"UN" EST-IL UN NOMBRE ?

Maryvonne HALLEZ & Nicole NORDON.

"Aussi est-ce avec raison que l'Un n'est pas considéré comme un nombre". Aristote.
(*Métaphysique*, 1088 a-6, trad. Tricot, Vrin, 1986).

"Un" est-il un nombre ? Cette phrase est éminemment provocatrice à notre époque. Pour nous, quoi de plus familier et de plus simple que l'ensemble des entiers naturels dont le premier élément est 0 et dont la suite nous est donnée par la fonction successeur qui, à tout nombre a, associe a+1. Cette phrase *"Un n'est pas un nombre chez les grecs"*[1] a longtemps gardé pour nous une saveur mystérieuse et a finalement excité notre curiosité.

Notre questionnement n'aurait-il qu'une valeur historique et ne se croiserait-il jamais avec les routes de la mathématique du XXème siècle et celles de la pédagogie de l'enseignement des mathématiques ? Nous ne le croyons pas. S'il ne fait aucun doute pour nous que "Un" est un nombre, il n'en reste pas moins que du côté de l'enseignement le "Un" fait toujours problème : l'erreur la plus fréquemment rencontrée apparaît dans la factorisation d'expressions du style "$a^2 + a = a \,.\, (a + 1)$" où le "+ 1" est répétitivement oublié par les élèves en "difficulté mathématique" ; en fait ce nombre a trop d'originalité : multiplié par un autre, il le laisse intact ($a \times 1 = a$), et cet élément neutre peut donc être omis mais il est aussi toujours sous-entendu pour pouvoir réapparaître quand il faut ($a = a \times 1$), ($a = a^1$) ; il permet d'écrire tout entier sous la forme d'une fraction (3 = 3/1). On peut pointer encore deux erreurs fréquentes d'élèves telles que : "$a^0 = 0$"

---

1 *"Les penseurs grecs du nombre l'ont rapporté à l'Un, lequel, comme on le voit encore dans les* Éléments *d'Euclide, n'est pas considéré par eux comme un nombre"*. Badiou, A. : *Le nombre et les nombres*, Seuil, Paris, 1990, p. 17.

"Le mot et l'idée de nombre sont strictement réservés aux entiers naturels > 1 (1 est la monade et non un nombre à proprement parler)". Bourbaki, N. : *Éléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris, 1969, p. 185.

et "$1^n = n$" ; cette dernière est liée à la propriété du "Un", nombre, qui, multiplié par lui-même ne change pas ; il est ainsi considéré comme frontière entre les nombres qui, multipliés par eux-mêmes, donnent des résultats de plus en plus grands, et les autres qui, multipliés par eux-mêmes, donnent des résultats de plus en plus petits. Quel enseignant n'a pas rencontré d'élèves scandalisés par ce phénomène de "multiplication qui rapetisse" ...

Nous allons donner quelques jalons de l'histoire du "Un" et des uns autour de trois questions :

- Quels étaient les arguments des grecs pour exclure le "Un" du domaine arithmétique des nombres ?
- Comment "Un" est-il "devenu" un nombre ?
- Comment se sont transformées des questions sur le "Un" et l'unité ?

Nous n'avons pas la prétention de répondre à ces trois questions mais nous avons éprouvé le besoin de chercher des éléments de réponse en nous plongeant dans la lecture de textes originaux de l'Antiquité jusqu'au XVIIème siècle et dans celle de la thèse de Maurice Caveing[2]. C'est à partir de ces lectures incomplètes et d'interrogations sur nos pratiques pédagogiques que nous proposons un état des lieux provisoire de notre questionnement. Nous présenterons d'abord des arguments philosophiques puis nous nous pencherons sur quelques livres d'arithmétique pour mettre en évidence comment les deux phrases contradictoires : *"Un est un nombre"*, *"Un n'est pas un nombre"* ont pu cohabiter implicitement ou explicitement dans un même ouvrage, comment la phrase négative va disparaître des livres d'arithmétique et être temporairement remplacée par *"Zéro n'est pas un nombre"* à l'issue d'une rivalité entre ces deux prétendants au trône de principe des nombres, que sont le "Zéro" et le "Un", comment vont se résoudre des problèmes de définitions du "Un" et du "Zéro".

*

* *

2 Caveing, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Lille, 1982 ; cf. particulièrement pp. 749 à 992.

I. - Les arguments d'ordre philosophique de l'assertion *"Un n'est pas un nombre"*.

Ces arguments seront pris dans l'Antiquité et le Moyen Âge.

Les liens entre la philosophie et les mathématiques au cours de cette période sont étroits. Les problèmes relatifs au mode d'existence des objets mathématiques, au statut des vérités mathématiques et plus globalement à leur fondement, concernent philosophes et mathématiciens.

De plus, toute une tradition philosophique donne une place prépondérante aux mathématiques et surtout aux nombres. Pythagorisme, platonisme et néo-platonisme, dont l'influence se poursuivra au delà du Moyen Âge, mettent les nombres au coeur même de leur cosmogonie, certains allant même jusqu'à les considérer comme les principes organisateurs du Tout. D'après Aristote, les Pythagoriciens *"considérèrent que les principes des nombres sont les éléments de tous les êtres, et que le ciel tout entier est harmonie et nombre"* [3]. Et Nicomaque de Gérase, grec du Ier siècle ap. J.-C., écrit au début de son *Introdution à l'Arithmétique* :

> *"Tout ce qui est arrangé dans le monde par la nature, selon un développement industrieux, dans les parties et dans l'ensemble apparaît avoir été différencié et ordonné conformément au nombre par la providence et par l'intelligence qui a organisé toutes choses, le paradigme tenant sa force de ce qu'il s'appuie tel une épure sur le nombre préexistant dans la pensée du Dieu créateur."*

On pourrait citer bien d'autres auteurs de cette période ou d'époque plus récente[4].

Les mathématiques peuvent même avoir une valeur morale. Ainsi, pour Platon, étant les intermédiaires entre le domaine sensible et celui des Idées, elles sont indispensables à l'enseignement de la Sagesse et à la recherche de la Vérité. L'arithmétique doit être enseignée aux gardiens de la cité *"pour faciliter la conversion de l'âme du monde de la génération vers la vérité et l'essence, car c'est la science qui attire l'âme de ce qui nait à ce qui est"* [5]. On peut remarquer au passage, la valorisation, par le platonisme et sa postérité, de la science du nombre sur la géométrie.

Il est donc naturel de rechercher dans la philosophie des arguments explicatifs de cette assertion *"Un n'est pas un nombre"*.

---

3 Aristote : *Métaphysique*, A-5, 986a.

4 C'est cette même idée que l'on retrouve chez Leibniz : *"Dieu est mathématicien"* ou chez Galilée : *"Le monde est écrit en langage mathématique"*.

5 Platon : *République*, VII.

L'Être et le "Un" sont les matériaux de base du philosophe : *"L'Être et le Un seront principes et substances car ce sont ces notions qui sont les plus affirmées de la totalité des êtres"* [6].

L'Être, c'est tout ce qui existe vraiment aux yeux du philosophe. Le "Un" est un principe d'identité, d'égalité, de cohérence, de stabilité, de continuité, d'ordre. Le philosophe essaie de dégager de la multiplicité des êtres une cohérence, un principe explicatif stable, une unité profonde ; il veut mettre de l'ordre dans la diversité confuse du monde, il recherche l'universel sous le contingent, le vrai sous les apparences. *"Le principe du connaissable dans chaque genre est donc l'Un"* [7].

C'est dans les philosophies platonicienne et néo-platonicienne que le "Un" est le plus valorisé. Il est le thème central du dialogue le plus commenté de Platon, le *Parménide* ; chez Plotin il est au-dessus de tout et même au-dessus du Tout.

Par ailleurs, dans le raisonnement philosophique, l'opposition est un outil conceptuel majeur. Or, l'Être et le "Un", loin d'être opposés, sont identiques en nature, corrélatifs ; lorsque nous disons qu'une chose est, nous signifions simultanément qu'elle existe et qu'elle est différente des autres choses, qu'elle est une, identique à elle-même. Pour Parménide, l'opposition primordiale est l'Être et le Non-Être. Platon dans le *Sophiste* et Aristote dans le livre N de la *Métaphysique*, vont la critiquer : le concept de Non-Être est ambigü et inefficace. Elle va perdre sa prééminence au profit de l'opposition Un/Multiple qui existait déjà dans les philosophies pré-socratiques ; en effet, on la trouve en troisième position dans la table des opposés donnée par Aristote dans la *Métaphysique* (A-5). Avec Platon et Aristote elle devient l'opposition fondamentale, le paradigme de toute opposition, la forme première de toute pensée.

> *"[...] tous les contraires se ramènent à l'Être et au Non-Être, à l'Un et au Multiple : par exemple le repos relève de l'Un, et le mouvement de la multiplicité ... Tous les êtres sont en effet ou bien des contraires ou bien des composés de contraires et les principes des contraires sont l'un et le multiple."* [8]
>
> *"Je dis que l'un et le multiple, identifiés par le raisonnement, circulent partout et toujours, aujourd'hui comme autrefois dans chaque pensée que nous exprimons."* [9]

On trouve cette opposition sous une forme très particulière et au premier abord assez déroutante, dans les deux principes de la dernière philosophie de Platon telle que la rapporte Aristote : l'Un et la Dyade

---

6 Aristote : *Métaphysique*, B-3.
7 *Ibid.*, Δ-6 ,1016b.
8 *Ibid.*, Γ–2.
9 Platon : *Philèbe*, 9a.

Indéfinie du Grand et du Petit. Voici comment L. Robin les résume dans la conclusion de son livre, *La théorie platonicienne des Idées et des Nombres d'après Aristote* :

> *"Il y a deux principes universels qui suffisent à expliquer tout ce qui est, l'Un, principe formel, et la Dyade de l'Infini, ou Dyade du Grand et Petit, principe matériel. Celle-ci est le principe de l'instabilité et du devenir, du changement et du mouvement, de l'accroissement et du décroissement, la cause de l'Illimitation et du Non-Être ; c'est la relation informe et indéterminée, l'égale possibilité du plus et du moins et d'une façon générale, la possibilité ambigüe des déterminations opposées. L'autre, c'est, au contraire, le principe de l'Être et de la Forme, c'est ce qui fixe le devenir, détermine la relation, arrête le mouvement, limite l'illimité, réalise le possible, équilibre les tendances opposées."*

Les Nombres Idéaux construits sur ces deux principes sont les modèles des Idées, de leur organisation interne et du mode de relations qu'elles entretiennent entre elles. Pour Robin, cette doctrine achève, en en comblant les lacunes, la théorie platonicienne des Idées.

Aristote est très prolixe et non moins critique sur cette doctrine ; il en parle longuement dans la *Métaphysique*, la *Physique* Livre III, l'*Éthique à Nicomaque* et peut-être ailleurs. Pendant très longtemps la forme aura une connotation positive symbolisée par le "Un" et la matière une connotation négative symbolisée par le "Deux".

Comme nous l'avons vu plus haut, le multiple c'est le divers et même l'informe. Mais il peut être discipliné par la pensée avide d'ordre et de connaissances précises. Il devient alors le nombre.

Pour Aristote, le nombre est *"le multiple déterminé"* ; pour Platon, dans le *Philèbe*, c'est le multiple discipliné par le sage, et pour Avicenne, philosophe de langue arabe du XIème siècle, *"la multiplicité c'est le nombre"*. L'opposition Un/Nombre va ainsi préciser, donner du corps à l'opposition Un/Multiple.

Au poids idéologique de l'opposition métaphysique du "Un" et du Multiple va s'ajouter la difficulté de la définition du "Un" et du nombre, difficulté qui perdurera jusqu'à l'époque contemporaine. Le problème de la définition est central en philosophie et en mathématiques. Une vraie définition doit donner l'essence de la chose ; une moins bonne n'en fait que la description.

La solution la plus largement répandue dans l'époque concernée est de poser l'unité comme principe, ou élément générateur du nombre. Dire que

"Un" est principe résout bien des problèmes, car un principe est indéfinissable (*Métaphysique*, Δ, 1).

Voyons de plus près les affirmations du *"Un est principe du nombre"*.

Dans la *Métaphysique* (I,1), Aristote donne d'abord "Un" en extension, c'est-à-dire qu'il fait une énumération des cas où "Un" est employé, puis il le donne en compréhension, c'est-à-dire qu'il essaie de le définir : *"L'Un est le principe du nombre en tant que nombre"*. On retrouve ceci sous différents vocables tout au long de l'Antiquité et du Moyen Âge.

> *"L'unité est l'origine naturelle de tous les nombres".*
> (Nicomaque de Gérase, Ier siècle).
>
> *"Un n'est pas un nombre mais c'est la source et l'origine des nombres".*
> (Macrobe, grammairien latin du Vème siècle).
>
> *"Un est le germe des nombres mais n'est pas nombre".*
> (Isidore de Séville, Archevêque du VIème siècle).

S'il est admis par tous que le principe n'a pas à être défini, la question se pose de savoir si le principe est de même nature ou non que ce qu'il engendre. Nos recherches nous font penser qu'il n'y a pas accord sur ce point entre les auteurs, et que chez un même philosophe cela dépend du domaine considéré. Proclus de Lycie, philosophe grec du Vème siècle ap. J.-C., a une opinion bien tranchée :

> *"Tout principe est d'une substance effective* [ουσια] *autre que celle des choses qui découlent de lui, et leurs négations nous manifestent la propriété de ce principe ; car, cause de ces choses et ne dépendant en rien de celles dont il est cause, il devient en quelque sorte facile à connaître par ce mode d'enseignement."* [10]

Toujours-est-il que la différence de nature entre le principe et ce qu'il engendre est souvent mise en avant pour justifier le *"Un n'est pas un nombre"*. Deux scénarios sont alors possibles. Le premier consiste à poser le nombre comme ce qui est engendré par l'unité. Le "Un" et le nombre sont alors de natures différentes et leurs attributs sont opposés. Le second consiste à montrer que les qualités et les rôles du "Un" et du nombre étant opposés, ils ne sont pas de même nature. Dans un cas comme dans l'autre, ils ne peuvent être désignés par le même vocable.

Voyons quels sont les attributs mis en jeu.

---

10 Proclus : *Les commentaires sur le premier Livre des Élements d'Euclide*. Éd. Desclée de Brouwer ; Bruges, 1948, p 84.

Le premier, et sans doute le plus prégnant, porte sur la possibilité de division ; le "Un" est indivisible[11] contrairement au nombre qui peut être divisé. *"L'essence de l'Un est l'indivisibilité"* écrit Aristote après avoir affirmé que "Un" est principe du nombre[12].

Quelques siècles plus tard, Théon de Smyne dit la même chose :

> " [...] *l'un en tant qu'un n'est susceptible ni de partage ni de division. Le nombre en effet - qui est autre - est diminué quand il est divisé : il est divisé en parties plus petites que lui, par exemple 6 en 3 + 3, ou 4 + 2 ou 5 + 1."* [13]

Et encore plus tard, Avicenne reprend :

> *"D'abord parce que voilà que nous définissons l'unité par l'absence de division ou l'absence de parties en acte. Et nous prenons la division et la partition dans la définition de la multiplicité."* [14]

Les oppositions simple/composé, sans parties/avec parties relèvent de la même problématique que l'opposition indivisible/divisible.

La définition donnée par Euclide : *"un nombre est un assemblage composé d'unités"*[15], majoritairement adoptée dans la suite de l'histoire, exclut "Un" de l'ensemble des nombres pour un temps fort long. Cette exclusion n'est pas explicitement écrite dans les *Éléments*, mais cela est implicite dans l'ensemble de l'ouvrage. Il en reste une trace dans l'assertion : *"Un n'est pas un nombre premier"*.

De plus, ce qui est simple est plus parfait que le composé : *"l'unité est plus parfaite que la multiplicité dans les formes immatérielles"* dit Proclus. Les oppositions simple/composé et parfait/imparfait ne sont pas sans rappeler le "Un" et la Dyade Indéterminée du Grand et du Petit des Nombres Idéaux de Platon.

La géométrie est, elle aussi, mise à contribution pour soutenir l'exclusion de "Un" du domaine des nombres. Aristote et de nombreux

---

11 Pour les Grecs, les rapports de nombres entiers, que nous appelons fractions, expriment des proportions entre des nombres entiers ou entre des grandeurs.

12 Aristote : *Métaphysique*, I, 1.

13 Théon de Smyrne, commentateur grec du IVème siècle : *Smyrnæi Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* (*Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*), éd. E. Hiller, Leipzig, 1878. Cité et traduit par Caveing, M. : *op. cit.*, pp. 786-787. Il existe une trad. fr. de J. Dupuis, Paris, 1892, réimp. par les éd. *Culture & Civilisation*, Bruxelles, 1966.

14 Avicenne : *Métaphysique du Shifa*, tome 1, n° 129 ; trad. Georges C. Anawati, éd. Vrin, Paris, 1978, p. 182.

15 Euclide : *Éléments*, Livre V, déf. 2 ; trad. Peyrard, rééd. Blanchard, Paris, 1966. Pour une trad. fr. plus récente, cf. l'éd. de B. Vitrac, P. U. F., Paris, 1990 (I-IV), et 1994 (V-IX).

successeurs font une analogie entre "Un" et le point. Voici un texte d'Aristote préconisant l'analogie par ressemblance dans le délicat problème de la définition :

> *"De même encore, dans les choses qui sont très éloignées l'une de l'autre, l'étude de la ressemblance est utile en vue des définitions : par exemple, le calme dans la mer est la même chose que le silence des vents dans l'air (chacun étant une forme de repos), et le point dans la ligne la même chose que l'unité dans le nombre, car point et unité sont l'un et l'autre un principe."* [16]

L'analogie est une égalité de rapports. Une première analogie est ici $\frac{\text{calme}}{\text{mer}}=\frac{\text{silence}}{\text{air}}$ qui ne concerne pas notre sujet, la seconde $\frac{\text{point}}{\text{ligne}}=\frac{\text{un}}{\text{nombre}}$ sera un thème récurrent. L'élément de ressemblance est ici le principe.

Proclus fait, lui aussi, le paralléle entre point et unité :

> *"Le point est donc seul dénué de parties en matière géométrique, et l'unité seule en est dénuée en matière arithmétique."* [17]

Tout comme le point, "Un" est indivisible ; et comme le point n'est pas ligne, "Un" n'est pas nombre.

L'analogie entre le "Un" et le point amène une autre opposition à savoir celle de la limite et du limité. "Un" limite le nombre comme le point limite la ligne. Dans la suite des entiers, l'unité est une limite, une fin, un commencement ou un minimum.

> *"Le nombre est une progression dans la pluralité qui commence à partir de l'unité ou une régression qui cesse à l'unité. L'unité est une quantité limitante, qui, lorsque la pluralité diminue par soustraction, demeure, après avoir été dépouillée de tout ce qui fait nombre, fixe et en repos."* [18]

Ce rôle de limite exclut l'unité de l'ensemble des nombres en contribuant à son isolement.

> *"Tout nombre est la moitié de la réunion des deux nombres qui l'entourent ... Absolument seule l'unité n'est la moitié que du seul nombre situé à coté d'elle."* [19]

---

16 Aristote : *Topiques*, I, 6.

17 Proclus : *Les commentaires sur le premier Livre des Élements d'Euclide.* Éd. Desclée de Brouwer ; Bruges, 1948, p 83.

18 Théon de Smyrne, *op. cit.*, cité et traduit par Caveing, M. : *op. cit.*, pp. 792.

19 Nicomaque de Gérase : *Introduction arithmétique*, trad. fr. J. Berthier, éd. Vrin, Paris, 1978. Pour le texte original : *Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticæ Libri II* (*Les deux Livres de l'Introduction à l'Arithmétique*), éd. R. Hoche, Leipzig, 1866.

Mais il contribue à la perfection du "Un", car, d'après Proclus, *"les limites l'emportent par essence sur les choses limitées"* [20].

Cette limitation des nombres n'est que justice, ou plus exactement dans notre langage moderne, que problème de symétrie ; puisque la ligne est limitée en longueur dans le sens de l'augmentation par la finitude du monde, mais n'a aucune limite dans le sens de la diminution à cause de son infinie divisibilité, il est "naturel" que le nombre qui, lui, n'a pas de limite dans le sens de l'augmentation, en ait une dans le sens de la diminution.

> *"Il est juste aussi qu'il y ait une limite inférieure dans le nombre, et que du coté de l'augmentation une quantité quelconque puisse être toujours dépassée. Mais, pour les grandeurs, c'est le contraire : dans le sens de la diminution on dépasse une grandeur quelconque, mais dans le sens de l'augmentation, il n'y a pas de grandeur infinie. La raison en est que l'un est indivisible quelqu'il soit, par exemple l'homme est un homme et non plusieurs ; or, le nombre est fait de plusieurs unités, qui forment une quantité ; par suite il faut s'arrêter à l'indivisible ; car deux et trois sont des nombres déduits et de même pour chacun des autres nombres ; mais dans le sens de l'augmentation, on peut toujours en concevoir."* [21]

Enfin un dernier argument vient confirmer l'assertion du départ ; il porte sur la notion de mesure. "Un" est considéré comme mesure du nombre, et le nombre est défini comme ce qui est mesuré par l'unité ; de ces définitions circulaires ressortent de nouvelles oppositions, mesure/mesuré et mesure/mesurable, qui confirment la différence de nature entre "Un" et le nombre.

> *"L'un et le multiple sont opposés dans les nombres comme la mesure au mesurable."* [22]
> *"L'un n'est pas considéré comme un nombre, car l'unité de mesure n'est pas une pluralité de mesures."* [23]
> *"L'unité en tant qu'elle est mesure s'oppose à la multiplicité en tant qu'elle est mesurée."* [24]

Voici un texte d'Aristote affirmant la différence de genre entre "Un" et le nombre :

> *"La mesure est toujours du même genre que l'objet mesuré ; les grandeurs se mesurent par la grandeur, et, en particulier, la longueur se mesure par la longueur, la largeur, par la largeur, les sons, par le*

---

20 Proclus : *op. cit.*, p. 77.
21 Aristote : *Physique*, 207 b.
22 Aristote : *Métaphysique*, I, 6, 1056 b.
23 *Ibid*, N, 1, 1088 a, 7.
24 Avicenne : *Métaphysique du Shifa*, tome 1, n° 130, 6 ; trad. Georges C. Anawati, éd. Vrin, Paris, 1978, p. 183.

son, la pesanteur par la pesanteur, et les unités, par l'unité : car c'est bien ainsi qu'il le faut entendre, et ne pas dire que la mesure des nombres est un nombre ; on devrait le dire s'il s'agissait de notions appartenant au même genre, mais, en réalité, il ne s'agit de rien de pareil, et c'est comme si l'on prétendait que la mesure des unités sont des unités et non une unité, puisque le nombre est une pluralité d'unités." [25]

Pour clore cette partie, nous proposons un texte de Proclus extrait des *Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, dans lequel se retrouvent bon nombre des arguments envisagés ci-dessus.

"En conséquence, de même que l'unité est d'une manière la génératrice des nombres, d'une autre manière pour ainsi dire la matière étendue sous les nombres et, de chacune de ces manières, un principe et non ce qui est nombre, mais tantôt un mode tantôt un principe, le point est de même, d'une manière ce qui donne la substance aux grandeurs et, d'une autre manière, ce qui est principe et non cause génératrice.

Le point est-il seul impartageable ? ou le moment présent est-il tel aussi dans le temps et l'unité telle dans les nombres ? [26] [...]

Tout ce qui est composé reçoit sa limite de ce qui est simple ; tout ce qui est partageable la reçoit de ce qui est impartageable, et les images de ces faits nous sont offertes dans les principes des mathématiques. En effet, lorsqu'il est dit qu'une ligne est terminée par des points, il est clair que celle-ci se rend infinie par elle-même comme n'ayant pas d'extrémités en raison de sa propre progression. Dès lors, de même que le nombre deux est terminé par l'unité, et qu'il met fin à l'audace excessive dont il est possédé en étant retenu par celle-ci, la ligne est limitée aussi par des points ; car étant à l'image du nombre deux, et tenant du point le rapport de l'unité, elle participe du binaire. Mais, dans les choses imaginaires et dans les choses sensibles, les points mêmes qui sont dans la ligne terminent la ligne ; tandis que dans les formes immatérielles, le concept impartageable du point préexiste. S'avançant de là, le point est le tout premier à s'abstraire, à se mettre en mouvement en se perdant à l'infini ; puis en imitant le nombre binaire indéterminé, il est retenu par son principe propre, ramené par lui à l'unité et contenu de tous cotés. Il est donc tout à la fois infini et fini : infini d'une part dans son action progressive, et fini d'autre part dans sa participation à un principe déterminateur." [27]

*

* *

25 Aristote : *Métaphysique*, I, 1.
26 Proclus : *op. cit.*, p. 83.
27 *Ibid.*, p. 91.

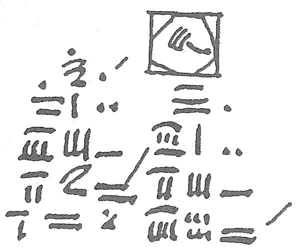
II. - Comment un devient-il un nombre ?

A. - État des lieux au Vème siècle avant J.-C.

1. - Du côté de la pratique, "Un" est un nombre.

Nous allons tout d'abord restituer au "Un" son usage non problématique de toujours. Bien avant la période hellénistique, dans la pratique arithmétique comme dans la pratique de la mesure des grandeurs depuis la plus haute antiquité égyptienne, babylonienne, chinoise ... l'utilisation de signes comme symboles de quantité, l'utilisation d'un ou plusieurs symboles pour le "Un", la pratique des opérations incluant le "Un" étaient communément répandus comme en témoignent les papyrus et les tablettes qui nous sont parvenus.

Voici l'exemple du problème 48 d'un papyrus égyptien[28] rédigé par le scribe Ahmès au XVIIIème siècle avant J.-C., que l'on peut interpréter comme le calcul de l'aire d'un carré de côté 9 *khet* et de l'aire d'un octogone inscrit dans ce carré. Le *setat* serait l'unité d'aire.



1	8 (*setats*)	`1	9 (*setats*)
2	16 (*setats*)	2	18 (*setats*)
4	32 (*setats*)	4	36 (*setats*)
`8	64 (*setats*)	`8	72 (*setats*)
		Total :	81 (*setats*)

Ce calcul égyptien utilise avec la même aisance le symbole 1 et les autres symboles. Les contradictions, les apories sur l'unité ne sont prises avant le VIème siècle dans aucun filet ; la question *"Un est-il un nombre ?"* ne se pose pas chez les Égyptiens.

---

28 Il s'agit du *Papyrus Rhind*. Cf. *Les comptes de Bastet*, publication de l'IREM de Toulouse ; cf. aussi Gillings, R. J. : *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, M.I.T. Press, Cambridge, 1972 ; rééd. Dover, New York, 1982, pp. 140-145 ; ou encore Robins G. et Shute, Ch. : *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, Dover, New York, 1987.

2. - Du côté de la réflexion mathématico-philosophique *"Un n'est pas un nombre"*.

Les commentaires sur ces pratiques numériques qui "vont de soi" apparaissent au VIème siècle av. J.-C. et c'est à partir d'eux que nous suivrons les méandres des discours qui ont conduit à exclure "Un" du domaine des nombres, non plus du côté de la métaphysique mais du côté de la mathématique.

Les premiers discours que nous rencontrons sont ceux des pythagoriciens sur lesquels nous allons jeter un regard d'un point de vue plus interne aux mathématiques. Nous n'avons aucun texte qui nous permette de nous référer à une arithmétique pythagoricienne bien constituée mais nous pouvons nous reporter à un élément du discours de Pythagore repris par Aristote : l'opposition pair-impair.

Cette opposition du pair et de l'impair a une efficacité mathématique certaine puisqu'elle produit l'argument de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Et c'est sur le mode de cette démonstration que s'appuie Aristote pour argumenter une exclusion du "Un" du domaine des nombres.. *"Les éléments du nombre sont le pair et l'impair"* nous dit Aristote[29].Tout nombre se doit de participer soit du pair soit de l'impair "Un" nombre comme *"tout objet idéal ne peut jamais recevoir en soi le contraire de la forme qui le détermine"*[30] ; le pair et l'impair sont considérés comme une forme du nombre ; citons le Socrate du *Phédon*, dialogue de Platon, à l'appui de cette thèse : *"Le cinq ne recevra pas en lui cette contrariété qu'est le pair ni le dix celle de l'impair"*[31]. Qu'en est-il du "Un" ? Il est pair ou impair en puissance *"ajouté à un nombre pair il produit l'impair et ajouté à un nombre impair il produit le pair"*[32].Donc "Un", participant des deux opposés, ne peut être considéré comme un nombre. Cette argumentation est une des justifications de notre exergue.

* * * * *

B. - Comment "Un" en arrive à être exclu dans les *Éléments* d'Euclide.

Partant de la maxime attribuée aux pythagoriciens : tout est nombre. nous arrivons à une autre forme de l'exclusion du "Un" qui nous prépare à la lecture du texte d'Euclide, fondateur de l'arithmétique. Étoile dans le

29 Aristote : *Métaphysique*, A5 986 a 18.
30 Caveing, M. : *op. cit.*, p. 770.
31 Platon : *Phédon*, 105 a 3 b 3.
32 Aristote : *Métaphysique*, tome 1, éd. Vrin, Paris, 1986, p. 45, n. 1.

firmament, grain de sable, point, unité sont alors confondus dans la représentation sensible du "Un" figuré par un point ; perception visuelle et idée sont conjointes dans le nombre figuré. Deux mouvements de coupure vont être effectuées par Platon et Aristote préparant ainsi le terrain pour le texte euclidien :

- l'éclatement de l'analogie quasi-identificatrice point-unité ;
- la séparation du sensible et de l'intelligible.

Aristote rompt avec l'analogie forte, la quasi-identité point-unité et affirme que *"le point ne se confond pas avec l'unité"*[33]. Ses arguments entament la force de cohésion du pythagorisme[34]. On peut voir une conséquence de cette position aristotélicienne dans les *Éléments* d'Euclide : dans les copies qui nous sont parvenues les nombres c'est-à-dire les entiers et le "Un" sont représentés par des segments ; on peut y lire une libération de l'identification perceptive du point et de l'unité mais qui a pour effet de conjoindre dans une même représentation l'unité discrète et l'unité continue.

Que la chose ne soit pas le nombre n'est pas à l'époque reçu comme une évidence.

> *"Le scoliaste du* Charmide *parlant de la science du calcul nommée logistique nous dit : elle pose comme nombre* [αριθμος] *l'objet nombrable elle prend trois choses à la place du nombre trois, dix choses à la place du nombre dix, à quoi elle fait application des théorèmes de l'arithmétique."* [35]

Nous pouvons voir une différenciation entre mathématiques appliquées et mathématiques pures dans cette distinction entre chose "nombrable" ou "nombrée" et nombre ; plus tard, au VIème siècle après J.-C., Saint-Augustin emploiera les termes *"nombre nombré"* et *"nombre nombrant"*, s'apitoyant sur ceux qui ne font pas la différence entre les deux[36]. Dans l'exemple du problème 48, cité ci-dessus, nous avons "la chose nombrée" la mesure du côté d'un carré, le "nombre nombré" 9 *khet*, le *khet* étant l'unité et le calcul de l'aire se fait à l'aide des "nombres nombrant" 1, 2, 4, 8, 9 Nous n'avons jamais considéré "trois poires" comme un nombre sauf peut-être en nous reportant à notre enfance ... et nous réalisons mal quelle révolution fut accomplie par les philosophes grecs. Platon, réfléchit longuement sur la nature des nombres : sont-ils *"nombres visibles et palpables"* ? ou sont-ils *"nombres qu'on ne peut saisir que par la pensée et*

---

33 Aristote : K12 1069 a 15.

34 Il reste pourtant une certaine identification dans le langage: la lettre α, un des symboles du *"Un"* chez les grecs, est appelé par Nicomaque de Gérase *"signe"* - en grec : σημειον - de l'unité et le point se dit aussi "σημειον". Cf. Caveing, M. : *op. cit.*, p. 754.

35 *Scolie au Charmide*, 165 E, cité par Caveing, M. : *op. cit.*, p. 775.

36 Saint Augustin : *Confessions*, Livre X, chap. XII, éd. Garnier-Flammarion, Paris, 1964, p. 215.

qu'on ne peut manier d'aucune autre façon"[37] ? Compter est-ce *"autre chose que d'examiner à combien se monte un nombre"*[38] ? Le mot nombre s'applique en premier lieu à un nombre défini de choses définies, on parle de nombre-de-pommes et c'est par une étude astreignante que l'on peut convertir son "âme" et s'élever à la considération du nombre en lui-même. Nous pouvons approcher des raisons de la nécessité de la coupure du monde sensible réalisée par les grecs en analysant les difficultés inhérentes aux considérations des grandeurs physiques toujours accompagnées d'une unité (aux constantes de la physique près) par opposition aux grandeurs mathématiques : 3 m/s est-il un nombre ?

La séparation du sensible et de l'intelligible mettra quelque temps à se réaliser dans les textes et dans les mentalités : *"les choses nombrables diffèrent des nombres en ce que les uns sont des corps et les autres des incorporels"* dit Théon de Smyrne[39] montrant bien encore ce besoin pour les grecs d'une interprétation du passage des choses nombrables ou nombrées aux nombres. L'invention platonicienne[40] d'une genèse des nombres à partir du "Un" et de la dyade ne remplit pas ce rôle ; la recherche va emprunter les notions aristotéliciennes et distinguer une matière et une forme des nombres. Suivons encore Théon : *"les choses nombrées ou pluralités déterminées dans le genre des collections nombrées constituent la matière des nombres"*[41]. Le nombre nombrant, nombre arithmétique, ce qui est réellement appelé nombre, sans adjectif, semble être ainsi une forme que reçoit la matière des pluralités déterminées. Mais la soumission au genre, comme dit Théon, nous dirions peut-être au concept, pose implicitement le choix de l'unité qui garde la mémoire du genre de la chose nombrée. La réflexion mathématique va commencer par la définition de l'unité pour remonter à la définition du nombre.

Que dire, du point de vue mathématique,de l'unité ? Euclide propose :

"L'unité est ce par quoi une chose existante est dite une." [42]

Les mots "Un" et "unité" sont employés ici pour traduire les mots "εν" et "μονας". Dans les textes, ils peuvent être employés indifféremment, ou distingués de manière aléatoire suivant le contexte, ou encore distingués dans un projet de construction théorique. Pour les Pythagoriciens, dit-on, les deux mots "εν" et "μονας" étaient complètement interchangeables :

---

37 Platon : *République*, VII, 526 a, éd. Garnier-Flammarion, Paris, 1966, pp. 284-285.
38 Platon : *Théétète*, 198 c, éd. Garnier-Flammarion, Paris, 1967, p. 151.
39 Théon de Smyrne, cité par Caveing, M. : *op. cit.*, p. 792.
40 Cf. partie I, supra.
41 Théon de Smyrne, cité par Caveing, M. : *op. cit.*, p. 777.
42 "Μονας εστιν, χαθφ ην εχαστον των οντων εν λεγεται", trad. fr. par Peyrard de la définition 1 du VIIème Livre des *Éléments* d'Euclide, rééd. Blanchard, Paris, 1966.

"Archytas et Philolaus usent indifféremment des termes d'Un et de monade." [43]

Cette indifférenciation dans le langage fait écho au "tout est nombre", à la non-distinction entre chose nombrée et nombre.

Chez Euclide, au Livre VII, nous avons une distinction qui s'inscrit bien dans une construction axiomatique de l'arithmétique. Sa définition est commentée en ce sens par Théon :

"Ce en quoi diffèrent le nombre et le nombrable c'est aussi en quoi diffèrent l'unité [μονας] *et l'Un* [εν]*. Le nombre est en effet la quantité définie dans les intelligibles, par exemple le 5 en soi et le 10 en soi, non comme tels corps, ni sensibles, mais intelligibles ; le nombrable est la quantité définie dans les sensibles, comme 5 chevaux, 5 boeufs, 5 hommes."*

Théon ajoute :

"Et dans ces conditions, l'unité est l'idée de l'Un, intelligible, qui est indivisible tandis que «un» se dit au sens propre dans les sensibles, par exemple un cheval, un homme ..." [44]

Analyse plutôt platonicienne distinguant ainsi monde des Idées et monde sensible.

Euclide part de la chose existante et se distingue ainsi de l'École pythagoricienne. Le nombre n'est pas dans la chose, ne lui est pas inhérente, le jugement n'est pas analytique. Par cette définition, attribuer "Un" à une chose existante devient un jugement synthétique, prédicatif ; "Un" est dit de quelque chose, le "Un" sensible de la chose, ce "Un" changeant est dépouillé de tout ce qui donne une essence à la substance existante. C'est *"l'invariant des nombres déterminés, c'est-à-dire l'unité"*[45]. C'est un invariant des "Uns" variant. Le "Un" par l'intermédiaire de l'unité reçoit ainsi une définition. Si celle-ci n'est pas opératoire et n'est pas utilisée dans le corps du Livre VII des *Éléments*, définition analogue en cela à la définition du point, elle a semblé nécessaire à Euclide pour fonder ce livre consacré à l'arithmétique, le premier qui nous soit parvenu ; cette définition a fait l'objet de très nombreux commentaires et elle continue à être lue et à servir de point de départ des réflexions des penseurs contemporains, comme nous l'avons vu dans l'introduction. Elle noue les deux registres, celui de la philosophie et celui de l'arithmétique. Cette définition 1 s'applique en effet au "Un"

---

43 Commentaire de Théon de Smyrne dans *Les écoles présocratiques*, édition établie par J. P. Dumont, coll. *Folio*, Paris, 1991, p. 287.

44 Théon de Smyrne, cité par Caveing, M. : *op. cit.*, p. 965, n. 26.

45 Diophante : *Livres arithmétiques*, Livre I.

principe des choses comme au "Un" principe des nombres[46]. Elle correspond à ce que dit Spinoza de l'unité :

> *"L'unité ne se distingue en rien de la chose et n'ajoute rien à l'être, mais est seulement un mode de penser qui nous permet de séparer une chose des autres qui lui sont semblables."* [47]

En conclusion, la définition 1 d'Euclide tente de séparer l'unité du "Un", de distinguer l'opérateur, le principe qui permet d'individuer (μονας) et le résultat, attribut de la chose existante (εν). Ce "Un" (εν) peut être regardé comme une projection du "Un" métaphysique (Εν) dans l'univers sensible, autrement dit dans le monde des choses existantes.. Cette unité est un principe d'individuation et un *"principe d'où part le mouvement"* du nombre :

> *"En un sens, par cause nous entendons la substance formelle ou quiddité ; [...] en un autre sens encore, la cause est la matière ou le substrat ; en un troisième sens, c'est le principe d'où part le mouvement ; en un quatrième enfin, qui est l'opposé du trosiième, la cause, c'est la cause finale ou le bien."* [48]

Euclide pose en définition 2 de ce livre d'arithmétique :

> *"Un nombre est un assemblage composé d'unités."* [49]

Les deux mondes, philosophique et mathématique, sont là bien dissociés. Reste seul l'univers arithmétique. Cette définition pourrait s'intituler : "Comment l'unité devient matière du nombre ?" ou "De l'atome de formation (*"monas"* de la définition 1) à l'atome de matière (*"monadon"* de la définition 2)". L'unité (μονας) se trouve ainsi devenir matière des nombres, deuxième cause aristotélicienne :

> *"Chacune des unités est en effet, élément du nombre comme matière tandis que le nombre joue le rôle de forme."* [50]

Le principe (μονας) de la définition 1 devient un objet du monde mathématique dans la définition 2. Ce qui était passage devient objet. On peut y voir la distinction du *"Un quant à la forme"* dans la définition 1 et du *"Un quant au nombre"* dans la définition 2. Si à ce deuxième "Un", on refuse d'être considéré comme un nombre cela peut résulter en partie de l'ombre portée par le premier sur le deuxième. On est passé de la quantité définie dans le sensible (εν) à la quantité définie dans l'intelligible (μονας) pour reprendre le langage de Théon. Autrement dit, encore, le principe

---

46 Cf. partie I, supra.
47 Spinoza : *Pensées métaphysiques*, La Pléiade, p. 260.
48 Aristote : *Métaphysique*, A3 983 a 31.
49 "Αριθμος δε το εχ μοναδων συγχειμενον πληθος", trad. fr. par Peyrard de la définition 2 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide, rééd. Blanchard, Paris, 1966.
50 Aristote : *Métaphysique*, 1084 b 6.

(αρχη) au sens de cause formelle, extérieure à ce qu'il engendre[51] de la définition 1, devient principe (στουκειον) au sens de élément, matière, immanent au domaine arithmétique engendré par la définition 2.

Nous avons rencontré deux obstacles à la considération du "Un" comme nombre :

- la non-différenciation langagière du Un-principe générateur et du Un-matière, autrement dit du Un-passage et du Un-marque du passage du domaine de la chose nombrable au domaine du nombre ;

- l'impossibilité logique produite par la définition 2 du nombre comme pluralité ; "Un" n'étant pas une pluralité la contrariété philosophique du "Un" et du Multiple est redoublée, il s'oppose par essence au nombre défini comme une multiplicité ; ce "Un" ne peut recevoir le contraire de la forme qui le détermine. Celle-ci se double du caractère dogmatique de l'indivisibilité du "Un" opposé au nombre essentiellement divisible.

* * * * *

C. - Un certain "Un" devient un nombre.

Nous allons d'abord nous tourner vers la pratique arithmétique, puis montrer comment Aristote lève l'interdiction philosophique.de la division du "Un", posée par ses prédécesseurs.

Dans le paragraphe intitulé *"La signification du quantième ou comment calculer sans diviser l'unité"*[52], Maurice Caveing complète la citation de Théon, éclairant l'idée de *"l'unité quantité limitante"*, le "Un" qui fait de six objets un tout.

> *"Si l'Un, pris parmi les choses sensibles, est divisé en 6, ce sera en parties égales au tout du point de vue numérique, s'il est divisé en 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1."* [53]

M. Caveing commente :

> *"Cela revient à dire que l'objet posé au départ comme 1 le tout, l'ancienne unité est maintenant représentée par le nombre 6 dont la sixième partie est 1."* [...] *"Ainsi la partie est représentée par 1 comme l'était précédemment le tout."* [54]

---

51 Cf. partie I, supra.
52 Caveing, M. : *op. cit.*, pp. 788-793.
53 Théon de Smyrne, cité par Caveing, M. : *op. cit.*, p. 792.
54 Caveing, M. : *op. cit.*, p. 793.

Ainsi le "Un", unité limitante, celui qu'on peut interpréter avec le quatrième sens du mot cause selon Aristote, acquiert une qualité essentielle du nombre la divisibilité. Cela conduit à accepter "Un" comme nombre quand il peut faire nombre, quand il peut être considéré comme une pluralité et à l'exclure du domaine des nombres sous ses autres formes.

Du côté de la réflexion métaphysique, dans la projection du "Un" métaphysique, du "Un" en soi (Eν) vers le "Un" sensible (εν), le "Un" (μονας) de la définition 1 d'Euclide a pris une caractéristique de ce "Un" en soi, celle de la non-divisibilité.

Souhaitant contrer le raisonnement suivant :

Tout nombre est divisible,
"Un" n'est pas divisible,
donc "Un" n'est pas un nombre,

Aristote s'attaque à ceux qui croient que

> *"l'Un qui se convertit avec l'être est identique à l'un principe du nombre;"* [...] *"Pythagore et Platon voyant que l'Un qui se convertit avec l'être n'ajoute rien à celui-ci mais exprime la substance de l'être en tant qu'elle est indivise s'imaginaient qu'il en était de même de l'Un principe du nombre."* [55]

S'il n'en est rien, on peut diviser l'unité. Le verrou philosophique de ce "Un" est ainsi levé et il est possible d'entériner la pratique décrite ci-dessus. Tous ces mouvements de pensée sont lents à se cristalliser. Ce "Un" d'un tout, d'une totalité n'est pas une abstraction, mais une décision que la lecture d'Aristote peut autoriser. Quand cette décision singulière de considérer dans la pratique un tout déterminé comme un "Un" deviendra-t-elle un énoncé mathématique ? Cette question reste ouverte. Mais la décision est un fait réalisé par le mathématicien de Grenade, Ibn al Banna, qui reprend peut-être des textes mathématiques antérieurs.

Ibn al Banna, mathématicien de Grenade, mort vers 1321 dans son ouvrage répondant au beau titre *Raf^c Al-Hijab* - i. e. : *Lever de rideau* -, va soutenir la double thèse *"Un est un nombre"* et *"Un n'est pas un nombre"*.

> *"L'Un n'est pas toujours un nombre, alors que tout nombre peut être considéré comme une unité."* [...] *"Dans le produit 3 . 5 = 15, chaque unité de 5 représente en fait trois unités dans ce cas, 1 est un nombre."* [...] *"En tant que principe du nombre [qui engendre tous les nombres] 1 n'est pas un nombre."* [56]

---

55 Aristote : *Métaphysique, op. cit.*

56 Ibn al Banna : *Raf^c Al-Hijab*, éd. critique, thèse de Mohamed Aballagh, Sorbonne, Paris I, 1988, p. 479. On peut aussi consulter la brochure de l'IREM de Rouen : *Quelques aspects des Mathématiques d'Ibn al-Banna de Marrakech*, Rouen, 1995, en particulier la 5ème partie : *"Le concept de nombre chez Ibn al-Banna"*.

Le paradoxe de considérer comme un nombre le "Un" divisible, celui qui fait nombre, le "Un" qui peut être vu comme une pluralité, le "Un" quantité limitante, résultat de l'acte de prendre une pluralité comme un tout s'inscrit dans la lignée des mathématiques égyptiennes auxquelles se réfère M. Caveing, une problématique qui nous paraît quelque peu étrange, qui peut s'écrire d'une manière provocatrice 1 = 10 par exemple.

On retrouve, dans le texte d'Ibn al Banna, l'ambiguïté du langage de l' "Un" : un, 1, unité sont utilisés pour traduire les différents mots arabes pour le "Un". Le "Un", quatrième cause d'Aristote, est explicitement considéré comme un nombre et le "Un", deuxième cause, tout aussi explicitement ne l'est pas. Le commentateur ajoute :

> *"Avec cela l'ordre des unités est constitué de neuf nombres et non de huit."* [57]

Là encore, dans les mathématiques arabes comme avec la mathématique grecque, on ne peut dire que "Un" soit réellement exclu. Al Khwarizmi, au IXème siècle, transmettant *"la méthode des Indiens"*, parle des 9 figures dont le 1 comme *"représentant des nombres entiers"* et de la différence du "Un" et des autres nombres indiquant par exemple que *"l'Un n'a pas besoin d'un nombre pour son être propre"*[58], ce qui n'est pas le cas pour les autres nombres. Al Khayyam, au XIIIème siècle, rappelle aussi les méthodes des Indiens *"reposant sur une induction* [fondée] *sur peu de nombres c'est à dire les carrés de neuf chiffres à savoir le carré de un, de deux ..."* et, pour expliquer qu'il est possible d'écrire qu' *"un nombre est égal à une surface"* il propose d'entendre *"pour le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné"*[59]. Mais ces formulations ne disent pas explicitement "Un" est un nombre[60].

* * * * *

D. - Où "Un" devient un nombre.

Non moins étrange pour nous, mais dans le sens contraire, est la résistance du "Un" cause génératrice et du "Un" cause matérielle à rentrer *"dans le rang"* pour prendre une expression de Pascal à ce sujet. Nous nous

---

57 *Ibid.*, p. 479.

58 Al Khwarizmi : *Le Calcul Indien (Algorismus)*, trad. par A. Allard des versions latines du XIIème siècle, Lib. Blanchard, Paris, 1992, pp. 1-2 et 25.

59 Al Khayyam : *L'Œuvre algébrique*, trad. R. Rashed et A. Djebbar, in *Sources and Studies in the History of Arabic Mathematics* n° 3, 1971, p. 20.

60 Citons à ce sujet Caveing, M. : *op. cit.*, pp. 799-806.

tournons maintenant vers le livre *L'Arithmétique* de Simon Stevin[61], livre charnière pour notre histoire, qui va mettre fin à cette résistance.

À l'époque où Stevin fit ses études, au milieu du XVIème siècle, l'écriture héritée des Hindous et des Arabes pour les dix premiers entiers 0, 1, ... , 9 était largement répandue, mais parallèlement étaient fort vivaces dans les livres d'arithmétique l'idée de ne pas inclure "Un" dans la classe des nombres et celle de considérer $1/2$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... comme appartenant à une classe inférieure d'objets de l'arithmétique. Citons comme relevant de ces conceptions, l'*Arithmétique* de Jean Trenchant (1561) qui sert de référent à l'argumentation de Stevin au début de sa propre *Arithmétique* (1588). Stevin s'élève contre le statut inférieur attribué aux fractions et aux irrationnelles, connoté par des adjectifs dévalorisants comme sourd, irrationnel, irrégulier et, en s'appuyant sur la convenance "naturelle" entre grandeur et nombre, il considère que pour les hommes *"un, deux, trois, demi, tiers, etc. étaient noms propres et convenables pour l'explication"* de grandeurs et pouvaient être compris sous un même genre *"lequel genre ils appelaient nombre"*. Mais cette extension du domaine des nombres ne suffit pas pour y inclure "Un". Dès les premières pages, Stevin s'élève contre les deux idées ci-dessus mentionnées et affirme :

> *"Définition II.*
> *Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chacune chose.*
> *Explication.*
> *Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dit Un ; et deux, par lequel on la nomme deux ; et demi, par lequel on l'appelle demi ; et racine de trois, par lequel on la nomme racine de trois, etc."*

Suivent six pages denses d'argumentation intitulées : *"Que l'unité est un nombre"*. Sa démonstration se fait en deux temps :

1. - De l'intérieur du domaine des nombres, une argumentation syllogistique donne à l'unité une place dans ce domaine.

> *"Il est notoire que l'on dit vulgairement que l'unité ne soit point nombre, mais seulement son principe, ou commencement ... ce que nous nions et en pouvons argumenter en cette sorte :*
> *La partie est de même matière qu'est son entier ;*
> *Unité est partie de multitude d'unités ;*
> *Ergo l'unité est de même matière qu'est la multitude d'unités.*
> *Mais la matière de multitude d'unités est nombre,*
> *Doncques la matière d'unité est nombre.*
> *Et qui le nie fait comme celui qui nie qu'une pièce de pain soit du pain."*

---

61 Stevin, S. : *L'Arithmétique*, imp. par Christophe Plantin, Leyde, 1585.

Ce syllogisme entend démontrer que l'unité, matière du nombre, est nombre. Est-il convaincant ? éclairant ? Avant de donner leurs raisons, nous voulons nuancer cette affirmation et nous serons moins catégoriques. Nous pensons avec Descartes qu'un syllogisme n'est concluant que pour celui qui est déjà convaincu de la thèse émise, mais ce syllogisme qui a fait couler beaucoup d'encre au XVIIème siècle a eu pour effet, conjointement avec la suite de l'argumentation de Stevin, de faire disparaître des livres d'arithmétique les précautions d'usage concernant le "Un" et ne serait-ce que pour cette raison ne peut être pris à la légère. Il s'inscrit dans une réflexion aristotélicienne sur la matière et cette inscription lui permet de provoquer la rupture avec la tradition. Il prête néanmoins le flanc à la critique, la référence à la matière porte souvent en elle une ambiguïté. Les philosophes du XVIIème siècle, Arnauld et Nicole analysent en détail le texte de Stevin et, tout en en louant une partie, comme on le verra par la suite, affirment : *"Cet argument ne vaut rien du tout"*[62] et justifient leur jugement radicalement négatif :

> *"car quand la partie serait toujours de même nature que le tout, il ne s'ensuivrait pas qu'elle dût toujours avoir le même nom que le tout."*

Ils donnent des exemples comme celui des soldats et de l'armée et portent ainsi l'attention sur le problème de la nomination. Ils reprochent à Stevin de prendre *"des définitions de mots qui ne peuvent être contestées pour des définitions de choses que l'on peut souvent contester avec raison"* distinguant définition de chose et définition de mot. Cette distinction est porteuse d'un débat toujours actuel sur la nature des concepts mathématiques : la définition de chose est une approche essentialiste, tentant de traduire l'intuition qu'on a d'un objet, mais on n'est jamais sûr d'en avoir atteint la quiddité, c'est-à-dire ce qui fait qu'il est vraiment lui, car des éléments essentiels peuvent toujours échapper. La définition de mot, approche nominaliste, impose des noms aux choses sans s'interroger sur les rapports avec l'intuition. Pour Arnauld et Nicole, comme pour leur contemporain et ami Pascal, on ne peut donner une définition de chose donnant la nature, l'essence de la chose aux *"mots primitifs"*[63] comme *"espace, temps, nombre, égalité"*, et encore moins au "Un". On ne leur donne donc qu'une définition de mot, et c'est à partir des ces définitions de mots que l'on peut construire une science. Ce n'est ainsi que par commodité, dans un acte libre, que :

> *"Euclide et les premiers auteurs qui ont traité l'arithmétique, ayant plusieurs propriétés à donner qui convenaient à tous les nombres hormis l'unité, pour éviter de dire souvent qu'en tout nombre, hors l'unité, telle condition se rencontre, ils ont exclu l'unité de la signification du mot nombre par la liberté que nous avons déjà dit qu'on a de faire à son gré des définitions."*

---

62 Arnauld, A. et Nicole, F. : *Logique ou Art de penser*, éd. Vrin, Paris, 1981, IV-5, p. 314.
63 Pascal, B. : *Pensées*, in *Œuvres complètes*, Seuil, 1963, p. 350.

Ainsi, la définition d'Euclide est le fruit d'une décision "arbitraire". Et, il en est de même de celle de Stevin, *"Nombre entier est unité ou composée multitude d'unités"*, qui permet logiquement d'accepter le "Un" parmi les nombres, contrairement à celle d'Euclide. Le tour est joué. Euclide ne tombe pas pour autant de son piédestal : de nombreux auteurs du XVIIème siècle, y compris Stevin, Arnauld et Pascal, précisent qu'Euclide, s'il exclut le "Un" des nombres dans la définition, ne l'exclut en général pas dans ses démonstrations, suivi en cela par d'autres "princes des mathématiciens" comme Diophante.

Euclide va ainsi être lavé *de toute tache* concernant l'unité, comme il l'a été par Saccheri *de toute tache* concernant le postulat des parallèles. C'est ce que fait un certain Gérin de Reims dans une longue dissertation publiée en 1614 et intitulée *Petit traité de l'unité* dans lequel il donne force exemples tirés des *Éléments*, après avoir repris mot à mot les arguments de Stevin. En voici un exemple simple s'appuyant sur la définition 17 du livre VII des *Éléments* :

> *"Tout nombre plan est produit de deux nombres se multipliant l'un l'autre. Deux est un nombre plan. Donc Deux est produit de deux nombres se multipliant l'un l'autre. Or il n'y a point de nombres qui multipliés l'un par l'autre puissent produire 2, sinon 2 et 1 : car 2 fois 1 fait 2. Et ainsi l'Unité se trouve en l'un des côtés du nombre plan 2."* [64]

Ce traité comporte 41 pages d'arguments de ce genre. Il est donc devenu totalement licite au XVIIème siècle de considérer que "Un" est un nombre et ... d'ailleurs, en fait, même Euclide le faisait !

Si l'argumentation de Stevin a eu un si grand impact au XVIIème siècle, c'est en grande partie grâce à son deuxième volet.

2. - Ce deuxième temps du discours détrône le "Un" au profit du "zéro" comme cause génératrice des nombres. Quand le "zéro" n'avait pas été inventé, le choix du commencement, du premier principe du nombre, était limité au "Un". En possession du "zéro", Stevin va pouvoir dénoncer l'analogie des anciens :

> *"Il est notoire que l'on dit vulgairement que l'unité ne soit point nombre ains seulement son principe, ou commencement et tel en nombre comme le point à la ligne ce que nous nions."* [65]

et il va pouvoir mettre en scène dans un style lyrique, baroque peut-on dire, l'entrée royale du "zéro".

64 Gérin de Reims : *Petit traité de l'unité*, imp. par Constant, Paris, 1614, p. 13.
65 Stevin, S. : *op. cit.*, p. 3.

> *"Le nombre aura quelque chose en soi, qui se réfère au point. Mais que sera-ce ? Ils disent l'unité : Ô heure infortunée en laquelle fut premièrement produite cette définition du principe du nombre ! Ô cause de difficulté et d'obscurité de ce qui en la Nature est facile et clair ! Ô dommageable aduis de ceux qui l'ont concédé.* [...]"

Il se gausse ainsi longuement de ceux qui ont *"opprimé la nature du nombre"* et ont osé cette analogie point-unité, et en pointe les faiblesses criantes :

> *"Deux unités font nombre mais deux, voire mille points ne font nulle ligne* [...]"
>
> *"L'unité est divisible en parties* [...] *le point est indivisible."* [66]

La destruction de cette analogie est bien considérée comme un retour à la vraie nature des choses et pour Arnauld, Nicole et Pascal, mais tout en reconnaissant la justesse du texte de Stevin qu'ils reprennent à la lettre, ils minimisent son importance. Pour eux, on peut dire que Stevin a peu de mérite à l'avoir réalisé car *"il est absolument faux que l'unité soit au nombre comme le point est à la ligne"*[67], *"il y a peu de raison"*[68] de faire cette analogie qui n'était que le résultat d'un aveuglement face à l' *"admirable rapport que la Nature a mis entre ces choses"*. L'aveuglement d'Aristote était quand même partiel, le rapport entre grandeurs et nombres, lui, est naturel et doit être maintenu.

Et tous s'accordent sur la conclusion de Stevin :

> *"La communauté et similitude de grandeur et nombre est si universelle qu'il ressemble quasi identité, sans doute le nombre aura quelque chose en soi qui se réfère au point."* [...]
>
> *"L'unité doncques n'est point telle en nombre comme le point en ligne. Qu'est-ce donc qui lui correspond ? Je dis que c'est 0.* [...] *Le 0 est le vrai et naturel commencement."* [69]

Mais *"comme le point est adjoint de la ligne, et lui-même pas ligne, ainsi est 0 adjoint du nombre, et lui-même pas nombre"*[70]. Est maintenue par Stevin l'idée qu'un principe générateur n'est pas de même genre que ce qu'il engendre. Si l'on prend le genre des grandeurs homogènes défini par Euclide et Archimède, l'unité peut, étant multipliée plusieurs fois, surpasser quelque nombre que ce soit et est du même genre que le nombre considéré comme une grandeur homogène. Tel n'est évidemment pas le cas de 0.

---

66 Stevin, S. : *op. cit.*, p. 3.
67 Arnauld, A. et Nicole, F. : *op. cit.*, p. 385.
68 Pascal, B. : *op. cit.*, p. 350.
69 Stevin, S. : *op. cit.*, p. 3.
70 Stevin, S. : *op. cit.*, p. 3.

Sortir de l'ambiguité qui réside en ce que l'origine du nombre est et n'est pas elle-même de l'ordre du nombre nécessite une décision.

* * * * *

E. - Conclusion : Définir ou ne pas définir. Une ambiguité demeure.

Nous pouvons avoir le sentiment que toutes les difficultés sont aplanies si l'on accepte la position pascalienne qui consiste à ne pas tenter de définir les "objets primitifs", comme l'unité qui fait partie des *"termes qui désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui veulent entendre la langue, que l'éclaircissement qu'on voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction"*[71], ou celle de Locke de considérer que *"l'unité ou le un"* est *"l'idée la plus simple"*, *"la plus universelle"*[72] pour la "nature" de l'entendement humain.

Descartes fait de la non-définition une décision qui ne repose pas sur la nature des choses, mais sur une rupture consommée entre philosophie et mathématiques. Dans son projet d'inventer une science nouvelle alliant les avantages de la géométrie des anciens à ceux de l'algèbre des modernes, il énonce que *"les propositions ... le nombre n'est pas la chose nombrée ... l'unité n'est pas quantité ... et autres semblables doivent être entièrement écartées"* du travail mathématique *"quelques vraies qu'elles soient"*[73] et donc ne doivent être "traitées" qu'en philosophie. C'est de cette rupture qu'il fait naître une mathématique féconde. Descartes va alors bannir le mot quantité des mathématiques et par contre établir une séparation moins radicale entre nombre et chose nombrée reprenant même la représentation figurée pythagoricienne. Car pour lui en mathématique ce n'est pas l'intelligence pure qui est au travail, mais l'intelligence *"servie par l'imagination"*, et l'unité est liée à la représentation que l'on en a : il en présente trois représentations

> *"par un carré, si nous la considérons en tant que longue et large, par une ligne —, si nous ne la considérons qu'en tant que longue ; et enfin, par un point ., si nous ne la considérons qu'en tant que servant à composer la pluralité."* [74]

Il ajoute que

---

71 Pascal, B. : *op. cit.*, p. 350.

72 Locke, J. : *An essay concerning human understanding*, rééd. Collins Forest paperbacks, Glasgow, 1964, ch. XVI, 1, p. 153, traduit par nous.

73 Descartes, R. : *Règles pour la direction de l'esprit*, Règle XIV, Paris, 1628.

74 Descartes, R. : *op. cit.*, règle XV.

"de quelque manière qu'on la représente et qu'on la conçoive, nous comprendrons toujours qu'elle est un sujet qui a de l'étendue en tous sens et qui est susceptible d'une infinité de dimensions." [75]

Le terrain est ainsi préparé à l'écriture de sa *Géométrie* (1637) où le jeu de l'unité, prenant une ligne *"que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion"*[76], va permettre de relativiser la loi des homogènes et de pouvoir accepter des écritures de la forme $x^2 + x$, et de résoudre par des "lignes", c'est-à-dire par des longueurs, des équations de degré n. Cette décision de Descartes, comme toute décision, ouvre un champ de possibles, et peut être remise en question à tout moment. Elle le sera par ceux qui considèrent comme un scandale qu'une science repose sur des objets non définis, la lignée de Stevin (XVIème siècle), Frege (XIXème siècle), Ekeland (XXème siècle).

Nous arrêtons ici et maintenant cette histoire, cette étude partielle de la question et nous allons conclure sur une remarque contemporaine, intérieure à la philosophie des mathématiques, et assortie en note d'une remarque de type pédagogique, qui met bien en évidence les visages problématiques du "Un".

Lautman, en dehors de toute interrogation métaphysique ou psychologique, pointe une dichotomie irrémédiable, dans son *Essai sur l'unité des mathématiques :*

"Lorsqu'on écrit x 1 = x *(ou encore* 1 x = x*), le terme 1 joue un double rôle : il est l'élément unité du domaine des opérateurs qui agissent sur le domaine des* x *et il est de plus l'opérateur identique qui transforme en eux-mêmes les éléments* x *du domaine de base. Voici ce que signifient ces distinctions : supposons que le domaine d'opérateurs soit un anneau de nombres. L'élément unité 1 de cet anneau est tel que pour tout élément* a *de l'anneau, on ait* a 1 = a *et* 1 a = a. *Ceci est une définition interne qui n'envisage que la nature de l'élément unité au sein du domaine auquel il appartient. Si, de plus, cet élément-unité agissant sur l'élément* x *du domaine de base, transforme en lui-même cet élément, en sus du fait d'être élément unité de l'anneau d'opérateurs, il est opérateur identique, et ceci ne concerne plus tant sa nature propre que son action au dehors. Cette distinction de la nature propre de certains éléments et de l'action qu'ils exercent sur les éléments d'autres domaines, est pour nous essentielle.* [...]

75 Descartes, R. : *op. cit.*, règle XV. L'unité discrète et l'unité continue ne se distinguent que par leurs représentations.

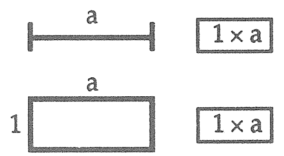
76 Descartes, R. : *La Géométrie*, Paris, 1637, p. 315.

Elle permet de caractériser dans son ensemble la méthode de division en mathématiques." [77]

*
*   *

77 Lautman, A. : *Essai sur l'unité des mathématiques*, coll. *10-18*, 1977, p. 298.

Dans le domaine pédagogique, on peut schématiser cette remarque avec les deux "1" suivants :



Nous y retrouvons le "Un" de la totalité et le "1" du nombre-plan.

Par ailleurs, une difficulté majeure pour les élèves est celle du : $a = a \times 1 = 1 \times a = a/1$. Donnons un exemple pour illustrer ce propos.

Alors que la résolution d'équations comme $3/7 \times x = 2$, peut être réussie par toute une classe de 3ème dans une interrogation, on peut rencontrer dans le même devoir un taux d'échec important dans la résolution de $x/7 = 2$. Nous proposons comme remédiation à cette erreur deux stratégies :

$x/7 = 2$ équivaut à $x/7 = 2/1$;
$x/7 = 2$ équivaut à $1/7 \times x = 2$.

Annexe I.

THÉON DE SMYRNE :
Extraits de *Smyrnæi Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* [78].

Le nombre est une progression dans la pluralité qui commence à partir de l'unité ou une régression qui cesse à l'unité. L'unité est une quantité limitante, qui, lorsque la pluralité diminue par soustraction, demeure, après avoir été dépouillée de tout ce qui fait nombre, fixe et en repos. Il n'est pas possible en effet que la division aille plus loin ; et en effet, si nous divisons l'un en parties dans les choses sensibles, alors au contraire, en tant qu'il y aura pluralité, s'engendreront l'un et le plusieurs, lequel trouvera son terme dans l'un par la soustraction successive de chacune de ses parties ; et si nous divisons à son tour ce nouvel un en parties, les parties s'engendreront en tant que pluralité et le processus de soustraction de chacune des parties cessera à l'un. En sorte que l'un en tant qu'un n'est pas susceptible ni de partage ni de division. Le nombre en effet - qui est autre [que un] - est diminué quand il est divisé : il est divisé en parties, plus petites que lui, par exemple 6 en 3 + 3, ou 4 + 2, ou 5 + 1. Tandis que l'un, s'il vient à être divisé, dans le domaine des choses sensibles, c'est en tant que corps qu'il est diminué et qu'il est divisé en parties plus petites que lui, quand on le sectionne ; mais, eu égard au nombre, il est augmenté, car à la place d'une chose on en a plusieurs. En sorte que, même de ce point de vue, l'un n'est pas susceptible de "partage". [79] [...]

De la sorte l'élément premier des nombres serait la monade, et celui des choses nombrables l'un ; et l'un, en tant qu'il est pris dans les choses sensibles, est dit être sectionné à l'infini, mais ce n'est pas en tant que nombre ni en tant qu'élément premier du nombre, mais en tant qu'objet sensible. En sorte que l'unité, étant intelligible, est indivisible, et que l'un, en tant que chose sensible, est susceptible d'être sectionné à l'infini. Et les choses nombrables diffèreraient des nombres en ce que les unes sont des corps, et les autres incorporels. [80]

* * * * *

78 Théon de Smyrne : éd. E. Hiller, Leipzig, 1878. Cité et traduit par Caveing, M. : *op. cit.*

79 *Ibid.*, 18, 1.3 - 1.22, pp. 792 et 786-787.

80 *Ibid.*, 19, 1.21 - 20, 1.5, p. 787.

Annexe II.

Maurice CAVEING :
Extrait de *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*[81].

Outre la double caractéristique d'être décadique et limité, le système grec présente en commun avec le système égyptien l'ambiguïté qui pèse sur la notion de l'unité. Dans les deux cas, les premiers nombres sont écrits au moyen de la juxtaposition de plusieurs signes identiques de forme, chacun représentant le nombre 1 ; puis, pour les nombres plus grands, la même écriture se répète au moyen des signes notant les puissances de 10. L'unité peut ainsi s'entendre de trois manières :

- 1°/ comme l'idée de ce que nous considérons, nous modernes, comme le "nombre" 1, mais qui s'oppose pour les Grecs à l'idée de pluralité ;

- 2°/ comme l'élément d'un "ensemble", ou plutôt d'une collection, à savoir la suite de graphismes identiques constituant dans son ensemble le symbole d'un entier ;

- 3°/ comme l'une des puissances de 10, en tant qu'elle se comporte à son tour comme "élément" d'une collection et est censée représenter la totalité de 10 "unités" de l'ordre inférieur.

L'unité est ainsi tour à tour l'opposé de la pluralité, l'élément d'une pluralité, et enfin un attribut d'une pluralité, la totalité que celle-ci constitue.

Ce qui est propre aux Grecs, c'est d'avoir explicité cette situation, sans pour autant en avoir dissipé l'ambiguïté, pour en tirer une définition du "nombre". On songera d'abord bien entendu à Euclide, VII, Df. II : "Un nombre est une pluralité composée d'unités" : ἀριθμὸς δὲ τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος, définition qui paraît immédiate quand on considère, par exemple, la notation du nombre 4 :

| | | |,

ou du nombre 400 : HHHH,

ou même du nombre 404 : HHHH | | | |,

dans laquelle se juxtaposent des "unités" de deux sortes. Cette conception, exprimée de diverses façons, paraît régner sans partage. Eudoxe, si l'on en croit Jamblique, ajoutait seulement la précision : "une pluralité déterminée" : ὡρισμένον (52)[82]. Mais déjà Thalès, selon Jamblique encore, l'aurait défini : "un ensemble d'unités" : σύστημα μονάδων, et cela "selon la doctrine égyptienne" : κατὰ τὸ Αἰγυπτιακὸν ἀρεσκόν (53)[83]. Les expressions d'Aristote sont équivalentes : "pluralité limitée" : πλῆθος πεπερασμένον (*Mét.* V, 13 - 1020a13) ; "pluralité d'unités" :

81 *Op. cit.*, pp. 799-800.
82 Note 52 de Caveing, p. 971 : Jamblique, in *Nic. Ar.*, (ed. Pistelli, Teubner), 10, 1.17.
83 Note 53 de Caveing, p. 971 : *Ibid.*, 10, 1.8-10 ; même expression chez Théon Sm., 18, 1.3.

πλῆθος μονάδων (*ibid.* I, 1 1053a30) ; "réunion d'unités" σύνθεσις μονάδων (*ibid.* VII, 13 - 1039a12) ; "pluralité d'indivisibles" : πλῆθος ἀδιαιρέτων (*ibid.* XIII, 9 - 1085b22) ; "plusieurs uns" : ἕνα πλείω (*Phys.* III, 7 - 207b7).

* * * * *

Annexe III.

AVICENNE :
Extraits de la *Métaphysique du Shifa*, III, 3, III, 5 et III, 6. [84]

Livre troisième, chapitre troisième.

[...]

Pourquoi la définition de l'un et du multiple est difficile.

Ce qui nous est difficile pour le moment de vérifier, c'est la quiddité de l'un ; cela parce que si nous disons que l'un c'est ce qui nécessairement ne se multiplie pas, nous aurons pris, dans la manifestation de l'un, la multiplicité.

Quant à la multiplicité, il est nécessaire qu'elle soit définie par l'un parce que l'un est le principe de la multiplicité et de lui [dérive] son existence et son essence. De plus quelle que soit la définition que nous donnions de la multiplicité, nous utilisons nécessairement pour le faire, l'un. Par exemple, quand on dit que la multiplicité, c'est l'ensemble formé d'unités, nous prenons l'unité dans la définition de la multiplicité. De plus, nous avons fait autre chose : nous prenons "ensemble" dans sa définition. Or "l'ensemble" est quasi la multiplicité elle-même. Si nous disons [la multiplicité est constituée] d'unités (*min al-waḥdāt* = ex unitatibus) des "uns", (*min al-wāḥidāt* = ex unis), (*min al-āḥād* = ex unitis), nous aurons mentionné au lieu du mot "ensemble" ce mot dont le sens n'est compris et connu que par la multiplicité.

Si nous disons que la multiplicité, c'est ce qui est nombré par l'un, nous aurons pris dans la définition de la mutliplicté l'unité et nous aurons également pris dans sa définition la numération et la mensuration qui, elles non plus, ne sont comprises que par la multiplicité.

Combien il nous est difficile dans ce chapitre de dire quelque chose qui soit vraiment valable (*yu'taddu bihi*) ! Mais il semble bien que la multiplicité également soit mieux connue par notre imagination et l'unité mieux connue par notre intelligence.

---

84 Extraits de la *Métaphysique du Shifa* ; trad. Georges C. Anawati, éd. Vrin, Paris, 1978, tome I, pp. 165, 177, et 182-183.

Livre troisième, chapitre cinquième.

[...]

Si tu entends que le dix c'est neuf avec un et que tu veuilles dire que le dix, c'est le neuf qui est avec "un" de sorte que si le neuf était seul, il n'y aurait pas de dix tandis que s'il est avec l'un ce neuf serait dix, tu te tromperais également. Car le neuf s'il était seul ou avec n'importe quoi qui l'accompagne, il est neuf et ne sera pas dix du tout.

Si tu n'entends pas le "avec" comme attribut du neuf mais de ce à quoi le neuf est attribué, alors ce serait comme si tu disais : le dix est neuf et bien qu'il soit neuf, il est aussi un. Cela est aussi faux. Bien plus tout cela est un langage métaphorique fallacieux. Le dix est l'ensemble du neuf et d'un s'ils sont pris ensemble et qu'il résulte d'eux autre chose qu'eux.

Le nombre ne se définit pas mais se décrit.

La définition de chacun des nombres - si tu veux préciser (*al-taḥqīq*) - c'est de dire : c'est un nombre résultant du groupement de un et un et un, etc. en mentionnant toutes les unités. Cela parce que

(1) *ou bien* on définit le nombre sans mentionner la composition de ses éléments mais par une de ses propriétés ; ce serait une description de ce nombre non sa définition par sa substance ;

(2) *ou bien* on mentionne sa composition à partir de ses éléments. Si on mentionne sa composition à partir de deux nombres sans d'autres, par exemple, si l'on dit que le dix est composé de cinq et cinq, cela n'aurait pas plus de raison que de dire qu'il est composé de six et quatre. Et il n'y a pas de raison de rattacher l'identité du dix à l'une de ces compositions plutôt qu'à l'autre.

En effet, en tant qu'il est dix, il est une quiddité une ; or il est impossible qu'il y ait une quiddité une et que ce qui désigne une quiddité, en tant qu'elle est une, ait des définitions diverses.

S'il en est ainsi, sa définition n'est pas par celle-ci ni par celle-là mais par ce que nous avons dit. S'il en est ainsi, les compositions de cinq et cinq, de six et quatre, de trois et sept seraient nécessaires pour lui et le suivraient, et elles seraient des descriptions (*rasm*) pour lui ; toutefois la définition par le cinq exige la définition du cinq. Tout ceci se réduit aux unités. Et alors la signification de ton affirmation : le dix est [composé] de cinq et cinq est la même chose que ton affirmation de trois et sept, de huit et deux, je veux dire si tu considères les unités.

Mais si tu considères la forme du cinq et du cinq, du trois et du sept, chacune des deux considérations serait différente de l'autre. En effet, il n'y a pas pour une même essence des quiddités ayant des significations diverses mais ce sont ses concomitants et ses accidents qui se multiplient. C'est pourquoi l'éminent philosophe a dit : "Ne croyez pas que six, c'est trois et trois mais six fois un".

Mais la considération du nombre selon ses unités est difficile à imaginer et exprimer. Aussi recourt-on aux descriptions.

Livre troisième, chapitre sixième.

[...]

Ils ont rangé sous l'habitus et la forme : le bien, l'impair, l'un, la fin (*al-nihāya*), la droite, la lumière, le quiescent, le droit, le carré, la science et le masculin. Et dans le domaine de la privation les opposés de ceux-là : le mal, le pair, le multiple, l'infinitude, le gauche, l'obscurité, le mobile, le courbe, le rectangle, l'opinion, le féminin.

Quant à nous, il nous est difficile de considérer l'habitus comme l'unité et de considérer la multiplicité comme la privation.

D'abord parce que voilà que nous définissons l'unité par l'absence de division ou l'absence de partie en acte. Et nous prenons la division (*al-inqisām*) et la partition (*al-tajazzu'*) dans la définition de la multiplicité. Nous avons déjà mentionné ce qu'il en est. En second lieu parce que l'unité se trouve dans la multiplicité et la constitue. Comment la quiddité de l'habitus existerait-elle dans la privation de sorte que la privation soit composée d'habitus qui s'assemblent ? Et de même si l'habitus c'est la multiplicité comment l'habitus se composerait-il de ses privations ? On ne peut donc pas faire de l'opposition entre elles une opposition de la privation et de l'habitus.

Il n'y a pas d'opposition essentielle entre l'un et le multiple mais l'opposition suit leur essence.

Si tout cela te paraît clair, il convient que tu décides qu'il n'y a pas d'opposition entre elles dans leur essence, mais que leur opposition les suit, à savoir que l'unité en tant qu'elle est mesure s'oppose à la multiplicité en tant qu'elle est mesurée. Le fait que la chose est une et qu'elle est mesure n'est pas la même chose, mais il y a une différence entre les deux. Il peut advenir à l'unité qu'elle soit mesure comme il lui arrive d'être cause. De plus, il arrive aux choses, à cause de l'unité qui se trouve en elles, qu'elles soient des mesures. Mais l'un de toute chose et sa mesure sont du même genre. L'un dans les longueurs est une longueur, dans les largeurs une largeur, dans les corps un corps, dans les temps un temps, dans les mouvements un mouvement, dans les poids un poids, dans les mots un mot, dans les lettres une lettre. [...]

* * * * *

Annexe IV.

Simon STEVIN :
Le Premier Livre d'Arithmetique. Des Definitions.

LE PREMIER LIVRE D'ARITHMETIQUE
DES DEFINITIONS.

PREMIERE PARTIE DES DEFINITIONS ; DE L'ARITHME-*tique & des nombres Arithmetiques.*

PARCE que l'Arithmetique (ce qui est aussi commun aux autres arts) s'explique par motz comme signes de l'affection de l'ame, lesquels se denotent par escriptures ; Il nous faut premierement descripre la signification des propres vocables de ceste science. Car avant que l'on comprenne la matiere de la doctrine, i[l] convient entendre les motz par lesquels on l'explique. Nous ferons doncques nostre premier livre de leurs definitions, descripvant tousjours du commencement (en tant qu'il nous sera possible) ce qui consiste premier en la nature.

DEFINITION I.

A*Rithmetique est la science des nombres.*

DEFINITION II.

Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose.

EXPLICATION.

Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dict un : Et deux par lequel on la nomme deux : Et demi par lequel on l'appelle demi : Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois, &c.

QUE L'UNITE EST NOMBRE.

Or doncques pour venir à la matiere ; Il est notoire que l'on dict vulgairement ; que l'unité, ne soit point nombre, ains[85] seulement son principe, ou commencement, & tel en nombre comme le poinct en la ligne ; ce que nous nions & pouvons argumenter en ceste sorte :

La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
Unité est partie de multitude d'unitez,

85 "Mais".

Ergo[86] *l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez ;*
Mais la matiere de multitude d'unitez est nombre,
Doncques la matiere d'unité est nombre.

Et qui le nie, faict comme celui, qui nie qu'une piece de pain soit du pain. Nous pourrions aussi dire ainsi :

Si du nombre donné l'on ne soubstraict nul nombre, le nombre donné demeure,
Soit trois le nombre donné, & du mesme soubstra[y]ons un, qui n'est point nombre comme tu veux.
Doncques le nombre donné demeure, c'est à dire qu'il y restera encore trois, ce qui est absurd.

Nous pourrions aussi reciter plusieurs subtiles & sophistiques questions, qui nous ont esté proposées de bouche par les susdictes personnes, ensemble nostre refutation d'icelles, & mille absurdités en suiva[n]tes : mais les omettant (car il empliroit bien un particulier & grand volume) & à fin de ne perdre huile & labeur, venons aux causes mesmes, la cognoissance desquelles do[n]ne parfaicte intelligence. Il faut doncques sçavoir, que les Hommes j'adis voians, qu'il leur estoit mestier de parler & avoir intelligence de la quantité des choses, ils nommoient chasque chose simple, un ; & quand à la mesme estoit appliquée encore une autre, les appeloient ensemble deux, & quand la proposée simple chose estoit divisée en deux parties egales, ils nommoient chascune partie demi, &c.

Puis considerans que un, deux, trois, demi, tiers, &c. estoient noms propres, & convenables, pour l'explication de ladicte quantité, ils ont veu qu'il estoit necessaire de comprendre toutes ces especes soubs un genre (car telle est leur maniere de faire en tous autres semblables comme bled, orge, avoine, ils le nomment en genre Grain ; aigle, tourterelle, rosignol, en genre O[i]seau) lequel genre ils appelloient nombre ; Estant doncques par les principes ou causes mesmes chascun d'iceux nombre, sans doubte ils suivent leur opinion errante, qui en apres sans consideration des causes, ont exclu l'unité. Mais quelcun me pourra maintenant dire selon la commune sentence des Philosophes, que pour traicter ordonnéement de quelque quantité, la Nature tesmoigne qu'il faut commencer de son principe, comme il appert en la quantité grande, de laquelle le manifeste principe est le poinct, mais il y a ici question de la quantité qui se dict nombre, il y faut donc dire du principe ou commencement du nombre : Certes je ne le concede pas simplement, ains l'afferme par la suivante 3e definition, car veu que la communauté & similitude de grandeur & nombre, est si universelle qu'il resemble quasi identité, sans doubte le nombre aura quelque chose en soi, qui se refere au poinct. Mais que sera ce ? Ils disent l'unité : O heure infortunée en laquelle fut premierement produicte ceste definition du principe du nombre ! O cause de difficulté & d'obscurité de ce qui en la Nature est facile & clair ! O dommageable advis de ceux qui l'ont concedé, ce qui nous a faict tel avancement en l'Arithmetique, comme il eust esté à la Geometrie, s'ils eussent concedé que le poinct soit quelque partie de la ligne, car comme de cestui la n'eust suivi que absurd, ainsi (parce que du

86 "Donc".

faux ne procede que faux) de cestui ci. Mais quelle communauté (je vous supplie) y a il entre l'unité & le poinct ? certes nulle servant au propos ; car deux unitez (comme ils disent) font nombre, mais deux, voire mille poincts ne font nulle ligne : L'unité est divisible en parties (vrai est qu'ils le nient mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouvoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es Arithmetiques operations de plusieurs Autheurs, comme entre autres par l'absolute partition de l'unité de la 33e question du 4e livre & la 12e, 13, 14, 15. question du cincquiesme livre du Prince des Arithmeticiens Diophante) le poinct est indivisible : L'unité est partie du nombre, le poinct n'est pas partie de la ligne, & ainsi des autres : L'unité doncques n'est point telle en nombre comme le poinct en la ligne. Qu'estce donc qui lui correspond ? Je di que c'est 0 (qui se dict vulgairement Nul, & que nous nommons commencement en la suivante 3e definition) ce que ne tesmoignent pas seulement leurs parfaictes & generales communautez, mais aussi les irrefutables effects. Les communautez sont telles :

Comme le poinct est ajoinct de la ligne, & lui mesme pas ligne, ainsi est 0 ajoinct du nombre, & lui mesme pas nombre.

Comme le poinct ne se divise pas en parties, Ainsi le 0 ne se divise en parties.

Comme beaucoup de poincts, voire & qu'ils fussent de multitude infinie, ne font pas ligne ; ainsi beaucoup de 0 encore qu'ils fussent en multitude infinie ne font nul nombre.

Comme la ligne AB ne se peut augmenter par addition du poinct C, ainsi ne se peut le nombre D6, augmenter par l'addition de E 0, car ajoustant 0 à 6 ils ne font ensemble que 6.

DEFINITION III.

Les characteres par lesquels se denotent les nombres sont dix : à sçavoir 0 signifiant commencement de nombre, Et 1 un, Et 2 deux, Et 3 trois, Et 4 quatre, Et 5 cinc, Et 6 six, Et 7 sept, Et 8 huict, Et 9 neuf. [...]

DEFINITION VII.

Nombre entier est unité, ou composé multitude d'unitez.

DEFINITION VIII.

Nombres entre eux premiers sont ceux qui n'ont point de multitude d'unitez pour commune mesure.

EXPLICATION.

Comme 5 & 7 ou 10 & 13 & semblables : par ce qu'ils n'ont point de multitude d'unitez, qui leur soit commune mesure, s'appellent nombres entre eux premiers.

DEFINITION IX.

Nombres entre eux composez sont ceux qui ont multitude d'unitez pour commune mesure.

* * * * *

Annexe V.

Antoine ARNAULD & François NICOLE :
La Logique ou l'Art de Penser, IVème partie, chapitre V. [87]

Nous voyons encore que Simon Stevin, très-célebre Mathématicien du Prince d'Orange, ayant défini le nombre, *Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose*, il se met ensuite fort en colere contre ceux qui ne veulent pas que l'unité soit nombre, jusqu'à faire des exclamations de Rhétorique, comme s'il s'agissait d'une dispute fort solide. Il est vrai qu'il mêle dans ce discours une question de quelque importance, qui est de savoir si l'unité est au nombre comme le point est à la ligne. Mais c'est ce qu'il falloit distinguer pour ne pas brouiller deux choses très-différentes. Et ainsi traitant à part ces deux questions ; l'une si l'unité est nombre, l'autre si l'unité est au nombre ce que le point est à la ligne, il falloit dire sur la premiere que ce n'étoit qu'une dispute de mot, & que l'unité étoit nombre ou n'étoit pas nombre selon la définition qu'on voudroit donner au nombre. Qu'en le définissant comme Euclide, *Nombre est une multitude d'unités assemblées*, il étoit visible que l'unité n'étoit pas nombre ; mais que comme cette définition d'Euclide étoit arbitraire, & qu'il étoit permis d'en donner une autre au nom du nombre, on lui en pouvoit donner une comme est celle que Stevin apporte, selon laquelle l'unité est nombre. Par-là, la première question est vuidée, & on ne peut rien dire outre cela contre ceux à qui il ne plaît pas d'appeler l'unité nombre, sans une manifeste pétition de principe, comme on peut voir en examinant les prétendues démonstrations de Stevin. La premiere est :

La partie est de même nature que le tout :

Unité est partie d'une multitude d'unités :

Donc l'unité est de même nature qu'une multitude d'unités ; & par conséquent nombre.

Cet argument ne vaut rien du tout. Car quand la partie seroit toujours de même nature que le tout, il ne s'ensuivroit pas qu'elle dût toujours avoir le même nom que le tout, & au contraire il arrive très-souvent qu'elle n'a point le même nom. Un soldat est une partie d'une armée, & n'est point une armée : une chambre est une partie d'une maison, & n'est point une maison : un demi cercle n'est point un cercle : la partie d'un quarré n'est point un quarré. Cet argument prouve donc au plus que l'unité étant partie de la multitude des unités, a quelque chose de commun avec toute multitude d'unités, selon quoi on pourra dire qu'ils sont de même nature ; mais cela ne prouve pas qu'on soit obligé de donner le même nom de nombre à l'unité & à la multitude d'unités, puisqu'on peut, si l'on veut, garder le nom de nombre pour la multitude d'unités ; & ne donner à l'unité que son nom même d'unité, ou de partie du nombre.

87 Arnauld, A. et Nicole, F. : *La Logique ou l'Art de Penser*, éd. Vrin, Paris, 1981, pp. 313-315.

La seconde raison de Stevin ne vaut pas mieux :

Si du nombre donné l'on n'ôte aucun nombre, le nombre donné demeure.

Donc si l'unité n'étoit pas nombre, en ôtant un de trois, le nombre donné demeureroit ; ce qui est absurde.

Mais cette majeure est ridicule, & suppose ce qui est en question. Car Euclide niera que le nombre donné demeure, lorsqu'on n'en ôte aucun nombre ; puisqu'il suffit pour ne pas demeurer tel qu'il étoit qu'on en ôte ou un nombre, ou une partie du nombre, telle qu'est l'unité. Et si cet argument étoit bon, on prouveroit de la même maniere qu'en ôtant un demi cercle d'un cercle donné, le cercle donné doit demeurer, parce qu'on n'en a ôté aucun cercle.

Ainsi tous les arguments de Stevin prouvent au plus qu'on peut définir le nombre en sorte que le mot de nombre convienne à l'unité, parce que l'unité & la multitude d'unités ont assez de convenance pour être signifiés par un même nom ; mais ils ne prouvent nullement qu'on ne puisse pas aussi définir le nombre en restreignant ce mot à la multitude d'unités, afin de n'être pas obligé d'excepter l'unité toutes les fois qu'on explique des propriétés qui conviennent à tous les nombres hormis à l'unité.

Mais la seconde question, qui est de savoir si l'unité est aux autres nombres, comme le point est à la ligne, n'est point de même nature que la premiere ; & n'est point une dispute de mot, mais de chose. Car il est absolument faux que l'unité soit au nombre comme le point est à la ligne ; puisque l'unité ajoutée au nombre le fait plus grand, au lieu que le point ajouté à la ligne ne la fait point plus grande. L'unité est partie du nombre, & le point n'est pas partie de la ligne. L'unité ôtée du nombre, le nombre donné ne demeure point ; & le point ôté de la ligne, la ligne donnée demeure.

Le même Stevin est plein de semblables disputes sur les définitions des mots, comme quand il s'échauffe pour prouver que le nombre n'est point une quantité discrete : que la proportion des nombres est toujours arithmétique, & non géométrique : que toute racine de quelque nombre que ce soit est un nombre. Ce qui fait voir qu'il n'a point compris proprement ce que c'étoit qu'une définition de mot, & qu'il a pris les définitions des mots qui ne peuvent être contestées, pour les définitions des choses que l'on peut souvent contester avec raison.

*

* *

*

Nous arrêtons ici et maintenant cette histoire, cette étude partielle de la question et nous allons conclure sur deux remarques contemporaines, une intérieure à la philosophie des mathématiques et une intérieure au domaine pédagogique, qui mettent bien en évidence les visages problématiques du "Un".

Lautman, en dehors de toute interrogation métaphysique ou psychologique, pointe une dichotomie irrémédiable, dans son *Essai sur l'unité des mathématiques :*

> *"Lorsqu'on écrit* x 1 = x *(ou encore* 1 x = x*), le terme 1 joue un double rôle : il est l'élément unité du domaine des opérateurs qui agissent sur le domaine des* x *et il est de plus l'opérateur identique qui transforme en eux-mêmes les éléments* x *du domaine de base. Voici ce que signifient ces distinctions : supposons que le domaine d'opérateurs soit un anneau de nombres. L'élément unité 1 de cet anneau est tel que pour tout élément* a *de l'anneau, on ait* a 1 = a *et* 1 a = a. *Ceci est une définition interne qui n'envisage que la nature de l'élément unité au sein du domaine auquel il appartient. Si, de plus, cet élément-unité agissant sur l'élément* x *du domaine de base, transforme en lui-même cet élément, en sus du fait d'être élément unité de l'anneau d'opérateurs, il est opérateur identique, et ceci ne concerne plus tant sa nature propre que son action au dehors. Cette distinction de la nature propre de certains éléments et de l'action qu'ils exercent sur les éléments d'autres domaines, est pour nous essentielle. Nous verrons plus loin qu'elle permet de caractériser dans son ensemble la méthode de division en mathématiques."* [88]

*
* *

[88] Lautman, A. : *Essai sur l'unité des mathématiques*, coll. *10-18*, 1977, p. 298.