BUFFON ET LE PROBLÈME DE L'AIGUILLE :

LE *MÉMOIRE SUR LE JEU DE FRANC-CARREAU* DE 1733.

Frédéric MÉTIN.

Présentation.

Buffon est essentiellement connu en tant qu'humaniste des Lumières, auteur d'une monumentale *Histoire Naturelle.* Mais parmi ses écrits figurent quelques textes mathématiques composés pour la plupart avant sa consécration comme Intendant au Jardin du Roi ; ces textes, s'ils présentent souvent le défaut de l'imprécision, voire de l'erreur de calcul, ont pourtant l'intérêt de témoigner des préoccupations mathématiques d'un jeune homme de son siècle, qui allait prouver sa valeur dans un autre domaine des sciences.

Les rapports de Buffon avec les nombres semblent être passionnés, conflictuels : il réfléchit au problème posé par l'infinité des entiers (existe-t-il un plus grand nombre entier ?), travaille sur le concept de durée moyenne de la vie et d'espérance de vie (une recherche désespérée : comment assigner un nombre à la mort ?), invente les probabilités géométriques (comment attribuer un nombre au hasard ?), précise l'utilisation de différentes bases et le passage de l'une à l'autre (ce qu'il appelait les échelles arithmétiques). Il est étonnant de constater l'ardeur qu'il met à écrire sur ces sujets mathématiques alors qu'il est en fait attaché à la description du Réel, comme sa carrière le prouvera.

La relecture des textes permet en fait de mieux saisir le rapport que pouvait entretenir un philosophe naturaliste des Lumières avec la "Science pure". On devrait s'intéresser plus souvent à la conception des Mathématiques de ceux qui ne les pratiquent pas d'ordinaire : la vision de non-spécialistes nous permettrait sans doute de mesurer beaucoup plus à propos l'ambiance et la pensée d'une époque sur les Mathématiques, puisque après tout la Science n'avance pas uniquement grâce aux Découvreurs.

Le temps imparti lors de l'atelier du Colloque de Cherbourg n'avait pas permis d'envisager d'autre étude que celle du *Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau*, les personnes intéressées par ces questions pourront se reporter à la brochure à paraître à l'IREM de Dijon, très probablement sous le titre : *De l'aiguille à l'infini, Textes mathématiques de Buffon.*

*
* *

Repères biographiques.

Né en 1707 à Montbard d'une famille aisée, Georges-Louis Leclerc aurait dû suivre la voie tracée par son père et embrasser une carrière juridique. Mais il aimait les Mathématiques. Diplômé de la Faculté de Droit de Dijon à dix-neuf ans, il abandonna pourtant la perspective d'une respectabilité provinciale pour se consacrer à sa passion des Sciences. Il correspondait avec Cramer, se fit connaître de Clairaut, entreprit de voyager dans le Sud de la France et en Italie.

Mais à la mort de sa mère, survenue alors qu'il n'avait que 24 ans, le remariage de son père avec une très jeune femme le poussa à réclamer son héritage et à s'installer sur sa terre natale ; Leclerc devint Comte de Buffon.

Les années qui suivent le verront entreprendre la conquête de l'Académie Royale des Sciences ; grâce au soutien de Clairaut et Maupertuis, il se fera une certaine réputation de probabiliste. C'est son *Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau* qui "impressionnera" le plus ces Messieurs de l'Académie : il s'agit en effet du premier essai de calcul de probabilités dans un contexte géométrique. Buffon y emploie les ressources du tout jeune calcul intégral, mais ne les maîtrisant probablement pas il a recours en final à une astuce faisant appel à l'aire d'une arche de cycloïde, ce qui plaira beaucoup à Fontenelle, qui parle d'élégance dans le compte rendu très favorable qu'il en fera pour l'*Histoire de l'Académie des Sciences*. Ce mémoire est capital pour la carrière future de Buffon, puisqu'il constitue son premier "fait d'armes" au sein de l'Académie, et qu'il facilitera son entrée l'année suivante dans la classe de Mécanique.

*
* *

Le *Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau.*

La règle du jeu est la suivante : une pièce de monnaie est jetée sur un sol carrelé et les joueurs parient sur le nombre de carreaux (ou de joints) qu'elle rencontrera : zéro joint, un, deux joints, trois ou plus. Buffon propose de chercher les probabilités de gain de chaque joueur, mais va en fait s'intéresser au calcul du rapport des chances de chacun à l'ensemble des autres ! Il change les règles annoncées : chacun des joueurs ne sera pas opposé aux autres, mais pariera simplement sur le nombre de joints rencontrés. Vient alors la recherche du rapport du diamètre de la pièce au côté du carreau pour que le jeu soit équitable. Où est donc ce *style* si cher au futur auteur de la célèbre phrase *"Le style, c'est l'Homme"*[1] ?

Buffon abordera ensuite le cas où l'objet lancé n'est plus une pièce mais une aiguille et la cible un sol parqueté (qui revient à un sol recouvert de carreaux de longueur indéfinie) et c'est là qu'il fera vraiment preuve d'audace.

Dans l'ensemble du texte, le calcul est légitimé par ces principes :

1) Le rapport à trouver est : $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas défavorables}}$, il vaudra 1 si le jeu est équitable,

2) Les différents nombres recherchés sont <u>représentés</u> par l'aire de la surface sur laquelle tombe la pièce.

*
* *

Première partie : la pièce sur les carreaux.

Dans tout le texte qui suit, a et b représentent respectivement le côté du carreau et le diamètre de l'écu.

<u>Premier et second Joueurs : mise en place d'une méthode.</u>

Dès le premier problème, on comprend que la question posée n'est pas vraiment celle qui est résolue : le premier joueur, qui parie sur zéro joint (c'est à dire que la pièce tombera à Franc Carreau), est opposé au second, qui parie le contraire (que la pièce rencontrera <u>au moins</u> un joint). Pour que le jeu soit équitable, les deux superficies qui représentent les chances de chacun

1 En fait, on lit dans le *Discours sur le Style*, la phrase : *"Le style est de l'Homme"*.

doivent être égales. Buffon donne les résultats, sans justifier les calculs, pour les cas suivants : carreaux carrés, triangulaires équilatéraux, losanges et hexagonaux. À chaque fois, la superficie "favorable" au joueur est déterminée comme lieu possible du centre de la pièce : par exemple, dans le cas d'un carreau carré, le franc carreau aura lieu si le centre de la pièce est distant du joint d'une longueur au moins égale au rayon de la pièce, donc la surface en question est un carré intérieur au carreau et de coté *a-b* (le côté du carreau moins le diamètre de l'écu).

1) <u>Carreaux carrés</u> :

La condition s'écrit $(a-b)^2 = \frac{1}{2}a^2$, on résout simplement l'équation du second degré en $\frac{a}{b}$ qui en est déduite. D'où un rapport $\frac{a}{b}$ égal à $2-\sqrt{2}$ ou $2+\sqrt{2}$; ce dernier étant le seul supérieur à 1, c'est le rapport recherché (on doit avoir $a<b$). On vérifie aisément que $2+\sqrt{2} = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \approx 3{,}414$, qui est le résultat annoncé par Buffon.

2) <u>Carreaux en forme de triangles équilatéraux</u> :

Les cas favorables au premier joueur sont représentés par un petit triangle équilatéral inscrit dans le grand. La surface du petit triangle est la moitié de celle du grand, donc le rapport des longueurs est $\sqrt{\frac{1}{2}}$. La condition d'égalité des superficies revient donc à l'équation :

$$\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{3b}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{d'où } \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}\sqrt{3}+6=0.$$

On trouve finalement deux valeurs possibles, dont la seule supérieure à 1 est $\frac{a}{b} = \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{3} \approx 5{,}91$ (à peu près 6, selon l'auteur, qui donne le résultat sous la forme plus complexe $\frac{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$).

3) <u>Carreaux en forme de losanges</u> :

En principe, le résultat devrait dépendre de la forme du losange, mais ce n'est pas le cas ici.

En fait, la seule solution supérieure à 1 est $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sin\Theta}$, qui dépend effectivement de l'angle Θ, le plus petit des deux angles formés par des côtés successifs du losange.

La seule possibilité, étant données les conditions sur l'angle, est que l'on ait $\Theta=\frac{\pi}{3}$, ce qui impliquera $\sin\Theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}=1+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\approx 3{,}94$ qui est effectivement le résultat annoncé.

Buffon n'a donc pas choisi n'importe quel losange : il correspond tout simplement à l'assemblage de deux triangles équilatéraux !

4) Carreaux hexagonaux :

Un raisonnement équivalent aux précédents nous donne comme équation :

$$\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{3b}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où :}\qquad \left(a\sqrt{3}-b\right)^2=\frac{3a^2}{2},$$

et en se ramenant à une équation du second degré en $\frac{a}{b}$, on obtient le résultat conforme $\frac{a}{b}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}}=1+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}\approx 1{,}97.$

Buffon revient ensuite un court instant à la réalité : le joint n'est pas une vraie ligne droite et son épaisseur donne un avantage à celui qui parie sur lui, d'où la nécessité de modifier en conséquence le rapport des tailles en faveur des carreaux.

Troisième Joueur : Buffon entre en conflit avec les nombres.

L'énoncé encore une fois n'est pas clair ; d'ailleurs, la fin du paragraphe est révélatrice : "ceci n'a besoin que d'être *bien entendu*", un grand classique chez les auteurs qui n'ont pas envie d'avoir à s'expliquer... Si l'on considère la figure qu'il propose, on comprend la règle établie : le joueur parie que la pièce rencontrera deux joint *ou plus* et son adversaire parie que la pièce touchera au plus un joint. Il n'y a donc pas de rapport avec les joueurs précédents, sauf peut-être dans l'intention annoncée.

Les calculs effectués ne sont pas plus justifiés que les précédents ; les résultats sont justes, mais pour ce qui est des approximations, le texte est sérieusement à revoir ! En effet :

1) sur des carreaux carrés, le rapport est $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ et Buffon annonce un peu moins de $1\frac{1}{3}$ ce qui est une erreur importante, si notre lecture est la bonne ; le paragraphe suivant confirme pourtant l'interprétation :

2) les carreaux triangulaires : pas de problème, le rapport est double, cela se vérifie. Le calcul ne demandait pas de résultat approché.

3) losanges : résultat correct, $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, mais l'approximation donnée est 1,4, au lieu de 1,63, pourquoi cette erreur ?

4) enfin, sur des hexagones, Buffon donne une valeur approchée de 1,125 ($1+\frac{1}{2}$ quart), quoi que la valeur exacte (qui est calculée) soit d'environ 1,15 ($1+\frac{1}{2}$ tiers).

D'où viennent toutes ces erreurs ? On dirait une sorte de confusion sémantique entre les quantièmes, ou alors l'utilisation abusive d'un algorithme erroné d'extraction des racines carrées. Mais on a vu précédemment que Buffon avait prouvé par ailleurs sa compétence en Mathématiques, ce qui implique en particulier à l'époque une certaine habileté au calcul. Voyons la suite...

Quatrième Joueur : La mésentente se confirme.

L'exposé, on en a pris l'habitude, n'est pas des plus précis, en particulier à cause de l'usage du mot "reste", assez ambigu. Le quatrième joueur parie en fait que la pièce tombera sur un des sommets du carreau, ce qui est le dernier cas possible. L'ensemble des surfaces contribuant à sa réussite est une portion de cercle, réunion de portions égales entre elles, centrées en chacun des sommets. On cherche encore une fois une condition sur ces surfaces pour que l'adversaire du joueur (qui n'est pas la somme des précédents) ait une probabilité de gagner égale à la sienne.

Et c'est encore un florilège d'erreurs dans les approximations :

1) sur des triangles : le résultat $1 : \frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{22}$ doit se lire $1 : \sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{22}}$, mais c'était l'usage typographique de l'époque, l'auteur n'y est pour rien ; ce n'est pas le cas de la valeur approchée, estimée à "un peu plus d'un quart", alors que le résultat correct serait environ 1,347 (un peu plus d'un tiers : encore une confusion entre les quantièmes ?).

2) sur des losanges : le résultat est le même que sur les triangles équilatéraux, ce qui se comprend aisément, puisque, le losange de Buffon étant égal à deux triangles équilatéraux juxtaposés, la proportion reste la même.

3) sur des carrés : $1:\frac{\sqrt{11}}{7}$ doit se lire $1:\sqrt{\frac{11}{7}}$, selon les critères typographiques évoqués plus haut (ce devrait être $1:\sqrt{\frac{7}{11}}$), mais le résultat est faux, et l'erreur est difficilement imputable à quelqu'un d'autre que Buffon ! D'ailleurs la valeur approchée est 1, 254 (un peu plus d'un quart), alors qu'il annonce "un peu plus d'un cinquième" ...

4) sur des hexagones : $1:\frac{\sqrt{21\sqrt{3}}}{44}$ doit se lire $1:\sqrt{\frac{21\sqrt{3}}{44}} \approx 1{,}099$, c'est à dire environ $1+\frac{1}{10}$, alors que Buffon annonce $1+\frac{1}{13}$.

La fin de cette partie du texte nous réserve une surprise : dans sa conclusion, Buffon indique que le problème serait le même si l'on considérait que les joueurs parient pour zéro joint, un, deux, trois joints exclusivement ; le seul ennui : c'est justement ce qu'il avait annoncé au début et qu'il n'a pas calculé effectivement !

Remarques sur cette première partie :

En découvrant ce texte, le lecteur a pu penser qu'il a été rédigé à la va-vite ; cela ressemble à des divagations d'explorateur peu soucieux de rigueur et de style. Mais comment de telles erreurs ont-elles pu passer inaperçues, surtout après une lecture à l'Académie des Sciences et une publication dans l'*Histoire Naturelle* ? Cette dernière se serait-elle faite sans aucune relecture critique des résultats ?

*

* *

Seconde Partie : l'aiguille sur des lattes de parquet.

Voilà ce qui fit la célébrité de Buffon : l'audace du calcul d'une probabilité géométrique, sans doute la première jamais envisagée de cette manière. La probabilité n'est pas calculée en tant que telle, mais comme précédemment, la question est de déterminer un rapport pour que le jeu soit équitable. On jette donc maintenant une baguette sur un sol parqueté, et le joueur parie qu'elle ne rencontrera pas les joints du parquet. La question est de trouver *"le rapport entre la longueur de l'aiguille et la largeur des lattes"* (et donc pas du tout une probabilité !) pour que les chances de gain et de perte soient égales. La nouveauté de la méthode est de ne pas avoir calculé les probabilités directement, mais d'avoir cherché une formalisation différente du problème, qui est continu et non plus discret ; pas question en effet de calculer un *nombre* de cas favorables comme c'était auparavant le cas dans la théorie naissante des probabilités. Pas question non plus de rechercher seulement des surfaces, car le problème n'a plus la symétrie radiale du précédent. Buffon annonce la couleur en évoquant des "*comparaisons d'espaces*".

Croisera ? Croisera pas ?

Buffon, raisonnant sur le milieu de la baguette, utilise la symétrie du problème par rapport au milieu des lattes, et ne va s'intéresser qu'à la moitié supérieure de celles-ci. Chaque position du milieu de la baguette implique une infinité d'orientations possibles (tout un disque, en fait) qui se ramènent par symétries à un seul quart de cercle, lieu de l'extrémité de la baguette. Le raisonnement est assez audacieux pour l'époque (quoique Pascal ait, lui aussi, osé envisager des sommes continues de surfaces dans son *Traité de la Roulette*) : à chaque position du milieu de la baguette est attaché un quart de cercle de longueur $C=\frac{11b}{7}$ (en fait $\frac{\pi b}{2}$, où b est le rayon de la baguette, et $\frac{22}{7}$ la valeur de l'époque de notre "moderne" π) ; toutes les positions possibles pour qu'il n'y ait pas rencontre dans ces conditions correspondent à l'intérieur d'un rectangle $f\times(a-b)$ (où f est la longueur des lattes, qui n'interviendra plus à la fin du calcul, et a leur demi largeur).

Voici l'astuce : l'auteur écrit tous les "cas" possibles comme une *somme continue d'arcs de cercles*, non pas le long d'une courbe, ce qui serait acceptable , mais sur une surface (le rectangle) ! D'où l'expression $f(a-b)C$ à laquelle on doit ajouter tous les cas où le centre de la baguette ne tombe pas dans la bande intérieure, mais où la baguette est trop inclinée pour atteindre le bord.

Si le milieu de la baguette n'est pas dans la bande intérieure, les positions favorables au joueur qui parie sur le joint ne forment qu'une partie du quart de cercle considéré, le restant étant favorable à l'autre joueur. Pour chaque position du milieu, Buffon nomme y l'arc favorable au premier joueur (on a $y=y(x)$, si x représente l'ordonnée du milieu de la baguette) ; pour les milieux sur une même verticale, la somme des positions favorables au premier joueur sera donc $\int ydx$, et, pour toutes les verticales, $f\int ydx$. La somme des positions favorables au second est ce qui reste dans la bande supérieure, c'est à dire $fbc-f\int ydx$, que l'on ajoute à ce qui était trouvé précédemment.

Finalement, le rapport recherché est $\dfrac{ac-\int ydx}{\int ydx}$ et c'est ici que Buffon s'en tire par une pirouette : la condition d'égalité implique[2] : $a=4\dfrac{\int ydx}{\pi b}$, cette dernière intégrale est l'aire d'une cycloïde engendrée par un cercle de rayon b donc vaut b^2 : merci Blaise Pascal[3] !

On trouve finalement que le rapport doit être : $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\pi}{4}\approx\dfrac{3}{4}$.

La fin du texte est truffée de fautes d'impression et n'a pas pu être abordée pendant l'atelier...

*
* *

Remarque finale.

Même si l'habitude est de l'attribuer à l'auteur, à aucun moment Buffon n'a calculé la probabilité qu'a l'aiguille de tomber entre les lattes du parquet. Son problème était tout autre, on l'a vu : chercher la taille de l'objet lancé pour que le jeu soit équitable. Ce travail de jeunesse, s'il n'a jamais été renié (puisque réédité), demeure néanmoins le premier exemple connu de problème de probabilités dans un contexte purement géométrique. Il est pourtant dommage que l'auteur n'ait pas poussé plus loin son investigation, car il eût été intéressant de voir jusqu'où pouvait aller un amoureux déçu des Mathématiques. Le mémoire certes est novateur, mais tellement peu soigné ! Tant d'erreurs grossières montrent à quel point un homme de ce rang pouvait être en conflit avec l'univers numérique, combattant peut-être par là même l'adage des Pythagoriciens selon lequel *"Tout est Nombre"*. On peut penser que l'idée d'une Réalité décrite par les nombres entiers a trouvé sa fin avec Buffon.

*
* *

2 Ou plutôt ce rapport avec la valeur $\pi \approx 22/7$ de l'époque, comme précédemment.

3 En effet, dans le *Traité de la Roulette*, Pascal s'autorise à additionner des arcs de cercle pour obtenir la surface totale de la cycloïde, moyennant l'acceptation d'élément d'arcs infinitésimaux. On est alors à la limite du calcul intégral, qui ne verra le jour qu'à la fin du siècle de Pascal, sous la plume de Newton et de Leibniz.

Bibliographie.

BUFFON, Georges Louis Leclerc, (Comte de).

- *Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau* : résumé et commenté par Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences* de 1733, Paris, Imprimerie Royale, 1735.

- *Histoire Naturelle, générale et particulière, supplément, tome IV*, contenant en particulier l'*Essai d'Arithmétique Morale*, dans lequel est inséré le Mémoire (pp. 95 à 105), Paris, Imprimerie Royale, 1777.

HANKS, Lesley :

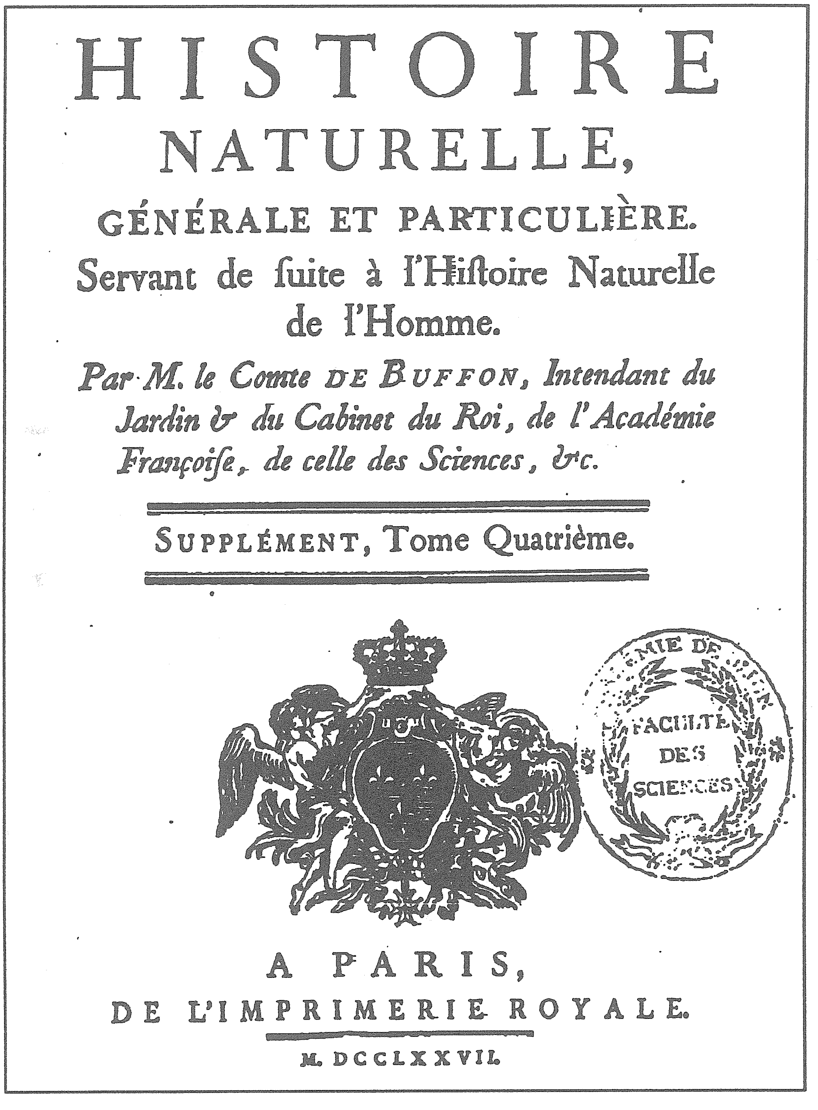
- *Buffon avant l'Histoire Naturelle*, Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Paris, série "*Recherches*", tome XXIV, Paris, PUF, 1966.

ROGER, Jacques :

- *Buffon, un philosophe au Jardin du Roi*, Paris, Librairie Arthème Fayard, 1989.

*

* *



HISTOIRE
NATURELLE,
GÉNÉRALE ET PARTICULIÈRE.
Servant de ſuite à l'Hiſtoire Naturelle
de l'Homme.

Par M. le Comte DE BUFFON, *Intendant du Jardin & du Cabinet du Roi, de l'Académie Françoiſe, de celle des Sciences, &c.*

SUPPLÉMENT, Tome Quatrième.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXVII.

Page de Titre de l'*HISTOIRE NATURELLE*,
Supplément, Tome Quatrième, 1777.

ANNEXE.

Extrait[4] de l'*HISTOIRE NATURELLE, GÉNÉRALE ET PARTICULIÈRE.* *Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme* (1777). Supplément, Tome Quatrième. XXIII, pp. 95-105.

XXIII.

L'Analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout-à-fait accidentel, & que le hasard selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse ; pour s'en assurer, il suffira de faire attention que les jeux & les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes ; l'esprit humain plus familier avec les nombres qu'avec les mesures de l'étendue les a toujours préférés ; les jeux en sont une preuve, car leurs loix sont une arithmétique continuelle ; pour mettre donc la Géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue & sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ses conditions qui sont fort simples.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

Je cherche d'abord le sort du premier joueur & du second ; pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le sort du premier joueur sera à celui du second, comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite ; cela peut se démontrer

4 Le lecteur pourra retrouver l'original de cet extrait dans la brochure éditée par l'IREM de Dijon pour l'atelier de Cherbourg, et dans un fascicule en préparation à Dijon. Le texte, ici réédité en typographie moderne, n'a pas été modifié quant à l'orthographe et aux notations. La figure unique de Buffon y est insérée deux fois, en fac-similé et sous forme modernisée.

aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est par-tout éloignée du contour du carreau, d'une distance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement sur deux ou plusieurs carreaux, puisqu'alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu, sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne qui fait le reste du carreau ; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde ; ainsi pour rendre égal le sort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite, soit égale à celle de la Couronne, ou ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.

Je me suis amusé à en faire le calcul, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau devoit être au diamètre de l'écu, comme $1 : 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, à peu-près trois & demi fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Pour jouer sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire, presque six fois plus grand que le diamètre de la pièce.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, presque quatre fois plus grand.

Enfin sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire presque double.

Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce que celles-ci sont les seules dont on puisse remplir un espace sans y laisser des intervalles d'autres figures ; & je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, & que par conséquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois & demi fois, aux triangulaires six fois, aux lozanges quatre fois, & aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Je cherche maintenant le sort du troisième joueur qui parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; & pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux, une figure semblable comme j'ai déjà fait, ensuite je prolonge les côtés de cette figure inscrite jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le sort du troisième joueur sera à celui de son adversaire, comme la somme des espaces compris entre le prolongement de ces lignes & les côtés du carreau, est au reste de la surface du carreau. Ceci n'a besoin pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

J'ai fait aussi le calcul de ce cas, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, plus grand d'un peu moins d'un tiers.

Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, double.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ deux cinquièmes.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'est à-dire, plus grand d'un demi-quart.

Maintenant le quatrième joueur parie que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu se trouvera sur six joints, que sur des carreaux carrés ou en lozanges, il se trouvera sur quatre joints, & sur des carreaux hexagones, il se trouvera sur trois joints ; pour déterminer son sort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, & je dis que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, son sort sera à celui de son adversaire, comme la moitié de la superficie de ce cercle est à celle du reste du carreau ; que sur des carreaux carrés ou en lozanges, son sort sera à celui de l'autre, comme la superficie entière du cercle est à celle du reste du carreau ; & que sur des carreaux hexagones, son sort sera à celui de son adversaire, comme le double de cette superficie du cercle est au reste du carreau. En supposant donc que la circonférence du cercle est au diamètre, comme 22 sont à 7, on trouvera que pour jouer à jeu égal sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{11}$, c'est-à-dire, plus grand d'un peu plus d'un quart.

Sur des carreaux en lozanges, le sort sera le même que sur des carreaux triangulaires équilatéraux.

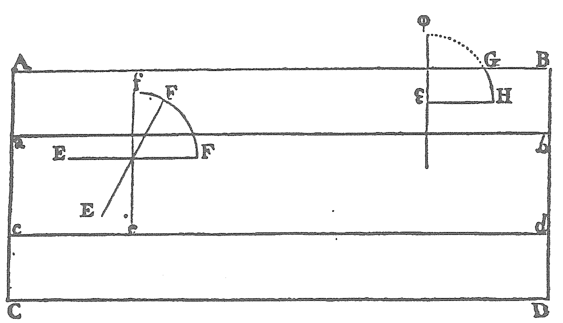
Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1:\frac{\sqrt{11}}{7}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ un cinquième.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{21\sqrt{3}}}{44}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ un treizième.

J'omets ici la solution de plusieurs autres cas, comme lorsque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que sur un joint ou sur deux, sur trois, &c. ils n'ont rien de plus difficile que les précédens ; & d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

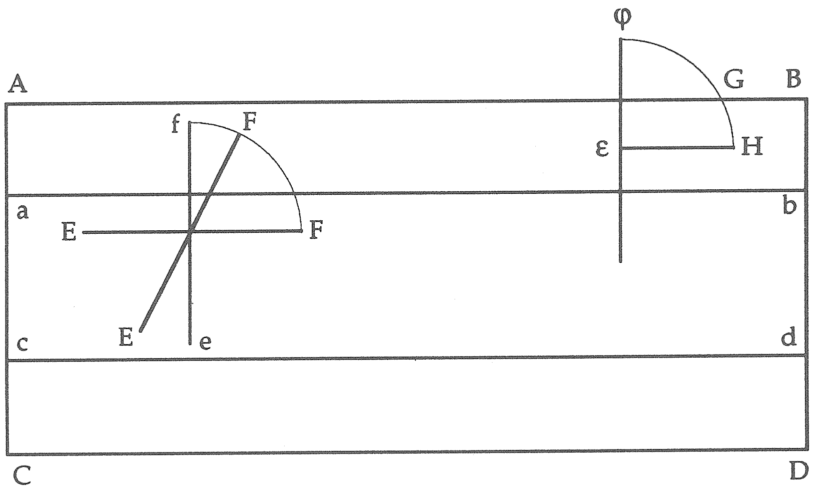
Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetoit une pièce d'une autre figure, comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderoit un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces comme nous allons le démontrer.

Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.*



Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles *A B* & *C D* du parquet, deux autres lignes parallèles *a b* & *c d*, éloignées des premières de la moitié de la longueur de la baguette *E F*, & je vois évidemment que tant que le milieu de la baguette sera entre ces deux secondes parallèles, jamais elle ne pourra croiser les premières dans quelque situation *E F*, *e f*, qu'elle puisse se trouver ; & comme tout ce qui peut arriver au-dessus de *a b* arrive de même au-dessous de *c d*, il ne s'agit que de déterminer l'un ou l'autre ; pour cela je remarque que toutes les situations de la baguette peuvent être représentées par le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre ; appelant donc 2 *a* la distance *C A* des joints du parquet, *C* le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre, appelant 2 b la longueur de la baguette, & f la longueur $A\ B$ des joints, j'aurai $f\,(\overline{a-b})\,c$ pour l'expression qui représente la probabilité de ne pas croiser le joint du parquet, ou ce qui est la même chose, pour l'expression de tous les cas où le milieu de la baguette tombe au-dessous de la ligne $a\ b$ & au-dessus de la ligne $c\ d$.

Mais lorsque le milieu de la baguette tombe hors de l'espace $a\ b\ d\ c$, compris entre les secondes parallèles, elle peut, suivant sa situation, croiser ou ne pas croiser le joint ; de sorte que le milieu de la baguette étant, par exemple, en ε, l'arc $\varphi\ G$ représentera toutes les situations où elle croisera le joint, & l'arc $G\ H$ toutes celles où elle ne le croisera pas & comme il en sera de même de tous les points de la ligne εφ, j'appelle dx les petites parties de cette ligne, & y les arcs de cercle $\varphi\ G$, & j'ai $f\,(\int y\,dx)$ pour l'expression de tous les cas où la baguette croisera, & $f\,(\overline{bc-\int y\,dx})$ pour celle des cas où elle ne croisera pas ; j'ajoute cette dernière expression à celle trouvée ci-dessus $f\,(\overline{a-b})\,c$, afin d'avoir la totalité des cas où la baguette ne croisera pas, & dès-lors je vois que le sort du premier joueur est à celui du second, comme $ac-\int y\,dx : \int y\,dx$.



Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $ac = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre 2 b longueur de la baguette ; or, on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, donc $a = \frac{bb}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, que la longueur de la baguette doit faire à peu-près les trois quarts de la distance des joints du parquet.

La solution de ce premier cas nous conduit aisément à celle d'un autre qui d'abord auroit paru plus difficile, qui est de déterminer le sort de ces deux joueurs dans une chambre pavée de carreaux carrés, car en inscrivant dans l'un des carreaux carrés, un carré éloigné par-tout des côtés du carreau de la longueur b, l'on aura d'abord $c\,(\overline{a-b})^2$ pour l'expression d'une partie des cas où la baguette ne croisera pas le joint ; ensuite on trouvera $(\overline{2a-b})\int y\,dx$ pour celle de tous les cas où elle croisera, & enfin $cb\,(\overline{2a-b})-(\overline{2a-b})\int y\,dx$ pour le reste des cas où elle ne croisera pas ; ainsi le sort du premier joueur est à celui du second, comme $c\,(\overline{a-b})^2+cb\,(\overline{2a-b})-(\overline{2a-b})\int y\,dx : (\overline{2a-b})\int y\,dx$.

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $c\,(\overline{a-b})^2+cb\,(\overline{2a-b})=(\overline{2a-b})^2\int y\,dx$ ou $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b}=\int y\,dx$; mais comme nous l'avons vu ci-dessus, $\int y\,dx=bb$; donc $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b}=bb$; ainsi le côté du carreau doit être à la longueur de la baguette, à peu-près comme $\frac{41}{22}:1$, c'est-à-dire, pas tout-à-fait double. Si l'on jouoit donc sur un damier avec une aiguille dont la longueur serait la moitié de la longueur du côté des carrés du damier, il y auroit de l'avantage à parier que l'aiguille croisera les joints.

On trouvera par un calcul semblable, que si l'on joue avec une pièce de monnoie carrée, la somme des sorts sera au sort du joueur qui parie pour le joint, comme $aac : 4abb\sqrt{\frac{1}{2}}-b^3-\frac{1}{2}Ab$, A marque ici l'excès de la superficie du cercle circonscrit au carré, & b la demi-diagonale de ce carré.

Ces exemples suffisent pour donner une idée des jeux que l'on peut imaginer sur les rapports de l'étendue ; l'on pourroit se proposer plusieurs autres questions de cette espèce, qui ne laisseroient pas d'être curieuses & même utiles : si l'on demandoit, par exemple, combien l'on risque à passer une rivière sur une planche plus ou moins étroite ; quelle doit être la peur que l'on doit avoir de la foudre ou de la chute d'une bombe, & nombre d'autres problèmes de conjecture, où l'on ne doit considérer que le rapport de l'étendue, & qui par conséquent appartiennent à la Géométrie tout autant qu'à l'Analyse. [...]

*

* *

*