NOMBRE ET ASTRONOMIE : MESURE DE LA TERRE, MESURE DE L'UNIVERS DANS LA GRÈCE ANTIQUE.

Joëlle DELATTRE.

Comment mesurer le monde ? Le monde habité tout d'abord, celui que l'on parcourt à pied ou à cheval, par exemple en suivant les conquêtes d'Alexandre (à la fin du IVème siècle avant J.-C.), ou en navire, par exemple en accompagnant les marchands dans leurs lointaines expéditions, comme Pythéas de Marseille (au IVème siècle aussi) ; le monde céleste en même temps, dont l'étude et la connaissance, le jour comme la nuit, est tellement importante pour orienter et rythmer, dans l'espace et dans le temps, les activités humaines.

Cherchant à mesurer l'espace parcouru par rapport au temps mis à le parcourir, il fallait bien pour mesurer ce temps se référer aux mouvements cycliques des astres ; et les savants grecs de tâcher d'en comprendre et d'en maîtriser les principes, géométriquement et physiquement, jusqu'à réussir à les reproduire par des modèles mécaniques, comme les sphères d'Eudoxe, la sphéropée d'Archimède ou la sphère de Posidonius. Mais, cherchant à étudier ces mouvements réguliers et à en élucider les irrégularités apparentes, il fallait bien recourir d'abord à cette "machine intelligente", comme la définit M. Serres[1], élémentaire et paradoxale, dont la pointe, où qu'elle se situe sur la Terre[2], corresponde au centre de l'Univers ; autrement dit, pour mesurer avec précision les repères célestes, hauteur du pôle, inclinaison du lieu, et les repères temporels, nuit et jour les plus longs, équinoxes, ce *gnomon* niait dans son principe l'existence d'un espace terrestre mesurable, même si, nous allons le voir, il fut l'outil génial de la première mesure du grand cercle méridien de la Terre.

---

1 Cf. "*Gnomon*", in *Eléments d'histoire des sciences* (Paris 1988) ; cf. aussi *Les Origines de la géométrie* (Paris 1990).

2 Cf. Théon de Smyrne, III 4.

Mesurer le monde devient alors se placer au milieu du ciel (*mesouranein*) ou au méridien, **prendre place aux milieux du temps et de l'espace,** pour en même temps **en prendre théoriquement possession et les mieux comprendre**. Telle est la dimension, essentiellement démiurgique, de l'entreprise de mesure de la Terre et de l'Univers que Platon, en écrivant le *Timée,* a tout particulièrement su exprimer et mettre en évidence. En effet, l'exigence de comprendre et maîtriser l'enchaînement des mouvements cycliques des étoiles et des planètes n'excluait nullement, bien au contraire, de s'intéresser aussi à la taille et à la distance des corps célestes (qu'on les considérât ou non comme divins), aux dimensions des cercles ou des sphères dont on constituait l'Univers (qu'on les considérât réelles, d'un corps plus subtil que les autres éléments matériels, ou simplement hypothétiques ou imaginaires), et bien entendu à la taille de la Terre et aux dimensions du monde habité (objet de polémiques scientifiques, si nous en croyons le témoignage de Strabon[3], concernant les écarts entre les mesures de Pythéas, d'Ératosthène et celles d'Hipparque).

Et, si certains textes platoniciens, comme la fin du livre X de la *République* et les pages 36 à 40 du *Timée,* peuvent nous donner l'impression que l'explication mécanique ou la vision géométrique des mouvements célestes étaient pour la science grecque prioritaires, la relecture de l'*Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, écrite au IIème siècle de notre ère par Théon de Smyrne, nous oblige à tempérer ce jugement. Nous avons sélectionné pour cet atelier[4] quelques pages de la troisième partie du livre de Théon de Smyrne, concernant l'astronomie, et dont l'interprétation pose problème, soit du fait de lacunes ou de corruptions dans le texte, soit du fait de l'insuffisance de nos informations concernant certains auteurs utilisés par Théon (Archimède, Aristarque, Hipparque).

Néanmoins, il nous a semblé intéressant d'en proposer l'étude à partir de quelques problèmes mathématiques différents et complémentaires pour l'astronome de l'Antiquité grecque.

- Comment nombrer l'immensément grand, et faire comprendre, d'une part, le caractère négligeable du relief (montagnes et vallées) par rapport à la forme sphérique de toute la Terre, et d'autre part, le caractère négligeable de la taille de la Terre et de la distance de la pointe du cadran

---

3 Cf. Strabon : *Géographie*, éd. et trad. G. Aujac et alii (Paris 1969), cf. par ex. I 4, 2-6, pp. 167 à 171 ; voir aussi la note 7 p. 216, où est reconstitué le calcul d'Eratosthène : "*celui-ci avait fixé à 11/83^e^ du grand cercle, soit 33 400 stades pour une circonférence de 252 000 stades, la distance entre les deux tropiques, ou encore, ce qui revient au même la somme des deux distances équateur-tropique et cercle polaire-pôle ; cela met à 29 600 stades (63 000 - 33 400) la distance tropique (Syène)-cercle polaire (Thulè). Si de Syène au Borysthène il y a 18 100 stades (5 000 + 8 100 + 5 000), il reste 11 500 stades (29 600 - 18 100) pour la distance Borysthène-Thulè.*" C'est ainsi **par le calcul, et non par l'expérience** qu'Eratosthène détermine la place de Thulè, ce que Strabon n'a pas compris.

4 Atelier animé le 28 mai 1994 au 10ème Colloque inter-IREM de la commission Épistémologie et Histoire des mathématiques à Cherbourg : *La mémoire des nombres.*

solaire (*gnomon*) au centre de la Terre, par rapport à la taille de l'ensemble de l'Univers ?

- Comment établir un "ordre de grandeur" au moyen de rapports de distances et de grandeurs, permettant d'évaluer la taille et les distances comparées de la Lune, du Soleil et de la Terre - à supposer même que la Terre se meuve sur une sphère autour du Soleil, comme le pensait Aristarque - en s'appuyant sur la considération des phases de la Lune et sur celle des éclipses - cet "ordre de grandeur" ayant aussi comme intérêt de fournir au fabricant de sphéropées mécaniques les rapports de taille et de distance nécessaires à la construction de ses modèles réduits ?

- Enfin, comment chiffrer en même temps avec précision (*akribéia*) et exactitude les écarts, les anomalies, par rapport aux retours réguliers, c'est-à-dire surtout parvenir à faire se correspondre repères spatiaux et repères temporels - condition nécessaire, à l'évidence, d'une maîtrise à la fois mathématique et mécanique des mouvements astronomiques ?

*

* *

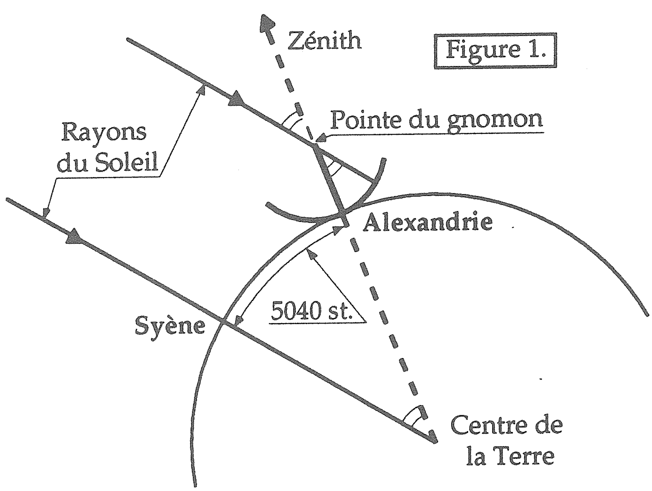
Concevoir et nombrer l'immensément grand.

Nous nous proposons d'abord d'étudier quelques extraits du chapitre 3 que Théon consacre à la démonstration de la sphéricité de la Terre et de la mer. Laissant de côté les démonstrations physique et mathématique inspirées d'Archimède et d'Aristote, et que nous avons étudiées ailleurs[5], intéressons-nous au traitement de l'objection du relief montagneux. Théon se réfère d'abord à la mesure du grand cercle méridien par Ératosthène comme à quelque chose d'évident et d'incontestable :

> *"Même l'altitude des montagnes ou la profondeur des vallées, on ne pourrait les tenir pour des causes suffisantes d'irrégularité en proportion de la grandeur du tout. En effet, la grandeur totale de la Terre, mesurée selon son grand cercle, Ératosthène montre qu'elle est très voisine de 252 mille stades ; or pour Archimède, la circonférence du cercle développée en ligne droite est triple du diamètre et agrandie encore d'environ 1/7^e^ de ce diamètre ; de sorte que tout le diamètre de la Terre sera très proche de 80 182 stades. Car le triple de ce diamètre agrandi d'1/7^e^, c'était le périmètre de 252 000 stades. La dénivellation des montagnes les plus hautes par rapport aux points les plus bas de la Terre* [mesurée] *à la verticale* <est par ailleurs de dix stades>, *selon ce qu'Ératosthène et Dicéarque disent avoir découvert."*

5 Cf. *"Mouvement et géométrie dans l'Antiquité"* pp. 6 et 7, in *La figure et l'espace*, Actes du colloque inter-IREM Histoire et Epistémologie des mathématiques (IREM de Lyon, 31 mai et 1e juin 1991), éd. IREM de Lyon, Lyon, 1993.

La hauteur de dix stades pour la plus haute montagne, même si on donne au stade sa valeur maximale (192 m) plutôt que sa valeur minimale (149 m), correspond à des montagnes d'un peu moins de 2 000 m, ce qui sous-estime beaucoup les plus hauts sommets des Alpes par exemple. Strabon, dans sa *Géographie*[6], précise aussi que le relief des montagnes est vraiment négligeable par rapport aux dimensions considérables du "sphéroïde" terrestre, dont il dit qu'il ne faut pas se le représenter ni comme un objet *"tourné au tour"* ni, comme fait le géomètre, par rapport au calcul (*pros logon*), mais *"plus grossièrement et par rapport à la sensation* (*pros aisthèsin*)". Nous nous sommes aussi demandé au passage si le choix du chiffre 10 n'était pas simplement destiné à faciliter le calcul des novices en mathématiques que Théon se propose d'initier dans son ouvrage, en même temps qu'il prétend les introduire à la lecture des oeuvres de Platon.



Rappelons rapidement en quoi a consisté la démarche adoptée par Ératosthène, savant bibliothécaire d'Alexandrie, correspondant et ami d'Archimède, au IIIème siècle avant J.-C., pour obtenir cette mesure à la fois approximative et très précise. Postulant en effet le parallélisme des rayons venant du Soleil et le fait que les villes de Syène et Alexandrie étaient, sur le même méridien (Fig. 1), distantes d'un peu plus de 5 000 stades, le savant aurait, semble-t-il, recouru à un "dispositif expérimental" remarquable : une sorte de *scaphè* géante, cadran solaire hémisphérique, dont la taille imposante de la pointe du gnomon devait faciliter le repérage et la mesure de l'ombre portée dans la *scaphè*. 1/50[e] de circonférence mesuré dans la

6 *Géographie*, I 5, 5, p. 83. G. Aujac ajoute en note la remarque suivante : *"Il est vraisemblable qu'Eratosthène ne rapportait pas toutes les hauteurs de montagnes au niveau de la mer"*, en se référant au témoignage de Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la syntaxe mathématique de Ptolémée* (trad. Halma, p. 63) : *"Eratosthène montre, par les dioptres qui servent à mesurer de loin, que la perpendiculaire tombant du sommet des plus hautes montagnes jusqu'à leur point le plus bas est de 10 stades."*

scaphè avec l'ombre du gnomon à Alexandrie, au moment même où les rayons solaires tombaient d'aplomb au fond des puits à Syène, c'est-à-dire le jour même du solstice, permettait de conclure, en appliquant le théorème géométrique selon lequel dans différents cercles, des angles égaux interceptent des arcs semblables, que l'arc de méridien séparant Syène et Alexandrie valait aussi 1/50e de la circonférence totale ; et donc de calculer la longueur totale du méridien, sans avoir besoin de le parcourir : 50 fois environ 5 040 stades égalent 252 000 stades.

Or Cléomède[7], auteur grec d'un écrit d'astronomie, au IIème siècle de notre ère, c'est-à-dire à peu près à la même époque que Théon, déclare quant à lui que la méthode géométrique d'Ératosthène lui paraît plus difficile et moins claire à réaliser que celle que Posidonius, le savant rhodien du Ier siècle avant J.-C., avait mise au point. Rappelons d'abord en quoi consistait cette dernière, toujours au témoignage de Cléomède. La méthode est ici beaucoup plus astronomique, au sens où l'on part d'une division du cercle zodiacal en 48 parties (chaque signe étant divisé en quatre) ; le méridien passant par les pôles est lui aussi divisé en 48 parties qui sont donc égales aux 48 divisions zodiacales, les deux cercles étant des grands cercles de la sphère céleste. Ensuite, on observe l'étoile Canope au même moment à Rhodes et à Alexandrie. Comme on la voit juste à l'horizon à Rhodes, et 1/4 de signe au dessus de l'horizon à Alexandrie, on inférera immédiatement que les deux villes sont distantes d'un quarante-huitième de division sur le même méridien, et donc que le méridien vaut 48 fois 5 000 stades, distance évaluée par mer entre les deux villes[8], soit 24 myriades de (240 000) stades.

Pourquoi Théon de Smyrne a-t-il préféré la mesure d'Ératosthène, alors qu'il devait bien connaître celle de Posidonius si nous en croyons l'exemple de l'étoile Canope (Fig. 2) qu'il prend justement pour argument en faveur de la sphéricité de la Terre ?[9] Pour deux raisons, nous semble-t-il, exprimées par l'auteur lui-même : il s'agit d'une mesure obtenue "théoriquement" et "instrumentalement" à la fois, beaucoup plus que celle de Posidonius, fondée davantage sur l'observation et l'inférence immédiates, autrement dit sur la pratique astronomique plutôt que sur la théorie mathématique. Voici ce qu'il écrit, prouvant par là que, dans l'opération de

---

7 *De motu circulari corporum caelestium* I 10, éd. H. Ziegler. Leipzig, 1891, pp. 92 à 100 ; *Théorie élémentaire*, trad. R. Goulet. Paris, 1980.

8 À propos de la distance assez contestée de Rhodes à Alexandrie, cf. Stabon, *Géographie* II 5, 24 p. 107 ; "*De Rhodes, la traversée sur Alexandrie par vent du nord est de quelque 4 000 stades ; le tour par la côte vaut le double. Mais au dire d'Eratosthène, ce sont là de simples conjectures de marins concernant la traversée, les uns fournissant ce chiffre, d'autres n'hésitant pas à parler de 5 000 stades ; quant à lui, au moyen des gnomons à ombre, il aurait trouvé une distance de 3 750 stades*" (ou, comme le précise G. Aujac dans la note p. 165, une différence de latitude de 5°20', très proche de la réalité). Quant à Posidonius, il aurait utilisé la mesure de 5 000 stades d'après Cléomède (I 10), mais la mesure de 3 750 stades d'après Strabon (II 2,2), ce qui réduit alors la circonférence trouvée à 180 000 stades !

9 Cf. Théon de Smyrne, III 2.

mesure, ce qui l'intéresse c'est le caractère à la fois instrumental et théorique de la démarche permettant d'obtenir le résultat :

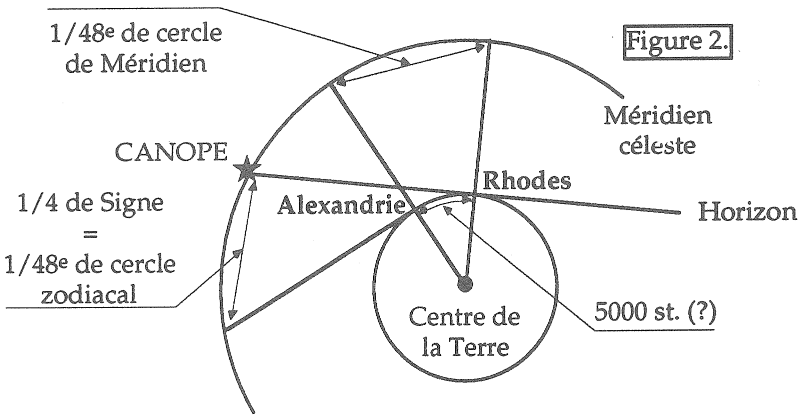


Figure 2.

"D'autre part, du point de vue ***instrumental*** *aussi, des mesures aussi grandes sont obtenues théoriquement au moyen des dioptres qui mesurent les grandeurs à partir d'intervalles. Donc la hauteur de la plus grande montagne est voisine de la 8 000ᵉ partie du diamètre total de la Terre. Si nous fabriquons alors une sphère d'un diamètre d'un pied, puisque l'intervalle d'un doigt est rempli par environ 12 diamètres de grains de mil en longueur (plus encore un demi), le diamètre d'un pied de la sphère construite se remplira en longueur de 200 diamètres de grains de mil ou même d'un peu moins. En effet, le pied compte 16 doigts ; le doigt se remplit de 12 diamètres de grains de mil ; et 12 fois 16 font 192. Donc la 40ᵉ partie du diamètre d'un grain de mil* <est plus grande que la 8 000ᵉ partie du diamètre d'un pied>, *car 40 fois 200 égalent 8 000. Mais la montagne la plus haute* [mesurée] *à la verticale, il a été montré qu'elle était à peu de chose près la 8 000ᵉ partie du diamètre de la Terre ; de sorte que la 40ᵉ partie du diamètre d'un grain de mil aura un rapport plus grand avec le diamètre d'un pied de la sphère, et donc aussi le volume (A) constitué à partir de la 40ᵉ partie du diamètre de grain de mil avec le volume (B) semblable constitué à partir du diamètre d'un pied, comparé avec le* [rapport du] *volume (C) constitué à partir de la* [hauteur] *verticale de dix stades avec le volume (D) semblable constitué à partir du diamètre de la Terre. Or le volume sphérique constitué à partir de la 40ᵉ partie d'un diamètre de grain de mil sera la 64 000ᵉ partie de tout le grain ; et la montagne sphérique [constituée] à partir de la verticale de dix stades vaut à peu près* [524] *stades cubiques ; et toute la Terre, calculée dans sa forme sphérique contient en stades cubiques* <à peu près $2{,}7.10^{14}$> [...] [x] ***myriades de nombres troisièmes,*** [y] *myriades de nombres deuxièmes,* [x'] *myriades de nombres premiers et encore* [y'] *myriades et 1/3 de stade."*

Ce très grand nombre a été reconstitué différemment par T. H. Martin, le premier éditeur de la partie astronomique de l'ouvrage de Théon de Smyrne, et par J. Dupuis, son premier traducteur en français. Bien consciente que **c'est moins le résultat exact que la démarche par laquelle on peut l'obtenir et l'exprimer qui est intéressante ici**, nous avons préféré laisser au nombre une forme indéterminée, étant donné que des lacunes malencontreuses dans les différents manuscrits ne semblent pas permettre de préciser ce nombre davantage[10].

Le recours au grain de mil, puis à la sphère construite sur un diamètre d'un pied retiendra d'abord notre attention. On peut, semble-t-il, formaliser ainsi le problème. Soient les cinq sphères suivantes :

- 1ère sphère, de diamètre $d_1 = 1/40^e$ de diamètre de grain de mil
  ce qui est un peu plus grand que $1/8\,000^e$ de pied (40 fois 200 = 8 000).

- 2ème sphère, de diamètre $d_2 = 1/200^e$ de pied ; grain de mil entier
  ce qui est environ 64 000 fois plus gros ($40^3 = 64\,000$).

- 3ème sphère, de diamètre $d_3 = 1$ pied, instrument de l'opération ;
  sachant qu'un doigt contient 12 grains 1/2 environ en largeur,
  et qu'un pied contient 16 doigts et donc environ 200 grains,
  elle sera donc 8 millions de fois plus grosse (200^3) qu'un grain de mil,
  et 512 milliards de fois plus grosse que la sphère 1.

- 4ème sphère, de diamètre $d_4 = 10$ stades (= 6 000 pieds),
  hauteur de la montagne la plus élevée,
  ce qui correspond à environ $1/8\,000^e$ du diamètre terrestre
  et donne un volume sphérique de $10^3 \,.\, (7\ 1/3)/14$, environ 524 st^3.

- 5ème sphère, de diamètre $d_5 = 80\,182$ stades, 8 000 fois plus grand que d_4
  (et 48 millions de fois plus grand que d_3) ; c'est la Terre
  dont le volume calculé avec la formule d'Archimède donnerait,
  selon les calculs de J. Dupuis, corrigeant ceux de H. T. Martin,
  270 025 043 508 297 et 11/21 stades cubiques, disons environ $2{,}7 \,.\, 10^{14}\ st^3$.

Sachant que la proportion de $1/8\,000^e$ est la même pour d_1 et d_3, et pour d_4 et d_5, on peut constater que la différence de taille des deux premières sphères (rapport entre les volumes : 64 000) est amplifié encore considérablement si l'on compare les sphères 1 et 3 (512 milliards) ; mais, entre les sphères 4 et 5, la différence de taille sera du même ordre de grandeur qu'entre les sphères 1 et 3, et c'est en cela que la sphère 3 est *"instrument de l'opération"*, car elle permet de concevoir **l'ordre de grandeur d'un différence de taille** (en termes de rapports) qu'il est autrement impossible de se représenter.

10 Dans un article *"Sur Théon de Smyrne"* des *Mémoires scientifiques*, t. II, éd. J.-L. Heiberg et H. G. Zeuthen (Toulouse, Paris 1912), P. Tannery conteste la reconstitution de T. H. Martin et la correction de J. Dupuis en faisant remarquer que les manuscrits témoignent d'une copie incomplète et fautive, transcrivant mal les symboles des myriades et oubliant de noter leurs nombres qui auraient figuré au dessus de la ligne (?) ; cf. en particulier, pp. 464-465.

Or, du fait de la forme non sphérique (mais plutôt conique) de la montagne, le rapport de son volume comparé à celui de la sphère entière de la Terre, est encore beaucoup plus négligeable que celui du volume de la sphère 1 en regard de celui de la sphère construite 3. Nous nous trouvons devant **une analogie complexe** où la sphère hypothétique (ou construite) d'un pied de diamètre joue ainsi le rôle d'instrument de conceptualisation, nous aidant à nous représenter, en comparant la fraction de grain de mil non seulement au grain de mil, 64 mille fois plus gros, mais à la sphère d'un pied, 512 milliards de fois plus grosse, et à comprendre plus facilement quel est le rapport de proportion de la montagne (plutôt conique) à la sphère entière de la Terre[11].

Une telle démarche évoque celle d'Archimède dans l'*Arénaire*, qui recourt, lui, à des grains de sable, des graines de pavot et aussi des sphères intermédiaires de diamètres hypothétiques, multiples de 10, destinées à faciliter les calculs. Voici ce qu'écrit le savant de Grande-Grèce, après avoir développé ses *"hypothèses au sujet des grandeurs et des distances"* (sur lesquelles nous allons revenir), et avoir présenté le système de numération qu'il a mis au point pour exprimer les très grands nombres et que nous voulons examiner maintenant :

> *"Comme nous avons supposé le diamètre de la graine de pavot non inférieur au 1/40^e d'un doigt, il est évident que la capacité de la sphère ayant un diamètre d'un doigt ne dépasse pas celle de 64 000 graines de pavot ; car ce nombre indique combien de fois elle est multiple de la sphère ayant pour diamètre 1/40^e de doigt ; il a été démontré en effet que* ***les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres*** [Euclide, XII, 18]. *Comme on a supposé, d'autre part, que le nombre de grains de sable contenus dans un volume égal à celui d'une graine de pavot ne dépasse pas 10 mille* [= une "myriade"], *il est évident que, si la sphère ayant un diamètre d'un doigt était remplie de sable, le nombre de grains ne dépasserait pas 64 mille myriades* [$= 6{,}4 \,.\, 10^8$]. *Or ce nombre représente six unités de nombres seconds augmentées de quatre mille myriades de premiers nombres ; il est donc inférieur à dix unités de nombres seconds. La sphère d'un diamètre de cent doigts est équivalente à cent myriades de sphères d'un diamètre d'un doigt,* ***puisque les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres****. Si on avait maintenant une sphère remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cents doigts, il est évident que le nombre de grains de sable y serait inférieur au produit des dix unités*[12] *de nombres seconds par cent myriades.* [...] *Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à*

---

11 Les sphères ayant entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres, comme l'explique Archimède dans *l'Arénaire*, ce rapport sera de mille à 515 mille milliards.

12 La traduction de C. Mugler donne ici *"myriades"*, mais le texte grec contient *"monadôn"*, et les calculs ne laissent aucun doute sur le fait qu'il s'agit d'*"unités de nombres deuxièmes"*, c'est-à-dire de centaines de millions.

une sphère d'un diamètre de cent doigts est inférieur à mille myriades de nombres seconds. De même, le volume de la sphère d'un diamètre d'une myriade de doigts est cent myriades de fois multiple du volume de la sphère d'un diamètre de cent doigts..."[13]

Le rapprochement de ce texte avec celui de Théon que nous venons de lire est troublant, ne serait-ce que par l'identité des chiffres 1/40^{e} et 64 000, même si, au lieu de grains de sable et de graines de pavot, Théon recourt au grain de mil. On peut supposer bien entendu qu'il s'agit de procédés de calcul, d'origine égyptienne, connus à Alexandrie et dont Archimède dans *l'Arénaire* fait l'usage original et génial qu'on peut constater. Mais la référence de Théon à Archimède étant explicite dans le contexte, il convient d'abord de reconnaître ici comment Théon l'adapte à son propre problème : **répondre à l'objection que constitue le relief des hautes montagnes contre la sphéricité de la Terre.** Ce n'est en effet pas du tout le propos d'Archimède, qui cherche, lui, à prouver que le volume de l'Univers est mesurable, aussi grand soit-il, c'est-à-dire que, si l'on conçoit *"le monde comme l'entendent la plupart des astronomes"*, le nombre de grains de sable qu'il contient sera alors égal à mille unités de nombres septièmes (= 10^{51}), tandis que si l'on veut exprimer le volume *"d'une sphère aussi grande qu'Aristarque suppose celle des étoiles fixes"*, ce nombre sera inférieur à mille myriades de nombres huitièmes (= 10^{63}) *"soixante-quatrième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle"*[14].

Le système de numération mis au point par Archimède consiste effectivement en une suite de ce qu'il propose d'appeler "octades" où chaque myriade de myriade devient unité de l'octade suivante ; voici, dans son système, le nombre maximum trouvé pour la sphère céleste :

huitièmes 10000000
septièmes 00000000
sixièmes 00000000
cinquièmes 00000000
quatrièmes 00000000
troisièmes 00000000
deuxièmes 00000000
nombres premiers 00000000.

Ensuite, si cela ne suffit pas, propose Archimède, *"il est possible d'aller encore plus loin"*[15], en construisant autant de "périodes" de huit nombres cent-millioniėmes (myriades de myriades = 10^{8}) qu'il faudra.

Sachant que Théon se réfère explicitement à Archimède, dans le même chapitre, pour garantir les formules de calcul de l'aire du cercle et du

13 Archimède, *L'Arénaire*, éd. et traduction de C. Mugler, pp. 149 et 150.
14 *Ibidem*, pp. 155 et 156.
15 *Ibidem*, p. 146.

volume de la sphère, empruntées certes à d'autres textes d'Archimède[16], on peut penser qu'il lui emprunte aussi le système de numération en myriades, ainsi que le raisonnement à la fois itératif et analogique, permettant par l'interposition de sphères intermédiaires, comme la sphère d'un pied, de se donner les moyens de compter combien de grains de sable, ou de stades cubiques, pourrait contenir toute la sphère de l'Univers. Voici en effet la fin du chapitre de Théon de Smyrne :

"À nouveau en effet, on démontre qu'une figure rectangulaire, quand elle est enveloppée par le diamètre et la circonférence d'un cercle développée selon une droite, est quadruple de la superficie d'un quart de la sphère, laquelle est égale à la superficie du cercle. C'est pourquoi on trouve que le carré obtenu à partir du diamètre a avec la superficie du cercle un rapport de 14 à 11. En effet, puisque la circonférence est triple du diamètre agrandie d'1/7e, [les cercles] dont le diamètre est 7 ont une circonférence de 22. Or le quart de la circonférence est [5 1/2] *; de sorte que aussi les [diamètres] dont le carré est 49 donnent un cercle de 38 1/2 et, quand on double ces diamètres à cause du demi qui dépasse, ces diamètres dont le carré est 98 donnent un cercle de 77. Or le rapport de ces nombres exprimés en nombres les plus petits et premiers entre eux est de 14 à 11 ; en effet, de ces deux nombres, la plus grande commune mesure est le nombre 7 qui mesure 98, 14 fois, et 77, 11 fois ; de sorte que* <le rapport> *du cube obtenu à partir du diamètre par rapport au cylindre construit sur le cercle* <est de 14 à 11 ; or le cylindre construit sur le cercle>, *Archimède démontre qu'il dépasse de la moitié la sphère qu'il contient ; **donc ce dont le cube obtenu à partir du diamètre du cercle est de 14, cela donne un cylindre de 11 et une sphère de 7 1/3** (c'est par ces procédés qu'on trouve, pour les solides sphériques de la Terre et de la montagne la plus grande, les nombres qui ont été donnés précédemment).*

Donc la montagne sphérique dont la [mesure] *verticale est de dix stades a avec la Terre un rapport bien moindre que la 64 000e partie du grain de mil avec la sphère obtenue à partir du diamètre d'un pied ; or, si la montagne est non pas sphérique, mais comme on la voit, elle a un rapport* [à la Terre] *encore beaucoup plus petit. Mais une telle partie du grain de mil ajoutée de l'extérieur à la sphère d'un pied ou retranchée en propre à celle-ci, et creusée, ne produira absolument aucune différence. Donc la plus haute montagne qui a une mesure verticale de dix stades n'a pas non plus pour effet d'empêcher que toute la surface de la terre et de la mer soit sphérique.*

Le tour de la Terre est de 25 myriades et 2 mille stades, son diamètre de 8 myriades cent quatre vingt deux, le carré du diamètre de 64 myriades de myriades, [x] *myriades et* [y] [stades carrés], *son cube 515 myriades de myriades de myriades, etc., et le quatorzième de ce cube 36 myriades de myriades de myriades, etc. ;* [lignes très lacunaires dans le manuscrit B, sans doute selon les éditeurs précédents :] <La sphère est 7

16 Sans doute *De la mesure du cercle* et *De la sphère et du cylindre*.

fois 1/3 ce quatorzième : soit environ 270 **myriades de nombres deuxièmes**, etc.>."

L'état lacunaire du texte de Théon de Smyrne ne permet certes pas d'être certain qu'il utilise le système de numération d'Archimède, mais la présomption est assez forte, et peut-être même dans la lacune de la fin de ce chapitre avions-nous non pas seulement une récapitulation des nombres déjà donnés et calculés pour la Terre[17], mais une allusion aux dimensions de la sphère céleste, encore tellement plus incomparables avec celles de la sphère terrestre que les dimensions de la montagne ne le sont avec celles de la Terre entière ; peut-être quelque chose du genre :

> "*Quant à la sphère du monde, si on suppose comme Archimède que son diamètre est inférieur à une longueur dix mille fois multiple du diamètre de la Terre*[18]*, ou bien, en tenant compte des hypothèses d'Aristarque, qu'il est encore dix mille fois multiple de celui-là*[19]*, on trouvera pour son solide sphérique* [...]."

Cela s'enchaînerait d'ailleurs beaucoup plus logiquement[20] avec le chapitre suivant où il s'agit de justifier que précisément la sphère de la Terre n'est qu'un simple point en considération de l'ensemble de l'Univers.

Toujours est-il que le rapprochement entre les textes d'Archimède et de Théon permet surtout de réfléchir au fait que pour les Grecs, en matière de conception et de mesure de l'immensément grand, il s'agissait moins de trouver un résultat exact que de **prouver qu'on pouvait faire le calcul et de proposer un procédé pour atteindre et exprimer le nombre correspondant**.

Or, précisément si nous revenons sur l'expression détaillée du nombre qu'on trouve chez Théon : "*270 myriades de nombres troisièmes, 250 myriades de nombres deuxièmes, etc.*", il pose un problème d'interprétation. En effet, en appliquant la formule du volume de la sphère selon Archimède, on obtient bien les résultats proposés dans la traduction : 524 stades cubiques pour la sphère d'un diamètre de 10 stades, et $2{,}7 \cdot 10^{14}$ stades cubiques pour la sphère terrestre. Mais si l'on confronte au système de numération d'Archimède que nous venons d'étudier le nombre $2{,}7 \cdot 10^{14}$, on obtient "270 myriades de nombres deuxièmes", et non pas "*de nombres troisièmes*". On pourrait alors supposer que la première lacune dans le texte est suffisamment longue pour que Théon s'y soit livré déjà au calcul des dimensions de la sphère céleste à partir de l'estimation d'Archimède selon

17 Comme l'ont supposé T. H. Martin, et après lui, E. Hiller et J. Dupuis.

18 Cf. *Arénaire*, éd. et trad. C. Mugler, p. 143.

19 *Ibidem*, p. 156.

20 Toutefois, aucun autre indice que cette meilleure suite logique entre les chapitres 3 et 4 ne permettant de soutenir cette suggestion de reconstitution, il semble préférable de nous en tenir au sage conseil de P. Tannery, *loc. cit.* p. 465 : "*Quant à la suite de la lacune que présentent les manuscrits en cet endroit, il vaudrait peut-être mieux la laisser apparente que d'essayer des restitutions insuffisamment justifiées...*".

laquelle le diamètre du monde serait inférieur à une longueur maximum dix mille fois multiple du diamètre de la Terre ; seulement on obtient alors le nombre de $2{,}7 . 10^{26}$, c'est-à-dire "270 unités de nombres quatrièmes"[21], et en tout cas pas *"270 myriades de nombres troisièmes"*, qui dans le système d'Archimède correspondrait en effet à $2{,}7 . 10^{22}$. Sans doute est-ce la raison pour laquelle le premier traducteur a proposé l'adaptation suivante : *"270 troisièmes myriades, etc."*[22].

En l'absence d'autre copie manuscrite plus complète du texte de Théon, nous ne pouvons décider si l'erreur est imputable aux copistes, ignorant le système numérique d'Archimède, ou à Théon lui-même. Pourquoi n'aurait-il pas préféré utiliser, pour ses lecteurs novices, le simple système des myriades et myriades de myriades, habituellement en usage chez les Grecs ? Il resterait à expliquer alors pourquoi Théon a recours néanmoins aux expressions archimédiennes de "nombres troisièmes", "nombres deuxièmes" et "nombres premiers". En effet, si nous reprenons le tableau élaboré plus haut à partir de l'Arénaire, voici comment s'écrivent les différentes possibilités que nous venons d'évoquer :

nombres huitièmes 10000000
10^{63} grains de sables que peut contenir la sphère de l'Univers, estimation d'Archimède, à partir de l'hypothèse d'Aristarque ;
nombres septièmes 00000000
10^{51} grains de sables contenus dans la sphère du monde, estimation d'Archimède, hypothèse traditionnelle ;
nombres sixièmes 00000000
nombres cinquièmes 00000000
nombres quatrièmes 00000000
$2{,}7.10^{26}$ stades cubiques, volume de la sphère étoilée ;
270 unités de nombres quatrièmes
nombres troisièmes 00000000
nombres deuxièmes 00000000
$2{,}7.10^{14}$ st. cub. vol. de la Terre ;
270 myriades de nombres deuxièmes
nombres premiers 00000000.

*
* *

21 Rappelons qu'Archimède calcule dans l'*Arénaire* que le nombre de grains de sable nécessaires pour remplir une sphère d'un diamètre de 100 myriades de myriades de stades serait inférieur à *"mille unités de nombres septièmes"* (10^{51}), et que ce nombre serait inférieur à *"mille myriades de nombres huitièmes"* (10^{63}) pour une sphère d'un diamètre dix mille fois multiple de celui de la précédente, et correspondant à la taille qu'Aristarque supposait pour la sphère des étoiles fixes (*Arénaire*, p. 156).
22 Cf. p. 209. Voir aussi P. Tannery, *art. cit.* p. 464 : *"En ne prenant que des tranches de 4 chiffres, Théon aurait dû dire :* triplôn mén muriadôn, diplôn dé, haplôn dé".

Établir un ordre de grandeur au moyen de rapports de distances, et faire se correspondre repères spatiaux et repères temporels.

Autant les essais d'évaluation en nombre de grains de sable d'Archimède, et les calculs en stades cubiques de Théon de Smyrne peuvent donner l'impression d'une pensée de l'espace cosmique comme d'un contenant limité qu'il est possible de remplir et dont on peut calculer la contenance, autant d'autre part, le procédé analogique utilisant des sphères intermédiaires nous paraît ouvrir sur **une pensée différente de l'espace**, comme quelque chose de difficile à mesurer de manière absolue - et les deux évaluations proposées par Archimède, selon la conception de la plupart des astronomes, puis selon celle d'Aristarque, nous semblent en fait exprimer aussi cette difficulté -, **un espace essentiellement appréhendable par comparaisons de rapports**.

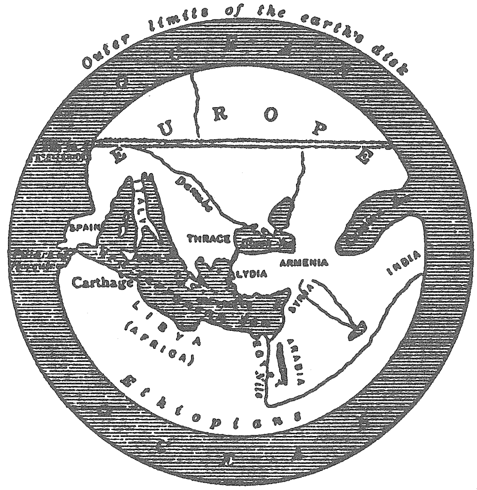
Rappelons ici le célèbre passage de l'*Arénaire* où Archimède constate une impossibilité dans la conception d'Aristarque[23], et sur lequel s'appuient les interprètes qui déclarent qu'Archimède est hostile à l'hypothèse héliocentrique.

> *"Par le terme de monde, la plupart des astronomes désignent la sphère ayant pour centre le centre de la Terre, et pour rayon la droite comprise entre le centre du Soleil et le centre de la Terre, car tu auras appris cela dans les démonstrations des astronomes. Aristarque de Samos, cependant, a publié quelques hypothèses desquelles se déduisent pour le monde des dimensions beaucoup plus grandes que celles que nous venons de dire. Il suppose en effet que les étoiles fixes et le Soleil restent immobiles, que la Terre tourne autour du Soleil sur une circonférence de cercle, le Soleil occupant le centre de cette trajectoire, et que la sphère des fixes qui s'étend autour du même centre que le Soleil, a une grandeur telle que le rapport du cercle, sur lequel il suppose que la Terre tourne, à la distance des étoiles fixes est comparable au rapport du centre de la sphère à sa surface.* ***Ceci certes est impossible de toute évidence****; car du moment que le centre de la sphère n'a aucune grandeur, il faut admettre qu'il n'a aucun rapport non plus à la surface de la sphère. Mais on peut croire que le raisonnement d'Aristarque est le suivant : puisque nous admettons que la Terre est en quelque sorte le centre du monde, le rapport de la Terre à ce que nous appelons communément le monde est égal au rapport de la sphère, contenant le cercle sur lequel il suppose que la Terre tourne, à la sphère des fixes."*

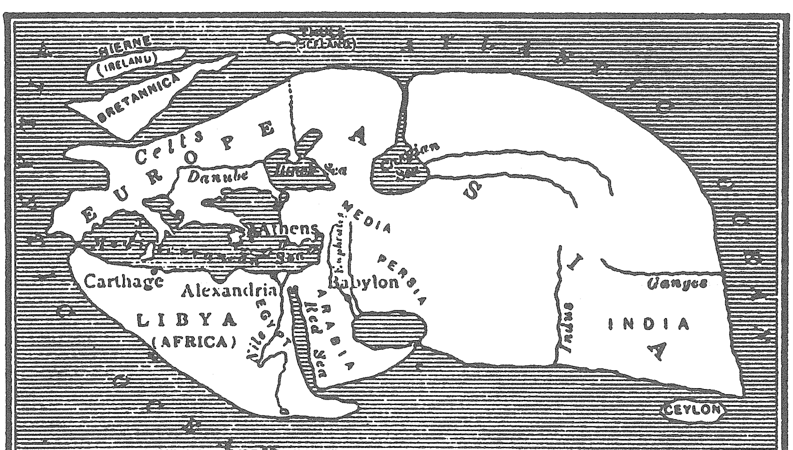
23 Cf. *Arénaire*, éd. et trad. C. Mugler, p. 135.

HORS-TEXTE.
Représentations du Monde dans l'Antiquité, selon J. H. Breasted[24]

a) du temps d'Hécate et de Pythagore (517 av. J.-C.).



b) du temps d'Ératosthène (IIIème siècle av. J.-C.).



---

24 D'après Breasted, J. H. : *Ancient Times*, Boston, 1916.

En réalité, l'impossibilité logique pointée par Archimède ne nous semble pas porter sur le fond de l'hypothèse ; sinon, comment expliquer qu'il en tienne sérieusement compte dans la suite du texte pour calculer la contenance maximum (10^{63} grains de sable) de la sphère des étoiles fixes ? Ce qu'il juge être impossible ici, en effet, c'est selon nous essentiellement que le centre de la sphère, point sans aucune grandeur, puisse avoir un rapport quelconque à la surface de la sphère ; et Archimède d'interpréter alors la pensée d'Aristarque de telle manière que la comparaison puisse se faire, entre d'une part le "sphéroïde" de la Terre et *"ce que nous appelons communément le monde"*, et d'autre part le grand cercle de la sphère dans laquelle le savant de Samos fait tourner la Terre autour du Soleil, et la sphère des étoiles fixes ; tout se passe comme si ce grand cercle *"apparaissait supposé par Aristarque égal"* (*ison*) au monde dont nous parlons communément. On retrouve ici, **l'usage instrumental de l'analogie** qui permet à Théon, en partant d'une infime fraction de grain de mil (64 mille fois plus petite qu'un grain entier) d'aider son lecteur à se représenter, au moyen de la sphère d'un pied (512 milliards de fois plus grosse), le rapport qu'il peut y avoir entre une montagne de dix stades et la Terre entière. Seulement, ce qui joue ici le rôle instrumental, c'est l'hypothèse même d'une sphère autour du Soleil sur laquelle tournerait la Terre. Celle-ci se trouve en effet, **moyen terme de l'analogie**, s'identifier à la fois à la sphère du monde de la connaissance commune, et la remettre radicalement en cause en projetant considérablement plus loin dans l'espace la sphère des étoiles fixes.

L'ouvrage dans lequel Aristarque développait son hypothèse héliocentrique est aujourd'hui perdu ; en revanche, quelques fragments d'un traité intitulé *Des distances et des grandeurs du Soleil et de la Lune* ont été conservés ; T. L. Heath les a édités, traduits et commentés, décernant à Aristarque le titre de *"Copernic de l'Antiquité"*[25], au grand dam de ceux qui croient pouvoir déceler, au travers d'un témoignage de Géminus, et de certaines lignes ambiguës du *Timée* de Platon que nous avons étudiées ailleurs[26], une première expression de l'hypothèse héliocentrique[27] chez Platon et Héraclide du Pont. Sans nous appesantir sur la méthode d'évaluation comparée des diamètres et des distances de la Lune et du Soleil par rapport à la Terre, il convient toutefois d'en rappeler rapidement le principe.

L'évaluation comparée des distances du Soleil et de la Lune repose sur l'hypothèse qu'ils ont le même diamètre angulaire, et que l'angle de visée

25 T.L. Heath, *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus* (Oxford 1913-1921, rééd. 1981) ; voir en particulier les pages 376 à 380 que cite I. Thomas, *Greek Mathematical Works* II pp. 7 à 14, et que nous allons étudier.

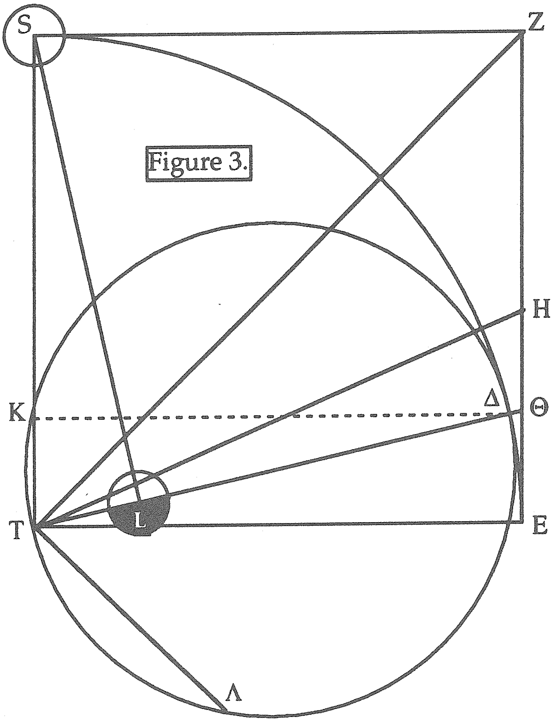
26 Cf. *Lectures du* Timée *de Platon*, à la mémoire de J.-P. Dumont, Publication du Groupe philosophie de la MAFPEN de Lille et de l'IREM de Lille, mai 1994.

27 Cf. G. Schiaparelli, *"I precursori di Copernico nell'antichita"*, in *Mem. del R. Instituto Lomb.*, vol. XII, pp. 342-381.

des deux astres errants à partir de la Terre, au moment du demi-quartier de lune, est d'environ 90 moins 3 degrés.

"La distance du Soleil à partir de la Terre est plus grande que 18 fois, et plus petite que 20 fois la distance de la Lune à la Terre".

La manière géométrique de démontrer **la Proposition 7 du traité d'Aristarque** *Des Grandeurs et des distances du Soleil et de la Lune.*nous paraît tout à fait remarquable, et mérite d'être suivie pas à pas sur la figure.



"A - C'est plus que 18 fois :

1) $ZTE = 90°/2$; $HTE = 90°/4$; $\Delta TE = 90°/30$ —> $HTE/\Delta TE = 15/2$,
(en effet, si $90° = 60$ parts, $HTE = 15$ parts et $\Delta TE = 2$ parts) ;

2) si $HE/E\Theta > HTE/\Delta TE$, alors $HE/E\Theta > 15/2$;
puisque $TE = EZ$ et $E = 90°$, alors $ZT^2 = 2.TE^2$;
mais, comme $ZT^2/TE^2 = ZH^2/HE^2$, alors $ZH^2 = 2.HE^2$;
or, $49 < 2\times 25$, si bien que $ZH^2/HE^2 > 49/25$, alors $ZH/HE > 7/5$;

3) alors, en composant, $ZE/EH > 12/5$, c'est-à-dire $ZE/EH > 36/15$;
mais on a montré que $HE/E\Theta > 15/2$,
alors également [di'isou] *$ZE/E\Theta > 36/2$ c'est-à-dire $> 18/1$;*

4) alors ZE est plus grand que 18 fois EΘ
et ZE = TE, alors TE est aussi plus grand que 18 fois EΘ ;
alors TH est plus grand que 18 fois ΘE ;
mais, TΘ/ΘE = ST/TL par similitude des triangles ;

donc ST est plus grand que 18 fois TL,
et ST est la distance Terre-Soleil, et TL la distance Terre-Lune.

B - Or, c'est moins que 20 fois :

soit ΔK//ET et ΔKT le cercle circonscrit au triangle ΔKT,
ΔT est diamètre, car K = 90° ;
soit TΛ le côté de l'hexagone ajusté sur le cercle ;
puisque ΔTE = 1/30e de 90°, alors TΔK aussi = 1/30e de 90° ;
alors l'arc TK est 1/60e de tout le cercle ;

mais TΛ est 1/6e de tout le cercle (10 fois plus),
et arc TΛ/arc TK > TΛ/TK,
alors TΛ < 10 fois TK ;
et TΔ = 2.TΛ, alors TΔ < 20 fois TK ;
mais, TΔ/TK = ST/TL, alors ST < 20 fois TL ;

***donc ST, la distance Soleil-Terre, est moins de 20 fois TL, la distance Lune-Terre,** et on a montré qu'elle était plus de 18 fois."*

La valeur "19" est donc tout simplement le résultat de cette double démonstration ; elle est la conséquence rigoureuse d'un encadrement géométrique s'appuyant sur une visée angulaire, laquelle est un peu surestimée : l'angle de visée de la Terre à la demi-lune est en réalité beaucoup plus proche de 90°, et Aristarque l'aurait d'ailleurs lui-même ensuite évalué à (1/2)°.

Quant à la comparaison des rayons de la Lune, de la Terre et du Soleil, elle s'appuie sur la considération des éclipses de Lune, et sur le temps mis par la Lune pour traverser le cône d'ombre de la Terre, ce qui fait apparaître que le diamètre du cercle d'ombre, à distance lunaire, est environ deux fois (en fait c'est plutôt trois fois) plus large que celui du disque lunaire. Par le jeu des similitudes de triangles et de comparaisons de segments, on aboutit au résultat que la distance de la Lune à la Terre est à la distance de la Terre au Soleil, dans le même rapport qu'un rayon terrestre diminué de deux rayons de Lune pris 19 fois par rapport à un rayon du cercle solaire diminué d'un rayon terrestre, autrement dit que :

$R_S = R_T + 19 \,.\, (R_T - 2R_L)$, - où l'on saisit clairement **comment l'ordre de grandeur l'emporte complètement par rapport à l'idée d'une mesure exacte**, bien que par ailleurs la démarche utilisée soit tout à fait rigoureuse et convaincante[28].

28 Ainsi Archimède dans l'*Arénaire* multiplie-t-il par dix les évaluations connues des dimensions de la Terre sur lesquelles il va fonder son raisonnement afin de "*mettre sa démonstration à l'abri de toute contestation*" : trois cents myriades de stades pour le périmètre de la Terre au lieu des 30 myriades mesurées par ses prédecesseurs (*loc. cit.* p. 136).

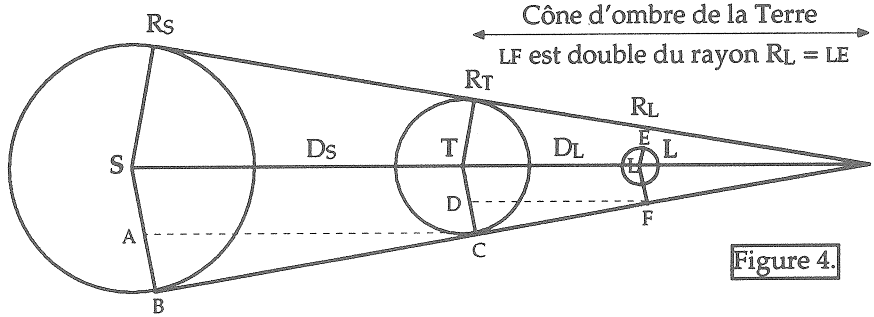


Figure 4.

DC/DF = BA/AC où BA = R_S - R_T (rayon du Soleil moins rayon terrestre), où AC = ST (distance Soleil-Terre D_S), DC = R_T - $2.R_L$ (rayon de la Terre moins deux rayons de Lune évalués dans le cône d'ombre), DF = TL (distance Terre-Lune D_L) ;

ST/TL ≈ 19, le rayon du Soleil et le rayon de la Terre ont, écrit Aristarque, *"un rapport compris entre 19/3 et 43/6"* (ou encore compris entre 6 + 1/3 et 7 + 1/6) ; celui de la Terre et celui de la Lune ont *"un rapport compris entre 108/43 et 60/19"* (ou encore entre 2 + 22/43 et 3 + 3/19).

Or, Théon, se référant à Hipparque, propose à la fin de son traité[29] les nombres suivants :

> *"Le Soleil fait à peu près 1 880 fois la Terre, et la Terre environ 27 fois la Lune"*,

et il ajoute que l'ombre de la Terre, de forme conique, tombe selon la droite des centres (le "diamètre commun") du Soleil et de la Terre, de sorte que *"la grandeur de la Lune à son maximum est inférieure à l'épaisseur de l'ombre portée par la Terre"*. Et, nous dit-il, c'est ***"grâce à la solution touchant aux grandeurs et aux distances du Soleil et de la Lune"*** qu'Hipparque montre cela. Cette expression qui reprend exactement le libellé du titre du traité d'Aristarque n'est sûrement pas utilisée innocemment par Théon, d'autant qu'on en trouve deux autres occurrences, "symétriques" en quelque sorte, dans son ouvrage.

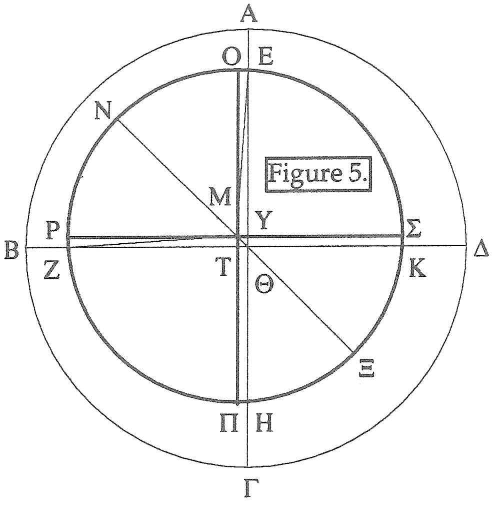
Dans le premier passage, il recourt à l'expression pour expliquer comment l'hypothèse de la trajectoire excentrique du Soleil permet de *"sauver les phénomènes"*[30]. Dans le second passage, l'expression est employée dans la même intention, à propos de l'hypothèse de la trajectoire selon l'épicycle[31]. Voici en quoi consiste chacun des contextes :

---

29 Cf. ch 39, éd. E. Hiller, p. 197, l. 8 à 16 ; en partant du grand nombre calculé plus haut (ch. 3) pour le volume de la Terre : $2{,}7 . 10^{14}$, cela donnera pour le Soleil : $5{,}076 . 10^{17}$, et pour la Lune : 10^{13}, le tout en stades cubiques.

30 Cf. ch. 26bis, éd. E. Hiller, p. 158, ll. 7 à 9.

31 Ch. 26ter, p. 165, ll. 12 à 16.



- a) la division du cercle excentrique en 365 parties 1/4, de façon à matérialiser l'inégalité des saisons par un arc de 94 1/2, puis un arc de 92 1/2, un arc de 88 1/8, et enfin un arc de 90 1/8 "divisions-jours", permet de visualiser en même temps l'anomalie apparente du parcours du Soleil sous le Zodiaque. Les quatre quarts de Zodiaque étant égaux, **le cercle excentrique**, pour peu qu'il soit correctement donné de position et de grandeur, **est l'instrument de la correspondance entre les arcs temporels inégaux avec les arcs spatiaux égaux**, pour un observateur placé au point Θ, centre de l'Univers.

Et Théon d'ajouter :

> "*On trouve, grâce à la **solution concernant les distances et les grandeurs**, que le rapport* [cherché] *de la* [droite des centres[32]] *Θ–M* <avec le rayon de l'excentrique ?> *est à peu près d'1 à 24.*"

- b) le double mouvement de l'épicycle, celui de son centre dans le sens inverse, et celui de sa circonférence (qui porte l'astre errant) dans le même sens que la sphère étoilée, permet de visualiser les accélérations et ralentissements apparents sous le Zodiaque, l'éloignement ou le rapprochement de la Terre, et les distances inférieures ou supérieures à un quart de Zodiaque parcourues au cours de chaque révolution annuelle. Pour que la correspondance complexe entre les repères des trois dimensions du mouvement (longitude, latitude et profondeur) et les repères temporels soit possible, l'instrument géométrique de l'épicycle demande un ajustement mécanique spécifique, dont précisément la *sphéropée* aura besoin : **le choix des sens** (inverse et direct) **de son double mouvement** d'une part, et "**son ordre de grandeur**", d'autre part, par rapport au cercle homocentrique qui l'emporte sous le Zodiaque.

En effet, Théon ajoute :

32 Sur la figure 5 : M centre du cercle solaire, et Θ centre du cercle zodiacal.

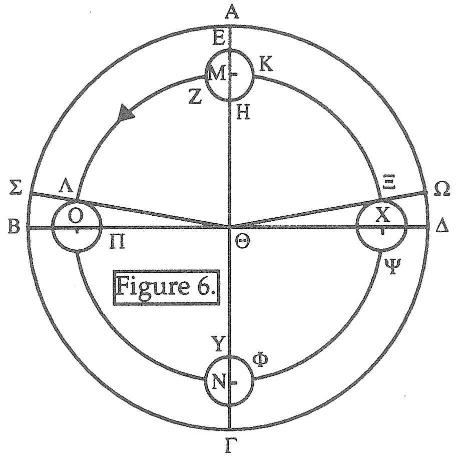


Figure 6.

"On trouve d'autre part à nouveau la grandeur de l'épicycle, c'est-à-dire le rapport [cherché] de la droite qui réunit les centres[33] *par rapport à celle* <qui est rayon ?> *EM de l'épicycle, à l'inverse du précédent, à savoir 24 pour 1,* ***grâce à la solution concernant les distances et les grandeurs."***

Nous avions d'abord pensé identifier le rapport de 1 à 24 à la valeur traditionnelle de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur céleste (24°), arc ou angle mesuré par le côté du pentédécagone ; car, comme l'explique Théon, *"24 degrés font un quinzième des 360 degrés du tout"*[34]. Toutefois, cela est impossible car il ne s'agit, dans aucun des deux cas, de mesurer un angle ou un arc, mais seulement de calculer un rapport (*logon*), entre d'une part, le segment joignant les centres du cercle zodiacal et du cercle solaire (excentrique ou épicycle), et d'autre part, un deuxième terme que le mauvais état du manuscrit, dans chacun des deux cas, oblige à suppléer (rayon de l'excentrique) ou à restituer (rayon de l'épicycle)[35]. La solution que nous avons adoptée pour ce second terme, sous toute réserve, nous paraît la plus plausible dans la mesure où le premier rapport donnerait ainsi **un ordre de grandeur pour la valeur de l'excentricité du cercle solaire** par rapport au centre du tout, et le second rapport, inverse du premier, **un ordre de grandeur pour la valeur du rayon de l'espèce d'hélice que l'astre errant, emporté autour de l'épicycle, paraît décrire** irrégulièrement sous la voûte céleste pour un observateur placé en Θ. Reste néanmoins à comprendre pourquoi 24, et pourquoi ces deux rapports, trouvés par la même méthode - sans aucun doute celle d'Aristarque perfectionnée par Hipparque - sont inverses l'un de l'autre.

33 Sur la figure 6 : M centre de l'épicycle et Θ centre de l'Univers et du cercle zodiacal.

34 Cf. ch. 42, éd. E. Hiller, p. 203, l. 11. Notons que dès l'époque d'Hipparque une mesure plus exacte de l'écart entre l'axe des pôles célestes et des pôles du Zodiaque était connue, mais le nombre 24 était conservé dans l'usage courant des astronomes encore au IIème siècle de notre ère, comme on peut le voir aussi chez Ptolémée.

35 Nous n'avons pas cru bon de suivre ici ni les corrections de T. H. Martin, ni celles de J. Dupuis ; toutefois notre suggestion reste provisoire tant que nous n'aurons pas réussi à réaliser effectivement un programme DAO qui permette de confirmer la démonstration de l'équivalence mécanique des deux hypothèses.

Plusieurs hypothèses viennent à l'esprit : le rapport de 24 heures à un jour semble peu probable, étant donné que l'usage grec était, à l'époque d'Aristarque et d'Hipparque, d'un autre découpage horaire, variable selon les saisons, tout comme l'usage romain, auquel on peut penser qu'à Smyrne au IIème siècle, Théon se conformait. Le rapport de 24 demi-lunaisons à une année complète aurait peut-être plus d'intérêt, dans la mesure où, nous l'avons vu, la méthode d'Aristarque prenait en considération la Lune à son demi-quartier, et où les anciens astronomes grecs étaient soucieux de faire se correspondre l'année lunaire et l'année solaire dans la mise au point de leurs calendriers[36].

Nous avons vu certes que la solution de l'excentrique consistait finalement à se servir d'un cercle divisé en 365 1/4 "divisions-jours" pour expliquer la trajectoire apparente du Soleil, sur un cercle divisé en 360 degrés, tandis que la solution de l'épicycle s'efforçait de tenir compte des trois dimensions dans l'espace des mouvements solaire, mais aussi lunaire, et planétaires, en même temps que de leur aspect temporel. Mais aucun indice dans le texte ne nous permet de justifier une interprétation des deux rapports trouvés en termes de "24 demi-lunes pour une année" ; il s'agit bien plutôt de rapports de distances géométriques, diamètre, droite entre les centres, rayon, dont l'intérêt mécanique sera de permettre le respect des proportions dans la construction du ou des modèles réduits.

Mais, sachant par ailleurs que le nombre 24 est le produit du cube de deux par trois, c'est-à-dire qu'il correspond en quelque sorte à un "savant mélange de deux et de trois"[37] comparable à celui dont Platon parle dans le *Timée* pour décrire la manière dont le démiurge agence les sept autres cercles qu'il fait tourner à l'intérieur du cercle identique et non divisé[38], et sur lesquels il place les astres errants, peut-être n'aurions-nous pas à chercher ailleurs le sens originel du choix de Théon. En effet, c'est bien d'**une *sphéropée* mécanique platonicienne** qu'il veut nous parler, et dont il prétend non seulement se servir pour appuyer son exposé des connaissances élémentaires d'astronomie utiles à la lecture de Platon, mais aussi nous donner le guide de construction, en quelque sorte[39].

---

36 Cf. le cycle de 19 ans (*ennéadécaétéride*) que Méton a calculé, dans la seconde moitié du Vème siècle, et qui rétablit au bout de 235 lunaisons la concordance entre la marche du Soleil et celle de la Lune.

37 Il est possible aussi que ce rapport ait à voir avec les compositions et divisions d'accords musicaux étudiés par Théon de Smyrne dans la partie II de son ouvrage (ch. 35 et 36), où il explique que, dans la division du canon selon Thrasylle, les rapports de longueurs et les intervalles musicaux sont inversés ; on peut encore se référer à la note X de J. Dupuis, concernant la composition de la quadruple octave dans le rapport de 24 à 6).

38 Cf. *Timée* 36 d, trad. L. Brisson, p.125 : "*En revanche, la révolution intérieure, il la divisa à six reprises, pour former sept cercles inégaux, correspondant chacun à un intervalle double ou à un intervalle triple, de telle sorte qu'il y ait trois intervalles de chaque sorte...*"

39 Cf. en particulier le ch. 32 où nous est proposée une figure "*nécessaire pour les sphéropées*" avec son commentaire explicatif, éd. H. Hiller pp. 181 et sqq.

Le cadre de cet atelier ne nous a pas permis de développer davantage ces réflexions. Du moins, avons-nous posé quelques jalons pour d'autres enquêtes sur ces sujets. Le rapport de 24 à 1 et son inverse de 1 à 24 ont-ils ou non un statut scientifique dans l'astronomie grecque ? Si l'on est tenté de penser que cela est simplement lié au projet de construire une *sphéropée* mécanique conforme aux écrits de Platon, qu'est-ce qui interdit de supposer néanmoins que ces deux solutions sont compatibles, et que l'imagination du divin philosophe était nourrie d'une information scientifique très complète ? Enfin, la division du cercle en degrés locaux (*topikè*) ou degrés temporels (*chronikè*), pratiquée par exemple par Hypsiclès au IIème siècle avant notre ère[40], mériterait d'être comparée à la solution de l'excentrique présentée par Théon au IIème siècle après J.-C. ; il est vrai que l'ouvrage du professeur de Smyrne s'adresse à des lecteurs qui n'ont pas eu de formation mathématique, et qu'il doit donc être considéré comme un manuel élémentaire et non comme un traité scientifique. On ne pourra toutefois nier son intérêt historique pour mieux comprendre les techniques et les pratiques grecques de numération et de raisonnement concernant la mesure de la Terre et de l'Univers.

*

* *

*

40 Cf. à ce propos, les indications précieuses du livre de A. Szabo et E. Maula, *Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs* (trad. Federspiel, Paris 1986). On se reportera aussi avec profit au travail réalisé au lycée de La Baule par A. Boyé et X. Lefort sur : *Mesurer aussi bien la Terre que le ciel*, IREM des pays de Loire 1991.