CONTROVERSES SUR LA LÉGITIMATION DES QUANTITÉS IMPOSSIBLES :

LE POINT DE VUE DE L'ÉCOLE ALGÉBRIQUE ANGLAISE.

Marie-José DURAND-RICHARD.

Depuis leur invention au XVIème siècle, ces entités algébriques dont le carré est un nombre négatif ont acquis droit de cité en mathématiques, un droit de cité soutenu par :

- les développements de l'algèbre, où elles permettent d'associer à toute équation un nombre de racines égal à son degré, ce qui n'est au départ qu'une conjecture,
- ceux de la trigonométrie, dont elles autorisent le traitement algébrique grâce au recours à l'exponentielle de $x\sqrt{-1}$, alors dépourvue de tout autre sens que leur intérêt opératoire,
- et l'extension du champ d'intervention du calcul infinitésimal, dont les méthodes procèdent de généralisations fondées sur l'analogie entre les calculs portant sur ce qu'on appelle aujourd'hui[1] la variable réelle x et les calculs faisant intervenir l'écriture $x\sqrt{-1}$, une analogie qui suppose la permanence des opérations dans une telle transition.

Mais au-delà de l'abondance des pratiques mathématiciennes qui les utilisent, la légitimité de telles quantités n'est pas acquise, comme en témoigne à l'évidence le vocabulaire les concernant[2]. Elle ne le sera qu'avec l'unification des problématiques analytique, algébrique et géométrique

1 Il faut se souvenir que l'ensemble des nombres réels ne s'est trouvé constitué comme tel que dans la seconde moitié du XIXème siècle, avec les travaux de Dedekind, Weierstrass et Cantor sur la construction des réels à partir des rationnels.

2 La diversité des dénominations qui servent à qualifier ces entités jusqu'au XIXème siècle traduit bien la difficulté épistémologique qu'elles introduisent quant au statut de ces entités mathématiques. Bombelli les considère comme "sophistiques" (1572), Girard comme "irrépéribles" (1629), et Descartes comme "imaginaires" (1637). C'est à Argand qu'on doit la dénomination de "module" (1806), à Gauss celle de "norme" et de "nombre complexe" (1828-31), à Cauchy celle de "l'argument" (1838), et à Weierstrass la notation $|z|$.

relatives non seulement à la définition de ces entités, mais aux opérations portant sur elles. Et elle débouchera sur l'axiomatisation de l'algèbre, qui marque l'aboutissement de son émancipation vis-à-vis des pratiques arithmétiques.

De telles inventions soulèvent la question fondamentale du rapport entre mathématiques et réalité. Les symboles, qu'ils soient ceux de la géométrie - les figures - de l'arithmétique ou de l'algèbre, représentent-ils des objets existants, ou des productions abstraites de la pensée ? Si tel est le cas, quels sont la source et le statut de ces productions abstraites ? Les hypothèses mathématiques peuvent-elles être autre chose que des évidences empruntées à la réalité ? Et qu'est-ce-que cette réalité ? S'agit-il d'une réalité concrète, visible, qui peut être appréhendée immédiatement, ou d'une réalité plus abstraite, faite non seulement d'objets, de phénomènes, mais de relations, et qui soit peut-être elle-même production humaine ? Relativement à toutes ces questions, le XIXème siècle fait basculer les mathématiques du côté de l'invention.

Au début du XIXème siècle, l'idée d'une représentation géométrique est pour ainsi dire "dans l'air", au sens où elle émerge synchroniquement de plusieurs horizons, désamorçant ainsi la recherche d'une identification de "l'inventeur". C. Wessel généralise la signification des opérations en admettant que la représentation analytique puisse exprimer la direction des segments (1797). C. F. Gauss (1777-1855) démontre le théorème fondamental de l'algèbre en utilisant la même idée (1799). Les mémoires d'Argand (1806) et Mourey (1828) à Paris, de Buée (1806) et Warren (1828) en Angleterre, fixent la correspondance entre les opérations sur ces quantités et les transformations géométriques du plan. Ceux de W. R. Hamilton (1805-1865) à Dublin, et de A.-L. Cauchy (1789-1853) à Paris explicitent les propriétés algébriques de ce nouveau champ opératoire. La synthèse de ces différentes approches conduira, sur le plan philosophique, à la pleine reconnaissance de l'imaginaire en mathématiques, et sur le plan mathématique, à une profonde transformation des notions d'espace et de fonction. Dans le plan, le segment, devenu vecteur, ne désignera plus seulement des figures statiques, il permettra d'opérer sur des mouvements. Avec l'élaboration de la théorie des fonctions de la variable complexe, l'espace de dimension 3, dans lequel les fonctions, et leurs courbes associées, seraient définies de manière univoque, ne peut plus servir de représentation naturelle. Algèbre et géométrie sont désormais traversées l'une et l'autre par des questions relatives à la nature du langage mathématique.

Cette abondance des entreprises de légitimation des imaginaires est d'autant plus remarquable que les avancées les plus audacieuses, les premières à offrir une présentation structurée de la représentation géométrique de ces entités, et surtout des opérations portant sur elles, proviennent d'horizons assez opaques les uns aux autres, et de mathématiciens dont l'histoire n'a pas retenu le nom. Caspar Wessel (1745-

1818), arpenteur à l'Académie Royale de Danemark, n'influencera en rien ses contemporains puisque son *Essai sur la représentation analytique de la direction* restera inconnu jusqu'à ce que Sophus Lie le publie en 1896. C'est au hasard d'un courrier retrouvé entre Legendre et le frère d'un autre mathématicien peu connu, J.-F. Français, que Jean-Robert Argand (1768-1822), comptable à Paris, doit l'identification de son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, qu'il avait lui-même publié en 1806. Adrien-Quentin Buée (1748-1826), C. V. Mourey et J. Warren ne sont pas plus connus. Peut-être ces praticiens des mathématiques, idéologiquement moins investis que des mathématiciens tels que Gauss ou Cauchy d'une conception philosophique sur la nature des mathématiques, pouvaient-ils avancer avec moins de réticence sur le terrain d'une invention bouleversant le statut de la discipline.

Le point de vue des mathématiciens de l'École Algébrique Anglaise sur l'ensemble de ces productions présente l'intérêt d'être à la fois excentré et provisoirement excentrique, eu égard à la façon dont il s'intègre dans leur conception de l'analyse algébrique[3]. George Peacock (1791-1858), le plus représentatif d'entre eux quant à la mutation du statut de l'algèbre qu'il introduit, s'il voit tout l'intérêt de la représentation géométrique de ces "*quantités impossibles*"[4], lui refuse tout rôle de légitimation, et la subordonne à la formalisation des propriétés des opérations de l'algèbre, en ce sens qu'il n'y voit qu'une interprétation possible. Ce point de vue est partie intégrante de sa conception générale de l'algèbre symbolique, qu'il expose au 3ème Congrès de la *British Association for the Advancement of Science*, réuni à Cambridge en 1833, et se présente comme solution aux problèmes épistémologiques posés par l'intervention des quantités impossibles dans les calculs.

*

* *

3 G. Hamon, A. Boyé et X. Lefort présentant à ce Colloque des ateliers sur des thèmes proches de celui-ci, j'ai délibérément choisi de privilégier le point de vue des algébristes anglais sur ces controverses.

4 Les mathématiciens anglais persistent à les considérer comme des "quantités impossibles", parce que dans un problème, lorsqu'elles ne s'éliminent pas dans l'expression du résultat, elles semblent manifester l'impossibilité d'obtenir des solutions réelles.

I. Les paradoxes issus du recours à ces écritures.

Dès lors que Bombelli utilise sans réticence la formule de Cardan :

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

fournissant des solutions réelles à l'équation $x^3=px+q$ à partir de l'addition de racines cubiques impossibles, et allant jusqu'à énoncer une règle des signes portant sur la multiplication de ces entités "sophistiques"[5], dès lors qu'Albert Girard accepte les solutions impossibles d'une équation algébrique par souci de généralité[6], ces racines interviennent systématiquement dans la résolution des équations, dont l'élaboration d'une théorie générale s'organise autour de la recherche de formules algébriques générales, analogues à celles qui ont été établies jusqu'au troisième degré. La conjecture de Girard conduit à rechercher la forme de ces "imaginaires", dont D'Alembert démontre en 1746 qu'ils peuvent tous s'écrire sous la forme $a+b\sqrt{-1}$.

La manipulation de telles écritures demeure cependant en contradiction avec la signification traditionnelle des notions de nombre et d'opération, qui restent définies soit arithmétiquement, soit par la correspondance avec des constructions géométriques qui, dans ce cas, deviennent impossibles. Le développement considérable du champ du calcul infinitésimal au XVIIIème siècle ajoute à ces difficultés conceptuelles de nombreux paradoxes issus de généralisations hâtives ou d'extensions incomplètes.

* * * * *

5 R. Bombelli énonce :
"1. Piu via piu di meno fa piu di meno
2. Meno via piu di meno fa meno di meno
3. Piu via meno di meno fa meno di meno
4. Meno via meno di meno fa piu di meno
5. Piu di meno via piu di meno fa meno
6. Piu di meno via meno di meno fa piu
7. Meno di meno via piu di meno fa piu
8. Meno di meno via meno di meno fa meno."

6 *"Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démonstre."* [...]
"Il faut se resouvenir d'observer tousjours cela : on pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il n'y a point d'autre solutions, & pour son utilité : l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables équations."

1. La question du logarithme des nombres négatifs

L'extension des méthodes d'intégration des fractions rationnelles conduit les mathématiciens du XVIIIème siècle à écrire un logarithme pour des nombres négatifs, notion qui n'est pas seulement difficile à conceptualiser en tant que telle, mais aussi parce qu'elle débouche sur une écriture dont le caractère multiforme échappe à la linéarité du champ numérique traditionnel et à la conception traditionnelle de la notion de fonction. La résolution des problèmes soulevés par ces écritures nouvelles passe par un très long travail de restructuration de ces concepts.

C'est en effet par analogie avec celle de $\int \frac{adz}{b^2 - z^2}$, obtenue soit par un changement de variable approprié, soit grâce à la décomposition de la fraction en éléments simples, que Jacques Bernoulli (1654-1705), Jean Bernoulli (1657-1758) et G. W. Leibniz (1646-1716) conçoivent l'intégration de $\int \frac{adz}{b^2 + z^2}$, en écrivant $z\sqrt{-1}$ à la place de z. Dans la mesure où la première intégration donne un logarithme, la seconde débouche sur l'écriture du logarithme d'un nombre imaginaire. Il en est de même plus généralement pour l'extension de la méthode de décomposition en éléments simples dans l'intégration de $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, où $ax^2 + bx + c$ est un trinôme quelconque, puisqu'elle conduit à des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{cx + d}$ où d au moins peut être imaginaire. Ces méthodes, qui s'appuient systématiquement sur la mise en correspondance des exemples traités, supposent implicitement la permanence des lois de l'algèbre.

Ce faisant, il est caractéristique que la controverse qui s'engage dès 1712, d'abord entre Jean Bernoulli et Leibniz, puis entre Jean Bernoulli et L. Euler (1707-1783), porte sur les logarithmes des nombres négatifs, et non sur ceux des imaginaires, encore plus étrangers au champ de l'analyse algébrique [Verley, 1981].

Bernoulli s'appuie notamment sur l'identité des différentielles de $l(-x)$ et de $l(x)$, et sur l'identité $l(-a)^2 = l(a)^2$, impliquant $l(-a) = l(a)$, et notamment $l(-1) = 0$, ainsi que sur certains arguments géométriques pour affirmer que les logarithmes des nombres négatifs existent et qu'ils sont les mêmes que ceux de leurs opposés. Pour Leibniz au contraire, puisque tous les nombres réels sont utilisés comme logarithmes pour les nombres positifs, ceux des nombres négatifs ne peuvent être que des imaginaires sur lesquels seul un travail formel est possible.

Les résultats obtenus par Euler dans les années 1740 renforcent la présence de telles expressions en trigonométrie, où leur usage apporte des simplifications considérables et débouche sur une conception fonctionnelle de ces rapports relatifs aux arcs et aux angles, dont Peacock attribue précisément la paternité à Euler [Peacock, 1833, p. 289]. À partir de développements en série, il trouve $y = 2.\cos x$ et $y = e^{\sqrt{-1}.x} + e^{-\sqrt{-1}.x}$ comme solutions de la même équation différentielle, et conclut à leur égalité. Écrivant alors que $\cos s = \dfrac{e^{\sqrt{-1}.s} + e^{-\sqrt{-1}.s}}{2}$ et $\sin s = \dfrac{e^{\sqrt{-1}.s} - e^{-\sqrt{-1}.s}}{2\sqrt{-1}}$, il retrouve la formule que R. Cotes (1682-1716) avait donnée en 1714, et publiée en 1722 :

$$x\sqrt{-1} = \mathrm{Log}\left(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x\right).$$

En 1749, Euler, dans un texte où il se livre à une savante mise en scène qui présente sa conception comme solution pour sauver la vérité contre de si grandes contradictions, établit que ces logarithmes ont une infinité de déterminations.

À l'argument de Leibniz selon lequel $\mathrm{d}(\log x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ n'est vrai que pour x positif, Euler répond que les règles et opérations de l'analyse n'ont rien à voir avec la nature des objets sur lesquels elles s'appliquent. À l'argument de Jean Bernoulli selon lequel $\log(-x) = \log x$, il rétorque que dans ce cas, les logarithmes diffèrent d'une constante, et que, puisque son affirmation revient à dire que $\log(-1) = 0$, il reste à prouver que $\log(-1) = 0$ est vrai. Ce qui, en tout état de cause, contredit d'autres résultats antérieurement obtenus, comme par exemple $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{l(-1)}{2\sqrt{-1}}$. Un tel raisonnement conduirait d'ailleurs à affirmer que de nombreux autres logarithmes sont nuls. En effet, $\left(a\sqrt{-1}\right)^4 = a^4$ entraîne $\log\left[\left(a\sqrt{-1}\right)^4\right] = \log a^4$ et $\log\left(a\sqrt{-1}\right) = \log a$ avec $\log\left(\sqrt{-1}.a\right) = \log a + \log\left(\sqrt{-1}\right)$ d'où $\log\left(\sqrt{-1}\right) = 0$.

Euler résoud le problème en écrivant, pour w infiniment petit et n infiniment grand tels que $(1+w)^n$ soit un nombre fini x : $x = (1+w)^n$, $\log(1+w) = w$, donc $y = \log x = \log(1+w)^n = nw$.

Alors $x^{\frac{1}{n}} = 1 + w$ et $y = \log x = nw = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ où $x^{\frac{1}{n}}$ a une infinité de valeurs imaginaires, donc $y = \log x$ aussi.

Euler écrit alors : $x = a + b\sqrt{-1} = c\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi\right)$.

D'où, en posant C = log c, et en utilisant les dévelopements en série de $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, et $e^{\sqrt{-1}.\varphi}$:

$$\log (a + b\sqrt{-1}) = C + \log (\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi) = C + \log (e^{\sqrt{-1}.(\varphi \pm 2\lambda\pi)}) = C + \sqrt{-1}(\varphi \pm 2\lambda\pi).$$

Ainsi, Euler affirme que, pour les nombres réels positifs, une seule valeur du logarithme est réelle, et les autres sont imaginaires ; mais, pour les nombres réels négatifs ou imaginaires, toutes les valeurs sont imaginaires.

Le raisonnement d'Euler est donc établi à partir de ceux de l'analyse, et de considérations sur une équation approchée. Il s'inscrit dans le cadre des manipulations formelles, si riches en inventions, auxquelles se livre couramment cet auteur, et dans lesquelles il met systématiquement en avant la cohérence des procédures algébriques.

Le travail d'Euler ne clôt pourtant pas le débat. D'Alembert (1717-1783) avancera notamment des arguments métaphysiques, analytiques et géométriques pour maintenir l'idée que $\log(-1) = 0$. Et lorsque Peacock écrit son *Report* en 1833, il se réfère toujours à cette querelle pour mettre en avant le caractère essentiel des arguments relatifs à la cohérence des procédures algébriques. Il écrit :

> *"La question de l'identité des logarithmes d'un même nombre, qu'il soit positif ou négatif, a été débattue par Leibnitz et Bernoulli, puis par Euler et D'Alembert, et a été fréquemment reprise ultérieurement. Les arguments en faveur de l'affirmation d'une telle proposition, qui étaient en grande partie fondés sur l'interprétation analytique des propriétés de l'hyperbole et de la courbe logarithmique, ne méritent pas une grande considération, d'autant qu'ils ne sont pas tirés d'une analyse du cours suivi dans l'obtention des expressions symboliques elles-mêmes et des principes d'interprétation que ces lois d'obtention autorisent."* [Peacock, 1833, p. 265][7].

Lui-même reprend à son compte, dans sa tentative pour rendre compte du caractère multiforme des formules qui font intervenir des logarithmes de quantités impossibles, ou des fonctions trigonométriques, la plupart des arguments d'Euler sur la nécessité d'une cohérence des procédures algébriques.

* * * * *

7 Traduction personnelle, pour tous les textes de Playfair et de Peacock.

2. Les difficultés conceptuelles

L'acceptation des quantités impossibles suppose que soient d'abord explicités, puis résolus, les problèmes philosophiques que posent l'introduction de ces nouvelles entités vis-à-vis de la signification traditionnellement attachée aux notions de nombre, de grandeur, de quantité, et vis-à-vis des statuts respectifs de l'algèbre et de la géométrie.

Alors que les expressions de Bombelli, *"piu di meno"*, *"meno di meno"*, faisaient travailler $+\sqrt{-}$ et $-\sqrt{-}$ comme des opérateurs, l'écriture $\sqrt{-1}$ réalise un transfert sémantique du problème au domaine numérique, où elle signifie un résultat impossible, en même temps qu'elle entre en contradiction avec d'autres résultats jusqu'ici bien établis, comme le théorème de Pythagore qui donnerait $a^2 - b^2$ pour l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la mesure des côtés serait donnée par a et $b\sqrt{-1}$.

L'intégration de telles écritures au champ numérique suppose plusieurs transformations essentielles :

* passer d'une conception absolue et une conception relative du nombre, qui conditionne déjà l'intégration des quantités négatives, pour lesquelles la relation d'ordre devient incompatible avec la conception arithmétique d'une moyenne proportionnelle[8],
* échapper à la représentation linéaire de la notion de nombre,
* généraliser la notion d'opération,
* établir une distinction conceptuelle entre "±" affectant un nombre et "±" signes d'opération, entre le fonctionnement opératoire de b et celui de $b\sqrt{-1}$, ainsi qu'entre distance et segment orienté.

Si le caractère multiforme de la fonction logarithme appliquée aux quantités impossibles est reconnu, il n'est pas intégré à l'ensemble des résultats de l'analyse concernant les fonctions qui s'appliquent dans ce domaine. Et bon nombre de contradictions demeurent, puisque l'exactitude des formules souffre de l'absence de spécification du domaine de validité des fonctions multiformes, c'est-à-dire de l'absence de spécification de leur valeur principale.

*

* *

---

8 Arnaud (1612-1694), théologien et mathématicien, proche de Pascal, se demandait comment une quantité plus petite peut être à la plus grande ce que la plus grande est à la plus petite : $1 : -1 :: -1 : 1$.

Wallis (1616-1703) acceptait les négatifs, mais pensait qu'ils sont plutôt supérieurs à l'infini, car :

si a>0, $\frac{a}{0}$ est infini ;

si b<0, moindre que rien, $\frac{a}{b}$ est alors encore plus grand [Flament, 1982].

II. Comment ces difficultés sont-elles envisagées outre-Manche ?

En Grande-Bretagne, la réflexion sur la nature des quantités impossibles s'inscrit dans un débat beaucoup plus large, centré sur la question de savoir si la connaissance est fondée sur la logique scolastique, dont une Université comme celle d'Oxford poursuit l'enseignement, ou sur les mathématiques que les *Principia* de Newton font apparaître comme les fondements de la Philosophie Naturelle, et autour desquelles s'articule le curriculum d'une Université comme celle de Cambridge. Auquel cas les nouvelles méthodes mathématiques, celles de l'algèbre, doivent acquérir une rigueur interne et une légitimité en tant que fondement des phénomènes dont elles servent à rendre compte.

* * * * *

1. Playfair réaffirme le fondement géométrique traditionnel des mathématiques (1778).

Le Révérend John Playfair (1748-1819) enseigne à l'Université d'Edinburgh, qui attire beaucoup plus d'étudiants que Cambridge et Oxford au tournant du siècle. Il y est successivement professeur de mathématiques de 1785 à 1805, puis professeur de philosophie naturelle de 1805 à 1819. Entre 1785 et 1802, il procède à l'analyse méticuleuse, voire à l'extension, de la *Théorie de la Terre* de Hutton. En géologie, il est l'auteur d'observations importantes, et de nomenclatures nouvelles. Il est également le chroniqueur de la *Mécanique Céleste* de Laplace dans *The Edinburgh Review* en 1808, où il se livre à une très sévère critique des Universités anglicanes anglaises, critique d'inspiration benthamiste qui lance le débat sur la question de leur réforme institutionnelle et pédagogique.

Dans son mémoire intitulé *"On the Arithmetic of Impossible Quantities"*, Playfair affirme que seule la géométrie constitue le cadre de référence légitime quant à la vérité des mathématiques. D'abord pour des raisons historiques : les propositions de la géométrie n'ont jamais été l'objet de controverse. Mais surtout en raison du fait que l'expression des idées dans le discours est systématiquement accompagné de la représentation visuelle des figures, représentation qui leur sert de référence, qui permet de contrôler la signification de chaque étape du raisonnement logique. Au contraire, au caractère artificiel des symboles algébriques reste attaché le soupçon de la contingence et de l'incertain.

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

> *"Les paradoxes qui ont été introduits en algèbre, et qui restent inconnus en géométrie, montrent une différence très remarquable dans la nature de ces sciences. Les propositions de géométrie n'ont jamais soulevé de controverse, ni nécessité le soutien de discussion métaphysique. En algèbre, au contraire, la doctrine des quantités négatives et ses conséquences ont souvent embarrassé l'analyste, et l'ont impliqué dans les discussions les plus embrouillées. La cause de cette différence, dans des sciences qui ont le même objet, doivent sans aucun doute être cherchées dans les différents modes qu'elles utilisent pour exprimer nos idées. En géométrie toute grandeur est représentée par une grandeur de même espèce ; les lignes par une ligne, et les angles par un angle. Le genre est toujours signifié par un cas individuel, et une idée générale par un des cas particuliers qu'elle contient. Par ce moyen est évitée toute contradiction, et le géomètre n'est jamais autorisé à raisonner sur des relations entre des choses qui n'existent pas, ou ne peuvent être exhibées. En algèbre par contre, toute grandeur étant représentée par un symbole artificiel, avec lequel elle n'a aucune ressemblance, est susceptible, dans certains cas, d'être négligée, tandis que le symbole peut devenir le seul objet d'attention. Il n'est peut-être pas observé à quel moment la connexion entre eux cesse d'exister, et l'analyste continue de raisonner sur les caractères après qu'il ne reste rien qu'ils soient susceptibles d'exprimer : si alors, à la fin, les conclusions qui ne portent que sur les caractères sont tranférées aux quantités elles-mêmes, obscurité et paradoxe en découlent nécessairement."* [Playfair, 1778, pp. 318-19].

Playfair est conscient du fait que la signification des propositions n'est pas seulement contenue dans la logique formelle qui régit leur articulation, il affirme qu'il existe une référence signifante pour ces propositions, référence signifiante qu'il attribue aux figures. Perdant le lien avec cette forme de représentation que constituent les figures, tout se passe comme si les caractères, les symboles artificiels perdaient le lien avec l'idée elle-même. Ce faisant, les opérations deviennent manuelles, mécaniques, parce que dépourvues de signification :

> *"Le nom de raisonnement ne peut être donné à un processus dans lequel aucune idée n'est introduite.... l'arithmétique des seuls caractères ne peut avoir aucune place dans une science qui est immédiatement en liaison intime avec les idées."*
>
> [Playfair, 1778, p. 321].

Et c'est bien là ce qui manque aux calculs pratiqués sur les expressions imaginaires : leur intervention est issue des calculs sur des quantités réelles, et témoigne de la perte de signification de ces calculs. Elle est la marque de leur impossibilité.

"Ces expressions, comme on le sait fort bien, doivent leur origine à une contradiction qui intervient dans cette combinaison des idées qu'elles sont censées représenter. Ainsi, qu'il soit requis de diviser la ligne donnée $AB = a$ *en* C, *de telle sorte* $AC \times CB$ *puisse être égal à un espace donné* b^2, *et si* $AC = x$, *alors* $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ *; valeur de x qui est imaginaire quand* b^2 *est plus grand que* $\frac{1}{4}a^2$ *; mais supposer que* b^2 *est plus grand que* $\frac{1}{4}a^2$, *c'est supposer que le rectangle* $AC \times CB$ *est plus grand que le carré de la moitié de la ligne* AB, *ce qui est impossible ...*

La fonction naturelle des expressions imaginaires est donc de montrer que les conditions, à partir desquelles une formule générale est dérivée [déduite], *deviennent inconsistantes les unes par rapport aux autres."* [Playfair, 1778, p. 319].

Dans ces conditions, la vérité des conclusions obtenues à partir de tels calculs, ne peut être garantie, puisque de telles écritures supposent l'impossibilité des hypothèses qui ont été posées pour les autoriser.

Ainsi dépourvues d'intelligibilité, ces expressions imaginaires devraient être dépourvues d'utilité. Or il n'en est rien. C'est pourquoi Playfair éprouve la nécessité de continuer à les prendre en compte. Mais il justifie la similitude des calculs qu'il est possible de mener aussi bien sur des quantités réelles que sur des expressions imaginaires, grâce à l'analogie entre les propriétés de certaines figures géométriques. Il développe l'exemple de l'intégration des équations différentielles $\dot{a} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1+z^2}}$ et $\dot{a} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-z^2}}$ qui peuvent être ramenées à une forme commune si, dans la seconde, on remplace z par $z\sqrt{-1}$. La première a pour solution $z = \text{sh}\, a$, dont l'expression en fonction de l'exponentielle ne fait pas intervenir d'expressions imaginaires, puisque $\text{sh}\, a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$. La seconde a pour solution $z = \sin a$, dont l'expression en fonction de l'exponentielle est une expression imaginaire, puisque $\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Playfair réfère cette analogie d'écriture à une analogie de nature géométrique, entre un arc d'hyperbole équilatère de longueur *a*, et un arc de cercle de même longueur, dont les propriétés se correspondent par l'affinité des courbes géométriques correspondantes[9]. Par conséquent, il n'attribue aux résultats obtenus grâce

9 Il existe au XVIIIème siècle plusieurs tentatives d'établir géométriquement les propriétés des quantités impossibles sur l'analogie entre équation du cercle et équation de l'hyperbole. Montucla fait de nombreuses références au fait que des arcs de cercle réels sont des arcs d'hyperbole imaginaires, et réciproquement. On peut d'ailleurs considérer l'équation unique $x^2 - y^2 = 1$ pour le cercle et l'hyperbole, où le cercle devient la partie imaginaire de l'hyperbole.

aux quantités impossibles qu'une valeur heuristique. Tout résultat vrai de ce type, pouvait, et devait, être prouvé indépendamment, c'est-à-dire géométriquement.

* * * * *

2. Les avancées du travail de Buée (1806).

Prêtre français émigré en Angleterre après la journée du 10 août 1792, A. Q. Buée (1748-1826) présente à la Royal Society en 1805 un mémoire publié dans les *Philosophical Transactions* de 1806. En dépit de certaines confusions dans l'expression, et de certaines interprétations hasardeuses des imaginaires, Buée développe des idées originales, qui déplacent les conceptions traditionnelles de l'algèbre, de la géométrie, et des opérations, et dont des mathématiciens aussi éminents que Cauchy, Peacock ou Hamilton reconnaîtront le caractère novateur.

Il donne aux signes "+" et "-" des significations non plus absolues, mais relatives, et applique le concept d'opération, tant à l'algèbre qu'à la géométrie, avec des significations distinctes. C'est à la confusion entre ces significations qu'il attribue l'émergence de l'impossible dans certains problèmes.

> *"Des signes + et -.*
> *§ 1. Ces signes ont des significations opposées.*
> *Considérés comme signes d'opérations arithmétiques, + et - sont les signes, l'un de l'*addition, *l'autre de la* soustraction.
> *Considérés comme signes d'*opérations géométriques, *ils indiquent des* directions opposées. *Si l'un, par exemple, signifie qu'une ligne doit être tirée de gauche à droite, l'autre signifie qu'elle doit être tirée de droite à gauche.*
>
> *§ 2. Remarque. Lorsqu'on décrit une ligne d'une longueur déterminée, dans une direction déterminée, on fait deux choses : 1°. on donne à cette ligne sa* longueur ; *2°. on lui donne sa* direction. *La première de ces opérations est purement* arithmétique. *La seconde est purement* géométrique. *Dans la première on fait abstraction de la longueur. Lors donc qu'on réunit ces deux opérations, on fait réellement une opération* arithmético-géométrique. *Ainsi, lorsque je parlerai d'*opérations géométriques, *je n'aurai en vue que les* directions *des lignes, abstraction faite de leurs longueurs.* [...]

§ 3. En général lorsque + et - ne signifient pas simplement, l'un l'addition, et l'autre la soustraction, pour savoir ce que - signifie devant une lettre, il faut savoir ce que signifierait + devant cette même lettre, et prendre pour - la signification opposée.

Si par exemple, +t signifie un temps passé, *-t signifie un* temps futur *égal. Si + p signifie une* propriété, *- p désigne une* dette *de même valeur, &c.* [...]

§ 5. Chacun des signes + et - a deux significations tout-à-fait différentes.
1°. Mis devant une quantité q, ils peuvent désigner, comme je l'ai dit, deux opérations arithmétiques *opposées dont cette quantité est le sujet.*
2°. Devant cette même quantité, ils peuvent désigner deux qualités *opposées ayant pour sujet les* unités *dont cette quantité est composée."*

Cette distinction entre les deux significations des signes + et -, tantôt signes d'opération, tantôt signes affectant un nombre, Buée l'établit en considérant les quantités comme des substantifs, et ces signes comme des qualités, jouant le rôle d'adjectifs. Il introduit là un vocabulaire nouveau, qui le conduit à envisager l'algèbre non plus comme une arithmétique universelle, mais comme une langue mathématique. À ce vocabulaire se trouve associée une notation spécifique.

"§ 9. Troisième remarque. Selon la seconde signification donnée (n°5) aux signes + et -, ils désignent deux qualités *opposées ayant pour sujets les* unités *dont une quantité est composée. Or comme une qualité ne peut être séparée de son sujet, les signes + et - ne peuvent être séparés de leurs unités. Dans la langue algébrique, ces unités sont des* substantifs *et les signes + et -, des* adjectifs. *Par conséquent $+q$ et $-q$ tiennent toujours lieu de $+1 . q$ et $-1 . q$, c'est-à-dire de l'unité $+1$ ou -1 (ayant une qualité quelconque) prise q fois. Cette expression (q fois) marque que q est pris pour un nombre abstrait. De même, si l et l' désignent des lignes, $+l \times l'$ et $-l \times l'$ tiennent lieu de $+1^2 . l \times l'$ et $-1^2 . l \times l'$, 1^2 étant une surface carrée et $l \times l'$ un nombre abstrait. Si l ou l' désignait une surface, alors $+l \times l'$ et $-l \times l'$ (qui auraient chacun trois dimensions, savoir, les deux dimensions de la surface et la dimension de la ligne) tiendraient lieu de $+1^2 \times ll'$ et $-1^2 \times ll'$.*

Il en serait de même de toute autre signification de l et de l' ; On voit par là toute l'étendue de la signification des adjectifs + et - unis à leur substantif 1."

C'est dans le cadre de cette algèbre-langue que Buée définit $\sqrt{-1}$ lui aussi comme un signe, mais comme un signe particulier, introduisant à une conception dynamique du plan, puisqu'il s'agit d'un opérateur de perpendicularité, un signe qui agit sur une grandeur pour lui faire faire un quart de tour.

"Du signe $\sqrt{-1}$.

§ 10. Je mets en titre , Du signe $\sqrt{-1}$*, et non,* De la quantité *ou* De l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ *; parce que $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif.*

Mais que veut dire ce signe ? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes + et -. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est ni additive, ni soustractive, ni égale à zéro. La qualité marquée par $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qu'indique +, ni à celle qui est désignée par -. Qu'est-elle donc ?

Pour le découvrir, supposons trois lignes égales AB, AC, AD, *qui partent toutes du point* A. *Si je désigne* AB *par* + 1, *la ligne* AC *sera* - 1, *et la ligne* AD, *qui est une moyenne proportionnelle entre* AB *et* AC, *sera nécessairement $\sqrt{-1^2}$, ou plus simplement $\sqrt{-1}$. Ainsi $\sqrt{-1}$ est le signe de la PERPENDICULARITÉ, dont la propriété caractéristique est,* que tous les points de la perpendiculaire sont également éloignés de points placés à égales distances, de part et d'autre de son pié. *Le signe $\sqrt{-1}$ exprime tout cela, et il est le seul qui l'exprime.*

Ce signe mis devant *a (a signifiant une ligne ou une surface)* veut donc dire : qu'il faut donner à *a* une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donnerait, si l'on avait simplement + *a* ou - *a*. [...]

§ 12. $\sqrt{-1}$ *n'est donc pas le signe d'une opération* arithmétique, *ni d'une opération* arithmético-géométrique *(n°2), mais d'une opération purement géométrique. C'est un signe de perpendicularité. C'est un signe* purement descriptif. *J'appelle signe* purement descriptif *un signe qui indique la* direction *d'une ligne, abstraction faite de sa* longueur. *Ainsi les mots* purement descriptif *ont la même signification que les mots* purement géométrique *(n°2)."* [...]

Qui plus est, $\sqrt{-1}$ n'est pas un signe artificiel, mais un *"signe naturel, puisqu'il est une conséquence nécessaire des signes + et - considérés comme signes de direction"*. Là où la question de la moyenne proportionnelle était une pierre d'achoppement, elle devient principe fondateur. Buée peut intégrer cette notion dans la mesure où il affirme l'indépendance entre les opérations portant sur les longueurs et l'opération de rotation d'un quart de tour ainsi définie.

Le travail de Buée est donc assez proche de la représentation géométrique des quantités impossibles, d'autant qu'il utilise, dans l'un de ses exemples, la notation exponentielle $e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$ pour représenter la diagonale du carré en grandeur et en direction. Mais il n'envisage pas la multiplication de ces lignes munies d'une direction, étape délibérément franchie par Argand.

Cauchy empruntera le terme d'adjectif [Graves, 1889, p. 317 ; Peacock, 1833, pp. 192-93] pour désigner + et - devant une quantité, et Hamilton [Graves, 1889, p. 467] reconnaîtra à Buée le mérite d'avoir affirmé pour la première fois le caractère formel de $\sqrt{-1}$. La notation de Buée "+ 1 . *q*" et "- 1 . *q*" inspirera directement Peacock pour concevoir ses signes d'affectation.

* * * * *

3. Une problématique achevée : celle d'Argand (1806) et de Français (1813-15).

C'est le *Rapport* de Peacock de 1833 qui fait connaître à ses contemporains, notamment à Hamilton, l'ensemble de tous ces travaux mineurs. Il y rapporte précisément l'historique des relations entre les travaux d'Argand et de Français.

> *"L'interprétation géométrique du signe $\sqrt{-1}$, appliqué à des symboles désignant des lignes, bien qu'elle ait été plus d'une fois suggérée par d'autres auteurs, a été pour la première fois formellement affirmée par M. Buée dans un article des* Philosophical Transactions *de 1806, qui développe de nombreuses perspectives originales, bien qu'imparfaites, sur la signification et l'application des signes algébriques. Au cours de la même année, M. Argand publiait à Paris un petit fascicule, intitulé* Essai sur une Manière de représenter les Quantités Imaginaires, dans les Constructions Géométriques, *apparemment écrit sans connaître l'article de M. Buée. Dans son mémoire, M. Argand parvient à cette proposition : Que la somme dirigée de deux lignes, estimée à la fois en grandeur et en direction, est la diagonale du parallélogramme construit sur ces lignes, considérées à la fois en grandeur et en direction : ce qui est en fait la conclusion capitale de cette théorie. Ce mémoire de M. Argand semble, cependant, avoir suscité très peu d'attention ;* [...]
>
> *Il semblerait que M. Argand ait consulté M. Legendre au sujet de son mémoire, et que ce grand analyste en ait fait une mention favorable dans une lettre qu'il écrivit au frère de M. J. F. Français, un mathématicien d'éminence non négligeable. C'est l'examen de cette lettre, à la mort de son frère, qui conduisit M. Français à s'intéresser au sujet, et à publier, dans le 4ème volume des* Annales des Mathématiques de Gergonne *de 1813, un très curieux mémoire, contenant des perspectives plus vastes, et plus complètement*

développées que celles de M. Argand, bien que généralement en accord avec elles dans leur caractère, et dans les conclusions qui en sont déduites. Cette publication conduisit à un second mémoire d'Argand sur la même théorie dans le même Journal, et à plusieurs observations à son sujet de la part de MM. Servois, Français, et Gergonne, qui contiennent quelques-unes des objections les plus importantes, ainsi que des réponses partielles, bien que très imparfaites. Il semble qu'aucune remarque ultérieure n'ait été faite sur ces recherches avant l'année 1828 où fut publiée le traité de Mr Warren sur la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives. "

[Peacock, 1833, pp. 228-29].

J. R. Argand, que les mathématiciens britanniques, autour de Peacock, de Morgan, Hamilton, reconnaissent comme le véritable inventeur d'une théorie complète de cette représentation géométrique des quantités impossibles, au sens où il est le premier auteur connu à produire la multiplication des "lignes dirigées" [Graves, 1889, p. 441], est un comptable parisien sans relation connue avec les cercles scientifiques de son époque. J. F. Français (1775-1833), ancien élève de l'École Polytechnique et de l'École du Génie, après avoir participé à plusieurs des campagnes napoléoniennes, est devenu professeur d'art militaire à l'École d'Application du Génie et de l'Artillerie de Metz. Son mémoire s'intitule *Nouveaux principes de Géométrie de position, et intérprétation géométrique des symboliques imaginaires*. Il y présente sa théorie de la représentation géométrique des imaginaires sous une forme extrêmement concise, sans aucune référence à un quelconque élément de réalité suggestive, en l'articulant sur la notion de progression : progression géométrique pour caractériser les rapports de grandeur, progression arithmétique pour caractériser les rapports de direction. Une notion dont l'ancrage historique sur les mathématiques grecques offre tous les gages d'une certitude incontestable.

L'indépendance opératoire des notions de grandeur et de direction y est d'emblée parfaitement claire, et les résultats se déroulent en une suite logique cohérente, à l'exception de deux résultats de taille, qui sont présentés comme des acquis :

$$+1 = e^{0\pi\sqrt{-1}} \text{ et } -1 = e^{\pm\pi\sqrt{-1}} \text{, d'une part,}$$

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1} \text{, d'autre part.}$$

"Il est si naturel de considérer à la fois, en Géométrie, la grandeur et la position des lignes que, dès qu'on a commencé à cultiver cette science, on a dû avoir besoin d'exprimer des rapports de grandeur et des rapports de position entre les différentes lignes composant une figure quelconque. J'ose dire qu'il est surprenant, d'après cela, que les premiers principes de la Géométrie de position *ne soient pas encore complètement établis. Cette assertion elle-même pourra, au premier*

abord, sembler exagérée et paradoxale ; mais j'espère que sa vérité sera mise hors de doute par les détails qui vont suivre.

NOTATION 1re. Nous représenterons ici la grandeur absolue d'une droite par une simple lettre, comme a, b, c, ..., x, y, z, ... ; et, pour indiquer à la fois la grandeur et la position d'une droite, nous affecterons la lettre destinée à désigner sa valeur absolue d'un indice exprimant l'angle que fait cette droite avec une droite fixe et indéfinie, prise arbitrairement, et qui pourra être considérée comme l'axe des abscisses positives. Ainsi, par exemple, a_α, b_β, ... , x_ξ , y_υ ... *représenteront des droites dont les grandeurs absolues sont a, b, ... , x, y, ... , et qui font respectivement avec l'axe des x positives des angles* α, β, ... , ξ, υ, ... *Cette distinction est nécessaire, afin de ne pas confondre une idée composée avec une idée simple, une grandeur donnée de position avec une grandeur absolue.*

DÉFINITION 1re. Nous appellerons rapport de grandeur *le rapport numérique entre les grandeurs de deux droites, et* rapport de position *l'inclinaison des deux droites l'une vers l'autre, ou l'angle qu'elles font entre elles. Pour comparer entre elles deux droites données à la fois de grandeur et de position, il faut considérer non-seulement le rapport que leurs grandeurs ont entre elles, mais encore comment ces droites sont placées l'une relativement à l'autre ; c'est ce qu'exprime notre rapport de position.*

DÉFINITION 2. Nous dirons que quatre droites sont en proportion de grandeur et de position, *lorsque entre les deux dernières il y aura même* rapport de grandeur *et même* rapport de position *qu'entre les deux premières. Ainsi il ne suffit pas, pour qu'il y ait proportion de grandeur et de position entre quatre droites, que le rapport dit* géométrique *entre le second antécédent et son conséquent soit le même que celui qui existe entre le premier antécédent et son conséquent ; il faut, en outre, que le rapport que nous avons appelé* rapport de position *soit aussi le même.*

Exemple. *Ainsi, pour avoir la proportion de grandeur et de position*

$$a_\alpha : b_\beta : : c_\gamma , d_\delta$$

il faut qu'on ait à la fois

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad et\ \beta - \alpha = \delta - \gamma .$$

COROLLAIRE 1er. Il suit de là que, dans une proportion de grandeur et de position, les grandeurs absolues des droites sont en proportion géométrique, *tandis que les angles que font ces mêmes droites avec l'axe des abscisses positives sont en* proportion arithmétique.

COROLLAIRE 2. Il s'ensuit encore que, dans deux figures semblables, disposées d'une manière quelconque sur un plan, les côtés homologues sont en proportion de grandeur et de position ; car les grandeurs absolues de ces côtés sont en proportion géométrique, et les angles qu'ils forment deux à deux sont égaux.

Remarque. *L'idée de proportionnalité, en Géométrie, est fondée sur la similitude des figures ; notre définition 2e repose donc sur un principe fondamental de la Géométrie ordinaire, et nous ne faisons qu'exprimer,* d'une manière explicite, *la double circonstance de la proportionnalité des côtés homologues et de l'égalité des angles compris entre ces côtés.*
[...]
NOTATION 2. Nous pouvons maintenant séparer, dans la notation, ce qui est relatif à la grandeur absolue d'une droite de ce qui est relatif à sa position. D'abord on a, par la première notation $a_0 = a$, $1_0 = 1$, et ensuite on a, par la définition 2e,

$$1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha ,$$

d'où l'on tire

$$a_\alpha = a \,.\, 1_\alpha .$$

Ainsi nous pouvons représenter, de grandeur et de position, la droite a_α par $a \,.\, 1_\alpha$, où a est la grandeur et 1_α le signe de position.

DÉFINITION 4. Nous appellerons droites positives *celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de gauche à droite, et* droites négatives *celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de droite à gauche. Nous appellerons de même* angles positifs *ceux qui sont comptés depuis l'axe des abscisses positives, en montant, et* angles négatifs *ceux qui sont comptés depuis le même axe, en descendant.* [...] *En combinant cette définition avec les précédentes, nous allons en déduire une manière simple, uniforme et féconde de représenter les lignes de grandeur et de position.*

COROLLAIRE 1er. Il suit de cette définition et de nos notations qu'on a

$$+1 = 1_0 \text{, et } -1 = 1_{\pm\pi}$$

et par conséquent

$$+a = a \times (+1) = a \,.\, 1_0 \text{ et } -a = a \times (-1) = a \,.\, 1_{\pm\pi} .$$

COROLLAIRE 2. On sait, d'un autre côté, que

$$+1 = e^{0\pi\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad -1 = e^{\pm\pi\sqrt{-1}} ,$$

on a donc aussi

$$+a = a \times (+1) = a.e^{0\pi\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad -a = a \times (-1) = a.e^{\pm\pi\sqrt{-1}} .$$

Remarque. *Il est vrai qu'on a plus généralement*

$$+1 = e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad -1 = e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}} ,$$

n étant un nombre entier quelconque ; mais, dans la Géométrie de position, on n'a besoin que d'un seul tour de circonférence pour déterminer la position d'une droite, ce qui suppose $n = 0$, et réduit ainsi les expressions de + 1 et de - 1 à celles du corollaire précédent."

La représentation géométrique des quantités impossibles découle logiquement de ces définitions préalables, en une suite de théorèmes dont la démonstration est immédiate, et qui coordonne l'ensemble des résultats acquis, notamment en trigonométrie.

"THÉORÈME 1^er^. *Les quantités imaginaires de la forme $\pm a\sqrt{-1}$ représentent, en Géométrie de position, des perpendiculaires à l'axe des abscisses, et réciproquement, les perpendiculaires à l'axe des abscisses sont des imaginaires de la même forme.* [...]

COROLLAIRE 1^er^. *Il suit de là que $\pm\sqrt{-1}$ est un signe de position qui est identique avec $1_{\pm\frac{\pi}{2}}$.*

COROLLAIRE 2. *De plus, puisqu'on a*

$$-1 = 1_{\pm\pi} = e^{\pm\pi\sqrt{-1}},$$

on a aussi

$$\pm\sqrt{-1} = 1_{\pm\frac{\pi}{2}} = e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

COROLLAIRE 3. *Les quantités dites* imaginaires *sont donc tout aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position, qui est perpendiculaire à celle de ces dernières.*

[...]

THÉORÈME II. *Le signe de position 1_α a pour valeur $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire que*

$$1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

[...]

COROLLAIRE 1er. *Si l'on prend les logarithmes naturels des deux membres de l'équation $1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, on aura*

$$\alpha\sqrt{-1} = \log(1_\alpha).$$

Ce qui fait voir qu'en Géométrie de position les arcs de cercle sont les logarithmes des rayons correspondants. Ces arcs de cercle sont, comme on le voit, affectés du signe de position $\sqrt{-1}$, ce qui parait très naturel, pusique leur direction est dans un sens perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Observation. *Le corollaire précédent contient le germe d'une théorie très simple et très lumineuse de logarithmes naturels et de leurs rapports avec la circonférence du cercle. Il explique l'expression* *énigmatique : "les arcs de cercle imaginaires sont des logarithmes". Il donne enfin un sens raisonnable et intelligible à l'équation symbolique et mystérieuse*

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = log(\sqrt{-1}) .$$

COROLLAIRE 2. Puisque, d'après la notation 2ᵉ, on a

$$a_\alpha = a\,.\,1_\alpha\,.$$

il suit du théorème précédent qu'on a aussi

$$a_\alpha = a.e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

COROLLAIRE 3. Comme on a

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = cos\,\alpha + sin\,\alpha.\sqrt{-1}\ ,$$

il s'ensuit que

$$a_\alpha = a\ cos\,\alpha + a\ sin\,\alpha.\sqrt{-1}\ ,$$

c'est-à-dire, pour exprimer une droite de grandeur et de position, il faut prendre la somme de ses projections sur deux axes de coordonnées rectangulaires." [Français, 1813-14].

Outre ces travaux, Peacock connaît tout aussi parfaitement ceux de Mourey et de de Warren, ainsi que les articles qui ont alimenté les débats sur la nature de ces entités, essentiellement dans les *Annales de Gergonne* et dans les *Philosophical Transactions*. C'est lui qui en notifie l'intérêt à ses contemporains. Mais paradoxalement, sa démarche ne s'inscrit pas du tout dans leur prolongement.

*
* *

III. Le rôle des signes d'affectation dans l'Algèbre Symbolique de Peacock.

Sa perspective est toute autre. Elle est partie prenante d'une conception générale de l'algèbre dont il revendique, sur les traces de R. Woodhouse (1773-1827), non seulement l'indépendance à l'égard des résultats de la géométrie, mais l'antériorité conceptuelle sur le plan théorique, pour ce qui concerne le caractère nécessaire de ses lois et de leurs conséquences.

* * * * *

1. La conception générale de l'Algèbre Symbolique de Peacock.

Pour dégager l'algèbre commune des difficultés logiques qui sont les siennes en raison de l'utilisation d'opérations inductivement ou analogiquement généralisées à partir de définitions arithmétiques, Peacock distingue trois niveaux dans l'appréhension de ces opérations :

- celui de l'arithmétique commune, science du calcul, qui comprend toutes les sciences qui sont réductibles à la mesure et au nombre, mais aussi science de suggestion pour l'algèbre,

- celui de l'algèbre arithmétique, qui correspond aux acquis de l'algèbre telle qu'elle s'est développée de Viète à Newton, mais dont Peacock envisage la restructuration logique à partir des définitions de l'arithmétique. Elle opère sur des symboles *"généraux dans leur forme"*, mais *"spécifiques dans leur valeur"*. En toute rigueur, quantités négatives et impossibles ne sauraient donc y intervenir comme résultats d'opération, pas plus que comme racines d'une équation.

- celui de l'algèbre symbolique, que Peacock qualifie de *"science du raisonnement général par le langage symbolique"*, de *"système de combinaisons de symboles"*, des symboles qui sont ici parfaitement généraux, tant dans leur forme que dans leur valeur. Les résultats, ou formes équivalentes, de cette algèbre symbolique n'apparaissent que comme conditions logiquement nécessaires des propriétés opératoires que sont ces lois de combinaisons, propriétés que Peacock présuppose *a priori* :

> *"Les opérations appelées addition et soustraction sont notées par les signes + et -. Elles sont inverses l'une de l'autre.*
>
> *Dans la concurrence des signes + et -, quelle que soit la manière dont ils sont utilisés, quand deux signes semblables interviennent ensemble, soit + et +, soit - et -, ils sont remplacés par le seul signe + ; et quand deux signes dissemblables interviennent ensemble, soit + et -, soit - et +, ils sont remplacés par le seul signe -.*
>
> *Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent."*
>
> *Les opérations appelées multiplication et division sont notées par les signes × et ÷, ou plus fréquemment par une position conventionnelle des quantités ou des symboles l'un par rapport à l'autre..* [...]
>
> *Les opérations de multiplication et de division sont inverses l'une de l'autre.*
>
> *Dans la concurrence des signes + et - dans la multiplication et la division, si deux signes interviennent ensemble, soit + et +, soit - et -, ils sont remplacés par le seul signe + ; et si deux signes dissemblables interviennent ensemble, soit + et -, soit - et +, ils sont remplacés par le seul signe -.*
>
> *Quand différentes opérations se succèdent, l'ordre dans lequel elles sont prises n'est pas indifférent."* [Peacock, 1833, pp. 196-97].

Ceci dit, Peacock ne développe pas pour autant une présentation axiomatique de l'algèbre symbolique, parce qu'il tente au contraire de concilier sa conviction de la pré-existence de cette structure logique avec une conception empiriste des procédés heuristiques : les structures algébriques ne sont pas création arbitraire de l'esprit humain, elles ne peuvent être que "suggérées" par la pratique arithmétique des opérations traditionnelles, qui reste la seule manière de les appréhender. De l'écriture $a - (b + c) = a - b - c$, il déduit, pour $b = a$, l'existence symbolique (et non arithmétique) de $-c$, puisque :

$$a - (a + c) = a - a - c = -c .$$

De la même façon, l'écriture de $\sqrt{a-(b+c)} = \sqrt{a-b-c}$ permet d'obtenir $\sqrt{-c}$ ou $\sqrt{(-1)c}$ pour b = a , [Peacock, 1833, p. 195].

L'existence logique de signes tels que - c ou $\sqrt{-1}$ apparaît donc comme conséquence nécessaire de l'absence de toute espèce de limitation imposée aux symboles sur lesquels travaillent ces lois de combinaisons. Elle est antérieure à toute idée d'une quelconque représentation géométrique qui, si elle a le pouvoir formidable d'amener à la fois la trigonométrie, la géométrie, et la mécanique, sous la domination de l'algèbre, ne saurait pourtant constituer qu'une interprétation parmi d'autres de telles expressions symboliques. De fait, Peacock distingue soigneusement entre la vérité nécessaire, qui ne concerne que la connexion logique entre les résultats et les lois opératoires dont ils découlent, et la vérité contingente, qui ne concerne que leur interprétation possible, voire leur signification. Cette distinction entre logique de la démonstration et interprétation des opérations s'inscrit dans le prolongement du travail de Buée qui, parlant d'algèbre-langue, envisageait déjà la résolution d'un problème comme une succession de traductions : traduction de la question en langage algébrique, traduction de l'énoncé algébrique en sa solution algébrique, traduction de cette solution algébrique en solution exécutive [Buée, 1806, p. 86]. C'est à la confusion entre ces deux niveaux de vérité que Peacock attribue les paradoxes alors véhiculés par les pratiques algébriques. C'est cette objection fondamentale qu'il fait à l'ensemble des travaux relatifs à la représentation géométrique des imaginaires.

> *"Cette objection à la voie suivie par Mr Warren peut s'appliquer plus ou moins à toutes les tentatives qui ont été faites pour laisser les interprétations antérieures de l'algèbre gouverner les conclusions symboliques ; car bien qu'il soit toujours possible d'attribuer une signification aux opérations algébriques, et de suivre les conséquences de cette signification dans ses conclusions nécessaires, cependant, si les lois de combinaison qui conduisent à de telles conclusions sont exprimées au moyen de signes et de symboles généraux, elles doivent cesser, dès qu'elles sont obtenues, d'être porteuses des nécessaires limitations de signification que les définitions leur imposent. C'est pour cette raison que nous devons considérer dans tous les cas les lois*

de combinaison des symboles généraux comme étant arbitraires et indépendantes, quelle que soit la manière dont elles ont été suggérées, et que nous devons faire en sorte que nos interprétations soient conformes à ces lois, et non que les lois soient conformes aux interprétations : semblablement, c'est pour la même raison que nos interprétations ne seront pas nécessaires, bien qu'elles soient gouvernées par des lois nécessaires, sauf là où elles dépendent les unes des autres. Ainsi, si a est pris pour représenter une ligne en grandeur, il n'est pas nécessaire que $(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)a$ *représente une ligne égale en longueur à celle que représente a, et faisant un angle* θ *avec la ligne représentée par a ; mais si* $(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)a$, peut, *conformément aux conditions symboliques, représenter une telle ligne, sans aucune restriction sur la valeur de* θ, *alors, si elle représente effectivement une telle ligne pour une valeur de* θ, *elle doit représenter une telle ligne pour toute valeur de* θ *contenue dans la formule. C'est seulement dans un tel sens qu'on peut dire des interprétations qu'elles ont une existence nécessaire et inévitable.*

C'est cette confusion entre vérité nécessaire et contingente qui a occasionné la plupart des difficultés attachées aux théories de l'interprétation des signes algébriques. On a supposé que la signification pouvait être transmise par une succession d'opérations seulement symboliques, et qu'il existerait en conclusion une connexion également nécessaire entre la définition primitive et l'interprétation finale, comme entre le résultat symbolique final et les lois qui le gouvernent. Tant que les définitions de la signification des symboles, et des opérations auxquelles on veut les soumettre, suffisent à déduire les résultats, ces résultats auront une interprétation nécessaire qui dépendra de la considération globale de toutes ces conditions ; mais à chaque fois qu'on doit effectuer une opération dans des circonstances qui ne lui permettent pas d'être strictement définie ou interprétée, la chaîne des connexions est rompue, et l'interprétation du résultat ne pourra plus être suivie à travers ses étapes successives. Ceci doit avoir lieu à chaque fois que sont introduites des quantités négatives ou autrement affectées, et que des opérations, sur ou avec ces quantités, doivent être effectuées, même si ces quantités et ces signes peuvent disparaître du résultat final." [Peacock, 1833, pp. 229-230].

De ce fait, Peacock ne cherche pas à unifier le vocabulaire, ou à intégrer les "imaginaires" à une quelconque réalité mathématique renouvelée. Dans le domaine de l'interprétation, la présence de $\sqrt{-1}$ dans un calcul reste pour lui, comme elle l'était pour Playfair, la marque d'une impossibilité, et elle le demeurera pour les successeurs de Peacock en Angleterre jusque dans les années 1850, de D. F. Gregory (1813-1844) à A. de Morgan (1806-1871).

"Une fois établi ce principe d'interprétation, nous devons considérer tout à la fois - 1, $\sqrt{-1}$ et $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, comme des signes d'impossibilité, dans ces cas où aucune signification cohérente ne peut être attribuée aux quantités qui en sont affectées, et uniquement dans ces cas : et on doit garder présent à l'esprit le fait que l'impossibilité qui peut ainsi être ou ne pas être indiquée, ne se réfère qu'à l'interprétation, et non au résultat symbolique, considéré comme une forme équivalente : doivent être considérés comme également possibles tous les résultats symboliques que les signes et les symboles de l'algèbre, admettant ou non une interprétation, sont capables d'exprimer. Mais de nombreuses espèces d'impossibilité se présenteront dès lors qu'on considérera les relations entre formules du point de vue de leur équivalence, ainsi que dans d'autres circonstances, qui devront être indiquées par des moyens tels qu'ils détruisent toute trace de l'équivalence qui existerait autrement.

Ainsi, la capacité que possèdent les signes d'affectation contenant $\sqrt{-1}$ d'admettre, dans certaines circonstances, des interprétations, géométriques ou autres, bien qu'elle ajoute grandement à notre pouvoir d'amener la géométrie et d'autres sciences sous la domination de l'algèbre, n'affecte en aucun cas la théorie générale de leur introduction ou de leur relation aux autres signes : car, en premier lieu, elle n'est pas une propriété essentielle ou nécessaire de ces signes ; et en second lieu, elle n'affecte en aucun cas la forme ou l'équivalence des résultats symboliques, même si elle affecte bien leur mode et leur domaine d'application. Par conséquent, ce serait une grave erreur de supposer que de telles propriétés accidentelles des quantités affectées par de tels signes constituent leur essence réelle, bien qu'une telle erreur ait été généralement faite par ceux qui ont proposé cette théorie de l'interprétation, et ait été utilisée comme fondement d'une accusation contre elles, de la part de ceux qui en ont critiqué et discuté la correction." [Peacock, 1833, p. 229].

* * * * *

2. Le caractère multiforme des signes d'affectation.

Mais, par ailleurs, soucieux de préserver l'unicité des vérités nécessaires, Peacock établit une distinction entre les symboles de l'algèbre symbolique, généraux dans leur forme comme dans leur valeur, et certains "signes" spécifiques, destinés à concentrer toutes les difficultés de l'analyse algébrique du moment, et à garantir l'équivalence symbolique, opératoire - que Peacock distingue de l'égalité numérique - entre ces résultats symboliques qu'il appelle des formes équivalentes :

- les signes de transition ne sont autres que le 0 et l'∞, définis par leurs seules propriétés opératoires ;

- les signes de discontinuité sont chargés d'assurer l'universalité requise lorsque l'une des deux formes de l'équivalence algébrique n'est valide que dans un intervalle donné. Ils font intervenir, par exemple, l'intégrale de Dirichlet ou des séries de Fourier ;

- et surtout, les signes d'affectation, qui ne sont autres que les "racines de l'unité", conçues pour un exposant n absolument général, que Peacock écrit sous la forme :

$$1^n \text{ et } \cos(2rn\pi)+\sqrt{-1}.\sin(2rn\pi)\ ,$$
$$(-1)^n \text{ et } \cos(2r+1)n\pi+\sqrt{-1}.\sin(2r+1)n\pi\ .$$

Il les présente en précisant les relations entre les opérations symboliques et leurs différentes intérprétations possibles :

> *"Je considérerai, en premier lieu, les* signes d'affectation, *qui sont ces quantités symboliques qui n'affectent pas la grandeur, bien qu'elles affectent la nature spécifique des quantités auxquelles elles sont incorporées.*
>
> *Les signes + et -, utilisés indépendamment, en font partie ; ou leurs équivalents + 1 et - 1, considérés comme facteurs symboliques ; ainsi que les signes* $(+1)^n$ *et* $(-1)^n$*, ou leurs équivalents symboliques* $\cos(2rn\pi)+\sqrt{-1}.\sin(2rn\pi)$ *et* $\cos(2r+1)n\pi+\sqrt{-1}\sin(2r+1)n\pi$ *, ou* $e^{2rn\pi\sqrt{-1}}$ *et* $e^{(2r+1)n\pi\sqrt{-1}}$.
>
> *Les affectations symbolisées par les signes + 1 et - 1 admettent une interprétation très générale, consistante avec les conditions symboliques qu'elles doivent satisfaire, comme c'est particulièrement le cas en géométrie : et il est devenu usuel, en raison de la grande facilité de telles interprétations, de considérer toutes les quantités ainsi affectées (quand elles ne sont pas abstraites) comme possibles, c'est-à-dire comme des quantités qui possèdent dans tous les cas des relations d'existence qui sont exprimables par ces signes. Quoi qu'il en soit, il faut garder à l'esprit le fait que de telles interprétations ne sont en aucun cas distinctes de celles d'autres signes algébriques, en dehors de la clarté et de l'extension qui sont symbolisées dans la nature des choses.*
>
> *Les autres signes d'affectation, différents de + 1 et - 1, qui sont inclus dans* $(1)^n$ *et* $(-1)^n$*, sont généralement exprimables par* $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$*, ou par* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ *, quand* α *et* β *peuvent prendre toute valeur entre 1 et - 1, zéro inclus, et où* $\alpha^2+\beta^2=1$*. À toutes ces quantités, abstraites ou concrètes, on a appliqué le terme commun*

impossible, en opposition à ces grandeurs possibles qui ne sont affectées que des signes + et -.

Les signes d'opération + et - peuvent être immédiatement interprétées par les termes addition *et* soustraction, *lorsqu'ils sont appliqués à des symboles non affectés désignant des grandeurs de même espèce : s'ils sont appliqués à des symboles affectés par le signe -, ces signes, et les termes utilisés pour les interpréter, deviennent convertibles. Ainsi $a + (- b) = a - b$, et $a - (- b) = a + b$; la* somme *et la* différence *algébriques de a et de - b, est équivalente à la différence et à la somme algébriques de a et b : mais s'ils sont appliqués à des lignes désignées par des symboles affectés par les signes $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'$, les résultats ne désignent plus la* somme *et la* différence *arithmétiques (ou géométriques) des lignes en question, mais la* grandeur *et la* position *des diagonales du parallélogramme construit sur elles, et sur les lignes qui leur sont égales et parallèles. Ainsi, si nous désignons la ligne* AB *par a, et la ligne* AC *qui lui est perpendiculaire par $b\sqrt{-1}$, et si nous complétons les parallélogrammes* ABDC *et* ABCE, *alors $a+b\sqrt{-1}$ désignera la diagonale* AD, *et $a-b\sqrt{-1}$ désignera l'autre diagonale* BD, *ou la ligne* AE *qui lui est égale et parallèle.*

On peut montrer facilement que

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right), \text{ (où } \theta=\frac{\cos^{-1}a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{)},$$

$$\text{et} \quad a-b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta\right).$$ [Peacock, 1833, p. 227].

Ces signes d'affectation sont destinés à "absorber" le caractère multiforme de certains résultats, comme la formule de Moivre, le logarithme d'une puissance quelconque, et certains développements en série, que Peacock écrit respectivement :

$$\left(\cos(\theta+2r\pi)+\sqrt{-1}.\sin(\theta+2r\pi)\right)^n=1^n\left(\cos n\theta+\sqrt{-1}.\sin n\theta\right)$$
$$=\cos n(\theta+2r\pi)+\sqrt{-1}.\sin n(\theta+2r\pi)$$

$$\log a^m=2rm\pi\sqrt{-1}+m.\log a\ ;$$

$$\log(-a)^m=(2r+1)m\pi\sqrt{-1}+m.\log a\ ;$$

$$2^m(\cos x)^m=\cos m(2r\pi+x)+m\cos(m-2)(2r\pi+x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)(2r\pi+x)$$
$$+\&c.+\sqrt{-1}\left(\sin m(2r\pi+x)+m\sin(m-2)(2r\pi+x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)(2r\pi+x)+\&c.\right)$$

ou plus précisément, si ρ est la valeur arithmétique du premier membre, autrement dit son module, si C_r est la série des cosinus et S_r la série des sinus,

$$\rho = \frac{C_r}{\cos 2mr\pi} = \frac{S_r}{\sin 2mr\pi}\text{, quand } \cos x \text{ est positif,}$$

et
$$\rho = \frac{C_r}{\cos m(2r+1)\pi} = \frac{S_r}{\sin m(2r+1)\pi}\text{, quand } \cos x \text{ est négatif.}$$

Peacock prend ici le soin de rappeler qu'Euler avait d'abord supposé vrai le développement :

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \&c.$$

et précise en ces termes le statut des signes d'affectation :

> *"L'identité des valeurs des puissances de 1, dont les exposants sont des nombres entiers généraux, ainsi que des sinus et des cosinus des angles qui diffèrent les uns des autres de multiples entiers de 360°, est une source fréquente d'erreur dans la généralisation des formes équivalentes, quand les symboles qui expriment ces exposants ou ces multiples ne sont plus entiers."* [...] [Peacock, 1833, p. 262].

> *"Les difficultés qui se présentent dans la théorie des logarithmes des nombres négatifs, comparées avec ceux des mêmes nombres ayant un signe positif, ont eu une origine très semblable. Si nous considérons les signes des quantités comme des facteurs de leur valeur arithmétique, et si nous les suivons dans tout le cours des changements qu'ils subissent, nous trouverons de nombreux exemples de résultats qui sont identiques quand ils sont considérés sous leurs formes équivalentes finales, mais qui ne sont pas identiques à tous égards à celles qui en ont été déduites."* [Peacock, 1833, p. 264].

> *"De nombreux autres exemples de semblables fonctions* ondulatoires, *exprimant les nombreuses relations entre les cosinus et les sinus des arcs multiples et les puissances d'arcs simples, ascendantes ou descendantes, ont été donnés par Lagrange*[10] *et d'autres auteurs comme étant générales, alors que soit elles sont fausses, soit elles sont formes dégénérées d'équations correctes et plus complètes. Poisson a signalé quelques-unes des inconsistances auxquelles conduisent certaines de ces équations imparfaites, et il a quelque peu suggéré leur cause et leur explication ; la discussion de tels cas est très vite devenue un sujet privilégié de réflexion pour beaucoup d'auteurs dans les Journaux mathématiques en France*[11] *et en Allemagne*[12] *; mais la*

---

10 *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tome ii, p. 212.
11 *Annales de Gergonne*, tomes xiv, xv, xvi, xvii.
12 *Journal de Crelle*, Berlin.

théorie complète et la correction de ces expressions a été donnée pour la première fois par M. Poinsot dans un admirable mémoire lu devant l'Académie des Sciences de Paris en 1823, et publié en 1825. Ces cas constituent un exemple des plus remarquables d'expressions extrêmement simples et élémentaires dans leur nature, qui ont échappé à l'examen et à l'analyse des plus grands analystes modernes, des formes qui ne sont pas seulement imparfaites, mais dans quelques cas, absolument fausses." [Peacock, 1833, p. 264].

Le travail de Peacock offre donc une conception formelle de l'algèbre. Il met au premier plan la structure des lois de combinaison que sont les opérations issues de l'arithmétique. Parce qu'il distingue systématiquement entre équivalence symbolique, opératoire, et égalité arithmétique, numérique, ainsi qu'entre connexion démonstrative des propositions et interprétation des résultats dans tel ou tel domaine d'application, il prépare le rapprochement entre mathématiques et logique. Et sa conception des quantités impossibles ne saurait être comprise qu'en l'intégrant à cette perspective.

Mais parce que Peacock réserve la démarche analytique aux méthodes de découverte, et attribue à cette algèbre symbolique une généralité maximale, une universalité absolue, il se trouve dans l'impossibilité de concevoir des structures algébriques locales, particulières, susceptibles d'échapper à la suggestion préalable de l'expérience arithmétique, il s'interdit la liberté d'inventer des concepts nouveaux. Il reviendra à ses successeurs, tels que De Morgan ou Hamilton, de renoncer à une universalité aussi drastique pour expliciter de nouvelles procédures opératoires, comme celles du calcul fonctionnel ou des quaternions, à partir d'une analyse plus locale et plus conciliatrice des relations entre symbolisme opératoire et conditions d'application, et d'un déplacement dans l'analyse des relations entre nécessaire et contingent.

*
* *

Conclusion.

Du point de vue de l'histoire des mathématiques, il n'est pas indifférent de constater qu'à la même époque, autour de 1830, dans des pays qui ne sont pas au cœur même de l'activité mathématique dominante, la nature du raisonnement et des concepts mathématiques se trouve réinterrogée :

- du côté de la géométrie synthétique, avec la production par Bolyai et du russe Lobatchevski de géométries "imaginaires" qui ne respectent pas le cinquième postulat, de géométries non contradictoires non conformes à l'intuition traditionnelle de l'espace à trois dimensions,
- du côté de l'analyse algébrique, avec la séparation qu'établit l'anglais Peacock entre des opérations fondées non plus sur des définitions rendant leurs résultats adéquats aux pratiques arithmétiques, et des procédures algébriques structurées par leurs seules lois de combinaisons.

Quelque excentrique que puisse donc paraître la réflexion de Peacock dans le concert des travaux sur la représentation géométrique des nombres imaginaires, elle ne s'inscrit pas moins dans cette réinterrogation fondamentale, qui va se déployer pendant tout le XIXème siècle, relative à la signification des concepts mathématiques, et plus précisément à la localisation de cette signification, marquée par une distantiation de plus en plus explicite entre référence conceptuelle et référence d'objet, et par des tensions toujours à l'œuvre entre les caractérisations syntaxique et sémantique de la démonstration.

*
* *

Bibliographie.

ARGAND, J. R.
- *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, Paris, réimpr. Blanchard, 1971 (1806).

BOMBELLI, R.
- *Algebra*, Bologne, 1572.

BUÉE, A. Q.
- *"Mémoire sur les quantités imaginaires"*, in *Phil. Trans.*, vol. 96, 1806, pp. 23-88.

CAUCHY, A. L.
- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, première partie : *"Analyse Algébrique"*, in *Oeuvres* (II, 3), Paris, 1821, pp. 1-331.

FLAMENT, D.
- *"Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires"*, Thèse pour le doctorat de 3ème cycle, EHESS, 1982.

FRANÇAIS, J. F.

- *"Nouveaux principes de géométrie de position et interpétation géométrique des symboles imaginaires"*, in *Annales de Mathématiques*, vol. IV, 1813-14, pp. 61-71.

GIRARD, A.

- *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam, 1629.

GRAVES, R.P.

- *Life of Sir W.R. Hamilton, including Selections from his Poems, Correspondance, and Miscellaneous Writings*, Dublin & London, 3 vol., 1882-1885-1889.

HAMILTON, W. R.,

- *The Mathematical Papers*, Cambridge, Camb. Univ. Press, *"Algebra"*, ed. H. Halberstam & R. E. Ingram, 1931-1940-1967.

MOUREY, C. V.

- *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédiée aux amis de l'évidence*, Paris, Bachelier, 1861 (1828).

PEACOCK, G.

- *"A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis"*, in *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science*, London, 1833, pp. 185-351.

PLAYFAIR, J.

- *"On the Arithmetic of Impossible Quantities"*, in *Phil. Trans.*, 1778, vol. 68, pp. 318-343

VERLEY, J.L.

- *"La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires"*, in *Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP*, n°41, Paris, 1981.

WARREN, J.

- *Treatise on the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities*, Cambridge, 1828.

WESSEL, C.

- *Essai sur la représentation analytique de la direction*, Copenhague, 1897.

*

* *

*