$ une équation du degré m , dont les coefficients $A, B, C, \dots, M, N$ sont des nombres donnés.

Divisons-la successivement par x et posons

$$- (Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Lx) = y_1 = \frac{1}{x}N + M$$

$$- (Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + Cx^{m-4} \dots + Kx) = y_2 = \frac{1}{x}y_1 + L$$

...

$$- Ax = y_{m-1} = \frac{1}{x}y_{m-2} + B$$

$$- A = \frac{1}{x}y_{m-1}$$

On peut regarder chacune des équations finales, telles que $y_1 = \frac{1}{x}N + M$, comme étant, dans un système de coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite, dont l'ordonnée est y_1 et l'abscisse N , qui est inclinée sur l'axe des X d'un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{1}{x}$, et enfin qui intercepte sur l'axe des Y un segment égal à M . [...]

La méthode graphique, qu'on vient d'exposer peut être utile pour trouver promptement une première approximation des valeurs des racines réelles d'une équation numérique, algébrique, d'un degré quelconque. À ce titre, elle sera, nous l'espérons, favorablement accueillie par les géomètres.

Dans le cas de l'équation du second degré, elle fournit la solution rigoureuse." ⁸³

L'année suivante, 1868, toujours dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* un complément est apporté sous le titre : *Résolution*

⁸² Ibid., p. 361.

⁸³ Hermite, C. : "Résolution graphique des Équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue", in *Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 1867, T. LXV, n° 21, Paris, 1867, pp. 854 et 857.

graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires. La construction étant toujours la même, Lill propose d'étendre sa méthode aux racines complexes. Voici le compte rendu de traduction publié :

"Il s'agit encore de former des contours rectilignes, tels que $oa'b'c'5$, ayant mêmes extrémités initiale et finale que le contour primitif, et donnant lieu aussi à des triangles successifs $o1a'$, $a'2b'$, $b'3c'$, $c'45$, tous semblables entre eux. Mais ces triangles et ces contours dérivés ne sont plus rectangulaires, et leurs sommets intermédiaires a' , b' , c' sont situés hors des côtés 12, 25, 34 du contour primitif, au lieu de tomber sur ces côtés mêmes.

Cela fait, si, du premier sommet a' , on abaisse sur le côté 12 une perpendiculaire $a'\alpha$, et qu'on la prolonge dans l'autre sens, d'une quantité égale oa'' , les rapports des longueurs complexes

$$1\alpha + \alpha\alpha' \sqrt{-1} \text{ et } 1\alpha - \alpha\alpha'' \sqrt{-1}$$

au côté 01, ou ce que M. Lill appelle les *tangentes imaginaires* des angles $a'01$, $a''01$ sont deux racines imaginaires conjuguées de l'équation. Si l'équation donnée a des coefficients imaginaires, le contour polygonal qui la représente, n'est plus rectangulaire. Mais c'est encore en construisant d'après les mêmes principes, une série de triangles semblables, qu'on parvient à la détermination des racines de l'équation.

Enfin M. Lill fait connaître qu'on peut éviter l'emploi des triangles scalènes, et n'employer, même pour la recherche des racines imaginaires, que des contours rectangulaires, comme pour les racines réelles, avec la différence que leurs sommets ne s'appuient plus sur les côtés du contour primitif comme lorsqu'il s'agit des racines réelles ...

Pour bien fixer les idées, soit $x^4 - 6x^3 + 14,25 x^2 - 15,75 x + 6,5 = 0$ l'équation proposée (c'est celle à laquelle la figure se rapporte ; l'unité choisie pour échelle est le demi-centimètre). On voit d'abord qu'on peut inscrire dans le contour primitif rectangulaire 012345 les deux contours dérivés rectangulaires $oa1b1c15$ et $oa2b2c25$. Ainsi l'équation a deux racines réelles, dont les valeurs sont

$$\frac{1a_1}{o_1} = \tan 10a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1a_2}{o_1} = \tan 10a_2 = 2$$

On voit ensuite que les deux contours $oa'b'c'5$ et $oa''b''c''5$, qui aboutissent aux point 0 et 5, donnent lieu respectivement, à la série de triangles semblables $o1a'$, $a'2b'$, $b'3c'$, $c'45$ et $o1a''$, $a''2b''$, $b''3c''$, $c''45$. On en conclut que les deux racines imaginaires ont pour valeurs

$$\frac{1\alpha + \alpha\alpha' \sqrt{-1}}{o_1} = \tan \text{ imaginaire } a'01 = 1,5 + \sqrt{-1} \quad \text{et}$$

$$\frac{1\alpha + \alpha\alpha'' \sqrt{-1}}{o_1} = \tan \text{ imaginaire } a''01 = 1,5 - \sqrt{-1}.^{84}$$

Nous voici donc à la fin du XIXème siècle. Tout, du moins pour ce qui est des aspects élémentaires, a été dit même si ce n'est pas admis

84 Lill, E. : *op. cit.*, pp. 364-366.

complètement et loin d'être maîtrisé. Nous sommes loin de l'interprétation définitive et sans appel que l'on peut par exemple lire dans le cahier de Ravenel du Bois-Teilleul, élève de la promotion de l'an XII (1804) de l'École Polytechnique :

*"EXPRESSIONS IMAGINAIRES. 85. : On nomme imaginaires certaines quantités résultant des opérations algébriques, et auxquelles on ne saurait assigner aucune valeur, ni commensurable ni incommensurable. $\sqrt{-A^2}$. Ce symbole sans valeur indique une impossibilité, une absurdité dans la position de la question qui l'a produit. Mais comme les règles d'algèbre peuvent s'y appliquer, on en fait une classe nommée imaginaires."*⁸⁵

Pour être complet il m'aurait fallu parler de bien d'autres : Benjamin Gompertz, *The principles and applications of imaginary quantities* (1817-1818) ; Hamilton, *Theory of conjugate function or algebraic couples* "(1837) ; Scheffer, *Calcul de situation* (1851) ; Siebeck, *Représentation graphique des fonctions imaginaires* (1853) ; Dillner, *Calcul geometrique* (1860) ; Battaglini, *Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky* (1868), qui en introduisant la fonction $F(z) = e^{ikz}$, z désignant une grandeur de rotation montre que :

*"Tout point de rencontre idéal de deux droites peut être considéré comme le point de rencontre idéal de deux droites quelconques perpendiculaires à une même droite. Le point idéal où concourent toutes les perpendiculaires à une même droite (et qui est la distance $i\frac{\pi}{2k}$ de tous les points de cette droite) sera dit pole de cette droite."*⁸⁶

Le cas particulier $k = 0$ correspond alors à la théorie d'Euclide sur les droites parallèles.

Au XXème siècle, l'image des complexes qui a été forgée au siècle précédent devient une réalité admise par tous. Avec Fatou et Julia, l'histoire continue ; elle conduit entre autres aux spectaculaires représentations des ensembles de Mandelbrot. C'est une autre histoire, encore plus complexe.

*
* *
*

⁸⁵ Ravenel du Bois-Teilleul, H. : *Cahier d'Études algébriques*, 1804, p. 125.

⁸⁶ Battaglini, G. : *Sur la Géométrie imaginaire de Lobatcheffsky*, in *Annales de Mathématiques*, 2ème série, T. VII, Paris, 1868, pp. 218-219.