PRÉHISTOIRE DE L'ARITHMÉTIQUE. LA DÉCOUVERTE DU NOMBRE ET DU CALCUL.

Olivier KELLER.

Il n'est pas pensable que les connaissances révélées par les premiers documents écrits de mathématiques, comme le papyrus Rhind égyptien (- 1600 environ) ou les premières tablettes babyloniennes (- 1800 à - 1600) soient premières, au sens d'apparues spontanément, déjà prêtes dans une sorte d'inconscient intellectuel et que le cerveau humain n'aurait eu qu'à mettre au jour dès que le besoin l'aurait exigé.

Plusieurs bonnes raisons militent en faveur de cette thèse. En premier lieu, les documents cités ne sont pas eux-mêmes sans antécédent : les tablettes purement mathématiques babyloniennes, par exemple, sont précédées depuis la fin du IVème millénaire de tablettes de comptabilité utilisant numération et systèmes de numération. Mais bien avant encore, dès le IXème millénaire selon D. Schmandt-Besserat[1], existait un système comptable fondé sur des jetons. La notion de nombre existe donc dès le début du néolithique, c'est certain, et cela suffit pour montrer qu'il existe une *préhistoire* du nombre et du calcul.

En second lieu, il existe, ou il a existé récemment, des peuples primitifs qui savent compter des petites collections, mais sans noms de nombres, ou qui ont quelques noms de nombres, mais sans système de numération, ou encore qui ont des systèmes de numération plus ou moins évolués. Cela suffit pour montrer que notre concept actuel de nombre cardinal et de calcul ne va pas de soi et pour conjecturer que, comme d'autres concepts, il est le fruit d'un travail patient, et qu'il a une histoire.

Mais s'il y a bel et bien une préhistoire de l'arithmétique, est-elle *connaissable* ? Car le problème principal est celui des sources ; on peut essayer de s'en tenir strictement aux sources archéologiques, comme les os entaillés, pierres gravées, bâtonnets et lignes de points accompagnant les peintures

1 D. Schmandt-Besserat, "*Les plus anciens précurseurs de l'écriture*", in *L'aube de l'humanité*, Belin, 1983.

pariétales, mais leur inconvénient majeur est qu'elles ne sont pas, par définition, lisibles. Certains ont essayé malgré tout et un bon exemple nous est fourni par l'os d'Ishango (Congo) daté d'environ - 9000, découvert par De Heinzelin ; il s'agit d'un manche d'outil en os recouvert de stries parallèles et son inventeur a cru y voir une table de nombres premiers et une table de doubles, et par suite *"il n'est pas impossible que le monde moderne soit redevable d'une de ses plus grandes dettes aux hommes qui vivaient à Ishango"*[2].

Pourquoi pas en effet ? L'ennui, c'est que l'on peut multiplier à l'envie ce genre de trouvailles. Ainsi, Ifrah fait état d'un os entaillé du magdalénien, donc précédant de plusieurs milliers d'années l'os d'Ishango, et qui *"aurait constitué une sorte d'instrument arithmétique donnant une représentation graphique des premiers nombres impairs, ainsi qu'un arrangement de ces nombres permettant d'en retrouver rapidement quelques propriétés élémentaires"*[3]. Ces propriétés, qu'il est inutile de citer ici, sont du même acabit que celles qu'a cru voir De Heinzelin ; avec un peu d'imagination, on pourrait fabriquer des quantités de telles "tables de calcul", et des beaucoup plus anciennes, à partir des os entaillés nombreux dès l'aurignacien européen (entre - 33 000 et - 26 000).

Toute tentative de lecture directe de ce genre de document est *nécessairement* vouée à l'échec ; car si les stries sont une trace de dénombrement, elles peuvent dénombrer n'importe quoi, *par définition*. Si maintenant on voulait y voir des marques de calcul, on devrait lire nettement une opération posée d'un côté, et un résultat de l'autre ; or ce n'est jamais le cas dans les documents de De Heinzelin et d'Ifrah. Le premier voit trois stries suivies de six, puis quatre stries suivies de huit, et cela lui suffit pour déceler une table de doubles : l'opération n'est pas posée - 4×2 et 3×2 - mais il y aurait un résultat. Le second voit trois stries au dessus de neuf et sept stries au dessus de cinq, et il en déduit qu'il pourrait s'agir, entre autres, de montrer que 3 + 9 = 7 + 5 : l'opération - si opération il y a - est posée, mais pas le résultat.

Prenant acte du caractère nécessairement arbitraire de ce type d'interprétation, on pourrait déclarer forfait et conclure au caractère inconnaissable de l'arithmétique primitive ; mais *"tous les hommes désirent naturellement savoir"* et sont fascinés par leur propre origine et celle de leur pensée, et ce d'autant plus qu'elles sont encore enveloppées de mystère et fournissent un terrain propice aux délires de l'imagination. Ce désir légitime peut cependant devenir une possibilité réelle si l'on accepte de faire appel aux sources ethnographiques, c'est-à-dire à la documentation sur les peuples primitifs ; mise en parallèle avec ce que nous offre l'archéologie, l'ethnographie permet, si elle est correctement utilisée, de ressusciter les documents de la préhistoire en les mettant en situation ; elle leur redonne vie et tord le cou à certaines extrapolations fantaisistes comme celles que nous venons d'évoquer : il n'existe par exemple, à ma connaissance, aucune source ethnographique faisant état d'objets entaillés utilisés comme tables de calcul.

---

2 Cité par A.Marshack, *Les racines de la civilisation*, Plon, 1972 ; p. 24.
3 G.Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Laffont, 1994 ; p. 159.

L'usage des sources ethnographiques est très controversé ; rapprocher les primitifs actuels de nos ancêtres du paléolithique, c'est en effet courir le risque d'être rangé au mieux parmi les évolutionnistes attardés, et au pire parmi les complices de la domination du Nord sur le Sud. Les ethnomathématiciens[4], par exemple, refusent de voir dans les connaissances et pratiques des primitifs actuels une révélation des mathématiques de la préhistoire ; elles ne révèlent selon eux que "d'autres" mathématiques, issues d'une "autre" culture et qui ont probablement une "autre" histoire ; elles ne sont pas inférieures au mathématiques occidentales, ou si elles le sont, cela ne tient pas au caractère arriéré de la société dont elles sont issues, mais à l'oppression colonialiste. Je n'ai pas l'intention de rentrer ici dans ce débat important[5] ; il me suffit que le lecteur soit averti de la controverse, et, tel Euclide, je lui *demande* d'accepter que l'ethnographie est une source essentielle pour l'étude des mathématiques de la préhistoire, source sans laquelle toute recherche en ce domaine serait vaine.

Si, en outre, le lecteur sensible à ces questions sait que je crédite le monde primitif de deux inventions fondamentales pour notre monde civilisé, à savoir le nombre et le calcul, il comprendra que c'est là un hommage autrement profond que les simagrées d'usage, et il m'autorisera sûrement à ne pas mettre primitif entre guillemets et à ne pas camoufler le même mot par des expressions du genre "peuples traditionnels".

*

* *

I. Le nombre, première découverte arithmétique de l'humanité primitive.

I.-1. Les animaux savants.

On a pu croire, au vu de certaines expériences de laboratoire, que des animaux pouvaient compter ou, pour le moins, avaient un certain "sens du nombre" ; si tel était le cas l'homme, espèce animale supérieure, posséderait également ce sens et par suite, le nombre ne saurait être présenté comme "découverte" de l'humanité primitive. Ce paragraphe I serait sans objet et cela m'oblige à aborder rapidement le problème.

4 On pourra consulter M. Ascher : *Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Brooks Cole publ. Company, 1991. Et : P. Gerdes : *L'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique : quelques réflexions et expériences au Mozambique*. Institut supérieur de pédagogie du Mozambique, 1993.

5 Voir mon travail : *L'ethnographie comme source pour l'étude de la préhistoire des mathématiques*, à paraître.

On a dressé des pigeons et des corbeaux à établir la correspondance entre un à cinq points dessinés sur un carton et le même nombre de points dessinés sur un couvercle de boîte contenant des graines ; des perruches, après avoir entendu certains mots censés signifier "deux" ou "trois", se dirigent vers l'assiette contenant le nombre correspondant de grains ; un perroquet, après avoir entendu un son, va se servir dans l'assiette contenant un appât, et de même pour deux, trois, ou quatre sons et deux, trois ou quatre appâts[6].

Plus récemment[7], on a fait des expériences plus poussées et mieux décrites avec des chimpanzés. Le principe est le suivant : on présente à cette pauvre bête de un à six crayons rouges, par exemple, et on la dresse à appuyer sur la touche d'ordinateur censée représenter le nombre d'objets ; si l'expérimentateur change maintenant la couleur des crayons, Ai - c'est le nom du primate - s'en sort à 79%. Si l'on garde la couleur mais on change les objets, les crayons étant remplacés par des brosses à dents, Ai ne réussit qu'à 57%. Au bout de plus de 68 heures de travail correspondant à presque 29 000 essais, le résultat final est le suivant : Ai réussit à taper sur la bonne touche "numérique" d'ordinateur, avec un taux de réussite de 98,5%, pour cinq types d'objets et cinq couleurs. Avec 6 heures de plus, et 3000 essais supplémentaires, Ai "comptera" six crayons rouges.

Tout cela ne prouve, à mon avis, qu'une seule chose, c'est que les animaux ont de la mémoire ; on peut, avec de la patience, leur faire apprendre "par cœur" des correspondances entre des figures, correspondances que l'on prend à tort pour des dénombrements. Un pigeon peut certes être dressé, si on lui montre un carton où quatre points sont figurés, à aller vers la boîte dont le couvercle porte également quatre points ; mais on pourrait tout aussi bien le dresser, le même carton lui étant proposé, à se diriger vers une boîte portant par exemple 3 points, si l'on en croit le compte rendu suivant : *"Seibt (1982) soutient que puisque l'on peut, sans difficulté, habituer les pigeons à frapper du bec trois fois quand ils voient deux points allumés, ou deux fois s'ils en voient trois, les oiseaux n'ont pas l'idée générale de nombre sans nom dans le sens où l'entend Kœhler"*[8].

On aura également remarqué que les oiseaux vont d'un symbole vers un symbole (le carton vers le couvercle) ou d'un symbole vers des objets (un signal vers des appâts ou vers des grains) ; les expériences décrites ne montrent jamais le chemin inverse : présenter un nombre de grains donné à un oiseau et lui apprendre à choisir entre divers cartons portant des nombres de points divers.

L'expérience sur les chimpanzés va précisément dans l'autre sens : on lui présente des objets et il doit choisir entre des symboles différents, en pressant les touches correspondantes. Il arrive à le faire lorsque le nombre d'objets ne

6 O. Kœhler : *"Le dénombrement chez les animaux"*, in *Journal de psychologie normale et pathologique*, janvier-mars 1960, p. 45.
7 T. Matsuzawa : *"Use of numbers by a chimpanzee"*, in *Nature*, mai 1985, p. 57.
8 Cité par D. R. Griffin : *La pensée animale*, Denoël, 1988, p. 199.

dépasse pas six, et ceux-ci peuvent être de couleurs différentes mais de même type ; l'expérimentateur ne parle pas du cas ou l'on aurait présenté à Ai deux crayons, une brosse à dents et un bout de papier, tous objets avec lesquels l'animal est accoutumé à travailler, dans le but de le faire appuyer sur la touche "cinq". Il ne dit rien non plus de ce qui se passerait avec les mêmes objets, mais coloriés de façon inhabituelle, ou avec des objets inhabituels pour l'animal. J'en déduis que Ai est probablement incapable de faire la correspondance entre *n'importe quelle* collection de cinq objets et la touche supposée être un symbole numérique ; et même si c'était le cas, pourrait-on dire qu'Ai sait compter jusqu'à cinq ? Je ne le pense pas, s'il ne peut pas en outre faire le chemin inverse : lorsqu'on allume devant lui la touche "cinq", il faudrait qu'il sache saisir ou montrer un paquet de cinq objets dans une multitude quelconque, et l'expérimentateur ne fait aucune allusion à cela.

Ma conclusion est que les animaux ne comptent pas et qu'ils n'ont aucun "sens du nombre" ; savoir compter, parce qu'il faut bien en venir à une définition, c'est être capable de faire une bijection entre *n'importe quelle* collection d'objets et une partie d'*une* "collection type"[9] support du nombre cardinal, et *bi*jection signifie que l'on peut aller dans les deux sens. L'oiseau peut aller de la collection type - les points - vers une collection de certains objets, mais apparemment il ne peut faire l'opération inverse ; le chimpanzé, lui, peut aller de *certains* objets vers la collection type - les touches de l'ordinateur -, et ceci pour quelques types d'objets, en sachant que l'apprentissage est à refaire lorsqu'on passe d'un type à l'autre et que lui non plus ne peut probablement faire le chemin inverse. Il ressort donc de ces expériences que des animaux apprennent par cœur des configurations d'objets, et que l'on peut leur faire acquérir des réflexes conditionnés devant ces configurations. Prendre cela pour une activité numérique, c'est se méprendre sur le concept même de nombre.

*

* *

I.-2. Premiers dénombrements humains.

Passons maintenant à l'activité numérique humaine sous ses formes les plus rudimentaires, telles qu'elles sont observées chez les peuples primitifs. *Le trait frappant est une grande variété de collections types matérielles, utilisées parfois concurremment, et qui ne sont pas nécessairement nommées.* Les Veddas de Ceylan n'avaient, paraît-il, aucun nom de nombre, mais ils utilisaient des bâtonnets pour compter ; les insulaires Andamans, au large des côtes de la Birmanie, n'utilisaient que les mots "un" et "plus d'un" suivant les uns, ou "un", "deux", "un de plus" et "quelques uns de plus" suivant les autres ; mais ils comptaient

9 L'expression est de H. Lebesgue, dans *La mesure des grandeurs*, rééd. Blanchard, 1975.

jusqu'à dix en se touchant le nez avec les doigts, l'un après l'autre. Des aborigènes australiens ont pour noms de nombres "un", "deux", "deux-un" et "deux-deux" ; au delà, ils disent "beaucoup". Mais cela ne signifie nullement qu'ils ne savent pas compter au delà : pour cinq, ils montrent les cinq doigts de la main et ainsi de suite jusqu'à vingt en utilisant les doigts de pieds.

> *"Si vous demandez à un indigène* [australien] *quelle sera la durée de son déplacement pour gagner tel ou tel endroit qu'il connaît, il y a de grandes chances pour qu'il vous réponde 'cela me prendra peut-être bien un peu longtemps' ; forcez le à préciser, et il montrera très exactement soit sur ses ongles, soit sur les articulations de ses doigts, ou encore en donnant des coups sur le sol, combien de fois il aura à s'arrêter en cours de route pour camper..."*[10]

La collection type la plus universellement répandue, et qui jouera un rôle mathématique éminent comme nous le verrons par la suite, est celle des parties du corps humain. Un exemple parmi des dizaines d'autres analogues, est cette façon de compter relevée dans le détroit de Torrès :

un :	doigt du bout ;
deux :	ce qui suit le doigt du bout ;
trois :	doigt du milieu ;
quatre :	doigt qui jette la lance ;
cinq :	doigt de l'aviron ;
six :	poignet ;
sept :	coude ;
huit :	épaule ;
neuf :	poitrine ;
dix :	sein droit ;
onze :	autre côté de la poitrine,

et ainsi de suite, en ordre inverse, chaque terme étant précédé de "autre côté", jusqu'au petit doigt de la main droite[11]. Dans ce genre d'énumération, il arrive que le même mot soit attaché à des nombres distincts, ce qui n'est pas gênant puisque le dénombrement se fait toujours avec des gestes, le doigt allant de l'objet compté à l'élément correspondant de la collection type. Les Dogons du Mali ont aussi une telle liste de parties du corps, utilisée concurremment avec des cordelettes à nœuds, des grains et des coquillages. Les Indiens d'Amérique ont la plupart du temps une liste plus savante, que nous examinerons plus loin, qui ne leur fait pas pour autant renoncer aux moyens rudimentaires : les nœuds, les entailles et les bâtonnets jouent un grand rôle. On raconte que lorsque les Natchez et les Chocktaws voulurent attaquer les Français en Louisiane, chaque tribu reçut un paquet de bâtons, l'un d'eux devant être ôté et détruit chaque jour, de façon à ce qu'ils puissent porter leurs coups en même temps. De même, quand un chef de Californie décide d'un bal dans un village, il envoie des messagers dans les villages voisins, chacun ayant une corde avec

10 A. P. Elkin, *Les aborigènes australiens*, Gallimard, 1967, p. 274.
11 L. Levy-Bruhl, *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Alcan, 1910, p. 211.

un certain nombre de nœuds. Chaque matin, le chef invité défait l'un des nœuds, et lorsque il est arrivé au dernier, lui et ses administrés se mettent en route joyeusement. D'autres collections types bien connues sont les *"calculi"*, probablement des jetons de compte utilisés très tôt au moyen-orient, et qui ont connu une immense fortune sous forme de jetons de calcul en Egypte, en Grèce, à Rome et jusqu'à la fin du moyen-âge européen ; de même pour les entailles que nos boulangers pratiquaient encore récemment.

On pourrait remplir une bibliothèque de descriptions d'objets à compter et de systèmes de numération divers ; je n'exagère pas : les seuls *Counting Systems of Papua New Guinea* de G. A. Lean occupent huit volumes !

Il vaut mieux s'attacher à la signification de ce que nous venons d'évoquer ; et curieusement, alors que l'on prête aux animaux le pouvoir de compter, sur la base d'expériences aussi peu convaincantes que celles dont nous avons parlé, on rechigne au contraire à voir des nombres authentiques dans les diverses collections types primitives.

*

* *

I.-3. Fausses critiques des collections types primitives.

La raison la plus répandue pour laquelle on refuse la qualité de nombre aux collections types, est que celles-ci sont *concrètes*, et que par dessus le marché les primitifs éprouvent le besoin de les suivre du doigt en faisant matériellement la bijection. L'argument suivant de Lévy-Bruhl est encore couramment repris de nos jours : pour la mentalité prélogique - que l'auteur attribue aux primitifs - :

> *"le nombre ne se sépare pas nettement des objets nombrés. Ce qu'elle exprime dans le langage, ce ne sont pas les nombres proprement dits, ce sont des 'ensembles nombres' dont elle n'a pas au préalable isolé les unités. Pour se représenter la série arithmétique des nombres entiers, dans leur succession régulière, à partir de l'unité, il faudrait qu'elle eût détaché le nombre de ce dont il est le nombre. C'est précisément ce qu'elle ne fait pas. Elle se représente au contraire des collections d'êtres ou d'objets qui lui sont familières à la fois par leur nature et par leur nombre, celui-ci étant senti et perçu, mais non abstraitement conçu."*[12]

On a là, à mon avis, un contre-sens complet. Le fait que l'on *exprime* le nombre par des choses ne signifie pas que l'on ne le *conçoit* pas comme tel ; exprimer le nombre cinq à l'aide de cinq doigts, de cinq entailles ou de cinq objets arbitraires ne signifie pas qu'on le confond avec eux. Car les primitifs ont

12 *Op. cit.*, p. 219.

parfaitement compris, leur pratique le prouve, que les cinq doigts de la main ne sont là que pour exprimer quelque chose de purement abstrait qui est la bijection possible de ces objets-là, les cinq doigts, avec n'importe quel type d'objets ; les cinq doigts ne sont qu'une façon de parler de cette correspondance potentielle et idéale, en même temps qu'une façon de la réaliser. Non seulement leur pratique le prouve, mais aussi leur mythologie ; car comment expliquer cette sorte de culte du nombre largement répandu, s'il n'était dans l'esprit sauvage qu'à peine dégagé de la matérialité qui lui sert de support ? Voici un exemple typique encore emprunté à Lévy-Bruhl :

> *"Dans le grand récit épique des Navajos, les dieux sont tous au nombre de quatre, et tous se rangent aux quatre points cardinaux, peints de la couleur propre à chacun de ces points... Le héros a quatre jours pour raconter son histoire, quatre jours sont employés à sa purification.... À Vancouver, dans les cérémonies d'initiation d'un sorcier, quand il se met debout, il doit tourner sur lui même quatre fois...Ensuite, il doit porter son pied en avant quatre fois sans cependant faire un pas. Pareillement, il doit faire quatre pas avant de sortir par la porte. Ses instruments culinaires doivent être jetés au bout de quatre mois, il ne doit pas prendre plus de quatre bouchées à la fois."*[13]

Ce genre de rite est très répandu chez les indiens d'Amérique et montre bien une conception purement abstraite du nombre quatre, puisqu'il est évoqué par ces gestes magiques pour *mettre en relation* celui qui les exécute avec les objets sacrés, ici les quatre points cardinaux. Si aux quatre points cardinaux on ajoute le zénith, le nadir et le centre, on obtient un nouveau nombre sacré, sept. Partout ailleurs dans le monde primitif, et de nombreuses traces subsistent encore de nos jours, on peut se mettre en harmonie avec des choses sacrées en évoquant leur nombre : n'est-ce pas la preuve que celui-ci est conçu comme un lien abstrait et non pas comme une chose ?

Si, après ces remarques, on n'est toujours pas convaincu que les primitifs ont des vrais nombres, on peut toujours se tourner vers une autorité contemporaine ; le système primitif peut très bien servir de point de départ au développement bourbakiste[14] sur les nombres cardinaux. On peut dire pour simplifier que le nombre cardinal d'un ensemble est, selon Bourbaki, *un ensemble privilégié* équipotent à l'ensemble donné ; c'est ainsi que, comme ø est le seul ensemble ayant 0 élément, on peut écrire : $0 = ø$. On peut ensuite s'amuser à suivre le développement du nombre cardinal avec des "ensembles nombres", pour parler comme Lévy-Bruhl, parfaitement hétéroclites ; appelons par exemple "un" l'ensemble {pouce}, "deux" l'ensemble {index, majeur}, "trois" l'ensemble {poignet, coude, épaule}, "quatre" l'ensemble de quatre cailloux donnés ; il existe tout d'abord une relation de bon ordre sur ces quatre cardinaux, puisque {pouce} est équipotent à une partie de {index, majeur}, qui est lui même équipotent à une partie de {poignet, coude, épaule} et ainsi de suite (théorème 1). La somme de "un" et de "deux" est le cardinal de

13 *Op. cit.*, p. 241.
14 Bourbaki, *Théorie des ensembles*, chap. 3, § 3, Hermann, 1963.

l'ensemble "somme de ces deux cardinaux" (définition 3 et proposition 4), c'est-à-dire de {pouce, index, majeur} ; or {pouce, index, majeur} est équipotent à {poignet, coude, épaule}, donc la somme de "un" et de "deux" est "trois".

Le produit de "deux" et de "deux" est le cardinal de l'ensemble {index, majeur}×{index, majeur}, c'est-à-dire de {(index, index), (index,majeur), (majeur, index), (majeur, majeur)} ; or ce dernier ensemble est équipotent à l'ensemble des quatre cailloux, donc "deux" fois "deux" égale "quatre". J'espère avoir montré par ce petit jeu que l'on peut suivre pas à pas les débuts du développement bourbakiste, la "somme" de notre époque, avec les collections types primitives, *qui ont donc droit au label de nombre cardinal authentique.*

Il est donc absurde de reprocher aux numérations primitives, comme le fait Lévy-Bruhl, de s'appuyer sur des "ensembles nombres", puisqu'un nombre cardinal est bel et bien un ensemble, mais un ensemble de référence, *c'est-à-dire une chose "concrète" qui n'est là que comme support ou comme expression d'une relation abstraite, celle de l'équipotence.* L'autre reproche de Lévy-Bruhl est plus intéressant : les primitifs n'ont pas au préalable isolé l'unité et ne construisent pas la suite régulière des entiers à partir de l'unité. Autrement dit, l'auteur leur reproche de ne pas concevoir les entiers à la façon de Péano : 1 est un nombre, si a est un nombre alors son successeur noté $a + 1$ est un nombre, par définition 2 est le successeur de 1, 3 celui de deux etc.[15]. Si un primitif comprenait le débat, il pourrait choisir Russel comme porte-parole et répondre que la définition de Péano est compatible avec une infinité d'interprétations différentes, et surtout que "un", "nombre" et "successeur"

> *"ne peuvent pas être définis à l'aide des axiomes de Péano, mais doivent être compris d'une façon indépendante. Nous avons besoin de nos nombres non seulement pour vérifier des formules mathématiques mais pour faire des applications correctes aux objets usuels. Nous devons avoir dix doigts, deux yeux et un nez... nous désirons que nos nombres soient tels que nous puissions les utiliser pour compter les objets usuels ; cela exige que nos nombres aient une signification précise et non pas seulement des propriétés de forme."*[16]

Russel poursuit en optant pour la définition de Frege - le nombre d'un ensemble est l'ensemble de tous les ensembles qui lui sont équipotents -, mais comme "l'ensemble de tous les ensembles" est une notion paradoxale, on modifiera la définition qui pourra prendre la forme de celle de Bourbaki.

Passons maintenant aux critiques courantes[17] que l'on peut faire aux collections types primitives, et qui toutes d'ailleurs tournent autour du concret et de l'abstrait. Les primitifs utilisent, nous l'avons mentionné, *plusieurs*

---

15 *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard Univ. Press, 1981, p. 94.

16 B. Russel, *Introduction à la philosophie mathématique*, Payot, 1970, pp. 20 et 22.

17 Ifrah (*op. cit.*) reprend avec application tous les lieux communs sur la question, en puisant abondamment, et sans toujours le dire, dans la documentation rassemblée par Lévy-Bruhl.

collections types, ce qui prouverait qu'ils ne sont pas en possession *du* nombre. Mais nous faisons aussi la même chose, c'est une question de commodité pratique : en prison, nous tiendrons le compte des jours avec des entailles gravées dans le mur, nous utiliserons aussi des dessins de bâtonnets pour le décompte des voix après un vote, nous déroulerons un chapelet pour être certains d'avoir récité toutes les prières, nos doigts seront appelés à la rescousse pour compter les lettres d'un mot ou les pieds d'un vers etc.

On dit aussi que la notion abstraite de nombre n'existe pas, parce que le décompte se réduit à une bijection concrète et qu'elle n'aboutit pas nécessairement à un *nom* de nombre. Mais d'une part, il est souvent impossible de se passer de la mise en correspondance "concrète" : qui serait capable de compter un nombre important de points placés aléatoirement sur une feuille de papier sans avoir au préalable tracé une ligne qui les relie, de façon à pouvoir suivre *du doigt* cette ligne, en *prononçant* un nom de nombre à chaque rencontre d'un point ? Qui peut compter directement les pignons d'un pédalier sans les suivre du doigt ? Je crois que nous sous-estimons l'aide sensorielle nécessaire, même lorsque nous comptons "de tête" ; nous avons besoin du support visuel de nos figurines habituelles de chiffres et du support auditif de leurs noms habituels. Il suffit d'imaginer, pour s'en rendre compte, la panique générale qui serait déclenchée par un changement brusque de nos noms et de nos signes de nombres ! Je ne crois pas d'autre part que l'absence de nom de nombre soit la preuve de l'incompréhension du concept correspondant ; les témoignages ethnographiques montrent la plupart du temps que les peuples ont au moins des noms pour "un" et "deux", qu'ils combinent ces mots pour dire "trois" et "quatre" - deux-un et deux-deux -, qu'au delà ils disent quelque fois "beaucoup", mais cela ne les empêche pas de compter plus loin avec, par exemple, des parties du corps. S'ils n'ont pas de nom pour "cinq", c'est probablement qu'ils n'en ont pas le besoin ; mais s'ils montrent les cinq doigts de la main pour exprimer qu'il y a cinq objets devant eux, ils ont parfaitement saisi le concept. Voici un autre exemple, célèbre, d'un concept parfaitement saisi et pourtant non nommé : après avoir énoncé la bijection aujourd'hui classique entre les entiers naturels et leurs carrés, Galilée poursuit[18] :

> *"nous pourrons affirmer que les nombres carrés sont autant que tous les nombres... Cependant nous disions, pour commencer, qu'il y a plus de nombres en tout qu'il n'y a, en tout, de carrés, la majeure partie des nombres étant non carrés... Et pourtant dans le nombre infini, si nous étions à même de le concevoir, nous devrions reconnaître que les carrés sont autant que tous les nombres... Je ne vois pas d'autre parti à prendre que d'admettre qu'infinis sont les nombres, infinis les carrés, infinies leurs racines, que la multitude des carrés n'est pas inférieure à celle de tous les nombres, ni celle-ci supérieure à celle-là, et, en dernière conclusion, que l'égal, le plus et le moins sont des attributs qui ne conviennent pas aux infinis, mais seulement aux quantités limitées."*

18 *"Dialogue des sciences nouvelles"*, in *Dialogues et lettres choisies*, trad. P.H.Michel, Hermann, 1966, p. 257.

Galilée a parfaitement conçu le cardinal transfini, comme nous dirions aujourd'hui, puisqu'il en énonce une propriété caractéristique : si l'on appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des carrés, il remarque en effet que Card $\mathbb{N}$ = Card $\mathbb{C}$ mais que $\mathbb{C}$ est strictement inclus dans $\mathbb{N}$. Malgré cela non seulement Galilée ne nomme pas ce nouveau concept - le mot "infini" n'étant là que pour signifier quelque chose d'inaccessible à notre "intelligence finie" -, mais il se refuse même à lui attribuer la qualité de nombre, à cause de ses propriétés différentes de celles du nombre fini. Il faudra attendre Cantor pour que ce nombre là soit reconnu comme tel et *nommé* "aleph zéro", plus de deux siècles après qu'il ait été *conçu* par Galilée.

On dit enfin, pour montrer que les primitifs ne saisissent le nombre que de façon "concrète", qu'ils ont fréquemment des noms de nombres différents suivant les objets comptés. Thurnwald[19] parle de 28 séries de noms de nombres dans les îles Marshall : une pour les bateaux, une pour les plantes à fruits, une pour les récipients pleins, une pour les récipients vides... et une série générale pour les dénombrements courants. Mais il y a une série générale, et nous pourrions bien être dans le cas où les noms particuliers ne sont que des condensés, un peu comme nous disons : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone etc. au lieu de figure à trois, quatre, cinq ou six côtés ou encore : solo, duo, trio, quatuor, quintette, sextuor pour spécifier le nombre de musiciens ou d'instruments de musique. Lévy-Bruhl donne des exemples[20] ; en voici un, qui concerne une langue de Colombie britannique :

	Pour compter en général	Objets plats	Objets ronds	Hommes	Objets longs	Canots	Mesures
1	gyak	gak	g'eret	k'al	k'awutskan	k'amaet	k'al
2	t'epqat	t'epqat	goupel	t'epqadal	gaopskan	g'alpeelt	gulbel
3	guant	guant	gutle	gulal	galtskan	galtskank	guleont
4	tqalpq	tqalp	tqalp	tqalpdal	tqaapskan	tqalpsk	tqalpqalont
5	kctonc	kctonc	kctonc	kcenecal	k'etoentskan	kctoonsk	kctonsilont
6	k'alt	k'alt	k'alt	k'aldal	k'aoltskan	k'altk	k'aldelont
7	t'epqalt	t'epqalt	t'epqalt	t'epqaltdal	t'epqaltskan	t'epqlalt	t'epqaldelont
8	guandalt	yuktalt	yuktalt	yuktleadal	ek'tlaedskan	yuktalk	yuktaldelont
9	kctemac	kcetmac	kctemac	kctemacal	kctemaecskan	kctemack	kctemasilont
10	gy'ap	gy'ap	kpeel	kpal	kpeetskan	gy'apsk	kpeont

Un examen même superficiel montre qu'il n'y a pratiquement aucune différence entre les noms de nombres généraux et ceux des objets plats, et que

19 *"Zählen"*, in *Reallexicon der Vorgeschichte*, Walter de Gruyter & Co, 1924-1932.
20 Levy-Bruhl, *op. cit.*, p. 222.

la plupart des "nombres-hommes" s'obtiennent en ajoutant le suffixe "al" au nombres généraux, comme l'ajout du suffixe "kan" donne les "nombres-objets longs", comme le "k" donne les canots et le "ont" les mesures.

*
* *

I.-4. La limite réelle des premières collections types.

Après avoir passé en revue les fausses critiques des collections types primitives, essayons d'en produire une vraie. Si le principe du nombre cardinal est sans aucun doute parfaitement compris, le nombre n'a pas l'autonomie nécessaire pour avoir un développement propre ; ses possibilités sont celles de la collection type choisie. S'il s'agit des parties du corps, on ne comptera guère que jusqu'à vingt ; on raconte que certains esquimaux, arrivés à 20, disent : "où prendrais-je le reste" ? Les possibilités du nombre sont également liées au besoins concrets : Thurnwald[21] raconte qu'ayant essayé de faire progresser le compte, chez un peuple des Nouvelles Hébrides, jusqu'à 60 ou 80 cochons, il lui fut répondu que cela n'avait pas de sens, car "davantage de cochons, cela n'existe pas". Autrement dit il n'y a pas, et il ne peut pas y avoir de suite illimitée des nombres ; si le besoin l'exige, on rallongera la collection type en rajoutant des parties du corps, en allant chercher davantage de bâtonnets ou en ajoutant des nœuds à la corde. *Il faut aller chercher d'autres objets à l'extérieur, il n'y a pas de principe interne de développement de la suite numérique* : on finira par inventer ce principe interne, progrès de portée considérable, et qui sera l'objet du paragraphe suivant.

L'homme primitif connaît le nombre cardinal, et le dénombrement est une activité spécifiquement humaine, telle est la principale conclusion de ce paragraphe ; il reste cependant une question, et non des moindres : le nombre est-il une découverte de l'homme ou est-il inné dans notre espèce, déjà génétiquement équipée de ce concept ? Voilà une question redoutable qui a déjà fait couler beaucoup d'encre ; pour Leibniz[22],

> *"toute l'arithmétique est innée et existe en nous de manière virtuelle... Il n'est pas vrai que tout ce que l'homme apprend n'est pas inné en lui ; les vérités des nombres sont en nous et néanmoins nous les apprenons."*

De nos jours, les intuitionnistes parlent de *"l'intuition primordiale de l'entier positif"*. Pour Russel au contraire[23] :

---

21 *Op. cit.*
22 Cité par Frege, *Les fondements de l'arithmétique*, Seuil, 1969, p. 138.
23 Russel, *op. cit.*, p. 13.

"ce n'est qu'au sein d'une civilisation déjà avancée que nous pouvons prendre cette série [des entiers naturels] *pour point de départ. Il a sûrement fallu des siècles pour découvrir qu'une paire de faisans et un couple de jours sont deux exemples du nombre deux ; le degré d'abstraction impliqué est loin d'être facile à saisir."*

Je me contenterai ici de donner quelques raisons de conjecturer que le nombre est une invention humaine, une production de sa pensée ; l'homme, parti de l'état animal, a construit lui-même son cerveau, son langage, ... et ses nombres. La première raison est qu'il n'existe aucune trace d'activité numérique humaine avant le paléolithique supérieur, époque où est apparu l'*homo sapiens-sapiens*, vers - 40 000 ; dès l'aurignacien - vers - 30 000 -, on connaît en revanche un grand nombre d'os striés de façon régulière et qui *pourraient* être des restes d'activité de dénombrement. Celle-ci semble donc apparaître à une étape déterminée de l'évolution humaine, et non à son commencement.

La deuxième raison est la fréquente mention, dans les mythologies, de la *révélation* des nombres aux hommes, ce qui montre que dans la mémoire collective au moins, la numération n'est pas considérée comme quelque chose d'inné. Ainsi chez les Dogons du Mali, des *"paroles"* symbolisent l'acte fondateur de chacune des activités humaines, par lequel l'être surnaturel transmet aux hommes ce qui est nécessaire pour les sortir de la sauvagerie où l'on *"ne se nourrissait que de fruits et de viande crue"* ; et parmi ces paroles, il y a deux *"paroles du compte"*[24]. De même Thot aurait enseigné la numération et le calcul aux anciens Egyptiens, et Nisaba aux Sumériens.

*
* *

II. Le calcul, deuxième découverte arithmétique de l'humanité primitive.

Nous avons souligné plus haut le "défaut" des collections types les plus simples ; elles sont purement additives, dans le sens où il faut aller chercher des éléments extérieurs pour les augmenter. La trouvaille nouvelle, révolutionnaire, ce fut de considérer une multiplicité comme une nouvelle unité, et d'introduire ainsi un principe interne et multiplicatif de développement de la collection type. Le nombre n'est plus seulement l'expression d'une correspondance cardinale universelle, mais il devient en

24 G. Calame-Griaule, *Ethnologie et langage, la parole chez les Dogons*, Gallimard, 1965.

outre générateur d'autres nombres ; si le nombre cinq devient un, sous forme de "main", et que vingt le devient également sous la forme "homme", ils sont tous les deux à la fois des multiplicités, de vulgaires cinq et vingt, mais aussi des *choses-unes* elles mêmes susceptibles d'être dénombrées pour fabriquer de nouveaux nombres, comme "trois mains" pour quinze ou "trois hommes" pour soixante et même "main homme" pour cent. Ce qui est important ici, c'est ce mouvement de *repli sur soi* de la collection type, devenue assez grande pour se débrouiller toute seule grâce au double caractère acquis par le nombre - multiplicité et unité - ; pour s'accroître, nul besoin de nouveaux objets, il lui suffit de se compter elle-même. *Là est l'essence du calcul, et là est la possibilité théorique d'une définition purement interne du nombre, à la Peano, exclue à l'étape précédente.* En anticipant sur le développement ultérieur, on peut déjà souligner le caractère unilatéral de ce premier pas dans l'art du calcul, puisque si la multiplicité est fort bien conçue comme unité, l'inverse n'est pas encore à l'ordre du jour ; l'unité n'est pas conçue comme multiplicité, le calcul fractionnaire ne sera inventé que beaucoup plus tard, dans les grands empires primitifs.

Il est remarquable que ce mouvement ait eu lieu pour toutes les collections types imaginables. La plus simple, celle des *cailloux* : dans un royaume africain du XIXème siècle, des cailloux blancs, rouges et noirs représentent respectivement 10, 100, et 1000 soldats[25] ; il est probable que les jetons de compte découverts au moyen-orient indiquaient l'unité d'après la taille et la forme : par exemple, un petit cône pour le un, une sphère pour dix, un grand cône pour soixante[26]. Les *cordes nouées* se sont développées en "*quipus*", dont le principe est que les nœuds indiquent des unités diverses décelables suivant leur emplacement, grâce à un agencement savant de cordes principales et secondaires ; on cite généralement les quipus incas, mais le procédé fut utilisé en d'autres endroits, fort nombreux[27]. Les *bâtonnets* sont aussi de la partie lorsque par exemple après avoir compté dix objets, on met un bâton de côté, et pour dix de ceux-ci, on prend un bâton plus grand ; on peut très bien utiliser en même temps cette technique et des nœuds ; chez les Pomo, indiens de Californie, "*le groupe qui recevait le wampum*[28] *tenait le compte des perles reçues. Pour cela on faisait un nœud pour 400 wampum reçus. C'était un double du compte avec des bâtonnets. Quand des bâtonnets étaient utilisés, un petit indiquait cent wampum, et un grand quatre cent... La corde et les bâtons étaient conservés dans un sac...*"[29]. Mais c'est avec le *corps humain* que la nouvelle méthode prend l'extension la pus grande et la plus significative. Il est vraisemblable qu'elle a commencé timidement par quelques combinaisons modestes, où une "grande" unité, comme la main, joue davantage le rôle de point de repère que d'unité d'ordre supérieur ; chez les indiens Zunis :

25 C. Zaslavsky, *Africa Counts*, Prindle, Weber and Schmidt, 1973, p. 96.
26 D. Schmandt-Besserat, *op. cit.*
27 On trouvera des détails dans Ifrah, *op. cit.*
28 Assemblage de "perles", pour transmettre des messages, sceller un traité etc.
29 Cité dans M. Closs, *Native American Mathematics*, University of Texas Press, Austin, 1990.

1 = pris pour commencer ;
2 = levé avec le précédent ;
3 = le doigt qui divise également (repérage d'un axe de symétrie dans la main) ;
4 = tous les doigts levés excepté un (5 - 1) ;
5 = l'entaillé ;
6 = un autre ajouté à ce qui est déjà compté (5 + 1) ;
7 = deux amenés et levés avec le reste ;
...
10 = tous les doigts ;
11 = tous les doigts et un en plus levés[30].

Dans l'exemple suivant, qui concerne des indiens du Paraguay et cité par le même auteur, la main apparaît comme principe multiplicateur sous la forme de "deux mains" :

mots spéciaux pour "un" et "deux", puis :
3 = composé de un et de deux ;
4 = les deux côtés pareil ;
5 = une main ;
6 = arrivé à l'autre main, un ;
...
10 = fini les deux mains ;
11= arrivé au pied, un ;
...
16 = arrivé à l'autre pied, un ;
...
20 = fini, les pieds.

Le système est parfaitement au point chez les indiens Tamanac (Orénoque) :

noms spéciaux de "un" à "quatre", puis :
5 = une main entière ;
6 à 9 = un de l'autre main à quatre de l'autre main ;
10 = les deux mains ;
11 = un du pied, et ainsi de suite jusqu'à :
15 = tout un pied ;
16 = un de l'autre pied, et ainsi de suite jusqu'à :
20 = un indien ;
21 = un des mains d'un autre indien ;
...
40 = deux indiens, etc.[31]

30 Levy-Bruhl, *op. cit.*, p. 218.
31 E. B. Tylor, *La civilisation primitive*, 1873, p. 285.

Ce système, que l'on pourrait baptiser "main-pied-homme", a connu une fortune extraordinaire, on le retrouve partout dans le monde, et il est sans doute à l'origine du rôle particulier que joue la vingtaine dans certaines langues comme la nôtre. L'exemple précédent additionne des unités aux "grandes" unités : par exemple 21 se dit un indien plus un ; mais on peut avoir également un système soustractif comme celui des Yorubas africains[32], où de 11 à 14 on dit "dix-un" à "dix-quatre", mais de 15 à 19 on dit "vingt moins cinq" à "vingt moins un" ; 35 se dit "cinq de moins que deux vingtaines", 50 "trois vingtaines moins dix".

En Papouasie-Nouvelle-Guinée, les Iqwaye[33] ont des gestes et des expressions très imagées ; pour cinq on montre la main avec les doigts bien regroupés à leur sommet, pour dix les deux mains jointes, et pour vingt l'individu s'arc-boute sur lui-même, mains et pieds joints, comme si l'on voulait bien faire sentir à chaque fois que les unités ont été physiquement regroupées pour donner un tout, qui est en même temps une nouvelle unité d'ordre supérieur. Voici quelques expressions :

20 : deux mains-deux jambes, ou une personne ;
25 : main d'une autre personne ;
100 : main homme ;
60 : trois personnes, toutes leurs mains et toutes leurs jambes ;
150 : sept personnes, toutes leurs mains et toutes leurs jambes et les deux mains d'une autre personne ;
400 : autant de personnes que moi avec leurs mains et leurs jambes (= autant de doigts de mains et de pieds de personnes que j'ai de doigts de mains et de pieds) ;
500 : autant de personnes que moi et que la main d'une autre personne avec leurs mains et leurs jambes ($(20 + 5)\times 20$).

On remarquera avec quelle rigueur on emploie la base vingt. Ce sont des mots savants, mais les traces matérielles que ce peuple utilise comme "relevés de compte" ne suivent pas encore (contrairement au cas des "*calculi*" babyloniens mentionnés plus haut) la logique des mots : les relevés se font au moyen de bâtonnets de longueurs différentes avec des encoches diverses que l'on attache ensuite, ou de nœuds dans une corde, ou de coquillages attachés. Mais la liste dont nous avons donné un extrait est savante, elle s'intellectualise parce que, comme le souligne Mimica, on n'a pas besoin de la présence physique de tous les hommes concernés - avec "*toutes leurs mains et toutes leurs jambes*" !! - ; elle peut se développer en principe tout seule, mais demande une concentration d'autant plus grande que les expressions sont compliquées. Il faudra bien un jour ou l'autre simplifier le vocabulaire - la langue indigène

32 C. Zaslavsky, *op. cit.*, p. 207.
33 J. Mimica, *Intimations of Infinity, The Mythopoeia of the Iqwaye Counting System and Number*, Berg, 1988. L'auteur a passé plusieurs années au sein de ce peuple.

emploie dix-sept mots pour dire 500, neuf mots pour dire 400 -, et dire par exemple comme dans une île au sud de Sumatra "un notre corps" pour 400[34] ; l'expression est remarquable parce que le "un" montre bien que 400 est ici saisi comme une unité d'ordre supérieur à la vingtaine, un "grand vingt" en quelque sorte, alors que ce n'est peut être qu'en germe chez les Iqwaye. L'informateur de Mimica était visiblement fier de lui de pouvoir énoncer clairement et facilement l'expression correcte de 400, alors que selon lui les autres Iqwaye se seraient contentés de dire quelque chose comme "beaucoup, beaucoup", et que, toujours selon lui, les vieux perdraient les pédales aux alentours de 100 ; fierté justifiée !! Car l'énoncé des nombres Iqwaye ne peut en aucun cas se comparer à une simple *récitation* de mots appris par cœur, il exige au contraire un véritable *calcul* mental permanent, et si le lecteur n'en est pas persuadé, qu'il essaye donc d'exprimer 350, - 19 mots dans la langue locale -, sachant que $350 = 17 \times 20 + 10$, et que 17 se dit "moitié des jambes, tous les doigts et deux".

Il est intéressant également de souligner que malgré le "retour sur soi" de la collection type, qui fait qu'elle se développe sans besoin d'ajout d'éléments extérieurs, par un calcul interne, il ne semble pas que dans l'esprit primitif la possibilité existe que ce développement soit infini. Mais les réactions sont difficiles à interpréter ; si certains Iqwaye disent "beaucoup, beaucoup" pour 400, cela signifie-t-il qu'ils croient être arrivés à une limite absolue, ou qu'ils n'arrivent plus à faire le calcul mental nécessaire, ou est-ce plus simplement synonyme de "quand ce visage pâle se décidera-t-il à me lâcher" ? De même en Nouvelle-Bretagne (Mélanésie), où le système de numération ressemble à celui des Iqwaye, on dit "comme le sable de la plage" ou "comme les feuilles de l'arbre" après 400 ; mais cela n'indique pas si ces objets sont conçus comme trop longs à compter, ou dénombrables mais dont le compte serait un casse-tête sans intérêt, ou non dénombrables.

L'important est que l'on peut maintenant parler d'ensemble autonome de nombres grâce au calcul, qui a permis de passer de la simple extension additive de la collection type à de véritables *systèmes de numération*. Il est possible que le nouveau principe, celui du groupement d'unités en une unité d'ordre supérieur, soit apparu au début comme simple auxiliaire du dénombrement ; la mythologie Dogon affirme que les hommes ont commencé par compter par cinq. On rapporte aussi qu'en Polynésie, le décompte se fait par deux, et que le mot vingt signifie en fait vingt paires. Lorsque, dans certaines tribus australiennes, les noms de nombres sont "un", "deux", "deux-un", "deux-deux" etc., ils reflètent peut-être un procédé pratique de comptage facile à imaginer. Le véritable principe de la base apparaît dans le compte-rendu suivant : dans une île Salomon, deux hommes entassent les ignames par paquets de cinq ; à chaque double paquet de cinq réalisé, ils disent "un", puis "deux", et ainsi de suite. Un autre homme sied dans les parages, et lorsque "dix" - donc cent en réalité - est annoncé, il met une petite racine d'igname de

34 Menninger, *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, M. I. T. Press, 1969, p. 52.

côté[35]. L'histoire ne dit malheureusement pas s'il y a un lien entre cette façon pratique de compter et les noms de nombres utilisés dans cette île. En tout cas, dans un système comme celui des Iqwaye, rigoureusement fondé sur la base vingt, il ne s'agit plus d'une simple technique de dénombrement mais du principe organisateur d'une liste de nombre tendant à devenir purement abstraite, comme nous l'avons vu.

C'est un lieu commun que de souligner l'accélération de l'évolution des sociétés humaines, et par conséquent l'extrême lenteur de celle des sociétés primitives ; si l'on postule, et c'est mon cas, qu'il y a eu *passage* des collections types bigarrées aux systèmes de numération, ce passage a très bien pu s'étaler sur des dizaines de milliers d'années, ce qui le rend proprement inobservable sur les primitifs actuels. Aussi les rares exemples de systèmes transitoires sont-ils d'autant plus intéressants. On signale chez les Bororo du Brésil[36] une première liste de nombres dans laquelle, à part cinq qui se dit "main", on se contente de combiner deux et un jusqu'à dix, dont l'expression est : "augere pobe" répétée cinq fois! Les observateurs soulignent que l'on se contente ordinairement de montrer les doigts de la main, puis qu'au delà on montre les doigts de pied ; il semble donc que la première liste soit plus une liste de mots servant à scander l'opération concrète de dénombrement, qu'une véritable suite de noms de nombres. Il en est tout autrement d'une deuxième liste, récitée cette fois-ci par les mêmes Bororo *sans l'accompagnement de gestes* :

1 = un seul ;
2 = une paire ;
3 = une paire et celui dont il manque le partenaire ;
4 = paires ensemble ;
5 = autant que ma main complète ;
6 = une expression qui signifie passage à l'autre main ;
7 = ma main et un autre avec un partenaire ;
8 = mon doigt du milieu (de l'autre main) ;
9 = celui qui est à côté du doigt du milieu ;
10 = tous mes doigts ;
...
15 = mon pied est fini ;
20 = votre pied, autant qu'il y en a avec votre pied ;
21 = on recommence ;
22 = deux, recommencé...

La caractéristique de cette liste, est de montrer clairement une transition entre le comptage par paires et un système "main-pied-homme" en formation. Un autre exemple est celui des Luiseno de Californie, où l'on utilise tantôt un système de base cinq, tantôt un système "main-pied-homme" :

35 Thurnwald, *op. cit.*
36 M. Closs, *op. cit.*, pp. 20 à 23.

	Base cinq	Main-pied- homme		Base cinq	Main-pied- homme
6	Cinq, un de plus	main, un doigt de plus	21		à côté de mon autre pied, un doigt
10	cinq, cinq de plus	mes deux mains finies	30	cinq fois cinq, cinq de plus	
11	deux fois cinq, un de plus	à coté de mon autre main, un doigt	40		deux fois mes mains mes pieds finis
15		mes mains finies et un pied	71	cinq fois cinq, un autre cinq fois cinq, et quatre fois cinq, un de plus	
16	trois fois cinq, un de plus	à côté de mon pied, un doigt	80		quatre fois mes mains mes pieds finis
20	quatre fois cinq	un autre pied fini	100		cinq fois mes mains mes pieds finis

Historiquement, on a donc dû fait des essais divers, des tris avant d'en arriver à une liste unique et uniformément construite. Une fois le principe découvert, il faudra pour son utilisation commode inventer ultérieurement des noms simples pour les unités successives - plus exactement sans doute, ces noms simples se fabriqueront spontanément par abréviations successives -, comme "un notre corps" pour 400 qui correspond à notre "cent" pour dix dizaines ; l'écriture viendra plus tard à la rescousse. Mais le calcul, essence de tout *système* de numération, a bel et bien été inventé dans le monde primitif.

*

* *

III. Questions sur le contexte des deux grandes découvertes de l'humanité primitive.

Ce que nous venons de développer est au fond le moins intéressant, et risque même de donner des idées a-historiques sur la question de la préhistoire des mathématiques. Le développement précédent, nécessaire pour mettre en relief la véritable nature et la portée des inventions primitives, laisse l'impression que l'on passe de la reconnaissance de la correspondance cardinale - § I - à la création des systèmes de numération - § II - comme d'un théorème à l'autre dans un cours bien construit. Il laisse de côté le problème, essentiel si l'on veut faire de l'histoire, de la nature des forces, du moteur de la progression.

J'ai abordé rapidement plus haut le problème du moment de la découverte du nombre, et je n'y reviendrais pas. Je dirais ici quelques mots des raisons de l'apparition du nombre dans les sociétés primitives, et du rôle qu'il y a joué ; et ces mots seront pour l'essentiel des questions, des hypothèses, ou, si l'on veut, un plan de travail pour une recherche ultérieure.

Pour rendre compte de l'apparition du nombre dans les sociétés primitives, on peut chercher du côté du calendrier et des échanges. Mais au sein de la communauté primitive, la répartition des produits se fait suivant des normes qualitatives, et non quantitatives. De nombreuses études, rassemblées par M.Sahlins[37], ne laissent aucun doute : le communisme règne au sein du groupe, et les échanges sont d'autant plus quantifiés qu'ils ont lieu avec des gens de parenté plus éloignée. Par exemple, chez les Bochimans :

> *"Au départ, la viande de la bête abattue est redistribuée par le tueur au sein du groupe des chasseurs... Lors de la seconde distribution, la répartition des dons de viande se fait en fonction des rapports de parenté proche. Certaines obligations sont contraignantes. Un homme est tenu, nous dit-on, d'offrir une part aux parents de sa femme. Il doit leur en donner du meilleur, et en abondance... Au cours des partages ultérieurs, lorsque la distribution initiale a eu lieu et qu'on s'est acquitté de ses obligations envers les parents proches, le don de la viande prélevé sur sa propre portion appartient à la catégorie des échanges de dons. En l'occurrence, la société kung exige seulement que l'on se montre raisonnablement prodigue, c'est-à-dire que l'on donne en proportion de ce qu'on a reçu, sans garder par devers soi plus qu'il ne convient, et que le récipiendaire d'un don de viande paye de retour dans un avenir point trop distant...Le simple fait de demander quelque chose, précise un informateur, 'crée une affection' entre les gens. Cela signifie 'il m'aime encore, c'est pourquoi il quémande quelque chose de moi'...Le laps de temps entre recevoir et rendre varie de quelques semaines à quelques années. Il y a inconvenance à manifester une hâte indue. 'Faire un don'*

37 M. Sahlins, *Âge de pierre, âge d'abondance, l'économie des sociétés primitives*, Gallimard, 1972.

n'est pas 'faire des affaires'...Les Kung ne font pas de commerce entre eux. Ils considèrent une telle procédure contraire à leur dignité et évitent d'y recourir de peur de susciter des dissensions. Ils commercent cependant avec les Bantous, dans les établissements situés sur la frontière..."[38]

Entre amis ou parents proches, on n'échange pas, on donne sans compter et c'est l'attitude normale, la vie de tous les jours ; un véritable *décompte* des échanges n'a lieu qu'avec des étrangers. Si l'on pense, par conséquent, que le commerce est la source des nombres et du calcul dans les sociétés primitives, il faut admettre que ceux-ci ne jouent qu'un rôle très secondaire chez les chasseurs-cueilleurs - tels les Bochimans -, et qu'ils ne se sont réellement développés qu'au néolithique. Mais même dans des sociétés plus avancées que les chasseurs-cueilleurs, la même attitude générale prévaut qui veut que le "commerce" soit plus ou moins infamant, et par dessus le marché celui-ci porte sur des quantités relativement petites. Par exemple, chez les Iqwaye déjà cités, il ne semble pas que l'on ait besoin d'aller au delà de cent ou deux-cents[39], et par suite la nécessité de fabriquer des noms de nombres rigoureusement basés sur le système "main-pied-homme" ne peut être due au commerce.

Le rôle joué par le décompte des périodes de temps est de même très secondaire dans les sociétés les plus primitives. Il ne semble pas y avoir du tout de calendrier dans les plus frustes, puis apparaissent des calendriers purement qualitatifs, où les lunaisons et les saisons ne sont pas numérotées et dénombrées mais décrites, nommées d'après les événements qui les caractérisent. À la question : "à quel moment a eu lieu tel événement ?", on préférera toujours répondre par un autre événement simultané plutôt que par un nombre d'unités de temps : un tel est né *"après que l'on eût pêché le gros poisson"* ou *"l'année où il y a eu tant de neige"*[40]. Ou encore : tel événement a eu lieu quand telle personne était grande comme cela, ou lorsque sa barbe était grande comme cela. Lorsque les nombres commencent à être utilisés pour la mesure du temps, c'est sous la forme d'un petit nombre d'unités avant ou après un événement important. Mais dans la vie des chasseurs-cueilleurs, tout cela n'est pas grand-chose : *"Le temps vu comme une succession continue de périodes semble n'avoir aucune importance pour les aborigènes* [australiens]... *Même s'il doit participer... à un rassemblement tribal pour cérémonies rituelles ou rencontres 'commerciales', l'aborigène ne se pressera pas afin d'être là au moment voulu, comme à un rendez-vous... Dans une réunion de ce genre, ceux qui arrivent les premiers attendent les autres, c'est-à-dire qu'ils s'installent, cueillent des comestibles, exécutent des danses. Ils ne montrent aucune impatience et ne font nul reproche pour motif de retard... "*[41]. Le même genre d'attitude prévaut dans des sociétés plus évoluées, et il faudra attendre d'en arriver aux grands empires primitifs - Aztèques, Egyptiens, Babyloniens -, pour que le calcul joue un rôle décisif dans le

38 *Ibid.*, pp. 340 et 341.
39 J. Mimica, *op. cit.*, p. 14.
40 M. P. Nillson, *Primitive Time Reckoning*, 1920.
41 A. P. Elkin, *op. cit.*, p. 274.

décompte du temps et que celui-ci puisse être considéré comme un moteur du développement de l'arithmétique.

Si l'on s'en tient à l'explication traditionnelle de l'origine du calcul, à savoir les besoins nés des échanges et du calendrier, l'étude des sociétés primitives est donc sans grand intérêt, et il vaut mieux débuter avec les premiers empires. Mais cela reviendrait à faire peu de cas de deux phénomènes : en premier lieu, l'existence de collections types très évoluées, de véritables systèmes de numération, dans des sociétés qui n'en ont pas le besoin pratique, comme dans le cas des Iqwaye, qui font un jardinage de subsistance, élèvent des cochons et font très peu d'échanges ; en second lieu, le rôle symbolique éminent du nombre dans la sagesse primitive - à part le cas notable des aborigènes australiens, qui ne connaissent qu'une symbolique de type géométrique -, qui lui donne un statut sans commune mesure avec ses utilisations concrètes.

J'ai rapporté plus haut un exemple d'utilisation rituelle du nombre quatre chez les indiens d'Amérique ; il suffit de produire le nombre quatre pour être mis en relation avec l'objet visé, ici les quatre points cardinaux. Le symbolisme est certes primaire, immédiat, mais il est déjà l'expression d'une attitude intellectuelle remarquable qui sera au fondement de la science civilisée : pour agir sur une chose il suffit d'agir sur ce qui est considéré comme son essence - ici son nombre -, c'est l'abstraction créatrice. Mais le paradoxe de la pensée primitive est que le symbole n'est pas reconnu comme tel, il "colle" aux choses, il est la chose, et il faudra attendre la philosophie grecque pour séparer les deux mondes et se poser la question de leurs liens. Le symbolisme numérique primaire existe encore dans des sociétés plus avancées - comme d'ailleurs dans la nôtre -, chez tel peuple africain par exemple où certains gestes sont répétés quatre fois par les femmes et trois fois par les hommes, conformément au nombre correspondant à leur sexe - les quatre lèvres pour les femmes, la verge et les deux testicules pour les hommes -, mais déjà la spéculation abstraite fondée sur un calcul apparaît timidement dans le fait que sept, comme trois plus quatre, est l'expression de la création parfaite ; ou bien cinq, comme quatre (femme) plus un (incomplétude), exprime la fausse couche et la mort. La cosmologie luba - peuple bantou - offre une étrange spéculation sur le pair et l'impair ; une créature est nommée par dérision "l'équivoque" parce que son nombre est impair. L'homme lui même n'est pas satisfait car, comme il le dit au créateur : "Jadis quand tu créais en perfection, tu créais dans l'ordre numérique du nombre quatre. Et voici que tu nous a créés dans l'ordre numérique du nombre dix, et non de douze qui est celui des ancêtres primordiaux et principaux". La révolte des créatures contre le créateur est associée au mélange du pair et de l'impair ; le pair est certes bénéfique, mais le "pairement pair" est encore mieux puisque l'homme "pairement impair" - 2×5 - est fondé à se plaindre ; puis, avec une belle incohérence, les nombres de la forme $3\times2n$ sont présentés comme "les nombres complets et de grande perfection"[42]. Nous ne sommes plus là en présence d'un symbolisme qui met *directement* les choses en

42 M. Mubumbila, *Sur le sentier mystérieux des nombres noirs*, l'Harmattan, 1988, p. 99.

rapport par l'intermédiaire du nombre, mais d'une *longue chaîne de médiations symboliques* qui prend la forme d'une théorie des nombres. Il en est de même des formes de divination numérologique comme le *I Ching* chinois ou la mesure de l'ombre du corps chez les Bambaras[43]. Il faut prendre très au sérieux ces manifestations de ce que l'on appelle la sagesse primitive - par opposition à la philosophie civilisée -, et qui n'ont rien à voir avec des spéculations fantaisistes de shamans excités. La sagesse ancienne a cherché en effet à fonder minutieusement l'unité du monde, comme vaste réseau de correspondances symboliques, en accouchant de mythes eux-mêmes associés à des rites ; les rites ont à charge de recréer sans cesse cette unité, voire le monde lui-même, et sans leur observation scrupuleuse par tout le peuple, l'univers serait menacé de disparition. C'est au sein de ce système de pensée - et d'action, les deux aspects sont indissociables chez les primitifs - que l'on voit apparaître, sous la forme du symbolisme spéculatif, ce qui deviendra la démarche scientifique fondamentale : recherche de symboles-concepts des choses et phénomènes, puis travail indépendant ou spéculation sur les symboles-concepts, et enfin retour aux choses et phénomènes.

Je ne sais pas si la sagesse primitive a *créé* le nombre et les premières théories des nombres ; mais le fait est qu'elle a joué un rôle déterminant dans leur développement, et sans elle il est impossible de comprendre des aboutissements tardifs comme le pythagorisme et les spéculations platoniciennes, impossible donc de comprendre la naissance des mathématiques pures. Tout reste à répertorier, décrire et analyser dans ce domaine extrêmement riche, extrêmement vaste aussi de "l'arithmologie" primitive ; la moisson promet d'être abondante.

Mai-Décembre 1994.

*

* *

43 G. Dieterlen, *Essai sur la religion bambara*, Éd. de l'Univ. Libre de Bruxelles, 1988, p. 239.

Indications Bibliographiques.

Il n'existe pas d'ouvrage d'ensemble sur la préhistoire de l'arithmétique, et encore moins sur celle des mathématiques ; on trouvera des éléments ou des monographies dans les ouvrages suivants :

CLOSS, M. (sous la direction de).
- *Native American Mathematics*. University of Texas Press, Austin, 1990.
L'ouvrage contient de riches monographies sur la numération et la géométrie des aborigènes américains.

CRUMP, T.
- *The Anthropology of Numbers*. Cambridge University Press, 1990.

GUITEL, G.
- *Histoire comparée des numérations écrites*. Flammarion, 1975.

IFRAH, G.
- *Histoire universelle des chiffres*. Laffont, 1994.

LEVY-BRUHL, L.
- *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*. Alcan, 1910.
Le chapitre 5 de cet ouvrage rassemble un "matériel" ethnographique abondant et largement pillé par tous les auteurs jusqu'à récemment.

MENNINGER, K.
- *Number Words and Number Symbols*. M. I. T. Press, 1969.
C'est de loin le livre le plus intéressant, celui par lequel on peut commencer.

THURNWALD.
- *"Zählen"*, article de vingt pages du *Reallexicon der Vorgeschichte*, Verlag Walter de Gruyter & Co, 1924-1932.
Abondant matériel ethnographique, qui ne fait pas double emploi avec celui que l'on trouve chez Lévy-Bruhl.

TYLOR, E. B.
- *La civilisation primitive*. 1873.
Le chapitre 7 est consacré à la numération.

ZASLAVSKY, C.
- *Africa Counts*, Prindle, Weber and Schmidt, 1973.

*

* *

*