QUEL STATUT POUR LES NOMBRES ?

Jacqueline GUICHARD.

Pourquoi remettre en débat une telle question, qui est un classique de la philosophie des mathématiques ?

"De l'Antiquité au XIXème siècle, il y a un commun accord sur ce que sont les objets principaux du mathématicien ; ce sont ceux-là mêmes que mentionne Platon [dans la *République*, VI] *: les nombres, les grandeurs et les figures. Quelles* 57*iques dont se colore la conception des objets mathématiques chez tel ou tel mathématicien ou philosophe, il y a au moins un point sur lequel il y a unanimité : c'est que ces objets nous sont donnés et qu'il n'est pas en notre pouvoir de leur attribuer des propriétés arbitraires, de même qu'un physicien ne peut changer un phénomène naturel, ... et même aujourd'hui, plus d'un, qui affiche un intransigeant formalisme, souscrirait volontiers, dans son for intérieur, à cet aveu d'Hermite :* « Je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous, avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et nous les rencontrons et les découvrons, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes ». [À Stieljes, 13 mai 1894]." Nicolas Bourbaki (1969)[1].	*"En ne définissant l'arithmétique (algèbre, analyse) que comme une partie de la logique, je proclame déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée. Ma principale réponse à la question posée dans le titre de cet ouvrage est celle-ci : les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses."* Richard Dedekind (1887)[2].

La réflexion sur les nombres, objets "originaires" des mathématiques comme les grandeurs et les figures, offre une entrée très riche en problématiques qui touchent toutes au ***sens des mathématiques, en tant que***

1 Bourbaki, N. : *Éléments d'histoire des mathématiques*. Éd. Hermann. Paris, 1969.

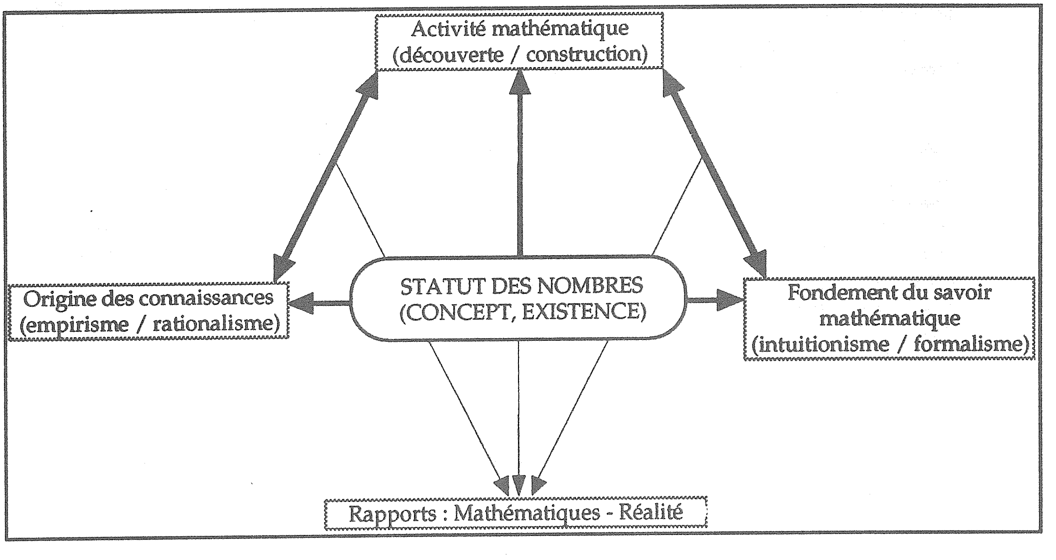
2 Dedekind, R. : *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?* (1887). Trad. fr. J. Milner et H. Sinaceur, *La Bibliothèque d'Ornicar*. Paris, 1978.

savoir et en tant qu'activité. En cela, elle n'est pas une simple affaire de visée épistémologique soucieuse de repérer dans les textes originaux la construction des prises de positions sur la nature et l'existence des nombres. Elle intéresse aussi bien le mathématicien qui peut en retirer un éclairage récurrent sur le sens qu'il accorde aux mathématiques et à sa pratique, que le pédagogue à la recherche d'entrées porteuses de sens pour l'apprenant.

En effet, les problématiques auxquelles renvoie une réflexion sur le statut des nombres questionnent à la fois l'activité mathématique dans son processus et ses résultats, le statut du savoir et de la vérité mathématique, et par delà, les rapports des mathématiques et de la réalité.

Cette réflexion est au carrefour des ***grandes oppositions qui ont structuré le champ des théories de la connaissance*** : l'opposition rationalisme/empirisme, l'opposition intuitionisme/formalisme, oppositions qu'elle permet de requestionner, dans leur actualité, mais aussi dans le contexte où elles prennent sens initialement :

- une problématique de l'origine des connaissances, et initialement des idées pour la première,
- une problématique des fondements du savoir pour la seconde.



Le retour aux textes de référence de ces problématiques et conceptions est une occasion de prendre la mesure, si besoin est, de la complexité riche en nuances de celles-ci, et de corriger l'abstraction du travail de fixation dans des sortes d'archétypes - cf. tableau ci-dessous -, qui est un travail nécessaire dans un premier temps pour s'orienter dans la compréhension des problématiques, de leurs connexions et de leurs enjeux, mais qui ne peut être tenu pour un schéma des conceptions effectives.

Conceptions du statut des objets mathématiques (archétypes)

ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE	MODE D'EXISTENCE DES OBJETS MATHÉMATIQUES.	FONCTION / RÉALITÉ	CONCEPTION
découverte	**• hors de l'esprit qui les conçoit (existence objective) :** **- empirique (objets de perception)**	**organisation, structure du réel (formes)**	**empirisme**
	- essentielle (objets d'intellection)		**rationalisme, réalisme ou idéalisme, logicisme ?**
	• dégagés par abstraction de l'empirique : êtres de raison	**modélisation**	**empirisme ?**
construction	**• dans l'intuition**		**intuitionnisme** **constructivisme**
	• dans une structure formelle		**formalisme**

Poser la question du statut des nombres, c'est indissolublement poser *la question de leur nature*, de ce qu'ils sont : des idéalités, des abstractions opératoires... ?, *et de leur mode d'existence* : 2 existe-t-il ? Ou, d'une façon générale, en quel sens peut-on dire qu'un objet mathématique existe ?

Dire que 2 n'existe pas, que ce qui existe ce sont deux hommes, deux chevaux..., ou que deux a une existence en tant que concept défini dans une théorie, à la fois comme résultat et facteur d'opérations, ou etc., *présuppose toujours une conception de l'existence* dont les critères de définition peuvent s'inverser selon les cas, de l'empirique à l'idéalité. C'est que, pourrait-on dire en paraphrasant Aristote[3], *"exister"* se dit en plusieurs sens, ou a plusieurs espèces, et cette surdétermination de sens n'est pas faite pour éclairer le débat. À moins au contraire que, dans la confrontation à cette diversité, on puisse trouver occasion de penser ce qui dans une conception de l'existence peut faire obstacle à la compréhension ou à la reconnaissance d'une autre forme d'existence, - ce qui est la nature même de

3 Aristote : *Métaphysique*, Livre E, 2, 1026b 35, à propos d'*être* : *"L'Être proprement dit se prend en plusieurs acceptions"*. Trad. Tricot, Éd. Vrin, 2 tomes. Paris, 1970, T. I, p. 335.

l'obstacle épistémologique tel qu'il a été explicité par Bachelard : une connaissance antérieurement élaborée et qui a bien rempli ses fonctions fait obstacle à l'accès à une connaissance nouvelle[4].

*

* *

Pour reprendre cette question du statut des nombres, **deux parcours, parmi bien d'autres possibles**, entre des textes dont la lecture permet d'entendre les résonances de ces problématiques qui touchent au fondement du savoir mathématique.

◊ ***Le premier revient aux sources du débat dans la philosophie antique,*** pour retrouver jusque dans des textes contemporains d'Albert Lautman ou de René Thom, l'écho de ce que Paul Bernays définissait, dans sa Conférence du 18 juin 1934 à Genève, comme la marque du platonisme en mathématiques, - avec une détermination qui, il est vrai, en limite la portée ontologique - :

> [...] *"La tendance dont nous parlons consiste à envisager les objets comme détachés de tout lien avec le sujet réfléchissant.*
>
> *Cette tendance s'étant faite valoir surtout dans la philosophie de Platon, qu'il me soit permis de la qualifier du nom de "platonisme".*
>
> *La valeur des conceptions mathématiques inspirées du platonisme vient de ce qu'elles fournissent des modèles d'imagination abstraite. Ces dernières se distinguent par leur simplicité et leur fermeté logique. Elles forment des représentations extrapolatoires de certains domaines de l'expérience et de l'intuition."*[5]

PREMIER PARCOURS.

Des Idéalités : Réalités séparées - Substances - Formes, ou des Abstractions opératoires ? Un vieux débat aux échos contemporains.

- Pythagoriciens (VIème siècle av. J.-C.), Aristote : *Métaphysique*.
- Platon (IVème siècle av. J.-C.) : *République*.
- Aristote (IVème siècle av. J.-C.) : *Métaphysique*.
- Cantor, G. : *Fondements d'une Théorie générale des Ensembles* (1883).
- Lautman, A. : *La pensée mathématique* (1939).
- Thom, R. : *Les mathématiques modernes : une erreur pédagogique et philosophique ?* (1974).

---

4 Bachelard, G. : *La formation de l'esprit scientifique* (1938). Éd. Vrin. Paris 1967 (5ème éd.), Ch. I-II, pp. 13-16.

5 Bernays, P. : *"Le Platonisme dans les Mathématiques"*. In *L'enseignement mathématique*. Genève 34 - 1935. t. 2, pp. 52-69.

• Aristote, à la charnière d'une conception pythagoricienne dont nous n'avons pas de textes originaux et qu'il nous rapporte, et de la position de Platon dont il a reçu l'enseignement, nous fournit une entrée au début du livre M de la *Métaphysique*[6] où il précise les éléments de sa problématique, en faisant le point sur les conceptions antérieures :

> *"Il existe deux opinions relatives au sujet qui nous occupe. On prétend que les Choses mathématiques* [τὰ μαθηματικά] *sont des substances (tels sont les nombres, les lignes, et les objets du même genre), et on dit aussi que les Idées sont des substances.* [...]
> *Les choses Mathématiques, si elles ont une réalité propre, sont nécessairement ou bien dans les êtres sensibles, suivant l'opinion de certains philosophes ou bien séparées des êtres sensibles (car il en est aussi qui professent cette doctrine). Si elles ne sont ni dans les êtres sensibles, ni séparées des êtres sensibles, ou bien elles n'existent pas, ou bien elles existent d'une autre manière."*

Son analyse critique vise à établir contre les Pythagoriciens et Platon que l'unité et les nombres ne peuvent être pensés comme des substances. Ce sont des "choses mathématiques" (τὰ μαθηματικά) qui n'existent pas en acte (ἐνεργείᾳ) et par elles-mêmes (καθ' αὑτά), mais seulement comme abstraction ou par abstraction (ἐξ ἀφαιρέσεως), i. e. comme résultat d'une opération : ils n'ont de statut que relativement à l'opération de mesure qui les constitue.

- Contre les Pythagoriciens qui font du nombre une multiplicité d'*unités étendues* qui *"constitue les substances sensibles"*[7], Aristote soutient que les nombres ne sont pas des substances immanentes aux choses sensibles et les constituant. Soutenir cette conception, c'est nier le caractère continu de la grandeur, avec toutes les difficultés que les paradoxes de Zénon d'Élée ont mises en évidence[8] :

> [...] *"admettre que les corps sont composés de nombres et que le nombre composant est le nombre mathématique, c'est impossible. En effet, il n'est pas vrai de dire qu'il existe des grandeurs insécables ; et quand bien même on admettrait des grandeurs de ce genre, les unités, en tout cas, n'ont pas de grandeurs ; et comment une étendue peut-elle être composée d'indivisibles ?* [...]"[9]

L'unité qui constitue les nombres ne peut être substance.

---

6 Aristote : *Métaphysique*, Livre M, 1, 1076a 15. *Op. cit.* T. II pp. 715-718.
7 Aristote : *Métaphysique*, M, 6, 1080b 15-20 et N 3.1090a 20-30. *Op. cit.*, T. II, pp. 744-745 et 816.
8 Aristote : *Physique*, Livre VI. Trad. H. Carteron. Les Belles Lettres. Paris, 1966, T. 2.
9 Aristote : *Métaphysique*, Livre M 8. 1083 b 10-20. *Op. cit.*, T II, p. 765.

Dans la *République* (VI-VII)[10], la place accordée par Platon aux mathématiques dans la formation des futurs philosophes venait du statut de leurs objets : idéalités, ou réalités purement intelligibles *"qu'on ne peut saisir autrement que par la raison"* et qui, pour cela, ont le pouvoir de faire décoller l'esprit des fausses évidences du sensible :

> [...] "[la science des nombre] *risque fort de faire partie de ces sciences que nous recherchons, celles qui sont aptes par nature à mener vers la pensée intelligente* [πρὸς τὴν νόησιν] ; *mais personne n'en use correctement, alors qu'elle possède le pouvoir de nous tirer vers l'essence* [πρὸς οὐσίαν]. [...] *C'est violemment qu'elle pousse l'âme quelque part vers le haut et qu'elle la force à tenir son discours sur les nombres en eux-mêmes, sans jamais supporter qu'on tienne ce discours en lui proposant des nombres dotés de corps visibles ou tangibles* [ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς]."

- Contre la conception platonicienne qui fait des nombres, comme des lignes, surfaces... des idées distinctes par nature des choses sensibles auxquelles ces dernières devraient leur structure, Aristote soutient qu'il n'y a pas d'idées ou de formes séparées des choses et que par conséquent les nombres et grandeurs mathématiques ne sont pas des substances.

Le nombre ne se définit que dans son rapport à la mesure :

> [...] *"Le Nombre* [n'a d'autre caractère que d'être] *une multiplicité mesurée et une multiplicité de mesures."*[11]

La conception aristotélicienne du nombre est donc ***une conception opératoire*** qui le détermine tout comme dans la conception pythagoricienne, comme multiple de l'unité, mais qui ne conçoit plus l'unité comme monade substantielle : l'unité n'est pas conçue comme ayant une réalité en elle-même comme la "monade" pythagoricienne, première et intangible, unité essentielle, essentiellement indivisible auquel se réfère le discours platonicien du livre VII de la *République* :

> *"Tu sais sans doute comment ceux qui s'y connaissent en la matière tournent chaque fois en ridicule quiconque entreprend, dans son raisonnement, de fractionner l'unité en tant que telle* [αὐτὸ τὸ ἕν], *et trouvent cela intolérable. Mais si toi tu la morcelles, eux la multiplient, craignant toujours que l'unité risque d'apparaître comme n'étant pas une, mais comme une multiplicité de parties."*[12]

---

10 Platon : *République*, livres VI-VII, 510c-e, 523a et 525d- 526b. Trad. M. Dixsaut. In *Platon*. Éd. Bordas. Paris, 1986, resp. pp. 15-16, 31 et 34-35.
11 Aristote : *Métaphysique*, Livre N 1. 1088 a 5. *Op. cit.*, T. II, p. 802.
12 Platon : *République*, Livre VII, 525 d, *Op. cit.* p. 35.

"Mais l'un ne signifie, de toute évidence, qu'unité de mesure. [...] *L'unité est toujours un indivisible, tantôt selon sa nature spécifique, tantôt par rapport à la sensation, ce qui implique que l'un n'est pas une réalité et n'est pas une substance par soi. Et cela est rationnel, car l'un n'a d'autre caractère que d'être mesure de quelque multiplicité de mesures* [i. e. d'unités, l'un étant mesure de multiplicités]."[13]

L'unité n'est plus en elle-même une réalité, mais ce qui est pris comme unité ad hoc dans une opération de mesure pour une certaine échelle de grandeur, et qui pourra être autre dans une autre. Le choix de l'unité est fonction de l'ordre de grandeur de ce qui est à mesurer, elle est, par nature, ou par fonction, homogène à la grandeur mesurée, sinon, il ne peut y avoir de commune mesure :

"La mesure doit toujours être un attribut commun à toutes les choses à mesurer : si par exemple le cheval est l'unité de mesure, les êtres mesurés sont des chevaux, et si c'est l'homme, des hommes. Si l'on a à mesurer homme, cheval et dieu, la mesure sera probablement vivant, et le nombre formé par ces êtres sera un nombre de vivants."[14]

• On peut entendre ***les échos modernes du platonisme,*** dans la position d'une conception objective des mathématiques qui peut prendre des formes diversifiées.

- Travaillant à la charnière des mathématiques et des sciences expérimentales, René Thom revient à Platon pour articuler sur le mode de l'hypothèse la plus raisonnable, une conception ontologique de l'univers et une conception maïeutique de l'accès au savoir :

"Les mathématiques se rencontrent - non seulement dans l'agencement rigide et mystérieux des lois physiques - mais aussi, de manière plus cachée, mais aussi indubitable - dans le jeu infini de la succession des formes du monde animé et inanimé, dans l'apparition et la destruction de leurs symétries. C'est pourquoi l'hypothèse d'idées platoniciennes informant l'univers est - en dépit des apparences - la plus naturelle et - philosophiquement - la plus économique. Mais, dans ce monde des idées, les mathématiciens n'ont à chaque instant qu'une vision incomplète et fragmentaire. De ce fait, toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive. En ce sens, toute démonstration est une maïeutique : il s'agit de recréer chez le lecteur

---

13 Aristote : *Métaphysique,* Livre N 1. 1087 b 33 - 1088a 5. *Op. cit.* T. II, pp. 801-802. Note de J. Tricot à propos de *"selon sa nature spécifique ... tantôt par rapport à la sensation"* : "κατα το ειδος, *s'il s'agit de qualités,* προς αισθησιν, *s'il s'agit de quantités*".

14 Aristote : *Métaphysique,* Livre N 1. 1088a 5-10. *Op. cit.* T. II, p. 802.

les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite dont il détenait toutes les données mais qui restait voilée dans l'informulé."[15]

- Quelques décennies plutôt, Albert Lautman[16] tout en prenant en compte le développement axiomatique des mathématiques, développait une conception platonicienne du statut des objets mathématiques, articulant l'activité mathématique effective et la *theoria* platonicienne, cette contemplation ou saisie intellectuelle des idées à laquelle la dialectique conduit l'esprit.

"Les propriétés d'un être mathématique dépendent essentiellement des axiomes de la théorie où ces êtres [les «*êtres mathématiques idéaux*»] *apparaissent, et cette dépendance leur retire l'immutabilité qui doit caractériser un Univers intelligible. Je n'en considère pas moins les nombres et les figures comme possédant une objectivité aussi certaine que celle à laquelle l'esprit se heurte dans l'observation de la nature physique. Mais cette objectivité des êtres mathématiques, qui se manifeste de façon sensible dans la complexité de leur nature, ne révèle son sens véritable que dans la théorie de la participation des Mathématiques à une réalité plus haute et plus cachée qui constitue à mon avis un véritable monde des Idées.* [...]

Je conçois cette réalité idéale comme indépendante de l'activité de l'esprit qui n'intervient à mon avis que lorsqu'il s'agit de créer des Mathématiques effectives ; les Mathématiques appartiennent bien au domaine de l'action ; mais la Dialectique est avant tout un univers à contempler, dont le spectacle admirable justifie et récompense les longs efforts de l'esprit."

- Au siècle dernier, Georg Cantor explicitant dans une note du paragraphe 8 des *Fondements d'une Théorie générale des Ensembles* la métaphysique qui sous-tendait sa conception des nombres, se référait lui aussi à une lecture de Platon :

Son objectif dans ce texte de réflexion métaphysique sur l'existence des nombres, c'est d'**assurer la réalité objective**, c'est-à-dire extérieure à l'esprit, d'objets mathématiques qui apparaissent pourtant comme des créations de l'esprit des mathématiciens, afin d'assurer une double fondation :

- celle de l'**indépendance des mathématiques** par rapport à la réalité : liberté du travail du mathématicien qui n'a pas à se préoccuper de la correspondance de ses objets avec la réalité et l'intuition sensible que nous

---

15 Thom, R. : *"Les mathématiques 'modernes'. une erreur pédagogique et philosophique ?"* (1970). In *Pourquoi la Mathématique ?* Éd. Bourgois, coll. 10/18. Paris, 1974, pp. 65-66. Rééd. In Thom, R. : *Apologie du logos*. Éd. Hachette. Paris, 1990, p. 560.

16 Lautman, A. : *"La pensée mathématique"*. In *Bulletin de la Société française de Philosophie*, séance du 4 février 1939, Armand Colin, janv.-mars 1946, pp. 13 et 39.

en avons, qui n'a pas à chercher dans une quelconque vérification expérimentale le critère de la vérité de ses théories ;

- celle de leur adéquation essentielle à la réalité objective."

La façon dont Cantor aborde le problème de la réalité des nombres montre que *ce problème n'a pas pour lui de caractère spécifique.* Dans la mesure où *le nombre est concept,* le problème de sa réalité est celui de tout concept qui a deux modalités d'existence conjointes : une existence *dans* l'esprit qui le conçoit, en tant qu'il est le produit de son acte de conception - c'est sa *"réalité intrasujective ou immanente"* -, et une dimension, une portée *extérieure* à l'esprit dans la mesure où il représente quelque chose - c'est sa *"réalité transsubjective ou transcendante"*.

> *"Le fondement de mes réflexions étant entièrement réaliste, mais non pas moins idéaliste, il ne fait pour moi aucun doute que ces deux types de réalité se trouvent toujours conjoints..."*
>
> [Note] *"Cette conviction coïncide pour l'essentiel aussi bien avec les principes fondamentaux du système platonicien qu'avec un trait essentiel du système spinoziste ; sur le premier point, je renvoie à Zeller,* Philosophie der Griechien, *3ème éd., II, 1, pp. 541-602. Il y est dit tout au début du chapitre :* « Seul le savoir conceptuel peut [selon Platon] garantir une véritable connaissance. Mais au degré de vérité que détiennent nos représentations - Platon partage ce présupposé avec Parménide - doit répondre un degré égal de réalité pour leur objet, et réciproquement. Ce qui peut être connu, est ; ce qui ne peut être connu, n'est pas, et c'est dans l'exacte mesure où elle est, qu'une chose est connaissable »."[17]

L'explicitation de cette conjonction fondamentale entre *l'ordre des idées* et *l'ordre des choses,* selon les termes spinozistes qu'il cite dans la même note, le conduit naturellement à régler son compte à toute alternative dualiste qui séparant l'esprit et la réalité, ruinerait toute possibilité d'adéquation des principes de la connaissance aux principes de l'être. Et il congédie en même temps et en quelques lignes l'empirisme et l'idéalisme transcendantal de Kant, qui pourtant avait prétendu dépasser l'opposition empirisme-rationalisme et fournir une théorie de la connaissance tirant les conséquences du développement scientifique des connaissances[18]. Par sa rapidité synthétique, ce texte apporte moins une

---

17 Cantor, G. : *Fondements d'une Théorie générale des Ensembles* (1883). Trad. J.-C. Milner in *Cahiers pour l'Analyse 10 : La formalisation.* Société du Graphe - Éd. du Seuil. Paris, 1969, § 8 pp. 47-49.

18 *"En ce qui concerne Spinoza, je n'ai qu'à rappeler sa proposition* (Éthique, *II, prop. VII) :* « Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum ». *Dans la philosophie de Leibniz également, l'on peut retrouver le même principe de théorie de la connaissance. Ce n'est que depuis l'empirisme, le sensualisme et le scepticisme modernes et depuis le criticisme kantien qui en est issu, que l'on croit devoir situer la source du savoir et de la certitude dans les sens ou les dites « formes pures de l'intuition du monde représentatif », en la confinant dans ces*

réponse qu'il ne provoque à aller voir de plus près ce qui se joue dans ces oppositions.

*

* *

◊◊ ***Le second parcours croise la problématique de l'origine des idées et celle de l'activité fondatrice des mathématiques. Les nombres : des objets intuitifs** - saisis dans une intuition empirique ou construits dans une intuition pure -, **ou bien des objets formels, produits du jugement et relevant de la logique ?***

L'histoire des idées permet une lecture des controverses par "binômes" dont les problématiques s'entre-répondent.

On peut retenir comme principales entrées les oppositions : logicisme - empirisme, logicisme - intuitionisme, intuitionisme - formalisme.

D'où nous viennent les idées des nombres ?

DEUXIÈME PARCOURS.

Des Objets intuitifs ou formels ?
Empirisme / Logicisme
Intuitionisme / Formalisme.

- Mill, J. S. : *Logique* (1851).
- Frege, G. : *Fondements de l'Arithmétique* (1884).
- Kant, E. : *Critique de la Raison pure.* (1781-87).
- Bolzano, B. : *Sur la Doctrine kantienne de la Construction des Concepts par les Intuitions* (1810).
- Bourbaki, N. : *L'Architecture des Mathématiques* (1948).
- Brouwer, L. E. J. : *Considérations intuitionnistes sur le formalisme* (1928).

L'empirisme radical répond que *"tout vient des sens"*, et que l'esprit n'est initialement qu'une *tabula rasa*[19], une surface vierge et réceptive sur

bornes ; je suis convaincu que ces éléments ne fournissent aucune connaissance assurée, parce que cette dernière ne saurait être atteinte que par des concepts et des notions qui tout au plus sont suscités par l'expérience extérieure, mais sont pour l'essentiel formés par une induction et une déduction internes, comme une chose qui dans une certaine mesure était déjà en nous, et se trouve seulement éveillée et portée à la conscience." Cantor, G. : *Fondements d'une Théorie générale des Ensembles*, § 8, note 6. *Op. cit.* p. 48.

19 *"Supposons donc qu'au commencement l'âme est ce qu'on appelle une **table rase**, vide de tous caractères, sans aucune idée, quelle qu'elle soit. Comment vient-elle à recevoir des idées ? Par quel moyen en acquiert-elle cette prodigieuse quantité que l'imagination de l'homme, toujours agissante et sans bornes, lui présente avec une variété presque infinie ? D'où puise-t-elle tous ces matériaux qui sont comme le fond de tous ses raisonnements et de toutes ses connaissances ? À cela je réponds en un mot, de l'**expérience** : c'est là le fondement de toutes nos*

laquelle les impressions que font les objets sur nos sens viendraient imprimer leur marque, comme l'écolier de l'Antiquité imprimait avec son stylet des caractères sur la tablette de cire qu'il venait de racler - d'araser - pour effacer ce qu'il avait précédemment écrit. À quoi le rationalisme oppose le dynamisme des facultés de l'esprit : c'est le "[...] *si ce n'est l'entendement lui-même*" de Leibniz[20].

• John Stuart Mill s'inscrit dans cette ***tradition de l'empirisme radical*** et soutient que les nombres expriment des propriétés physiques, objets de perception sensorielle :

> *"Le fait énoncé dans la définition d'un nombre est un fait physique. Chacun des nombres, deux, trois, quatre, etc., dénote des phénomènes physiques et connote une propriété physique de ces phénomènes. Par exemple, deux dénote toutes les paires, et douze toutes les douzaines d'objets ; lesquels connotent ce qui en fait des paires et des douzaines, c'est-à-dire une propriété physique. On ne niera pas, en effet, que deux pommes ne puissent être physiquement distinguées de trois pommes, deux chevaux d'un seul, etc., que ce sont là des phénomènes différents, visibles et tangibles. Je n'entreprends pas de dire ce qu'est la différence ; il suffit qu'il y ait une différence perceptible par les sens ; et bien qu'il soit plus difficile de distinguer cent deux chevaux de cent trois que deux chevaux de trois ; bien que dans la plupart des positions où ils se présentent, les sens ne perçoivent aucune différence, ils peuvent néanmoins être placés de*

---

connaissances, et c'est de là qu'elles tirent leur première origine." Locke, J. : *Essai philosophique concernant l'Entendement humain* (1690), L. II, § 2, trad. Coste (4° éd. 1742), Éd. Vrin. Paris, 1972, p. 61.

20 Leibniz, G. W. : *Nouveaux Essais sur l'Entendement humain* (1703), Livre II, chap. I, Éd. Garnier-Flammarion. Paris, 1966, pp. 91-92 : "*Cette* tabula rasa *dont on parle tant n'est à mon avis qu'une fiction, que la nature ne souffre point et qui n'est fondée que dans les notions incomplètes des philosophes,* [...]. [...] *ceux qui parlent tant de cette* table rase, *après lui avoir ôté les idées, ne sauraient dire ce qui lui reste, comme les philosophes de l'École qui ne laissent rien à leur matière première. On me répondra peut-être que cette* table rase *des philosophes veut dire que l'âme n'a naturellement et originairement que des facultés nues. Mais les facultés sans quelque acte, en un mot les pures puissances de l'École, ne sont aussi que des fictions, que la nature ne connaît point, et qu'on n'obtient qu'en faisant des abstractions. Car où trouvera-t-on jamais dans le monde une faculté qui se renferme dans la seule puissance et n'exerce encore quelque acte ?* [...] *L'expérience est nécessaire, je l'avoue, afin que l'âme soit déterminée à telles ou telles pensées, et afin qu'elle prenne garde aux idées qui sont en nous ; mais le moyen que l'expérience et les sens puissent donner des idées ? L'âme a-t-elle des fenêtres, ressemble-t-elle à des tablettes ? est-elle comme de la cire ? Il est visible que tous ceux qui pensent ainsi de l'âme la rendent corporelle dans le fond. On m'opposera cet axiome reçu parmi les philosophes,* que rien n'est dans l'âme qui ne vienne des sens. *Mais il faut excepter l'âme même et ses actions.* Nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu, excipe : nisi ipse intellectus. *Or l'âme renferme l'être, la substance, l'un, le même, la cause, la perception, le raisonnement, et quantité d'autres notions, que les sens ne sauraient donner. Cela s'accorde assez avec votre auteur de l'*Essai, *qui cherche la source d'une bonne partie des idées dans la réflexion de l'esprit sur sa propre nature."*

> *façon que la différence devienne perceptible, car sans cela jamais nous n'aurions distingué ces groupes, ni pensé à leur donner des noms différents.* [...]
>
> *Quand nous désignons une collection d'objets par les mots* deux, trois, quatre, *nous n'entendons pas qu'ils soient deux, trois ou quatre abstractivement ; ce sont deux, trois ou quatre choses d'une espèce particulière, des cailloux, des chevaux, des pouces, des livres. Ce que le nom de nombre connote, c'est la manière dont des objets du genre donné doivent être agglomérés pour former cet assemblage particulier."*[21]

Gottlob Frege consacre plusieurs paragraphes de ses *Fondements de l'Arithmétique* à critiquer cette conception empiriste pour montrer que les nombres sont des concepts, affaire de jugement.

> [...] *"Quel pourrait-être de par le monde le fait observé - ou comme le dit encore Mill : physique - qui se trouve affirmé dans la définition du nombre 777 864 ? De toute la richesse des faits physiques qui se dévoile à nous, Mill n'en cite qu'un, celui qui serait affirmé dans la définition du nombre 3. D'après Mill, il consiste en ce que des groupements d'objets faisant cette impression* • • • *sur la sensibilité, peuvent être séparés en deux parties comme :* •• •. *Quel bonheur que tout au monde ne soit pas cousu ou noué ; car on ne pourrait pas opérer cette séparation, et 2 + 1 ne feraient pas 3 ! Et quel dommage que Mill n'ait pas décrit les faits physiques sur lesquels reposent 0 et 1 !* [...]
>
> *On ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes, parce que le nombre n'est ni un être sensible, ni une propriété des choses externes. Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. On cherchera en vain à se représenter 0 étoiles visibles. On peut bien penser que le ciel est couvert de nuages : il n'y a rien là qui corresponde au mot 'étoile' ni à 0. On ne fait qu'imaginer une situation qui pourrait donner lieu au jugement : aucune étoile n'est visible pour l'instant."*[22]

• La lecture en parallèle des textes de ***l'intuitionisme kantien et de la critique qu'en fait Bolzano*** qui, en même temps que le statut du nombre en tant qu'objet mathématique, met en question l'activité mathématique elle-même, peut constituer une introduction au débat sur les fondements des mathématiques tel que Brouwer, intuitioniste convaincu, l'a entamé contre le formalisme.

---

21 Mill, J. S. : *Système de logique* (1851). Trad. L. Peisse, Éd. Ladrange. Paris, 1866, L. III, ch. XXIV, § 5, Tome second pp. 146-148. Rééd. Mardaga Liège-Bruxelles 1988.

22 Frege, G. : *Les Fondements de l'Arithmétique* (1884) § 7, 25, 58, 87 et 96. Trad. C. Imbert. Éd. du Seuil. Paris, 1969, resp. pp. 132-3, 151-2, 211 et 219.

Dans l'*Appendice aux Contributions à une Exposition mieux fondée des Mathématiques* (1810)[23], Bolzano fait l'analyse critique de la conception kantienne qui enracine la connaissance dans une esthétique transcendantale, laquelle fait des formes a priori de la sensibilité, l'espace et le temps, le cadre originel de toute connaissance. Le pivot de l'analyse de Bolzano, c'est la critique de la notion d'intuition a priori dans laquelle il voit un concept contradictoire.

L'analyse kantienne des fondements d'une connaissance certaine voit dans les mathématiques le modèle même d'une connaissance rationnelle qui a su suivre dès l'Antiquité *"chez l'admirable peuple grec, la route sûre de la science"*, et cela par l'effet d'une *"révolution intellectuelle"*[24] dont Kant repère la répétition aux XVIème et XVIIème siècles en physique et en chimie et dont il tire les conséquences en opérant un renversement dans la conception classique de la connaissance, renversement qu'il compare à celui opéré par Copernic en Astronomie. Il n'y a pas d'intuition intellectuelle de la nature et de l'ordre des choses[25]. La réalité en elle-même demeure cachée - ou inaccessible - mais les catégories de l'entendement nous permettent d'élaborer une connaissance certaine de leur phénomène c'est-à-dire de ce qui se manifeste à nous dans l'expérience sensorielle sous forme d'intuition sensible[26]. Analysée dans son processus de production, la connaissance ne peut plus être pensée comme *théoria*, vision intellectuelle ou contemplation des essences ou idées - Platon -, ou intuition intellectuelle des natures simples - Descartes -, mais comme une construction de l'esprit qui, à l'aide de ses catégories, principes et concepts, structure un donné intuitif qui lui est fourni par la sensibilité.

Les mathématiques s'élaborent par *construction de concepts* dans l'intuition pure des formes *a priori* de la sensibilité : le temps et l'espace ; "pure", *"a priori"* c'est-à-dire qui ne sont pas dérivées de l'expérience sensible, ou sensorielle.

Dans la *Théorie transcendantale de la Méthode*, deuxième partie de la *Critique de la Raison pure*[27], Kant explicite cette démarche constructive qui fait la nécessité de la connaissance mathématique :

> *"La Mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience.* [...]

23 Bolzano, B. : *Sur la Doctrine kantienne de la Construction des Concepts par les Intuitions*, Appendice aux *Contributions à un Exposé mieux fondé des Mathématiques*. (Prague, 1810). Trad. J. Laz in *Philosophie* n° 27, pp. 3-12. Éditions de Minuit. Paris, 1990.

24 Kant, E. : *Critique de la Raison pure*. Préface à la seconde édition. *Op. cit.*, pp. 16-17.

25 Kant, E. : *Critique de la Raison pure*. Logique Transcendantale. *Op. cit.*, p. 77.

26 Kant, E. : *Critique de la Raison pure*. Préface à la seconde édition. *Op. cit.*, p. 20.

27 Kant, E. : *Critique de la Raison pure*. *"Théorie transcendantale de la Méthode"*, Ch. I, Première Section. *Op. cit.*,pp. 493-494.

> *La connaissance* philosophique *est la* connaissance rationnelle par concepts *et la connaissance mathématique est une connaissance rationnelle par* construction *des concepts. Mais* construire *un concept, c'est représenter* [darstellen] *a priori l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition* non empirique, *qui, par conséquent, en tant qu'intuition, soit un objet* [Object] singulier, *mais, qui, néanmoins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) doit exprimer dans la représentation* [Vortellung] *quelque chose d'universel qui s'applique à toutes les intuitions possibles appartenant à ce concept. Ainsi, je construis un triangle en représentant l'objet correspondant à ce concept, soit par la simple imagination* [Einbildung], *- dans l'intuition pure -, soit, d'après celle-ci sur le papier, - dans l'intuition empirique -, mais, dans les deux cas, pleinement* a priori, *sans en avoir emprunté le modèle à une expérience quelconque. La figure singulière qu'on a dessinée est empirique et cependant elle sert à exprimer le concept malgré sa généralité, parce que dans cette intuition empirique on ne considère jamais que l'acte de la construction du concept, auquel beaucoup de déterminations comme celles de la grandeur, des côtés et des angles, sont tout à fait indifférentes et qu'on fait, par suite, abstraction de ces différences, qui ne changent pas le concept du triangle."*

Les propositions mathématiques sont donc *synthétiques a priori*[28], *synthétiques* puisqu'elles expriment une construction de concepts et non un simple développement analytique ou explicitation : en cela elles augmentent nos connaissances ; et *a priori*, c'est-à-dire qu'elles ont la certitude de la nécessité puisqu'elles n'empruntent rien à la relativité de l'expérience sensible ou empirique : elles tiennent leur nécessité de structures internes à l'esprit.

> *"Il faut remarquer d'abord que les propositions mathématiques proprement dites sont toujours des jugements a priori et non empiriques, parce qu'elles comportent une nécessité qui ne peut être tirée de l'expérience. Si l'on ne veut pas m'accorder cela, eh bien je restreins alors ma proposition aux* mathématiques pures *dont le concept déjà veut qu'elles ne renferment pas de connaissance empirique, mais une pure connaissance a priori.*
>
> *On pourrait bien penser tout d'abord que la proposition* 7 + 5 = 12 *est une simple proposition analytique, résultant du concept d'une somme de sept et de cinq, en vertu du principe de contradiction. Mais à*

---

28 Kant, E. : *Critique de la Raison pure*. Introduction, pp. 40-41 et *Prolégomènes à toute Métaphysique future qui pourra se présenter comme Science* (1783). Trad. J. Gibelin, Éd. Vrin. Paris, 1968, Avant propos, § 2. *Op. cit.*, pp. 23-25. Frege s'opposera aussi, après Bolzano, à cette conception. De l'arithmétique, il disait qu'elle ne serait qu'une logique développée : *"J'espère avoir dans cet écrit rendu vraisemblable l'idée que les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques et par conséquent a priori. L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée* [...]." *Les Fondements de l'Arithmétique*. Conclusion § 87. *Op. cit.* p. 211.

> *y regarder de plus près, on constate que le concept de la somme de sept et de cinq ne contient pas autre chose que la réunion des deux nombres en un seul, sans que l'on pense le moins du monde ce qu'est ce nombre unique qui les comprend tous les deux. Le concept douze n'est aucunement pensé, par cela seul que je pense simplement cette réunion de sept et de cinq : j'aurai beau analyser autant que je voudrai le concept que j'ai d'une pareille somme possible, je ne rencontrerai cependant pas le chiffre douze. Il faut dépasser ces concepts, recourir à l'intuition qui correspond à l'un des deux nombres, les cinq doigts par exemple, ou (comme* Segner *dans son arithmétique) cinq points et ainsi ajouter une après l'autre les unités du cinq donné par l'intuition au concept de sept. On élargit donc véritablement son concept par cette proposition* 7 + 5 = 12 *et un nouveau concept qui n'était pas pensé dans le premier s'y trouve ajouté, en d'autres termes : la proposition arithmétique est toujours synthétique, ce dont on se rend compte d'autant plus nettement, si l'on prend des nombres un peu plus forts ; alors on s'aperçoit clairement que, même si nous tournions et retournions à notre guise notre concept, nous ne pourrions jamais, sans l'aide de l'intuition et en analysant simplement nos concepts, trouver la somme."*[29]

- La critique de Bolzano est centrée sur la notion d'intuition pure *a priori,* et vise à montrer que les propositions arithmétiques ne reposent pas sur une construction dans l'intuition. La notion d'intuition pure *a priori* est une notion contradictoire qui "allie" le singulier : l'intuition qui est la saisie ou représentation de quelque chose ou d'un être, et l'universel : caractéristique de l'a priori. C'est une notion qui a en réalité les caractéristiques d'un jugement :

> *"Comment cependant peuvent naître, par une liaison à des intuitions, des jugements* absolument certains, *tels que le sont tous les jugements* a priori* ? *Kant semble vouloir dire : "Si je lie à une intuition le concept universel, par exemple d'un* point *ou d'une* direction *ou d'une* distance, *c'est-à-dire si je me représente un point* singulier, *une direction ou distance* singulières, *alors je découvre dans ces objets singuliers que leur revient tel ou tel prédicat, et je sens en même temps que ceci* vaut de même *pour* tous les autres *objets qui tombent sous ce concept". Si tel est ce que veulent dire Kant et ses disciples, je pose la question suivante : comment en venons-nous donc, lors de l'intuition de tel* objet singulier, au sentiment [zu dem Gefühl] *que* ce que nous remarquons en lui, vaut aussi pour tout autre ? *Au moyen de ce qui est* singulier *et individuel ; ou au moyen de ce qui est* universel *en cet objet ? À l'évidence seulement au moyen*

29 Kant, E. : *Prolégomènes...* § 2 c 2° : *"Les jugements mathématiques sont tous synthétiques". Op. cit.* pp. 20-25.

de ce qui est universel, c'est-à-dire au moyen du concept, non pas au moyen de l'intuition (cf §2)."[30]

D'où le principal reproche : la conception kantienne repose sur une confusion entre représentation et jugement. Il ne peut y avoir d'intuition a priori, parce que l'a priori est un critère logique du jugement, défini par la possibilité de déduire le prédicat du sujet. Les jugements mathématiques ne sont donc pas construits dans l'intuition pure, qu'ils soient arithmétiques ou géométriques : les jugements arithmétiques, qui selon Kant sont construits dans l'intuition pure du temps, ne supposent en fait aucun ordre. Reprenant l'exemple de Kant (*7 + 5 = 12*), Bolzano montre que l'application des principes purement logiques de l'arithmétique suffit à l'établir.

> *"Les propositions de l'*arithmétique *ne nécessitent l'intution du temps en aucune façon. Nous ne voulons analyser qu'un exemple. Kant mentionne la proposition* 7 + 5 = 12. *À la place de celle-ci nous allons prendre, uniquement pour faciliter l'exposé, la proposition plus courte* 7 + 2 = 9. *La preuve de cette proposition ne présente pas de difficulté dès que l'on présuppose la proposition universelle* a + (b + c) = (a + b) + c, *selon laquelle, dans le cas d'une somme* arithmétique *on ne s'occupe que de l'*ensemble [Menge] *et non pas de l'*ordre *des éléments (un concept qui comprend assurément celui de succession dans le temps* [Zeitfolge]*). Cette proposition loin de présupposer le concept de* temps, *l'exclut, bien au contraire. Mais cette dernière une fois admise, la preuve de la proposition ci-dessus pourra être conduite de la manière suivante. Que* 1 + 1 = 2, 7 + 1 = 8, 8 + 1 = 9 *ce ne sont que de simples* définitions *et des propositions* arbitraires. *De là* 7 + 2 = 7 + (1 + 1), *(per def.)* = (7 + 1) + 1, *(per propos. præced.)* = 8 + 1, *(per def.)* = 9 *(per def.)."*[31]

---

30 Bolzano, B. : *Sur la Doctrine kantienne...*, § 7. *Op. cit.*, p. 8-9. (*) appelle cette note de l'auteur, p. 9 : *"Les jugements* a priori *ont tous une absolue certitude ; mais ils ne sont pas les seuls, il en va ainsi également des jugements empiriques. Ont en effet l'absolue certitude, non seulement, comme on a l'habitude de se le représenter d'ordinaire, les* jugements de nécessité *mais encore les* jugements de possibilité, *de* réalité *et de* devoir ; *en un mot tous nos jugements, hormis ceux dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent, qui justement pour cette raison méritent le nom spécifique de* jugements de probabilité".

31 Bolzano, B. : *Sur la Doctrine kantienne...* § 8. *Op. cit.*, p. 10. On peut comparer sa démonstration avec celle de son maître à penser, Leibniz. Cf. *Nouveaux Essais...*, L IV. Ch.VII § 10. *Op. cit.*, p. 364. «"[...] *Ce n'est pas une vérité tout à fait immédiate que deux et deux sont quatre, supposé que* quatre signifie trois et un. On peut donc la démontrer, et voici comment :

Définitions : 1) Deux *est un et un.*
2) Trois *est deux et un.*
3) Quatre *est trois et un.*

Axiome. *Mettant des choses égales à la place, l'égalité demeure.*

Démonstration : *2 et 2 est 2 et 1 et 1 (par la déf.1)* .... 2 + 2
2 et 1 et 1 est 3 et 1 (par la déf.2) .... 2 + 1 + 1
3 et 1 est 4 (par la déf.3) .... 3 + 1
4

Donc (par l'axiome) 2 et 2 est 4. Ce qu'il fallait démontrer." Cf. aussi J. Laz *Op. cit.* p. 22.

Les objets mathématiques sont définis par les relations logiques entre les concepts. Le statut logique de leurs connexions définit la vérité des propositions qui les concernent : contre l'intuitionnisme qui soutient que les objets mathématiques sont des constructions de l'esprit mathématicien qui n'ont pas d'existence en dehors de lui, Bolzano développe une théorie logique du vrai qui conduit à soutenir l'existence d'objets mathématiques sous la forme de propositions dont la vérité est indépendante des conditions psychologiques et intellectuelles de leur compréhension.

> *"Dans le domaine de la vérité, c'est-à-dire dans l'ensemble de tous les jugements vrais, règne une certaine connexion objective des vérités, indépendante de la connaissance subjective que nous en avons."*[32]

À partir de là, peut-on parler d'un platonisme bolzanien ? Les concepts mathématiques sont des concepts objectifs qui tiennent leur existence de propriétés purement logiques qui les relient à d'autres concepts[33]. C'est l'énoncé de ces relations, c'est-à-dire les propositions, qui confère l'existence aux objets mathématiques. On peut en ce sens parler d'idéalités pures, indépendantes des objets qu'elles déterminent, sans réalisme, à l'inverse d'une conception dite platonicienne qui conduit à concevoir un réalisme des Idées, ou objets existant en eux-mêmes.

L'en-soi bolzanien est purement logique et formel ; d'où la dénomination d'ontologie formelle - dont Husserl voyait la première expression dans les *Contributions à une Théorie mieux fondée de la Science*[34] - ; ou d'objectivisme logique qui échappe aux critiques de création d'un monde de fictions abstraites :

> *"La théorie de l'en-soi logique en effet n'est pas une théorie de l'objet mais une théorie des propositions et de leurs connexions. Les objets ne sont jamais donnés par aucune espèce subjective d'intuition : ils sont représentés par les concepts objectifs qui composent ces propositions. Et ils sont représentés par ces concepts, non par notre esprit.* [...] *L'idée fondamentale, qui sera reprise par Frege mais qui n'aboutira pas chez lui à une invalidation du concept d'intuition pure*[(*)]*, est simplement qu'il n'existe aucune faculté correspondant à la constitution des vérités et des significations* [...]."[35]

---

32 Bolzano, B. : *Contributions*, II §2, cité par Laz, J., *Un platonicien débridé ? Bolzano, critique de l'intuitionnisme kantien. Op. cit.*, p. 19.

33 Laz, J. : *Un platonicien débridé ?... Op. cit.* p. 26 : *"la définition du nombre en fait une propriété d'ensembles"* ; p. 27 : *"une grandeur variable n'est pas une grandeur, mais le concept d'une infinité de grandeurs"*.

34 Husserl, E. : *Recherches logiques*, T. II. Trad. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer. Éd. P.U.F. Paris, 1972, p. 249.

35 Laz, J. : *Un platonicien débridé ?... Op. cit.*, pp. 28-29. (*) appelle cette note de l'auteur : *"En témoigne la place qu'il lui accorde en géométrie. Cf.* Grundlagen der Arithmetik, § 89. *En témoigne aussi son retour à Kant après l'abandon du logicisme"*.

Le vrai est ce qui se trouve, ou se saisit, non ce que nous produisons ou construisons, mais l'intuition n'est pas constitutive de cette saisie. Même quand l'imagination ne peut plus suivre... *"nous n'en continuons pas moins à faire nos calculs avec nos concepts et trouvons du vrai"*.[36]

Cependant l'intuitionisme n'était pas vaincu pour autant, et il allait trouver son théoricien chez le mathématicien hollandais Brouwer (1881-1966).

• L'*opposition de l'intuitionisme au formalisme* situe la question du statut des nombres dans une problématique plus générale, qui conduit à s'interroger sur le sens et la portée de cette opposition : s'agit-il seulement d'une prise de position sur le statut des objets mathématiques et le sens de l'activité mathématique, ou bien est-ce la fécondité et la possibilité-même de l'activité mathématique comme démarche rigoureuse qui se trouvent mises en question dans l'opposition des formalistes et des intuitionistes ?

L'intuitionisme s'élève contre tout formalisme qu'il soit logique ou ontologique. Cependant ces deux formalismes n'ont pas le même statut : ils correspondent à deux prises de position distinctes voire incompatibles. Le premier, qu'on peut qualifier de logique, s'en tient à la construction de structures soumises aux seules garanties de la logique, en mettant entre parenthèses la question de leur sens hors de cette détermination ; le second, qu'on peut qualifier d'ontologique, postule l'existence de telles structures comme formes constituantes de la réalité. La critique intuitioniste pose la question des statuts respectifs de la logique et du formalisme, dans leur rapport au sens, et semble attaquer prioritairement le premier, mais d'une façon générale c'est le fondement de la certitude intellectuelle qui est requestionné, par delà le rejet de toute structure que l'esprit mathématicien ne serait pas en mesure de (re-)construire.

La réflexion en la matière peut être ouverte à partir des questions suivantes : Les *Éléments* du XXème siècle[37], "emblème" et référence du formalisme, sont-ils l'évacuation du sens au profit de la structure logique définie par des propriétés logiques ? Peut-on voir dans l'entreprise bourbakiste qui reconstruit toutes les mathématiques à partir de la théorie des ensembles, le point ultime de la formalisation élevée au rang d'un principe absolu ? Et s'agit-il de l'évacuation *du* sens ou bien de ce sens fondé sur une intuition qui à s'en remettre à ses évidences s'est révélée trompeuse ? C'est le sens même du formel qui est ici en question. Est-il de cette *"pensée aveugle"* au service de laquelle Leibniz avait conçu son projet de caractéristique universelle[38] ?

---

36 Bolzano, B. : *Appendice*, § 9. Cf. ci-dessus § 2 fin.

37 Bourbaki, N. : *Éléments de Mathématique*. Éd. Hermann. Paris, depuis 1939.

38 Leibniz expose son projet de *charactéristique universelle* comme moyen de la pensée aveugle dans une *Lettre à Jean Frédéric II* (1679). In *Œuvres* éditées par Lucy Prenant, Éd. Aubier Montaigne. Paris, 1972, pp. 133-135.

Ce que J. Dieudonné écrit dans *L'Architecture des Mathématiques*[39] en mettant en avant la notion de structure comme *"seul(s) objet(s) mathématique(s) à proprement parler"*, permet de repenser où peut se situer "l'évacuation du sens intuitif" et ce qui peut faire d'un formalisme autre chose qu'une structuration stérilisante d'un savoir trouvé par ailleurs.

> *"On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une* structure mathématique. *Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée*[40] *; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations où interviennent ces éléments dans le cas des groupes, c'était la relation* $z = x \tau y$ *entre trois éléments arbitraires) ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les* axiomes *de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure,* en s'interdisant toute autre hypothèse *sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur "nature" propre).* [...]
> [...] CONCLUSION.
> *Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de* "formes" *abstraites - les structures mathématiques ; et il se trouve - sans qu'on sache bien pourquoi - que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner*

---

39 Bourbaki, N. : *"L'Architecture des Mathématiques"*. In Le Lionnais, F. : *Les grands courants de la pensée mathématique"*. Éd. Cahiers du sud. Paris, 1948. Rééd. Blanchard. Paris, 1962, p. 37-41 et 46-47.

40 *"Nous nous plaçons ici au point de vue « naïf » et n'abordons pas les épineuses questions, mi-philosophiques, mi-mathématiques, soulevées par le problème de la « nature » des « êtres » ou « objets » mathématiques. Qu'il nous suffise de dire qu'au pluralisme initial de la représentation mentale de ces « êtres » imaginés au début comme des « abstractions » idéales de l'expérience sensible, et conservant toute l'hétérogénéité de celle-ci - les recherches axiomatiques du XIXème et du XXème siècles ont peu à peu substitué là aussi une conception unitaire ramenant progressivement toutes les notions mathématiques d'abord à celle de nombre entier, puis, en une deuxième étape, à la notion d'ensemble. Cette dernière longtemps considérée comme « primitive » et « indéfinissable » a été l'objet de polémiques sans fin, dues à son caractère d'extrême généralité et à la nature très vague des représentations mentales qu'elle évoque ; les difficultés ne se sont évanouies que lorsque s'est évanouie la notion d'ensemble elle-même (et avec elle, tous les pseudo-problèmes métaphysiques sur les « êtres » mathématiques), à la lumière des récentes recherches sur le formalisme logique ; dans cette nouvelle conception, les structures mathématiques deviennent à proprement parler, les seuls « objets » de la mathématique. Le lecteur trouvera de plus amples développements sur ce point dans les deux articles suivants : J. Dieudonné :* Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques (Revue Scientifique, *LXXVII (1939), pp. 224-232). H. Cartan :* Sur le fondement logique des mathématiques (Revue Scientifique, *LXXXI (1943), pp. 3-11)."*

toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot "forme" qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un "formalisme" ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les idées *au* calcul *»."*

L'intuitionisme, dont L. E. J. Brouwer est le théoricien, récuse ce formalisme parce qu'il lui apparaît reposer sur une confiance excessive dans les principes de la logique : il attaque le problème, pourrait-on dire, à sa racine, en mettant en question d'abord le fondement logique de ce formalisme, et par voie de conséquence, le statut de ses produits, dans leur existence comme dans leur vérité. Nous ne pouvons être véritablement assurés de la vérité d'une propriété ou de l'existence d'un objet qui si nous en avons une expérience mentale. Toute construction repose, en son point de départ sur une intuition fondamentale qui nous donne le nombre :

"Le néo-intuitionisme considère la dissociation d'instants vécus en parties qualitativement distinctes, qui ne se réunissent qu'en restant séparées par le temps, comme le phénomène fondamental de l'intellect humain, phénomène qui, par abstraction de son contenu émotionnel, donne le phénomène fondamental de la pensée mathématique, l'intuition de la dyade pure. Cette intuition de la dyade, intuition originaire des mathématiques, engendre non seulement les nombres un et deux, mais aussi tous les nombres ordinaux finis, attendu que l'un des éléments de la dyade peut être pensé comme une nouvelle dyade, et que ce processus s'itère indéfiniment ; en poursuivant, il engendre le nombre ordinal infini le plus petit, ω*. Finalement cette intuition originaire des mathématiques, où s'unissent le connecté et le séparé, le continu et le discret, donne lieu immédiatement à l'intuition du continu linéaire, c'est-à-dire du "entre", qui ne se laisse pas épuiser par l'interposition de nouvelles unités, et qui donc ne peut jamais être pensé comme une simple collection d'unités.*

Par ce biais l'apriorité du temps confère la qualité de jugements synthétiques a priori non seulement aux propriétés de l'arithmétique, mais aussi à celles de la géométrie ; et cela non seulement pour la géométrie élémentaire à deux ou trois dimensions, mais aussi bien pour les géométries non-euclidiennes et à n dimensions. Descartes nous a en effet appris à réduire ces espaces à l'arithmétique au moyen du calcul sur les coordonnées.

Du présent point de vue de l'intuitionisme, tous les ensembles mathématiques d'unités capables de prétendre à ce titre sont donc *dérivables de l'intuition originaire, et cela ne se peut faire qu'en combinant un nombre fini de fois les deux opérations : "créer un nombre ordinal fini", et "créer le nombre ordinal infini ω". Ici il faut entendre que pour ce dernier but n'importe quel ensemble préalablement construit ou n'importe quelle opération constructive préalablement effectuée peut être prise comme unité. En conséquence l'intuitionisme ne reconnaîtra que l'existence d'ensembles dénombrables, c'est-à-dire d'ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque soit avec les éléments d'un nombre ordinal fini, soit avec ceux du nombre ordinal infini ω. Et dans la construction de ces ensembles, ni le langage usuel, ni un langage symbolique quelconque ne sauraient jouer d'autre rôle que d'auxiliaire non-mathématique pour soulager la mémoire mathématique ou permettre à des individus distincts de construire le même ensemble.*

Par cette raison, l'intuitioniste ne peut jamais se croire assuré de l'exactitude d'une théorie mathématique s'il n'en possède pour garanties que la démonstration que cette théorie est non-contradictoire, la possibilité de définir ses concepts par une suite finie de mots[41], ou la quasi-certitude qu'elle ne conduira jamais à une mésinterprétation dans les relations humaines[42]."[43]

La logique se trouve ainsi destituée de son rôle de fondement. La validité du principe de non-contraduction n'est pas mise en doute, mais son pouvoir limité. La propriété logique de non-contradiction n'est pas une preuve d'existence :

"À supposer que nous ayons prouvé par quelque méthode, sans penser à ses interprétations mathématiques, qu'un système logique élaboré à partir de certains axiomes linguistiques est consistant ; c'est-à-dire tel qu'il ne peut exister deux théorèmes contradictoires à aucun niveau de son développement ; à supposer, en outre, qu'après cela nous trouvions une interprétation mathématique de ces axiomes (laquelle par conséquent exigera la construction d'un système mathématique dont les éléments satisferont à certaines relations mathématiques données) ; s'ensuit-il de la consistance du système logique qu'il existe *un tel système mathématique ? Jamais les axiomaticiens n'ont prouvé une telle conclusion, pas même dans le cas où les conditions données impliquent que ce soit un système mathématiquement constructible qui est exigé. Ainsi, par exemple, il*

---

41 *"Voir cependant Poincaré, H. :* La logique de l'infini. *In* Scientia *12 n° 24, 1912 p. 6. Rééd. in* Dernières pensées. *Éd. Flammarion. Paris, 1913"*. Note du traducteur.

42 *"Voir cependant Borel, E. :* Le calcul des intégrales définies. *In* Journal de mathématiques pures et appliquées, *8, 1912, p. 221"*. Note du traducteur.

43 Brouwer : *Intuitionisme et Formalisme*, discours d'ouverture que Brouwer a lu à l'Université d'Amsterdam le 14 octobre 1912. Traduit dans Largeault, J. : *Intuition et Intuitionisme*. Éd. Vrin. Paris, 1993, pp. 39-53. Ici pp. 43-44.

> *n'a nulle part été prouvé qu'un nombre fini, soumis à un système de conditions dont on a prouvé la consistance, doive jamais exister."*[44]

La validité du principe du tiers-exclu est contestée. Dans un article de 1908 intitulé *Qu'on ne peut pas se fier aux Principes logiques*[45], Brouwer rejette la validité du principe du tiers-exclu dans les opérations sur les systèmes infinis qui mettent en jeu des suites dénombrablement infinies : c'est une fois le système construit qu'on peut être assuré que le problème avait une solution. Dans la *seconde observation* des *Considérations intuitionistes sur le Formalisme* de 1928, Brouwer condamne son application *mécanique* (i. e. dépourvue de pensée, non contrôlée et non limitée par la réflexion : *gedankenlos*), et réaffirme que son domaine de validité se limite aux systèmes finis[46].

L'intuitionisme revendique pour tout objet mathématique, pour toute propriété, la possibilité de les construire. C'est cette construction qui est la source de la certitude intellectuelle parce qu'elle est le fondement de la représentation que l'esprit a de l'objet. C'est pourquoi, il rejette également ce qu'on a appelé une conception platonicienne des mathématiques qui met en jeu un autre type de formalisme, une théorie ontologique des formes, comme celle à laquelle R. Thom se réfère.[47]

*

* *

44 Brouwer : *Collected Works I.* Par Heyting A., North Holland Publishing Cy, Amsterdam, Oxford, American Elsevier Publishing Cy, Inc. New York, 1975. Trad. J.-P. Cléro. In *Épistémologie des Mathématiques*. Éd. Nathan. Paris, 1990, p. 82.

45 Dans Largeault, J. : *Intuitionisme et Théorie de la Démonstration*. I. Éd. Vrin. Paris, 1992, pp. 18-23, partic. 21-22.

46 Brouwer, L. E. J. : *Considérations intuitionistes sur le Formalisme* (1928). Trad. dans Largeault, J. : *Intuitionisme et Théorie de la Démonstration*. I. *Op. cit.*, pp. 18-23, et dans Harthong, J. et Reeb, G. : *"Intuitionnisme 84. Annexe 1"*. In *La Mathématique non standard*. Éd. du CNRS. Paris 1989, pp. 244-245.

47 Cf. ci-dessus, fin du premier parcours.

◊ ◊ ◊ *Et pour prolonger ...*

Dedekind, R. : *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?* (1887). Trad. J. Milner - H. Sinaceur, *La Bibliothèque d'Ornicar*. Paris, 1978, pp. 65-66.

"En ne définissant l'arithmétique (algèbre, analyse) que comme une partie de la logique, je proclame déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée. Ma principale réponse à la question posée dans le titre de cet ouvrage est celle-ci : les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses. Seule la construction purement logique de la science des nombres et le domaine continu des nombres que cette dernière permet d'obtenir nous mettent en mesure d'examiner avec exactitude nos représentations du temps et de l'espace, en les rapportant à ce domaine de nombres créé dans notre esprit[1].

Si l'on suit exactement ce que nous faisons lorsque nous comptons un ensemble ou un nombre [Anzahl] *de choses, on est amené à prendre en considération la capacité de l'esprit à mettre en rapport des choses avec des choses, de faire correspondre une chose à une chose, ou de représenter une chose par une autre chose qui est son image, capacité sans laquelle la pensée est absolument impossible. C'est sur cette base unique, et d'autre part tout à fait indispensable, que doit selon moi - comme je l'ai déjà dit expressément dans une annonce du présent écrit - être construite la science des nombres dans son ensemble."*

[1]. *Cf. le paragraphe 3 de mon ouvrage* "Continuité et nombres irrationnels" *(Brunswick, 1872).*

Wittgenstein, Ludwig : *Remarques sur les Fondements des Mathématiques* (1956). Éd. NRF-Gallimard. Paris, 1983, pp. 199-200, § 11 et 12 (1942-1944), & pp. 106-107, § 2 (1937-1938).

" § 11. [...] *Les nombres sont des formes (je ne parle pas des signes numériques) et l'arithmétique nous apprend les propriétés de ces formes. Mais la difficulté est alors que ces propriétés des formes sont des* possibilités, *non les propriétés formelles des choses d'une telle forme. Et ces possibilités à leur tour se révèlent possibilités physiques ou psychologiques (de la décomposition, de l'assemblage, etc.). Mais les formes jouent seulement le rôle des images que l'on emploie de telle et telle façon. Ce que nous donnons, ce ne sont pas des propriétés des formes, mais des transformations des formes, qui se présentent comme n'importe quels paradigmes.*

§ 12. *Nous ne jugeons pas les images, nous jugeons au moyen des images. Nous ne les examinons pas pour elles-mêmes, mais examinons autre chose avec elles.* [...]

§ 2. *Mais le mathématicien ne découvre pas, il invente.* "La démonstration a un résultat surprenant !" *- S'il te surprend, c'est que tu ne le comprends pas. Car ici la surprise n'est pas légitime comme à l'issue d'une expérience. À ce moment - inclinerais-je à dire - tu dois te rendre à sa séduction, mais pas quand elle t'est communiquée au bout d'un enchaînement déductif. Car alors elle signifie surtout que règne encore l'obscurité ou le malentendu.* [...] *l'on n'a cette surprise que lorsqu'on ne connaît pas encore la façon de faire.* [...]

• *Il n'y a pas de découverte du fait que 13 suit 12. C'est notre technique - nous fixons, nous enseignons notre technique de cette façon. S'il y a une découverte - c'est que c'est une chose qui vaut particulièrement la peine d'être faite."*

Note citée par Bouveresse, J. : *La force de la règle. Op. cit.*, p. 111.