Quelques anciens petits problèmes de probabilités

Michèle LACOMBE, Henry PLANE

Il est des monuments historiques aux noms évoqués par tous. Et puis il existe une liste complémentaire de l'"Inventaire" où s'inscrivent tel vieux pont telle petite église ou telle façade d'édifice, dans lesquels l'amateur apprécie une pile, une voûte romane, un colombage.
Des sujets de probabilité il en est un peu de même : "Problèmes des partys", "Paradoxe de Saint-Pétersbourg", "Aiguille de Buffon". Mais existent aussi de petits problèmes dont les grands auteurs usèrent à titres d'exemples. S'ils illustrent une époque et ses méthodes ils peuvent renouveler le lot d'exercices du professeur. Peut-être méritaient-ils un détour par l'atelier n°6 ?

Cet atelier était destiné à un public de formation initiale, jeunes collègues n'ayant que peu eu l'occasion de fréquenter les anciens héritiers de la géométrie du hasard. Il s'avéra que le public fut de formation continue. Cela permit une discussion d'expériences d'autant que la présence de collègues étrangers enrichit le débat d'autres situations d'enseignement.

Voici les quelques problèmes proposés à la discussion.

1) BERTRAND Joseph
On tire au hasard une corde dans un cercle.
Quelle est la probabilité de l'événement : elle est plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ?

2) BUFFON
Sur des carreaux hexagones réguliers de largeur 2d on jette une pièce de diamètre d.
Probabilité de l'événement : elle tombe en entier sur le carreau ? (problème du franc-carreau).

3) BERTRAND Louis
Dans une urne il y a 8 boules numérotées de 1 à 8. On les tire une à une, sans les remettre.
Quelle est la probabilité de l'événement : au moins une fois le $n^{\text{ème}}$ tirage coïncide avec la sortie de la boule notée n ?

4) LACROIX
On prend au hasard des pièces dans un tas de 5 pièces.
Quelle est la probabilité d'en ôter un nombre impair ? même question pour un tas de m pièces ?

5) MOIVRE
Sur 100 jets successifs d'un seul dé, quelle est la probabilité d'obtenir au moins 5"as" de suite ?

6) MOIVRE
Jacques jette deux pièces de monnaie et Pierre, trois. Celui qui amène le plus de "face" gagne. En cas d'égalité ils recommenceraient.
Quelle est la probabilité de gain de chacun ?

7) POINCARÉ
Un ami vous a écrit qu'il y avait une chance sur deux qu'il vienne vous voir un certain jour. Cet ami ne peut venir que par le train et seuls deux trains desservent votre ville. L'ami n'étant pas venu par le premier train, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?
Généralisation : l'ami vient avec une probabilité a et n trains vous desservent, or il n'est pas dans un des n – 1 premiers.

8) MONTMORT
Pierre se présente à une élection. Il y a 12 électeurs. Trois se sont engagés à voter pour lui et deux contre lui. Les sept autres n'ont rien dit. Le jour de l'élection il y a trois absents sans savoir lesquels.
Quelle est la probabilité que Pierre soit élu ?

9) AMPÈRE
Dans chaque parti d'un défi entre Paul et François ils ont des probabilités respectives p et q de gagner. Ils conviennent de déclarer vainqueur celui qui gagnera 2 jeux de plus que l'autre.
Quelle est la probabilité que le tournoi dure 2n parties ?

Il fut également remis aux participants les photocopies de quelques textes dont on parle souvent mais dont on ne dispose pas toujours sous la forme originelle, ainsi que du raisonnement de l'auteur. Ils ont leur place dans ce compte-rendu.

Dans l'encyclopédie (1785) ce curieux article D'ALEMBERT

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards.*) Ce jeu, qui est très-connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaisons, dont une seule fait perdre, & sept font gagner; ainsi, il y auroit 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela est-il bien exact? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *croix* au premier coup? Car, dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix; premier coup.
Pile, *Croix*, premier & second coup.
Pile, *pile*, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix.
Pile, *croix.*
Pile, *pile*, *croix.*
Pile, *pile*, *pile.*

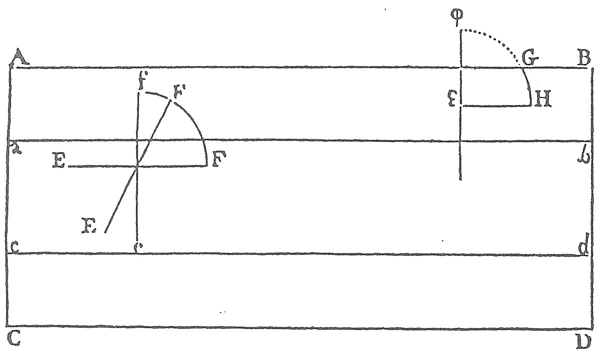
Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier.

BUFFON

(Reproduction à paraître en 1995 par l'IREM de DIJON)

Je ſuppoſe que dans une chambre, dont le parquet eſt ſimplement diviſé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croiſera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croiſera quelques-unes de ces parallèles; on demande le ſort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu ſur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle ſans tête.*

Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles $A\,B$ & $C\,D$ du parquet, deux autres lignes



parallèles $a\,b$ & $c\,d$, éloignées des premières de la moitié de la longueur de la baguette $E\,F$, & je vois évidemment que tant que le milieu de la baguette ſera entre ces deux ſecondes parallèles, jamais elle ne pourra croiſer les premières dans quelque ſituation $E\,F$, $e\,f$, qu'elle puiſſe ſe trouver; & comme tout ce qui peut arriver au-deſſus de $a\,b$ arrive de même au-deſſous de $c\,d$, il ne s'agit que de déterminer l'un ou l'autre; pour cela je remarque que toutes les ſituations de la baguette peuvent être repréſentées par le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette eſt le diamètre; appelant donc $2\,a$ la diſtance $C\,A$ des joints du parquet, c le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette eſt le diamètre, appelant $2\,b$ la longueur de la baguette, & f la longueur $A\,B$ des joints, j'aurai $f(\overline{a-b})\,c$ pour l'expreſſion qui repréſente la probabilité de ne pas croiſer le joint du parquet, ou ce qui eſt la même choſe, pour l'expreſſion de tous les cas où le milieu de la baguette tombe au-deſſous de la ligne $a\,b$ & au-deſſus de la ligne $c\,d$.

Mais lorſque le milieu de la baguette tombe hors de l'eſpace $a\,b\,d\,c$, compris entre les ſecondes parallèles, elle peut, ſuivant ſa ſituation, croiſer ou ne pas croiſer le joint; de ſorte que le milieu de la baguette étant, par exemple, en ε, l'arc $\varphi\,G$ repréſentera toutes les ſituations où elle croiſera le joint, & l'arc $G\,H$ toutes celles où elle ne le croiſera pas, & comme il en ſera de même de tous les points de la ligne $\varepsilon\varphi$, j'appelle $d\,x$ les petites parties de cette ligne, & y les arcs de cercle $\varphi\,G$, & j'ai $f(\int y\,d\,x)$ pour l'expreſſion de tous les cas où la baguette croiſera, & $f(\overline{b\,c-\int y\,d\,x})$ pour celle des cas où elle ne croiſera pas; j'ajoute cette dernière expreſſion à celle trouvée ci-deſſus $f(\overline{a-b})\,c$, afin d'avoir la totalité des cas où la baguette ne croiſera pas, & dès-lors je vois que le ſort du premier joueur eſt à celui du ſecond, comme $a\,c-\int y\,d\,x : \int y\,d\,x$.

in *ESSAI D'ARITHMÉTIQUE MORALE.* (1777)

HUYGENS

Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup.

Cela équivaut à vouloir savoir en combien de coups d'un seul dé l'on peut compter jeter deux fois un 6. D'après ce que nous avons démontré plus haut [2]), celui qui accepterait de jeter 2 six en 2 coups, aurait droit à $\frac{1}{36}a$.

Quant à celui qui jouerait en 3 coups, si son premier coup n'était pas un 6, il lui resterait encore 2 coups lesquels devraient être des 6 l'un et l'autre; ce que nous avons dit valoir $\frac{1}{36}a$. Mais si son premier coup est un 6, il ne lui faut plus jeter qu'un seul 6 dans les deux coups suivants, ce qui d'après la dixième Proposition [1]) lui vaut $\frac{11}{36}a$. Or, il est certain qu'il a 1 chance de jeter un 6 du premier coup contre 5 chances de le manquer. Il a donc au commencement 1 chance d'obtenir $\frac{11}{36}a$ et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui d'après la deuxième Proposition [2]) lui vaut $\frac{16}{216}a$ ou $\frac{2}{27}a$. Prenant ainsi chaque fois un coup de plus, on trouve qu'on peut accepter avec avantage de jeter 2 six avec un dé en 10 coups ou avec 10 dés en un coup [3]).

Vérification :

En suivant le raisonnement de Huygens et en notant :

- le nombre total de coups possibles avec x dés $T_x = 6^x$
- le nombre de coups faisant deux as avec x dés D_x
- le nombre de coups sans as avec x dés $Z_x = 5^x$
- le nombre de coups faisant au moins un as $M_x = T_x - Z_x$.

La récurrence s'écrit $D_x = 5.D_{x-1} + 1.M_{x-1}$

On peut alors dresser le tableau :

x	T_x	Z_c	M_x	D_x
2	36	25	11	1
3	216	125	91	16
4	1296	625	671	171
5	7776	3125	4651	1526
6	46656	15625	31031	12281
7	279936	78125	301811	92436
8	1679616	390625	1288991	663991
9	10077696	1953125	8124571	4608946
10	60466176	9765625	50700551	31169301

Effectivement c'est seulement pour x = 10 que $D_{10} > 1/2\ T_{10}$.

Nous dirions $p_{10} = \dfrac{D_{10}}{T_{10}} \approx 0,515$

CONDORCET

Dans une urne, il y a quatre boules. On en tire, quatre fois, une boule, avec remise chaque fois, et on note la couleur. Le résultat global des tirages donne trois boules blanches et une noire. Quelles sont les probabilités qu'il y ait dans l'urne une, deux ou trois boules blanches ?

On effectue ensuite un cinquième tirage. Quelle est la probabilité d'amener une boule blanche ?

Je suppose qu'il y ait dans une urne un nombre déterminé de boules blanches ou noires, quatre, par exemple ; que je tire une de ces boules, que je rejette ensuite ; puis que j'en tire une seconde, que je rejette de nouveau, et ainsi de suite, en marquant à chaque fois la couleur de la boule que j'ai tirée.

Cela posé, imaginons que j'aie tiré trois boules blanches et une noire. On peut me demander la probabilité qu'il y ait dans l'urne ou quatre boules blanches, ou trois blanches et une noire, ou deux blanches et deux noires, ou trois noires et une blanche, ou quatre noires.

Je fais alors le raisonnement suivant : S'il y avoit eu quatre boules blanches, la probabilité d'avoir trois blanches et une noire seroit o ; si trois blanches et une noire, elle seroit $\frac{4\cdot 3^3\cdot 1}{4^4}=\frac{108}{256}$; si deux blanches et deux noires, $\frac{4\cdot 2^3\cdot 2}{4^4}=\frac{64}{256}$; si une blanche et trois noires $\frac{4\cdot 1^3\cdot 3}{4^4}=\frac{12}{256}$; et o, s'il y en avoit eu quatre noires. On trouve, en ajoutant les numérateurs de ces fractions, 184 combinaisons également possibles qui donnent l'évènement arrivé dans les différentes hypothèses, toutes également probables par la nature de la question. Donc, $\frac{1}{1}\cdot\frac{184}{256}$ exprimera le rapport que le nombre des combinaisons qui répondent au cas où l'on doit tirer trois boules blanches et une noire, a au nombre total. Et o, $\frac{1}{1}\cdot\frac{108}{256}$, $\frac{1}{1}\cdot\frac{64}{256}$, $\frac{1}{1}\cdot\frac{12}{256}$, o représenteront le même rapport pour les combinaisons qui appartiennent à chaque hypothèse sur le nombre des boules. Donc, puisque l'on a tiré trois boules blanches et une noire, les combinaisons qui répondent à cet évènement sont les seules possibles, et 184 représentant le nombre total de ces combinaisons possibles, il y en aura 108 qui répondront à l'hypothèse de trois boules blanches et une noire ; 64 à celle de deux noires et deux blanches ; 12 à celle de trois noires et une blanche, et aucune aux deux autres hypothèses. La probabilité de la première hypothèse sera donc $\frac{108}{184}$; celle de la seconde $\frac{64}{184}$; celle de la troisième $\frac{12}{184}$. Elle doit être en effet comme le nombre des combinaisons qui appartiennent à cette hypothèse, et qui donnent le tirage arrivé, est au nombre total des combinaisons qui donnent ce tirage. Ces nombres sont réellement ceux des combinaisons qui appartiennent aux trois hypothèses relatives, l'une au rapport entre les boules qui sont dans l'urne, l'autre au rapport entre les boules tirées de l'urne, et ils expriment par conséquent la probabilité de l'un ou de l'autre de ces faits, suivant qu'on les suppose donnés ou incertains.

Si maintenant je demande la probabilité d'amener une boule blanche, en tirant une fois de plus, je dirai, dans la première hypothèse, cette probabilité seroit $\frac{3}{4}$: Dans la seconde elle seroit $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{4}$ dans la troisième. Mais la probabilité de la première est $\frac{108}{184}$, celle de la seconde $\frac{64}{184}$, celle de la troisième $\frac{12}{184}$. La probabilité d'avoir une boule blanche sera donc. $\frac{108}{184}\cdot\frac{3}{4}+\frac{64}{184}\cdot\frac{1}{2}+\frac{12}{184}\cdot\frac{1}{4}$ ou $\frac{116}{184}$.

LAPLACE

Une loterie comporte n numéros. Il en sort r au tirage. On veut savoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros sorte au tirage.

"In Théorie analytique des probabilités" (1812)

Supposons que le nombre des numéros d'une loterie soit n, et qu'il en sorte r à chaque tirage ; on veut savoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r, est, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\ldots.\,r}$$

Pour avoir, parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que, si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$ le reste $n-s$, le nombre de ces numéros sera le nombre recherché ; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r des numéros, dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,(r-1)}$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}$$

En divisant cette quantité par $1.2.3\ldots s$ on aura, par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura le probabilité que les s premiers numéros du tirage seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s

numéros à chaque tirage, ce qui revient à faire $r = s$ dans la fonction précédente, qui devient ainsi :

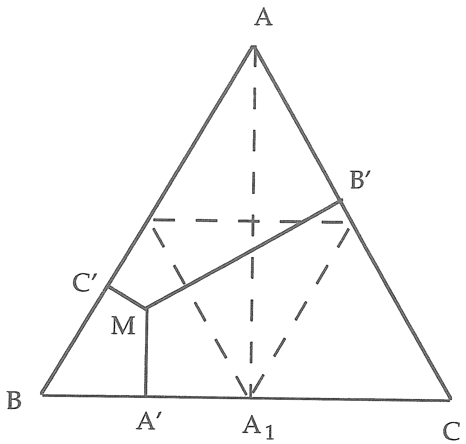
$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots .\, s}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-s+1)}$$

Enfin on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premier dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction à l'unité.

LEMOINE

ABC est un triangle équilatéral. On prend un point M, intérieur au triangle et se projetant orthogonalement en A′, B′, C′ sur les côtés. Quelle est la probabilité de l'événement : les trois segments MA′, MB′, MC′ peuvent former un triangle ?

In "nouvelles annales de mathématiques" (1883)



Pour tout point M :
$MA' + MB' + MC' = AA_1$
AA_1 hauteur

Aire (ABC)
$= \frac{1}{2} AA_1 . BC$
= aire (MBC) + aire (MCA) + aire (MAB)
$= \frac{1}{2} (MA'.BC + MB'.CA + MC'.AB)$
$= \frac{1}{2} (MA' + MB' + MC')\, BC$

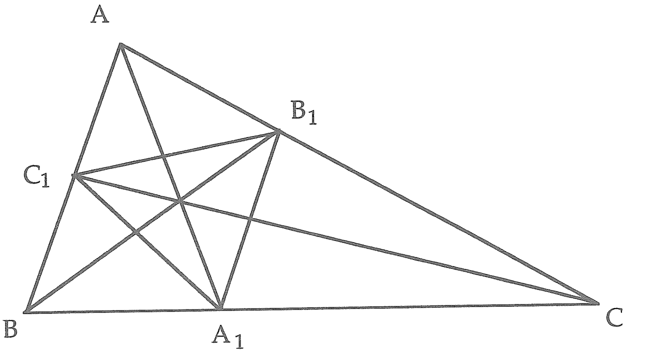
Le problème est donc le même que celui du partage d'un segment en trois parties remplissant la même condition.

Il faut remplir les inégalités triangulaires $\begin{cases} MA' < MB' + MC \\ MB' < MC' + MA' \\ MC' < MA' + MB' \end{cases}$

Donc chaque segment doit être inférieur à la moitié de AA_1. M doit être intérieur au triangle médian : $p = \frac{1}{4}$

En fait Lemoine pose le problème pour un triangle quelconque. Le point doit être choisi alors, à l'intérieur du triangle défini par les pieds A_1, B_1, C_1 des bissectrices intérieures du triangle.

Lorsque le triangle donné est équilatéral, son triangle médian joue ce rôle, les médianes étant bissectrices.



Il convient, dans le cas général, de calculer le rapport des aires puisque

$$p = \frac{\text{aire}\,(A_1 B_1 C_1)}{\text{aire}(ABC)}$$

Lemoine écrit qu'il est égal à $\frac{2\,a\,b\,c}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}$ a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle donné.

$$\text{aire}\,(A_1 B_1 C_1) = \text{aire}(ABC) - (\text{aire}(AB_1 C_1) + \text{aire}\,(BC_1 A_1) + \text{aire}\,(CA_1 B_1)\ ;$$

$$\frac{\text{aire}(AB_1 C_1)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{AB_1.A\,C_1}{AB.AC}$$