LA GRANDE CONJECTURE DE FERMAT : PRÉLUDE À SON HISTOIRE.

Didier BESSOT.

Juin 1993 ; l'univers mathématique retentit d'une étonnante nouvelle : la grande conjecture de Fermat est morte, vive le théorème de Wiles !

En vérité, le résultat proposé par Andrew Wiles au Congrès de Cambridge concerne une conjecture, dite de Shimura-Taniyama-Weil (en abrégé STW) dont on sait depuis 1986, grâce à K. Ribet, qu'elle implique celle de Fermat ; en outre, le résultat annoncé par Wiles est un cas particulier de la conjecture STW (les cas des courbes semi-stables). Hélas, ou heureusement, il semblerait que la mémoire des nombres entiers enfouie dans la simple égalité $a^n + b^n = c^n$ veuille encore garder de son mystère puisqu'en février 1994 A. Wiles reprend le manuscrit examiné par une commission spécialisée après que celle-ci lui a indiqué des manques dans la démonstration proposée. Le problème reste donc ouvert, ou au moins entr'ouvert[1].

Pour vous proposer une histoire des tentatives de résolution de ces conjectures, l'I.R.E.M. de Basse-Normandie bénéficie d'une circonstance favorable, la présence à l'Université de Caen même d'un acteur de cette histoire ; en effet, les recherches menées par Yves Hellegouarc'h, à la fin des années 1960 et au début des années 1970, ont porté sur ces questions et, en particulier, sa thèse d'État, soutenue en 1972 à l'Université de Besançon, *Courbes elliptiques et équation de Fermat*, a ouvert la voie aux nouvelles approches reprises et développées ensuite.

Avant de lui laisser le soin de présenter cette histoire pour la période récente principalement, je me limiterai à proposer une esquisse à grands traits de l'histoire des décompositions de puissances d'entiers en sommes de

1 Depuis le prononcé de cette communication, l'hypothèque qui pesait encore sur la démonstration a été levée : la preuve de la conjecture STW pour les courbes semi-stables a été obtenue par A. Wiles avec la collaboration de Richard Taylor et déposée en septembre 1994 ; elle assure la démonstration totale de la conjecture de Fermat.

puissances d'entiers, ou parfois de rationnels, les exposants pouvant être différents. Mon récit sera scindé en trois parties, par l'intervention de Fermat lui-même ; la première partie portera sur l'Antiquité et le Moyen-Age, la seconde partie décrira les diverses interventions dues à Fermat alors que la dernière partie de ce panorama présentera ce que Catherine Goldstein a appelé récemment l'histoire des *exposants vaincus*[2].

*
* *

DE L'ANTIQUITÉ À FERMAT.

Des résultats sur des décompositions de puissances d'entiers en sommes de puissances d'entiers ont été trouvés dès la plus haute Antiquité[3] ; cependant la plus ancienne trace connue d'une telle recherche comportant aussi le procédé constructif et la preuve de son exactitude se trouve dans l'œuvre d'Euclide (IIIème siècle av. J.C.) ; en effet, au livre X des *Éléments*[4], le lemme 1 de la proposition 29 pose le problème : *"Trouver deux nombres quarrés tels que leur somme soit un quarré."* En substance, la solution proposée consiste à choisir deux entiers a et b de même parité et vérifiant $b = k^2a$, où k est un entier nécessairement impair ; alors $ab + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$ et $ab = k^2a^2 = (ka)^2$. Les entiers carrés ab, $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$ répondent donc au problème. Cependant, il n'entre pas dans les préoccupations d'Euclide de traiter le problème dans son universalité en en recherchant toutes les solutions, ou *triplets pythagoriciens*, bien que son procédé de construction des trois carrés les fournissent toutes.

Diophante (~325 - 410) reprend le même problème, au IVème siècle de notre ère, sous une forme toutefois différente. En effet, la proposition 8 du Livre II des *Arithmétiques* demande de *"partager un carré proposé en deux carrés"*[5]. Dans ce cas, le carré somme est imposé, ce qui contraint à résoudre la question en nombres rationnels et non en entiers. D'autre part, la méthode de construction des deux autres carrés est décrite sur un exemple numérique, où le carré donné est 16 ; cependant, le procédé donné sur des valeurs particulières se généralise immédiatement et correspond à définir, pour un entier n donné,

---

2 C. Goldstein, *"Le théorème de Fermat"*, in *La Recherche* 263, mars 1994, pp. 268-275.

3 Sur ce sujet, consulter : B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin/Heidelberg/Nex-York/Tokyo : Springer-Verlag, 1983, chap. 1 et 2.

4 Euclide, *Les Œuvres d'Euclide traduites littéralement par F. Peyrard*, 1819, nouveau tirage, introd. par J. Itard, Paris : A. Blanchard, 1966, p. 288.

5 Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, trad. du grec, introd. et notes par P. Ver Eecke, Paris : A. Blanchard, 1959, pp. 53-55.

deux nombres rationnels x et y par $x = \frac{2k}{k^2+1}n$ et $y = \frac{k^2-1}{k^2+1}n$, où k est un entier naturel non nul quelconque ; x et y vérifient alors $x^2 + y^2 = n^2$.

À partir de ce résultat, il est aisé d'obtenir des triplets pythagoriciens en nombres entiers ; il suffit de poser $a = (k^2+1)x = 2kn$, $b = (k^2+1)x = (k^2-1)n$ et $c = (k^2+1)n$.

La question de savoir si tous les triplets pythagoriciens peuvent être obtenus de cette façon, et dont la réponse est affirmative, n'est pas soulevée par Diophante. Celui-ci cherche plutôt à résoudre d'autres problèmes du même genre, comme, à la proposition 9 du même Livre II : *"Partager un nombre donné, lequel est somme de deux carrés en deux autres carrés"*[5], ou à la proposition 1 du Livre IV traduit par P. Ver Eecke, d'après une copie grecque : *"Partager un nombre donné en deux cubes dont la somme des racines est donnée"*[6], ou encore d'autres propositions du Livre IV, mais, cette fois dans une traduction de R. Rashed, d'après une copie arabe :

> proposition 1 [resp. 2]. *Trouver deux nombres cubiques dont la somme (resp. différence) soit un nombre carré.*[7]
> proposition 3 [resp. 4]. *Trouver deux nombres carrés dont la somme (resp. différence) soit un nombre cubique.*[8]
> proposition 23 [resp. 24]. *Trouver deux nombres carrés tels que la somme (resp. différence) de leurs carrés soit un nombre cubique.*[9]

Ces propositions font intervenir des cubes d'entiers, ce qu'Euclide n'avait pas introduit dans ses *Éléments* ; cependant la question de la décomposition d'un cube en somme de deux cubes n'est pas encore abordée.

Les savants du monde arabo-musulman médiéval ne se contentèrent pas de transmettre des copies, parfois augmentées, des écrits grecs ; ils apportèrent des contributions originales à cette histoire des décompositions de puissances d'entiers en sommes de puissances d'entiers.

Ainsi, au Xème siècle, Al-Khazin, dans une *Épître sur les triangles rectangles numériques*, énonce en proposition 1 : *"Trouver deux nombres carrés, l'un pair, l'autre impair, premiers entre eux, dont la somme soit un carré"*[10]. Al-Khazin analyse

6 *Ibid.*, p. 113.

7 Diophante, *Les Arithmétiques*, livre IV, trad. de l'arabe par R. Rashed, Paris : Les Belles Lettres, 1984, pp. 3-5.

8 *Ibid.*, pp. 5, 6.

9 *Ibid.*, pp. 37-40.

10 R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris : Les Belles Lettres, 1984, pp. 202-220.

le problème en supposant trouvés les trois nombres, x, y et z et montre qu'alors il existe deux nombres p et q, $p > q$, premiers entre eux, tels que : $x = 2p.q$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$. Il n'effectue pas la synthèse, celle-ci étant équivalente au lemme 1 de la proposition 29 du Livre X des *Éléments* d'Euclide. La conjonction des démonstrations d'Euclide et d'Al-Khazin fournit donc la solution générale de la détermination des triplets pythagoriciens primitifs.

Al-Khazin poursuit par des résultats qui peuvent être regardés comme des généralisations diverses du précédent. La proposition 2 énonce : *"on peut trouver n entiers carrés dont la somme soit un carré"*, mais n'est démontrée que pour $n = 2$ et $n = 3$, selon un procédé qui cependant peut être étendu à un entier quelconque. Les propositions 3 et 4 présentent moins d'intérêt ; les résultats qu'elles offrent, à savoir respectivement : *"résoudre en entiers :* $x^2 + y^2 = z^4$*"* et *"résoudre en entiers :* $x^4 + y^2 = z^2$*"*, ne sont que des corollaires de la proposition 1.

D'autres travaux furent moins fructueux ainsi qu'en témoigne Al-Khazin dans une lettre :

> *"J'ai déjà montré que ce qu'avance Abu Mohammed al-Khujandi* [...] *dans sa démonstration que la somme de deux nombres cubiques n'est pas un cube, est défectueux et incorrect"*.[11]

Cette mention est la plus ancienne connue sur la recherche de trois entiers tels que la somme des cubes de deux d'entre eux soit égale au cube du troisième. Toutefois le texte d'Al-Khujandi reste inconnu ; en revanche, un texte récemment retrouvé, datant aussi du Xème siècle, traite du même sujet. Attribué à un certain Abu Ga` far, d'identification incertaine, il propose une démonstration du résultat suivant :

> *"Il est impossible que la somme de deux nombres cubiques soit un nombre cubique, alors qu'il était possible que la somme de deux nombres carrés fût un nombre carré ; et il est impossible qu'un nombre cubique se divise en deux nombres cubiques, alors qu'il était possible qu'un nombre carré se divisât en deux nombres carrés"*.[12]

La preuve avancée pèche hélas d'une grossière confusion car elle se fonde sur le fait que, lorsqu'un cube (solide) est retranché d'un cube (solide), le reste n'est pas un cube (solide), confusion qui apparaît du même ordre que celle qui consisterait à avancer que 36 n'est pas un carré puisque ce nombre représente ce qui reste du retranchement d'une surface carrée de côté 8 à une surface carrée de côté 10 et que la surface restante n'est pas carrée ; d'ailleurs, pourrait-on ajouter, 36 n'est pas carré puisqu'il est rectangle : $36 = 3 \times 12$!

---

11 *Ibid.*, p. 220.
12 *Ibid.*, p. 222.

Au XIIème siècle, Ibn al-Khawam, repris au XIVème siècle par son commentateur Kamal al-Din al-Farisi, affirme sans démonstration l'impossibilité de trouver trois entiers x, y et z vérifiant $x^4 + y^4 = z^4$.

Les travaux des savants de l'Islam auront un écho en Europe chrétienne, notamment chez Léonard de Pise, dit Fibonacci, (~1176- 1ère moitié du XIIIème siècle) qui, en publiant *Le Livre des nombres carrés*[13], reste cependant en retrait par rapport aux préoccupations des arithméticiens arabes déjà intéressés aux problèmes de degrés 3 et 4. Dans les propositions 1 à 3 de son ouvrage, Fibonacci recherche des triplets pythagoriciens en utilisant principalement le fait, démontré, que la somme des entiers impairs consécutifs, à partir de 1, est un nombre carré ; en effet il suffit alors de choisir un nombre carré impair (strictement supérieur à 9), noté ici X^2, puis d'effectuer la somme des entiers impairs précédant X^2, somme qui est aussi un carré, noté ici Y^2 ; $X^2 + Y^2$ est alors la somme des entiers impairs de 1 à X^2 et est donc, de ce fait, un carré.

La proposition 5 : "*Trouver d'une autre manière un nombre carré égal aux deux nombres carrés*", donne deux autres méthodes ; si la première est compliquée, la seconde, simple et universelle, sans que ce caractère soit prouvé, est ainsi construite : A et B étant des entiers distincts choisis arbitrairement, les entiers α, β et γ définis par : $\alpha = A^2 - B^2$; $\beta = 2AB$; $\gamma = A^2 + B^2$, forment un triplet pythagoricien.

À la fin du Moyen-Âge, le bilan sur le sujet des décompositions de puissances d'entiers en sommes de puissances d'entiers reste maigre : si la détermination des triplets pythagoriciens est totalement élucidée, et si les savants arabes ont apporté quelques éléments de généralisation et de réflexion supplémentaires, pour le reste, Diophante demeure inégalé dans l'ensemble.

Cette situation prévaut jusqu'au début du XVIIème siècle.

*

* *

LES NOTES DE FERMAT.

L'histoire est bien connue pour avoir rebondi à cause d'une annotation que Pierre de Fermat (1601-1665) aurait écrit en marge de la proposition 8 du livre II de son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante éditées par Bachet de Méziriac en 1621. La proposition concernée a été examinée plus haut ; l'annotation en latin de Fermat donne :

---

13 Léonard de Pise, *Le livre des nombres carrés*, trad. du latin, introd. et notes par P. Ver Eecke, Bruges : Desclée de Brouwer, 1952, pp. 2-19.

> *"Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet"*.[14]

Cependant aucun autre écrit de Fermat ne fournit la démonstration annoncée ni même ne reprend dans tout sa généralité la conjecture avancée. Les historiens des mathématiques sont aujourd'hui quasi-unanimes à penser que Fermat ne possédait pas la preuve annoncée et qu'il s'en était sans doute rendu compte ; les autres mentions faites par Fermat sur ce type de problème s'en tiennent aux degrés 3 et 4. Ainsi, toujours dans son traité de Diophante, à propos de la proposition 10 du livre II qui soumet le problème de *"partager un nombre donné, lequel est somme de deux carrés, en deux autres carrés"*[15], Fermat étend la question au degré 3 en notant en marge :

> *"Num vero numerum ex duobus cubis compositum dividere poterimus in alios duos cubos ? Hæc quæstio difficilis sane nec Bacheto aut Vietæ cognita, fortasse nec ipsi Diophanto : ejus tamen solutionem dedimus infra in notatis ad quæstionem secundam Libri IV"*.[16]

D'autre part, Fermat revient à plusieurs reprises dans sa correspondance sur ces questions de décomposition de puissances d'entiers en sommes de puissances d'entiers. Dans une lettre de septembre ou octobre 1636[17], il demande au père Mersenne de soumettre à Monsieur de Sainte-Croix les problèmes suivants parmi d'autres : 1°) trouver un triangle rectangle (en nombres entiers) d'aire égale à un carré (d'entier), 2°) trouver trois entiers tels que la somme des bicarrés de deux d'entre eux soit égale au bicarré du troisième ($x^4 + y^4 = z^4$), ainsi que 3°) le même avec les cubes ($x^3 + y^3 = z^3$). Plus tard, dans une lettre à Pascal du 25 septembre 1654[18], il annonce avoir inventé qu' *"il n'y a aucun triangle* [rectangle ?] *en nombres duquel l'aire soit un carré"*.

---

14 P. de Fermat, *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus, cum commentariis C. G. Bachetus V. C. & observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani*, Toulouse : chez Bernard Bosc, 1670, p. 61.

ou *Œuvres*, publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1891, t. 1, p. 291. Au tome 3 (1896) du même ouvrage, p. 241, Tannery propose la traduction suivante : *"Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir"*.

Dans la suite, les citations de Fermat sont référencées à ce dernier ouvrage, sous la mention *Œuvres* [Tannery -Henry], avec indication du tome et des pages.

15 Dans [Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques ...*, trad. par P. Ver Eecke], cet énoncé est la proposition IX du livre II, p. 55.

16 P. de Fermat, *Œuvres* [Tannery -Henry], t. 1, pp. 291, 292. Traduction, t. 3, pp. 241, 242 : *"Un nombre, somme de deux cubes, peut-il être de même partagé en deux autres cubes ? C'est là un problème difficile dont la solution a certainement été ignorée par Bachet et par Viète, peut-être par Diophante lui-même ; je l'ai résolu plus loin dans mes Notes sur le prolème IV, 2"*.

17 *Ibid.*, t. 2 (1894), pp. 63-71 et t. 3, pp. 286-292 pour la traduction.

18 *Ibid.*, t. 2, p. 313.

À Digby, il pose dans une lettre du 15 août 1657[19] la question, évoquée ci-dessus, de la multiplicité de la décomposition d'une somme donnée de deux cubes en une autre telle somme ($a^3 + b^3 = x^3 + y^3$), question qu'il réitère dans une lettre au même Digby du 7 avril 1658[20] en y ajoutant celle sur le triangle rectangle d'aire égale à un carré et celle sur la somme de deux cubes valant un cube.

En fait, la contribution originale et certaine de Fermat à la résolution de sa conjecture est réduite à son commentaire du problème 20 posé par Bachet à propos de la proposition 26 du livre VI des *Arithmétiques* de Diophante : "*Trouver un triangle rectangle* [en nombres entiers] *dont l'aire soit un nombre* [entier] *donné*", passage que Fermat annote en marge dans les termes suivants :

> "*Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus.*
> *Hujus theorematis a nobis inventi demonstrationem, quam et ipsi tandem non sine operosa et laboriosa meditatione deteximus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in Arithmeticis suppeditabit progressus* [...]".[21]

Fermat fournit en effet une démonstration très condensée ("*la marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements*", précise-t-il derechef !) fondée sur la méthode de *descente infinie* dont il expose le principe et l'usage dans une lettre à Carcavi d'août 1659[22]. Le résultat sur l'aire permet de prouver alors aisément l'impossibilité de décomposer un carré (et donc un bicarré) en somme de deux bicarrés. Toutefois cette conséquence n'est pas explicitement exposée par Fermat.

Le travail de mise en forme et d'explicitation des résultats obtenus ou préparés par Fermat est effectué par Bernard Frénicle de Bessy (1605-1675) dans son *Traité des triangles rectangles en nombres* (1676). Il y démontre d'abord de façon complète l'équivalence entre :

a) (α, β, γ) est un triplet pythagoricien.

b) il existe A et B entiers tels que $\alpha = A^2 - B^2$, $\beta = 2AB$, et $\gamma = A^2 + B^2$ (à l'ordre près sur α et β).

Dans la dernière partie de l'ouvrage, Frénicle résoud la question des bicarrés en montrant successivement la proposition 39 :

> "*Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un nombre quarré*"[23],

---

19 *Ibid.*, t. 2, pp. 344-346 et t. 3, pp. 313, 314 pour la traduction.

20 *Ibid.*, t. 2, p. 376.

21 *Ibid.*, t. 1 p. 340. Traduction, t. 3, p. 271 :
"*L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.*
Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert ; je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation ; mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux dans la science des nombres [...]".

22 *Ibid.*, t. 2, pp. 431-436.

23 B. Frénicle de Bessy, *Traité des triangles rectangles en nombres*, Paris : chez Estienne Michallet, 1676, pp. 100-103.

puis la proposition 40 :

> *"Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un double quarré"*[24],

en ayant recours à la méthode de *descente infinie* de Fermat. Il tire en conséquences de la proposition 40 les résultats suivants :

> *"I. Il n'y a aucun triangle rectangle qui ait un quarré pour chacun de ses moindres costés ;* [...]
> ***II. Un quarré ne peut être la somme de deux quarrez quarrez ;*** [...]".[25]

Hormis Frénicle, dont l'apport concerne plus la forme que le contenu, Fermat n'aura pas sur ces sujets de successeurs immédiats. Les mathématiciens de la fin du XVIIème siècle et du début du XVIIIème sont sans doute plus intéressés à la mise en place et aux applications fécondes de la nouvelle Analyse des infiniment petits qu'aux spéculations plus gratuites sur les entiers. Peut-être fallait-il l'esprit encyclopédiste de Léonard Euler pour que soient relancées les études d'arithmétique supérieure.

*

* *

LA CHASSE AUX EXPOSANTS : D'EULER À KUMMER (exclu).

Léonard Euler (1707-1783) a laissé plusieurs écrits traitant de la décomposition de puissances d'entiers en sommes (ou différences) de puissances d'entiers, dans les cas $n = 3$ ou 4. Il rédige en 1738 un mémoire intitulé *"Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes"*, publié par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en 1747, où l'introduction fait référence aux travaux d'arithmétique de Fermat ainsi qu'au *Traité des triangles rectangles en nombres* de Frénicle. Après trois lemmes portant sur les sommes de carrés, Euler énonce et démontre au théorème 1 :

> *"Summa duorum biquadratorum ut* $a^4 + b^4$ *non potest esse quadratum, nisi alterum biquadratum evanescat."*.[26]

---

24 *Ibid.*, pp. 103-106.

25 *Ibid.*, pp. 110, 111.

26 L. Euler, *Opera omnia*, édité par les soins de F. Rudio, A. Krazer et P. Stäckel, série I, vol. II, *Commentationes arithmeticæ*, vol. 1, Leipsig/Berlin : B. G. Teubner, 1915, pp. 42, 43. Traduction du rédacteur : *"La somme de deux bicarrés comme* $a^4 + b^4$ *ne peut être un carré, sauf si l'un des bicarrés s'annule"*.

La démonstration est obtenue par *descente infinie* : l'existence de a et b tels que $a^4 + b^4$ est un carré implique celle de deux autres entiers x et y, strictement plus petits que a et b, jouissant de la même propriété ; alors, un nombre d'étapes, au plus égal au plus petit des deux nombres a et b, du même processus conduit à un couple dont l'un des termes est nécessairement nul ; de plus les relations d'itération de la *descente "infinie"* pratiquée ici, entre un couple, comme (a, b), et le couple suivant, comme (x, y), assurent que la nullité, par exemple, de y implique celle de a ou de b. Cette démonstration est plus directe que celle de Fermat-Frénicle, puisqu'elle n'utilise pas le résultat sur l'aire d'un triangle rectangle en nombres. Les théorèmes 2 à 6 portent sur des sommes ou différences de multiples déterminés de bicarrés dont Euler montre qu'elles ne peuvent être des carrés, sauf cas particulier trivial. Le théorème 7 montre qu'aucun entier triangulaire, du type $\frac{n(n+1)}{2}$, ne peut être un bicarré, à l'exception de l'unité. Les théorèmes 8 et 9 reviennent sur des sommes ou différences de bicarrés affectés de cœfficients ; le mémoire s'achève sur un dixième théorème selon lequel :

> *"Nullus cubus, ne quidem numeris fractis exceptis, unitate auctus quadratum efficere potest praeter unicum casum, quo cubus est 8. "*.[27]

Euler ramène la démonstration à celle de l'impossibilité pour $a^3b + b^4$ d'être un carré sauf si a = 2b.

Il reprend en partie la matière de ce mémoire, sous une forme plus organisée et plus détaillée dans le tome 2 des *Élémens d'Algèbre* (1770, trad. fr. 1774) : *"De l'Analyse indéterminée"*, dont le chapitre XIII s'intitule *"De quelques expressions de la forme* $ax^4 + by^4$ *qui ne sont pas réductibles à des quarrés"*. Les paragraphes 202 à 209 s'attachent à prouver que ni la somme ni la différence de deux bicarrés ne peut être un carré[28] par des méthodes identiques à celles du mémoire de 1738. Le chapitre XV du même ouvrage, intitulé *"Solutions de quelques questions où l'on demande des cubes"* donne, au § 243 le théorème :

> *"Il n'est pas possible de trouver deux cubes dont la somme ou bien la différence soit un cube"*.[29]

Toutefois la démonstration présentée en 1770 souffre d'un abus : Euler y applique dans $\mathbb{Z}(i\sqrt{3})$ (ou $\mathbb{Z}(\sqrt{-3})$) un résultat[30] qui, bien que correct, n'a été établi que dans $\mathbb{Z}$; cependant une première démonstration, correcte mais plus longue, datant de 1753, est fondée sur la factorisation dans $\mathbb{Z}$ de la forme quadratique $X^2 + 3Y^2$. Pour les cubes, comme pour les bicarrés, les démonstrations sont effectuées par *descente infinie*, mise en œuvre sous une

27 *Ibid.*, pp. 56-58. Traduction du rédacteur : *"Aucun cube, même de nombres fractionnaires, augmenté de l'unité ne peut donner un carré sauf dans l'unique cas où ce cube est 8."*

28 L. Euler, *Élémens d'Algèbre* , t. 1, *De l'analyse indéterminée*, Lyon : chez Bruyset, an III (1794-1795), pp. 242-258.

29 *Ibid.*, pp. 343-351.

30 *Ibid.*, p. 347, § VII.

forme assez touffue au moyen de calculs de factorisation de formes quadratiques et de distinction de cas. En dépit des lourdeurs de calculs, il reste qu'Euler est le premier vainqueur attesté de l'exposant 3.

Le sort de l'exposant 5 sera réglé conjointement par Lejeune-Dirichlet et Legendre dans la période 1825-1830. Dans sa séance du 11 juillet 1825, l'Académie Royale des Sciences de Paris reçoit un "*Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*" de Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), jeune professeur de mathématiques à Berlin. Elle confie à Lacroix et Legendre le soin d'examiner ce mémoire[31] ; leur rapport est présenté à l'Académie la semaine suivante, lors de la séance du 18 juillet et porte approbation du travail de Lejeune-Dirichlet, tout en relevant que ce mémoire ne démontre pas l'intégralité de la conjecture de Fermat pour le degré 5, comme le reconnaît Lejeune-Dirichlet lui-même (voir infra) : en outre , les rapporteurs proposent que ce mémoire soit imprimé dans le recueil des mémoires des savants étrangers[32]. Cette publication ne sera jamais effectuée et le mémoire de Lejeune-Dirichlet ne sera publié qu'en 1828 à Berlin dans le *Journal de Crelle*.[33] Le résultat fondamental de ce mémoire est le théorème V selon lequel :

> "*Les nombres* m *et* n *étant positifs, plus grands que zéro, et le second de plus différent de* 2, *et le nombre* [A][34] *n'étant divisible ni par* 2 *ni par* 5, *ni par aucun nombre premier de la forme* $10k + 1$, *il sera impossible de trouver deux nombres* x *et* y *premiers entre eux, tels que* $x^5 \pm y^5 = 2^m 5^n A z^5$."[35]

Ce théorème, prouvé par factorisations de formes quadratiques et *descente infinie*, permet à Lejeune-Dirichlet d'examiner l'équation $x^5 \pm y^5 = z^5$. En raison des considérations antérieures, il est nécessaire que l'une des trois indéterminées, par exemple z, soit divisible par 5 ; les trois indéterminées pouvant être posées premières entre elles, l'une est paire et les deux autres sont impaires. Si z est paire, z peut s'écrire 2 . 5 . t et l'équation étudiée devient $x^5 \pm y^5 = 2^5 5^5 t^5$ ce que le théorème V interdit. Ainsi, "*il ne resterait donc qu'à traiter le cas où l'indéterminée divisible par 5, serait impaire*", précise Lejeune-Dirichlet pour ajouter aussitôt :

> "*mais la méthode exposée dans ce Mémoire paraît insuffisante pour ce cas, et je ne vois pas comment on pourrait compléter la démonstration du cas particulier du théorème de Fermat, dont il vient d'être question*".[36]

---

31 *Procès-verbaux des séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835*, tome VIII, années 1824-1827, p. 239.

32 *Ibid.*, pp. 240, 241.

33 Sur cette question de la publication du mémoire de Lejeune-Dirichlet et de ses relations avec les travaux de Legendre, voir la notice historique en fin d'article.

34 Le texte imprimé donne "B" au lieu de "A".

35 P. G. Lejeune-Dirichlet, "*Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dit *Journal de Crelle*, Berlin : 1828, pp. 362-366.

36 *Ibid.*, p. 368.

Toutefois, entre 1825, date de présentation du mémoire, et 1828, date de sa publication, Lejeune-Dirichlet va parvenir à combler cette lacune, ce qu'il expose dans une "*Addition au Mémoire précédent*" publiée à sa suite, et débutant en ces termes :

> "*Depuis que le Mémoire précédent a été présenté à l'Académie, M. Legendre a publié un second supplément à sa Théorie des Nombres, dans lequel il démontre l'impossibilité de l'équation* $x^5 \pm y^5 = z^5$.
>
> *Le cas de l'indéterminée divisible en même temps par* 2 *et par* 5, *est traité dans cet ouvrage* [celui de Legendre] *comme dans le Mémoire précédent, et l'auteur* [Legendre] *prouve ensuite l'impossibilité de l'autre cas au moyen d'une analyse nouvelle. L'objet de cette addition est d'établir deux théorèmes nouveaux sur les équations indéterminées du cinquième degré et qui comprennent, comme cas particulier, le théorème de Fermat pour les cinquièmes puissances. J'y parviens en partant des résultats obtenus dans ce qui précède et en faisant usage d'une analyse qui diffère à plusieurs égards de celle de M. Legendre et entièrement analogue à la méthode qui est exposée dans le Mémoire précédent*".[37]

En effet, le théorème VIII énonce :

> "*La lettre* n *désignant un nombre positif autre que* 0 *et* 2, *et le nombre* A *n'étant divisible ni par* 2 *ni par* 5, *ni par aucun nombre premier de la forme* $10k + 1$, *il sera impossible de trouver deux nombres* x *et* y *premiers entre eux, et tels que* $x^5 \pm y^5 = 5^n A z^5$." [38]

Ce théorème permet la preuve du théorème de Fermat pour les puissances cinquièmes, indépendamment de la parité de l'indéterminée divisible par 5.

Les premières interventions d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833) sur la conjecture de Fermat apparaissent dans son *Essai sur la théorie des nombres* (1ère édition : an VI, soit 1798-1799 ; 2ème édition : 1808)[39], où il se contente d'exposer les résultats déjà établis sur l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers, la somme de deux bicarrés et la somme ou la différence de deux cubes, en les démontrant par *descente infinie*, et, pour le dernier résultat, en suivant la même méthode qu'Euler. Son apport original à cette question, évoqué par Lejeune-Dirichlet dans l'*Addition* au mémoire présenté en 1825, citée plus haut, figure dans l'*Essai sur la théorie des nombres, second supplément*, daté de septembre 1825. Legendre y fait état des travaux et des résultats obtenus par

---

37 *Ibid.*

38 *Ibid.*, pp. 372-375.

39 A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris : Duprat, anVI (1798-1799). 2ème éd : Firmin Didot, 1808. Cette deuxième édition sera successivement augmentée d'un *Supplément à l'Essai sur la théorie des nombres, seconde édition* en 1816, supplément qui est aussi parfois relié à la suite de la première édition, puis d'un *Essai sur la théorie des nombres, second supplément*, daté de septembre 1825.

Sophie Germain[40], dont il avait été le rapporteur devant l'Académie (où les femmes n'étaient pas alors autorisées à intervenir), puis donne une démonstration complète de la conjecture pour le cinquième degré[41], ainsi qu'une nouvelle démonstration pour le troisième degré[42].

Pour le cinquième degré, Legendre, s'appuyant sur le fait qu'alors l'un des trois nombres x, y ou z est divisible par 5 (et même par 25), décompose la preuve en deux cas selon la parité de ce nombre. Le premier cas : *"où l'on suppose* x *pair"* est résolu selon les procédés employés par Lejeune-Dirichlet, ce dont témoigne une note de Legendre à la fin de l'étude de ce premier cas, en fin du § 43 :

> *"Par une analyse semblable à celle dont nous venons de faire usage, on pourrait démontrer l'impossibilité de l'équation* $x^5 + y^5 = Az^5$ *, pour un assez grand nombre de valeurs de* A *; c'est ce qu'a fait M. Lejeune-Dieterich* [sic] *dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie, et qui a obtenu son approbation."*[43]

Les démonstrations du second cas : *"où l'on suppose x impair"* reposent sur des calculs, de style très eulérien, de factorisation de formes quadratiques, et sont conclues par des *descentes infinies*. À la suite, Legendre traite du degré 3 en deux parties : *De l'Equation* $x^3 + y^3 = 2^m z$ (§§ 49, 50), puis *De l'Equation* $x^3 + y^3 = Az^3$ (§§ 51-56).

Le *Second supplément* de 1825 sera republié en 1827 sous le titre *"Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat"* dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour l'année 1823 avec des modifications sur la résolution du troisième degré[44]. Le § 49 traite de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ en trois parties : les trois nombres x, y et z pouvant être posés premiers entre eux, deux étant impairs et le troisième pair, Legendre démontre successivement :

"I^{re}. *L'un des nombres* x, y, z, *doit être divisible par* 3.
II^{e}. *Celle des indéterminées qui est paire, est en même temps divisible par* 3.
III^{e}. *L'équation* $x^3 + y^3 = 2^{3m}3^{3n}u^3$ *est impossible."*

Le troisième point est démontré par une *descente infinie* qui repose sur le fait que, si x, y et z, entiers non nuls, satisfont à $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, alors il existe x',

---

40 A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres, second supplément*, septembre 1825, p. 13, note *.
41 *Ibid.*, pp. 23-29 (dans la pagination propre au *Second supplément*).
42 *Ibid.*, pp. 29-34.(dans la pagination propre au *Second supplément*).
43 *Ibid.*, p. 26.
44 A.-M. Legendre, *"Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat"* in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1823*, t. VI, Paris : Firmin Didot, 1827. La note sur les travaux de Sophie Germain est p. 17, § 22; l'étude de l'équation$x^5 + y^5 = z^5$ se trouve pp.31-41, §§ 38-48, avec une note en fin du § 43, p. 35, identique à celle du *Second supplément* de 1825 ; la nouvelle démonstration pour le troisième degré se trouve pp. 41-51, §§ 49-56.

y′ et z′ entiers **non divisibles par 3**, tels que $x'^3 + y'^3 = z'^3$, ce qui est contraire au premier point.

Les démonstrations de la conjecture de Fermat pour les degrés 3 et 5 sont à nouveau publiées par Legendre dans sa *Théorie des nombres* (1830), qui constitue une troisième édition très augmentée de l'*Essai* de 1798-99 ; en effet, les résultats sur l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers, la somme de deux bicarrés et la somme ou la différence de deux cubes y figurent à la quatrième partie[45], commune aux trois éditions, tandis que les nouveautés mentionnées se trouvent dans la sixième partie, qui est propre à l'édition de 1830[46]. Toutefois la note renvoyant au mémoire (1825) de Lejeune-Dirichlet, qui figurait en fin du § 43 du *Second supplément* (1825) comme des *Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée* ... (1827), n'apparaît plus dans la *Théorie des nombres* de 1830[47].

Lejeune-Dirichlet intervient à nouveau sur la grande conjecture de Fermat en 1832 par un mémoire publié par le *Journal de Crelle*, mémoire intitulé "*Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances*"[48].

L'égalité dont il faut prouver l'impossibilité étant $t^{14} = u^{14} + v^{14}$, Lejeune-Dirichlet en organise la démonstration selon deux cas :

* v non divisible par 7, où la preuve est obtenue par mise en évidence de facteurs communs à des nombres supposés premiers entre eux ;

* v divisible par 7 où la preuve a recours à une *descente infinie*.

Dernier chasseur aux exposants isolés, Gabriel Lamé (1795-1870) présente à l'Académie des Sciences un "*Mémoire sur le dernier théorème de Fermat*", dont font état les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1839[49], où se trouve aussi le rapport favorable à ce mémoire rédigé par Liouville et Cauchy[50]. Le travail de Lamé paraît l'année suivante dans le *Journal de Liouville*, sous le titre "*Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation* $x^7 + y^7 = z^7$ *est impossible en nombres entiers*"[51]. La démonstration est spécifique au cas $n = 7$; elle n'utilise pas notamment la théorie sur les factorisations des formes quadratiques, mais a recours à la *descente infinie*.

* * * * *

45 A.-M. Legendre, *Théorie des nombres*, Paris : Firmin Didot Frères, 1830, t. 2 ; pp. 1-12.

46 *Ibid.*, pp. 357-360 pour le 3ème degré, pp. 361-368 pour le 5ème.

47 Voir notice historique en fin d'article.

48 P. G. Lejeune-Dirichlet, "*Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances*", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (dit *Journal de Crelle*), Berlin : 1832, pp. 390-393.

49 *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. IX, juil.-déc. 1839, pp. 45, 46.

50 *Ibid.*, pp.359-363.

51 G. Lamé, "*Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation* $x^7 + y^7 = z^7$ *est impossible en nombres entiers*", in *Journal de mathématiques pures et appliquées* (dit *Journal de Liouville*), t. V, 1840, pp. 195-215.

EN GUISE DE TRANSITION.

Le bilan de près de deux siècles d'efforts reste maigre, non pas tant par le petit nombre d'exposants "vaincus", que par l'absence d'une idée démonstrative qui puisse être généralisable ; seule la méthode par *descente infinie*, due au génie de Fermat, revêt ce caractère mais sa mise en œuvre nécessite la capacité de transmettre une propriété considérée à un rang donné à un rang strictement inférieur et c'est dans la procédure de transmission que réside la difficulté.

Peut-être encouragées par les résultats prometteurs obtenus en théorie des nombres et sur la résolution des équations algébriques, qui présentaient un caractère de généralité supérieur par rapport aux résultats antérieurs, les recherches sur la conjecture de Fermat, à partir de la moitié du XIXème siècle, s'orientent aussi vers la voie de la généralité la plus large possible. Dans un *Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers*[52], publié dans le *Journal de Liouville* en 1851 après celle dans le *Journal de Crelle* en 1850 de trois articles sur ces sujets, Ernst Kummer (1810-1893), introduisant la notion de nombre complexe *idéal*, qui est à l'origine de celle, plus générale, d'idéal d'un anneau, parvient à des décompositions et factorisations nouvelles dans l'anneau des entiers cyclotomiques $\mathbb{Z}[\zeta_p]$, où ζ_p est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces résultats lui permettent d'assurer la conjecture de Fermat pour tous les nombres premiers p dits *réguliers*, c'est-à-dire tels que p ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{p-3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli ; dans la première centaine, la conjecture de Fermat est donc démontrée de cette façon sauf pour les exposants 37, 59 et 67 qui sont irréguliers. Hélas, le pas important accompli par Kummer restera insuffisant, car si on ignore encore si le nombre de premiers réguliers est fini ou infini, il est prouvé depuis 1915 que celui des premiers irréguliers est infini, ce qui ruine tout espoir d'une démonstration vraie dans tous les cas, sauf un nombre fini, quitte à la compléter par l'étude particularisée de ces exceptions en nombre fini.

Nous savons aujourd'hui qu'un siècle et demi d'efforts environ sera nécessaire pour parvenir à une réponse globable satisfaisante au défi involontairement lancé par Fermat ; pour continuer dans l'histoire de ces recherches, vous êtes invité à suivre les pas d'Yves Hellegouarc'h qui a contribué de façon notable aux travaux sur cette conjecture[53].

---

52 E. E. Kummer, *Collected papers*, vol. 1 : "*Contributions to number theory*", édité par A. Weil. Berlin/Heidelberg/Nex-York : Springer-Verlag, 1975. Le "*Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers*" est reproduit tel qu'il fut publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* dit *Journal de Liouville* (t. XVI, 1851, pp. 377-498) dans les pages 363-484.

53 Les travaux d'Y. Hellegouarc'h sur ces questions ont commencé par la communication qu'il fit en sept.-oct. 1969 aux *Journées Arithmétiques* de Bordeaux sur les points d'ordre $2p^2$ sur les courbes elliptiques. Ils ont donné lieu ensuite aux publications suivantes :

Notice
pour servir à l'histoire du cas n = 5.

La résolution du 5ème degré de la conjecture de Fermat, qui est l'œuvre conjointe de Lejeune-Dirichlet et de Legendre a connu une histoire assez embrouillée, comme le furent parfois les commentaires à son propos. Cette notice voudrait tenter de démêler au mieux les épisodes de cette histoire.

D'abord, les faits établis chronologiquement.

11 juillet 1825 : mémoire de Lejeune-Dirichlet présenté à l'Académie, qui en confie l'examen à Lacroix et Legendre.

18 juillet 1825 : présentation du rapport de Lacroix et Legendre, relevant le caractère incomplet de la résolution - le cas "x est impair" n'est pas traité -, mais portant approbation et proposant la publication dans le recueil des mémoires des savants étrangers.

septembre 1825 : publication par Legendre du *Second supplément* à l'*Essai sur la théorie des nombres*, reprenant la démonstration de Lejeune-Dirichlet pour le cas "x est pair" et donnant une démonstration originale pour le cas "x est impair". Dans une note, Legendre reconnaît sa dette à Lejeune-Dirichlet pour le premier cas.

1827 : Legendre publie dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1823*, un mémoire intitulé *"Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat"* qui est la reprise, avec quelques modifications, du *Second supplément* de 1825, y compris la note sur la contribution de Lejeune-Dirichlet.

1828 : Lejeune-Dirichlet publie dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dit *Journal de Crelle*, son *"Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré"* tel qu'il fut présenté en 1825 à l'Académie, complété d'une *"Addition au Mémoire précédent"* dans laquelle est résolu le cas "x est impair" par une voie différente de celle de Legendre.

1830 : Legendre publie sa *Théorie des nombres* où il reprend les résultats déjà publiés en 1825 et 1827.

Comment comprendre cette succession parfois hâtive, de publications tantôt partielles, tantôt redondantes, le tout donnant une impression de travail heurté, parfois dans l'urgence ?

Il n'est pas douteux que le mémoire de Lejeune-Dirichlet, malgré son caractère partiel, constitua une avancée dans la démonstration de la conjecture. Il n'est alors pas invraisemblable de penser que Legendre, peut-être déjà bien

---

Points d'ordre fini sur les courbes elliptiques, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 273, série A, 1971, pp. 540-543.

Courbes elliptiques et équation de Fermat, thèse d'État, Université de Besançon, 1972.

Points d'ordre $2p^h$ *sur les courbes elliptiques*, Acta arithmetica, 1975.

avancé dans sa recherche sur le degré 5, fut aiguillonné par la présentation de ce mémoire en juillet 1825 qui, par bonheur pour l'académicien, ne donnait pas une solution complète. Legendre se serait donc hâté de terminer sa propre étude pour la publier au plus vite, ce qu'il fit dès septembre 1825 et répéta en 1827. Si dans ces deux publications, l'apport de Lejeune-Dirichlet est reconnu par Legendre dans une note, la formulation même de cette note pourrait laisser penser que le résultat obtenu par Lejeune-Dirichlet serait tributaire du travail de Legendre à l'inverse de la vérité aujourd'hui établie ; en outre cette note n'apparaît pas dans la *Théorie des nombres* de 1830. Dans l'intervalle, Lejeune-Dirichlet parvint à compléter son étude par des voies différentes de Legendre et, peut-être las d'attendre une publication dans le recueil des mémoires des savants étrangers qui ne se faisait pas, décida de publier son mémoire complété dans le *Journal de Crelle*, en 1828.

Cet épisode quelque peu embrouillé de l'histoire de la conjecture de Fermat a déjà été étudié, notamment par L. E. Dickson dans le deuxième volume de son *History of the theory of numbers* [54], puis par H. M. Edwards dans *Fermat's last theorem* [55]. Ce dernier affirme avec raison la priorité de Lejeune-Dirichlet sur une partie au moins du cas n = 5, et tire argument de la note de Legendre de 1825, répétée en 1827, qui prouve en effet que la publication de ce dernier est postérieure à la présentation de mémoire de Lejeune-Dirichlet ; cependant Edwards mentionne dans une note :

> "*The second supplement* [de septembre 1825]*was also published as a Memoire by the Academy* [en 1827]*and this publication is, **for some reason,** dated 1823* [...]"[56],

l'indétermination de "*for some reason*" pouvant laisser planer le doute sur la sincérité de la datation. Edwards commet là une petite confusion entre les deux dates figurant sur le tome VI des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, à savoir 1823 et 1827. La seconde est la date de parution du tome et doit être retenue pour celle de la publication des mémoires que le recueil contient ; la première, 1823, est celle de l'année pour laquelle est exposée dans ce tome l'histoire de l'Académie royale des sciences, la partie mathématique étant rédigée par le Secrétaire perpétuel d'alors, J. Fourier. Cette histoire de l'Académie pour 1823 ne mentionne aucun travail de Legendre sur la conjecture de Fermat ; en revanche, l'histoire de la même Académie pour 1825, publiée dans le tome VIII des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, fait référence au *Second supplément* à l'*Essai sur la théorie des nombres* et au mémoire de Lejeune-Dirichlet[57], dans un ordre qui privilégie le premier sur le second.

---

54 L. E. Dickson, *History of the theory of numbers* , New-York : Chelsea Publ. Co, 1966, t. 2, pp. 734, 735.

55 H. M. Edwards, *Fermat's last theorem: a genetic introduction to algebraic numder theory*, New-York /Heidelberg/Berlin : Springer-Verlag, 1977, pp. 66-70.

56 *Ibid.*, p. 70, note*.

57 *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1825*, t. VIII, Paris : Firmin Didot, 1829, pp. x, xi, puis l, li.

Bibliographie.

I. SOURCES.

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE.

-*Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Trad. du grec, introd. et notes par P. Ver Eecke, Paris : A. Blanchard, 1959.

-*Les Arithmétiques*. Trad. de l'arabe par R. Rashed, Paris : Les Belles Lettres, 1984.

EUCLIDE.

- *Les Œuvres d'Euclide traduites littéralement par F. Peyrard,* 1819. Nouveau tirage, introd. par J. Itard, Paris : A. Blanchard, 1966.

EULER, L.

- *Opera omnia*. Publ. par F. Rudio, A. Krazer et P. Stäckel. Leipsig / Berlin : B. G. Teubner, 1915.

- *Élémens d'Algèbre,* t. 1, *De l'analyse indéterminée.* Lyon : chez Bruyset, an III (1794-1795). 2 t.

FERMAT, P. (de).

- *Diophanti alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bachetus V.C. & observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani*. Toulouse : chez Bernard Bosc, 1670.

- *Œuvres*. Publ. par P. Tannery et Ch. Henry. Paris : Gauthier-Villars et fils, 1891-1896, 3 t.

FRÉNICLE de BESSY, B.

- *Traité des triangles rectangles en nombres*. Paris : chez Estienne Michallet, 1676.

KUMMER, E. E.

- *Collected papers*. Éd. par A. Weil. Berlin/Heidelberg/Nex-York : Springer-Verlag, 1975. 3 vol. Le *"Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers"* se trouve dans le volume 1 : *"Contributions to number theory"*, pp. 363-484.

LAMÉ, G.

- *"Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation* $x^7 + y = z^7$ *est impossible en nombres entiers"*, in *Journal de mathématiques pures et appliquées* (dit *Journal de Liouville*). t. V, 1840. Sur ce mémoire :

- *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. IX, juil.-déc. 1839.

LEGENDRE, A.-M.

- *Essai sur la théorie des nombres.* Paris : Duprat, anVI (1798-1799). 2ème éd : Firmin Didot, 1808, augmentée d'un *Supplément à l'Essai sur la théorie des nombres, seconde édition* , 1816, puis d'un *Essai sur la théorie des nombres, second supplément*, septembre 1825.

- *"Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat"*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1823*. Paris : Firmin Didot, 1827.
- *Théorie des nombres*, Paris : Firmin Didot, 1830. 2 t.

LEJEUNE-DIRICHLET, P.G.
- *"Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré"*, in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (dit *Journal de Crelle*). Berlin : 1828.
- *"Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances"*, in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (dit *Journal de Crelle*). Berlin : 1832.

LÉONARD DE PISE.
- *Le livre des nombres carrés*. Trad. du latin, introd. et notes par P. Ver Eecke, Bruges : Desclée de Brouwer, 1952.

II. RÉFÉRENCES COMPLÉMENTAIRES.

DICKSON, L. E.
- *History of the theory of numbers*. New-York : Chelsea Publ. Co, 1966, 3 t.

EDWARDS, H. M.
- *Fermat's last theorem : a genetic introduction to algebraic numder theory*. New-York /Heidelberg/Berlin : Springer-Verlag, 1977,
- *"Pierre de Fermat"*, in *Pour la Science*, dossier *"Les mathématiciens"*, janvier 1994, pp. 20-29.

GOLDSTEIN, C.
- *"Le théorème de Fermat"*, in *La Recherche* (263), mars 1994, pp. 268-275.
- *"Autour du théorème de Fermat"*, in *Mnémosyne* n° 7, I.R.E.M. de Paris-VII, avril 1994, pp. 35-60.

MORDELL, L. J.
- *Three lectures on Fermat's last theorem*. Manchester, 1920.

NOGUÈS, R.
- *Théorème de Fermat, son histoire*. Nouveau tirage. Préf. de J. Itard. Paris : A. Blanchard, 1966.

RASHED, R.
- *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : Les Belles Lettres, 1984. 2 vol.

RIBENBOÏM, P.
- *13 lectures on Fermat's last theorem*. New-York/Heidelberg/Berlin : Springer-Verlag, 1980.

Voir aussi les bibliographies très riches des références données ci-dessus et la bibliographie figurant en fin de l'article suivant, dû à Yves Hellegouarc'h.