Hasard et raison pure. La fortuité des décimales de π selon Cournot

Thierry MARTIN

Cournot est notamment connu pour sa théorie du hasard, que l'on définit habituellement comme rencontre de séries causales indépendantes. Cette définition, effectivement présente chez Cournot, est cependant réductrice, les faits de hasard débordant, selon lui, le champ des phénomènes soumis au règne de la causalité. Le hasard trouve également à se manifester, précise-t-il en effet, "dans l'ordre même des conceptions purement abstraites, là où les faits se produisent par une nécessité de raison, et non par des causes efficientes comme celles qui agissent dans la production des phénomènes"[1]. Cette intervention de la fortuité au niveau de la raison pure, Cournot l'illustre sur un exemple privilégié, celui de la fortuité des décimales de π. Ce thème n'est donc pas un développement accessoire de la théorie du hasard ; il a, au contraire, pour fonction d'en révéler toute la portée.

Aux yeux de Cournot, ce point "délicat et d'un intérêt philosophique très réel, quoique personne ne paraisse y avoir pris garde"[2], présente donc une importance toute particulière. L'extension de la sphère du hasard au domaine intelligible permet d'éclairer le sens de la théorie cournotienne en mettant l'accent sur le fait que l'indépendance, constitutive de la fortuité, concerne moins des *causes* au sens strict que la *raison* des choses. On doit parler d'une indépendance rationnelle plutôt que d'une indépendance causale, puisque, dit Cournot, "l'idée de hasard est l'idée d'une rencontre entre des faits rationnellement indépendants les uns des autres, rencontre qui n'est elle-même qu'un pur fait, auquel on ne peut assigner de loi ni de raison"[3]. En conséquence, puisque "l'indépendance de deux ou de plusieurs séries collatérales, partant l'idée de hasard avec toutes ses conséquences, s'appliquent aussi bien à des séries collatérales dans l'ordre rationnel pur qu'à des séries collatérales dans l'ordre de la causalité"[4], on peut dire que la définition du hasard traditionnellement attribuée à Cournot, comme rencontre de séries causales indépendantes, ne correspond qu'à une modalité particulière de son existence ; celle qui concerne son application au niveau phénoménal. En ce sens, l'analyse de la fortuité des décimales de π contribue à montrer que, indépendante de notre degré d'ignorance et de notre

1 *Essai*, § 32 note, p. 38.
2 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 177.
3 *Traité* , § 59, p. 62.
4 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 177.

pouvoir de connaître, la théorie du hasard ne relève pas d'une interprétation purement subjective, mais met au jour des relations existant effectivement dans le réel, qu'elles soient phénoménales ou intellectuelles, relations que le calcul des probabilités permet d'ordonner. La reconnaissance d'éléments de fortuité au niveau des produits de la raison, conférant à la notion de hasard son extension maximale, permet ainsi à Cournot de manifester la double originalité de sa doctrine. Celle-ci ne tient pas à l'idée de rencontre entre séries causales indépendantes, mais au caractère à la fois rationnel et objectif de l'indépendance entre des faits venant se combiner pour former une situation de fortuité.
Conjointement, en posant que la série des décimales de π "offre tous les caractères de la succession fortuite"[5], Cournot vérifie l'affirmation formulée dès 1843, selon laquelle le champ d'application du calcul des probabilités couvre l'ensemble du réel, incluant les phénomènes physiques et biologiques, les événements humains et même ceux du "monde intellectuel et moral"[6]. Ainsi, achevant son analyse dans le *Traité*, il précise : "Nous venons de prendre un exemple dans le monde des choses intelligibles, dans l'ordre des faits purement mathématiques, et partant nécessaires, pour que l'on reconnût mieux que ces raisons mathématiques, qui introduisent l'ordre dans le désordre même, et qui sont l'objet de la théorie mathématique des chances et des probabilités, n'impliquent pas la notion de cause physique, ne s'appliquent pas uniquement aux faits que nous réputons aléatoires ou contingents, ne sont pas, comme on l'a dit, relatives à notre condition humaine, mélangée de science et d'ignorance, et subsisteraient encore aux yeux d'une intelligence supérieure qui lirait dans l'enchaînement des causes et des effets les plus compliqués, comme nous lisons dans les formules mathématiques que nous avons construites ou découvertes par nos propres forces"[7]. L'analyse de la fortuité des décimales de π permet donc non seulement de manifester l'étendue du champ d'application du calcul des probabilités, mais encore d'en manifester la valeur objective, puisque l'intelligence supérieure fictive, contrairement à la représentation laplacienne, ne serait pas dispensée d'y recourir, mais aurait cet avantage sur nous, précise par ailleurs Cournot, qu'elle pourrait mesurer la probabilité des événements entièrement *a priori*[8].

La question n'est pas pour nous d'interroger pour elle-même la question de la fortuité des décimales de π, ni non plus de savoir si Cournot a effectivement établi que la série des décimales de π est assimilable à une suite de chiffres choisis au hasard, ce dont on peut raisonnablement douter. Elle est plutôt de chercher à restituer la signification qu'on doit reconnaître à son analyse, à l'intérieur de son propre mouvement de pensée, et à comprendre comment Cournot, d'habitude si prudent et circonspect, a pu se croire autorisé à affirmer que "nous sommes sûrs de pouvoir étudier et appliquer sur ce modèle tous les caractères qui tiennent à la nature du hasard ou de la succession fortuite"[9] ; l'assurance de Cournot contrastant avec le jugement beaucoup plus prudent de Borel, à qui "il paraît probable, pour $\sqrt{2}$

5 *Essai*, § 32 note, p. 38.
6 *Exposition*, § 45, p. 61.
7 *Traité*, § 62, p. 66.
8 *Exposition*, § 45, p. 60
9 *Traité*, § 61, p. 65.

comme pour π, et comme pour tous les nombres irrationnels définis par des équations algébriques ou différentielles à coefficients entiers, que la fréquence des dix chiffres décimaux est la même. Mais, ajoute Borel, cela n'entraîne pas que la suite indéfinie de ces chiffres a toutes les propriétés d'une suite de chiffres choisis au hasard"[10].

1. Les "symptômes de fortuité".

Au premier abord, l'analyse de Cournot peut apparaître comme une étude statistique, qu'il ébauche dans l'*Essai* de 1851, poursuit en 1861 dans le *Traité*, et complète en 1875 dans *Matérialisme*. Si l'on réunit les différents passages qu'il consacre à ce sujet, l'étude des décimales de π se distribue en quatre "symptômes de fortuité", progressivement incorporés par Cournot dans ses ouvrages et bénéficiant d'un traitement de plus en plus ample, cette évolution révélant le soin croissant qu'il apporte à son analyse, donc aussi l'intérêt qu'il y attache. Le premier symptôme, le moins riche, apparaît dans l'*Essai*, réduit à une courte allusion, renvoyée en note, au § 32, qui se borne à mentionner, à la suite de l'étude de Lambert[11], que la moyenne des valeurs des décimales de π tend vers 4,5. Dix ans plus tard, dans le *Traité*, l'analyse des décimales de π fait l'objet du § 61 dans son entier, et ajoute deux arguments à la considération de la moyenne : d'une part, les fréquences relatives des chiffres entrant dans l'expression de π en numération décimale doivent tendre à s'égaler et approcher le rapport 1/10, de l'autre, les chiffres pairs et impairs doivent tendre à se répartir également. Enfin, *Matérialisme*, au § 3 de la IV^{e} section (pp. 177-179), mobilise à nouveau l'égalité tendancielle de la moyenne des décimales et de la moyenne théorique, et lui adjoint un quatrième argument, appliquant à la série des décimales, le théorème des minima et maxima de Bienaymé[12], énonçant que pour n observations consécutives de grandeurs différentes, le nombre de minima et de maxima est probablement compris entre les limites

$$\frac{2n-1}{3}+t\sqrt{\frac{16n-29}{45}} \quad \text{et} \quad \frac{2n-1}{3}-t\sqrt{\frac{16n-29}{45}}$$

---

10 É. Borel, "Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 230, 1950, pp., 591-593, p. 591 ; in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. II, pp. 1203-1204, p. 1203.

11 Cournot donne pour toute référence "les Mémoires de l'Académie de Berlin". Il s'agit vraisemblablement du "Savoir préliminaire pour ceux qui cherchent la quadrature du cercle", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* de 1766 et du "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1768, pp. 265-322 (in J. H. Lambert, *Mathematische Werke*, herausgegeben von Andreas Speiser, Zürich, Orell Füssli Verlag, vol. II, 1948, pp. 112-159), où Lambert prouva l'irrationalité de π. (Si la non-périodicité de π est *démontrée* par Lambert en 1766, elle est supposée bien avant. Ainsi, J. Bernoulli dit des "nombres cyclométriques de Ludolph" (la série des décimales de π calculée par Ludolph van Ceulen) que leur "progression n'a aucune loi déterminée" ("nulla determinata lege progrediuntur", *Ars conjectandi*, Pars prima, Basileae, 1713, p. 57, traduit du latin par L.-G. Vastel, Caen, 1801, p. 80).

12 Cf. *Bulletin de la société mathématique de France*, t. II, n° 5, séance du 3 juin 1874, pp. 153-154 et *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXXXI, n° 10, séance du 6 septembre 1875, pp. 417-422.

dès lors que ces "observations quelconques sont rangées dans l'ordre où elles se sont présentées, et non classées arbitrairement." Si, à partir de la première décimale, on dénombre les changements de signes positifs ou négatifs, en posant qu'on rencontre un changement de signe chaque fois que le chiffre considéré accuse par rapport au précédent une variation ascendante ou descendante, on constate qu'il y a, pour les 36 premières décimales, 21 changements de signes[13]. Par conséquent, précise Cournot, le rapport du nombre des changements de signes au nombre des chiffres de la série est de 7/12, soit "une très-satisfaisante approximation du rapport-limite 8/12 ou 2/3", tel que l'établit le théorème de Bienaymé.

Si l'on considère ces quatre symptômes, deux questions peuvent être ici posées, la première d'ordre technique, la seconde d'ordre théorique. On peut déjà se demander s'ils permettent effectivement d'établir une analogie entre la succession des décimales de π et celle des tirages d'une loterie[14], et si cette analogie autorise l'affirmation de la fortuité des décimales de π. Pour reprendre la métaphore clinique de Cournot, il s'agirait d'interroger à la fois la réalité des symptômes et le diagnostic qu'ils rendent possible. Mais, ce serait là déjà faire l'hypothèse que telle est bien leur fonction. Cette première question suppose donc la seconde consistant à interroger la démarche de l'argumentation de Cournot, partant la place et la fonction qu'y remplissent les symptômes de fortuité. Or, il est possible de montrer que, contrairement à la façon dont elle a été généralement comprise par ses commentateurs[15], l'analyse de Cournot n'est pas de nature statistique. On peut déjà en donner deux indications.
D'une part, l'échantillon que considère Cournot est dérisoire, 32 décimales dans le *Traité*, les 35 décimales calculées en 1596 par Ludolph Van Ceulen dans *Matérialisme*. D'autre part, l'analyse des résultats que procurent les symptômes de fortuité témoigne d'une désinvolture étonnante chez un penseur aussi scrupuleux que Cournot. Ainsi, dans le *Traité*, mesurant les fréquences relatives de chacun des chiffres, il affirme que, malgré l'irrégularité des résultats, la fréquence 1/10 est la plus répandue (elle est celle des chiffres 4, 6, et 8), tandis que, par exemple, deux chiffres seulement (2 et 9) figurent quatre fois sur 32. Or, le décompte de Cournot

13 En souscrivant chaque chiffre du signe +, - ou ± suivant qu'il est supérieur, inférieur ou égal au chiffre qui le précède, on obtient la série :

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8
- + - + + - + - - + + + - + - - + + - + - + - - ± + - - + + - - + + ±

14 Cette analogie est discutée par G. Th. Guilbaud dans "Les décimales de π et la statistique", *Le petit Archimède*, mai 1980, pp. 207-221 ; cf. également Poincaré, *Calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1912, pp. 22-23, et, plus récemment, par exemple, Stan Wagon, "Is π normal ?", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, n° 3, New York, Springer-Verlag, 1985, pp. 65-67.

15 Notamment, Renouvier, *Essais de critique générale*, 1er essai : Traité de Logique générale et formelle, tome II, Paris, Ladrange, 1854, pp. 155-160, auquel répond G. Léchalas dans "Le hasard", *Revue néo-scolastique*, Paris, 1903, pp. 148-164, pp. 151-155. Également, P. Mansion, "Sur la portée objective du calcul des probabilités", *Académie royale des sciences*, Bruxelles, 1903, pp. 1235-1294, pp. 1269-1271, que discutent G. Léchalas dans "A propos de Cournot. Hasard et déterminisme", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, janvier 1906, pp. 109-114, pp. 111-114, puis F. Mentré dans "A propos de Cournot : Hasard et déterminisme. Complément à la note de M. G. Léchalas", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, mai 1906, pp. 375-380. Enfin, A. DARBON, *Le concept du hasard dans la philosophie de Cournot*, Bordeaux, Cadoret, 1910, pp. 39-55 et 57-60.

omet le chiffre 5, lequel intervient, lui aussi, quatre fois, ce qui annule l'argument. En réalité, cette désinvolture est significative du fait que les "symptômes" ne sont pas l'essentiel ; ils interviennent comme des indices, non comme des arguments démonstratifs. Et de fait, Cournot pouvait aisément travailler, s'il l'avait voulu, sur des séries plus significatives[16], comme il le reconnaît d'ailleurs lui-même : "Voilà 32 chiffres décimaux consécutifs, écrit-il dans le *Traité*, on en a calculé des centaines ; on pourrait se passer la fantaisie d'en calculer des milliers"[17], et *Matérialisme* signale que "des calculateurs intrépides ont eu la patience d'aller (...) jusqu'à quatre ou cinq cents décimales"[18]. C'est donc délibérément, et non en raison d'une ignorance, qu'il limite son analyse à une trentaine de décimales, lui qui, par ailleurs, insiste sur la nécessité de considérer des séries suffisamment longues[19]. De plus, loin de s'en tenir aux données fournies par les symptômes, Cournot anticipe sur les résultats d'une étude plus fournie, à ses yeux superflue. Ainsi, envisageant une série de quatre ou cinq cents décimales, il écrit que "dans cette longue série, les chiffres se succéderaient, comme on peut en juger par l'échantillon de Ludolph, aussi irrégulièrement qu'au loto ; les écarts de la moyenne théorique 4 1/2 tomberaient, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et iraient en s'atténuant de même soit que l'on prolongeât un calcul si pénible ou un jeu si puéril. Il en serait de même pour tous les autres symptômes de fortuité"[20]. L'insuffisance de l'échantillon considéré par Cournot ne signale donc pas une défaillance du raisonnement, il témoigne plutôt de sa confiance à l'égard de ses arguments (qui ne sont pas les "symptômes"), et plus largement à l'égard des pouvoirs de la raison, l'affirmation de la fortuité des décimales de π devant être comprise comme une application de la théorie rationnelle du hasard. Pour bien comprendre son analyse, il faut donc distinguer deux choses : d'une part, le fait de l'applicabilité du calcul des probabilités à la série, de l'autre, l'explication de la fortuité des décimales des fractions incommensurables telle que la construit Cournot.

2. Le sens de l'analyse de Cournot.

Le hasard résultant de la rencontre accidentelle de deux séries rationnellement indépendantes, c'est par une telle rencontre que s'expliquera la fortuité de la série des décimales des fractions incommensurables. On doit donc considérer cette série comme l'expression du croisement de deux démarches rationnelles qui sont, chacune prise séparément, entièrement déterminées. Ainsi, écrit Cournot, "chaque chiffre de

16 Si, pendant longtemps on s'en est tenu aux 35 décimales calculées en 1596 par Ludolph Van Ceulen, un siècle plus tard ce nombre était doublé (Abraham Sharp calcule 72 décimales en 1699), et Cournot pouvait disposer de 200 décimales calculées par Zacharias Dahse en 1844 ou de 248 (Thomas Clausen, 1847), et même, pour *Matérialisme*, des 707 décimales de William Shanks publiées en 1873, *cf.* J. Brette, "La chasse aux décimales", *Le petit Archimède*, numéro spécial π, mai 1980, pp. 199-206, p. 205.

17 *Traité*, § 61, p. 65.

18 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 178.

19 Comme le rappelle le *Traité*, si "l'observation confirme les prévisions du calcul", c'est à la condition de porter sur "des séries assez nombreuses pour que les irrégularités se compensent", § 398, p. 364.

20 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 178.

la série, si reculé qu'en soit le rang, doit être conçu comme ayant actuellement, comme ayant eu de tout temps une valeur rigoureusement déterminée, quoique nous ne la connaissions pas et que nous n'ayons même aucun intérêt à la connaître"[21]. Cournot peut pourtant ajouter que "nous sommes sûrs de pouvoir étudier et appliquer sur ce modèle tous les caractères qui tiennent à la nature du hasard ou de la succession fortuite", dans la mesure où le hasard cournotien se définissant essentiellement par l'indépendance des séries amenées à se rencontrer, n'exclut ni le déterminisme phénoménal, ni la détermination rationnelle ; il est au croisement de séries qui peuvent être, chacune séparément, entièrement déterminées.

Or, s'agissant du nombre π, que représente ici la série des décimales ? Elle désigne, précise Cournot, la mesure du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre[22], exprimée par la suite des chiffres de la numération décimale. Ce n'est donc pas le nombre π lui-même qui recevrait telle ou telle valeur par hasard ; mais on doit dire que son expression fait preuve de fortuité parce qu'elle tient à l'usage de la numération décimale, laquelle n'est pas exigée, ni non plus impliquée, par la géométrie du cercle. Cournot l'affirme nettement : "les formules mathématiques desquelles résulte avec une approximation indéfinie la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, sont indépendantes de la construction de notre arithmétique décimale, et doivent, lorsqu'on y applique le calcul décimal, amener une série de chiffres qui offre tous les caractères de la succession fortuite, puisqu'il n'y a pas de différence essentielle entre la notion du hasard et celle de l'indépendance des causes"[23]. La fortuité résulte ici de la rencontre entre deux nécessités théoriques indépendantes ; indépendantes rationnellement, c'est-à-dire telles que l'une ne rend pas raison de l'autre et n'est pas non plus la raison des éléments de l'autre : "D'une part, écrit Cournot, les approximations successives du rapport cherché ont une loi, une forme théorique et régulière, indépendante du système de numération ; d'autre part, pour mettre ces approximations en chiffres, il faut suivre les règles de notre arithmétique décimale"[24]. Rien n'exige que la loi s'exprime dans tel système de numération, de même que celui-ci ne contient en rien la raison de la loi. Leur

---

21 *Traité*, § 61, p. 65.

22 Dans l'ensemble des textes qu'il consacre à l'étude des décimales de π, Cournot ne parle jamais du nombre π, pas plus qu'il n'utilise le symbole π, mais du rapport de la circonférence au diamètre. On peut toutefois supposer qu'il n'ignore pas que π n'est pas seulement l'expression d'un rapport géométrique, mais bien authentiquement un nombre. C'est du moins ce qui nous semble résulter de l'analyse des fonctions transcendantes qu'il propose aux §§ 69 à 76 du traité des *Fonctions*. Ainsi, il souligne au § 76 (p. 132) "cette liaison inattendue qui s'établit, comme une conséquence de l'emploi du signe algébrique $\sqrt{-1}$, d'une part, entre les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques, d'autre part, entre les logarithmes et les arcs de cercle : c'est-à-dire entre des fonctions si diverses de nature et d'origine, tant qu'on ne remonte pas à la loi qui régit leurs accroissements différentiels". Ainsi, les nombres imaginaires, par la relation qu'ils établissent entre les fonctions exponentielles et circulaires font apparaître le nombre π comme appartenant authentiquement à la théorie des fonctions, et non seulement comme un rapport géométrique, ce que confirme Couturat, citant le texte précédent de Cournot pour affirmer que "quand même on n'aurait jamais eu l'idée du cercle ni aucune autre notion géométrique, le nombre π ne jouerait pas moins un rôle prépondérant dans l'Analyse et dans la Théorie des fonctions", *De l'infini mathématique*, Paris, Blanchard, 1973, p. 128.

23 *Essai*, § 32 note, p. 38.

24 *Matérialisme*, IV[e] section, § 3, p. 179.

rencontre tient alors seulement à la nécessité d'exprimer la loi, de la "mettre en chiffres"[25] comme dit Cournot. Et c'est à ce niveau que joue la fortuité.
En conséquence, il ne s'agit pas, bien évidemment, de croire que les décimales de π se distribuent au hasard, et seraient susceptibles de prendre n'importe quelle valeur. On ne peut pas dire, par exemple, que la trentième décimale — qui est un 9 — eût tout aussi bien pu être un 2 ou un 5. Les décimales de π constituent, dit fermement Cournot, "une série dont tous les termes sont rigoureusement déterminés"[26]. Ce qui est ici fortuit, ce n'est donc pas la valeur de chaque décimale — le système de numération étant défini et invariable —, c'est la série des décimales exprimée par tel système de numération, lequel est indépendant du rapport de la circonférence au diamètre. Ou, pour mieux dire, ce n'est pas le nombre π lui-même qui est le fruit du hasard — il est au contraire le produit rigoureusement déterminé de la loi de construction qui l'engendre —, mais ce sont les valeurs numériques des décimales dont l'expression est fortuite par rapport au nombre π lui-même. Et, l'on doit ajouter qu'elles le sont nécessairement, puisque Cournot précise que les fractions incommensurables le sont "dans quelque système de numération que ce soit"[27].
Cette première analyse permet alors de mieux comprendre la fermeté du jugement porté par Cournot. D'une part, en toute rigueur, il ne prétend nullement que les décimales de π soient fortuites, la fortuité portant sur leur expression. Et, dans son argumentation, cette fortuité est effectivement nécessaire, puisque c'est tout mode d'expression qui sera fortuit par rapport au nombre π lui-même. D'autre part, la fortuité des décimales de π n'est pas affirmée par Cournot à partir de l'observation des symptômes de fortuité, mais elle est une conséquence impliquée d'un côté par la thèse qui fait du hasard la rencontre de faits rationnellement indépendants et, de l'autre, par l'affirmation de l'indépendance rationnelle entre la loi de construction de π et le système de numération utilisé pour l'exprimer. A ce titre, les symptômes sont seconds par rapport au diagnostic. Ils n'induisent pas le diagnostic, mais ont pour fonction de le confirmer.

3. Difficultés et obscurités de l'analyse.

Cependant, on pourrait ici objecter à Cournot que la notion d'indépendance rationnelle est insuffisante pour rendre compte de ce qu'il entend établir. En effet, si nous considérons non plus le nombre π, mais, par exemple, la fraction 1/3, nous sommes

---

25 Si, comme nous l'avons dit, l'analyse de la fortuité des décimales de π n'est effectivement entreprise qu'à partir de l'*Essai*, la distinction entre les propriétés essentielles des nombres et les propriétés artificielles, tenant au système de numération utilisé, et l'antériorité logique des premières par rapport aux secondes intervient dès l'*Origine*. Cournot fait notamment remarquer que "dans l'arithmétique ordinaire, telle qu'on l'enseigne et qu'on doit l'enseigner aux commençants, se trouvent continuellement mélangées des règles et des théories qui n'ont ni la même valeur, ni la même origine : les unes portant sur les propriétés essentielles et absolues des nombres ; les autres se référant à la loi des signes artificiels auxquels nous avons recours pour représenter les nombres", *Origine*, § 5, pp. 12-13. (Louis Couturat reprend cette distinction en la référant à Cournot, *cf. De l'infini mathématique*, notamment pp. 78-79 et 361-362 dans la réédition de 1973 aux éditions Blanchard).

26 *Traité*, § 61, p. 65.

27 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 178.

en présence d'une série régulière qui ne présente pas de symptôme de fortuité. Et pourtant le nombre 0,333… résulte lui aussi, apparemment, de la combinaison entre un rapport déterminé et un système de numération indépendant de ce rapport.

G. Léchalas se faisant à lui-même cette objection en commentant l'analyse de Cournot, y répond qu'il existe "un lien spécial entre tous les rapports rationnels et le système de numération : c'est ainsi qu'il dépend de ce choix de transformer la fraction illimitée […] en une fraction limitée. Dans le système ayant 3 pour base, un tiers s'écrit en effet 0,1. Les nombres rationnels, en nombre infini mais infiniment moins nombreux que les nombres incommensurables, constituent donc un cas particulier, leurs développements sous forme infinie n'ayant rien d'essentiel et étant dus uniquement au choix de certaines bases de numération. Au contraire, tout développement d'un rapport incommensurable est essentiellement infini dans tous les systèmes"[28].

G. Léchalas met ici l'accent sur un point essentiel, lorsqu'il insiste sur l'infinité de la série des décimales des nombres incommensurables pour tout système de numération. Mais, justement, on peut, à partir de là, faire apparaître une double insuffisance de l'argumentation de Cournot, telle du moins qu'elle s'offre à partir des symptômes de fortuité.

D'une part, en effet, l'argumentation repose sur l'affirmation de l'indépendance entre le rapport considéré et le système de numération utilisé. Or, les symptômes présentés par Cournot ne concernent pas les diverses séries possibles, construites à partir de différents systèmes de numération, mais seulement la valeur de π exprimée en numération décimale.

D'autre part, la possibilité d'appliquer le calcul des probabilités au tirage d'une loterie signifie non pas que l'on peut prévoir la sortie de tel chiffre lors de telle épreuve, mais que l'on peut définir *a priori* la fréquence probable de répartition de chacun des chiffres, lors d'un grand nombre de tirages, indépendamment de leur ordre. Appliqué à la série des décimales de π, cela signifie, de même, qu'on peut prévoir une loi probable de répartition de tel chiffre pour un grand nombre de décimales, sans qu'on puisse assigner d'avance sa place. Ceci n'a qu'un sens possible : les dix chiffres ont *a priori* une probabilité de sortie égale. Mais cela n'implique pas la non-périodicité de π. De même, l'égalité tendancielle des chiffres pairs et des chiffres impairs, tout comme la tendance de la moyenne des chiffres vers 4,5, sont compatibles avec une périodicité de la série.[29] Or, la non-périodicité de la série est requise pour affirmer qu'elle reproduit "tous les caractères habituels de la fortuité"[30]. On peut alors émettre l'hypothèse selon laquelle l'ajout de la référence au théorème de Bienaymé, dans le texte de *Matérialisme*, a justement pour fonction d'intégrer cette non-périodicité dans les "symptômes de fortuité", puisque celui-ci ne vaut que si les observations sont distribuées aléatoirement[31]. (Mais il faut reconnaître que Cournot ne facilite pas la tâche de son lecteur, car, là encore, il ne cite pas ses sources, pas plus

28 G. Léchalas, "Le hasard", *Revue néo-scolastique*, 1903, pp. 152-153.

29 C'est d'ailleurs ce que note explicitement Cournot, remarquant que le rapport 1/7 présente, lorsqu'on l'exprime en décimales (soit 0,142857 142857…) une période dont la moyenne est égale à 4,5, *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 178.

30 *Ibid.*, p. 179.

31 *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome LXXXI, p. 417.

qu'il ne reproduit le théorème de Bienaymé, s'en tenant à indiquer que le rapport 2/3 qu'il invoque est emprunté à "un des curieux théorèmes" de son ami Bienaymé. Le lecteur qui ne dispose que du texte de *Matérialisme*, ignorant la teneur des articles de Bienaymé, ne peut donc savoir ni quel est le contenu de son théorème, ni quelles sont ses conditions de validité, et manque, du même coup, le sens de l'argumentation de Cournot).

En toute rigueur, donc, si on la réduit aux quatre symptômes de fortuité, l'argumentation de Cournot est suspendue à une double postulation : celle de leur validité pour tout système de numération et celle de la non-périodicité de π. Mais, justement, cette difficulté s'évanouit dès que l'on comprend que, comme on l'a indiqué, les symptômes n'ont pas pour fonction d'établir la fortuité des décimales de π, celle-ci n'étant pas affirmée à partir de l'observation, mais impliquée par la théorie.

De fait, ce n'est qu'en la restituant dans l'argumentation qui la produit que la pensée de Cournot délivre son véritable sens. Or, aussi bien dans l'*Essai* que dans le *Traité* et *Matérialisme*, la présentation des symptômes fait suite à l'affirmation préalable de l'absence de période de la série des décimales. Plus nettement, l'analyse de la fortuité des décimales de π s'articule, dans le *Traité*, sur un développement visant à dénoncer les "fausses inductions" que l'on croit pouvoir tirer de la simple observation, soit d'une apparente régularité dans une série de chiffres, soit d'un "rapprochement singulier et purement accidentel" entre deux nombres. Or, précise Cournot, la simple observation est impuissante à affirmer la périodicité ou la non-périodicité d'une série ; elle risque constamment de nous abuser par des "apparences de régularité, même les plus grandes, faute d'être à même de prolonger la série autant qu'il le faudrait pour amener la disparition d'une régularité apparente et purement fortuite"[32], ce qu'illustre Cournot par l'exemple du nombre *e*, dont l'expression décimale offre la série 2,7182818284… : "Si l'on n'avait calculé, écrit-il, que les neuf premiers chiffres de la partie décimale, le retour accidentel de quatre chiffres dans le même ordre aurait porté à croire que l'on a affaire à une fraction décimale périodique, conclusion démontrée fausse par la théorie, et qui se trouve renversée par le fait, pourvu seulement que l'on calcule un chiffre de plus"[33]. Il faut donc considérer une non-périodicité fondée théoriquement, et telle, ajoute-t-il, que "tous les termes de la série soient rigoureusement déterminés, [série] qui n'ait d'autres limites que celles qu'y apporte la lassitude du calculateur"[34], soit une série infinie. S'agissant alors des décimales de π, formant un exemple d'une telle série, l'absence de période, démontrée par la théorie, est l'indice de la possibilité de lui appliquer la thèse de l'indépendance rationnelle, *id est* l'indice de la fortuité probable de la série des décimales. Et, la raison de cette non-périodicité, Cournot la voit dans l'absence de dépendance rationnelle — donc de relation essentielle — entre le rapport à calculer et le système utilisé pour effectuer ce calcul. En d'autres termes, c'est le caractère artificiel du calcul que signale l'indépendance des démarches : "Tous ces symptômes de fortuité, écrit Cournot, tiennent à ce que le calcul pris pour exemple est un terrain mixte sur lequel s'opère la combinaison, le mariage de deux arithmétiques bien

32 *Traité*, § 61, p. 64.
33 *Ibid*.
34 *Ibid*., p. 65.

distinctes l'une de l'autre : l'une où l'on considère les propriétés des nombres, telles qu'elles existent indépendamment de tout système *artificiel* de numération, l'autre dont les règles se réfèrent à l'emploi de nos signes et à l'*artifice* de notre numération décimale"[35].

En définitive, la fortuité des décimales de π tient à l'artificialité du système de numération par rapport au rapport mesuré, lorsque celui-ci est à la fois non-périodique et infini dans tout système de numération. De ce point de vue, il n'est pas impossible de penser que Cournot a entrevu, mais non formulé explicitement (et, bien évidemment, encore moins établi) l'idée de normalité, telle qu'elle sera définie par Émile Borel[36] en 1909.

Il reste que la façon dont Cournot construit son argumentation soulève une difficulté. En effet, si, comme Gaston Milhaud[37], on voit dans la variabilité d'une des séries étant donnée l'autre, la racine de la théorie cournotienne du hasard, l'argumentation de Cournot peut paraître ne pas s'accorder à sa théorie, et il aurait alors "fait fausse route, — non point dans son affirmation, mais dans son explication de la fortuité"[38]. En construisant son analyse à partir de l'expression de π en base 10, Cournot pose les deux séries comme immuables, et la variabilité ferait ici défaut : "A propos des chiffres de π, écrit Milhaud, Cournot s'enferme dans une seule rencontre, dans un seul "mariage" de deux ordres d'idées et envisage les chiffres fournis par cette combinaison unique de deux séries. Si au lieu de ces chiffres, il prenait, par exemple, un chiffre de rang déterminé dans les développements de π correspondant à tous les systèmes de numération possibles, il rentrerait dans le cas ordinaire des effets distincts produits par les combinaisons distinctes de causes. Mais avec la définition de π posée une fois pour toutes, et la base 10 assignée une fois pour toutes au système de numération, où sera l'élément variable des séries de causes qui correspondra à la variation fortuite des effets ?"[39]

Mais, si notre analyse précédente est exacte, c'est bien cette indépendance entre le nombre π lui-même et son expression dans un système de numération particulier que Cournot s'efforce de mettre à jour, et la critique de G. Milhaud porterait donc à faux. La variabilité des séries est la conséquence de l'indépendance, et s'exprime, au niveau physique, par la multiplicité des combinaisons possibles, au niveau rationnel pur, par la pluralité des systèmes de numération utilisables. Cependant, si tel est bien le sens de l'analyse de Cournot, on doit reconnaître qu'il n'apparaît véritablement que dans le dernier texte qui lui est consacré. Non seulement l'incommensurabilité du rapport de la circonférence au diamètre dans tout système de

---

35 *Matérialisme*, IV^{e} section, § 3, p. 179.

36 Un nombre décimal est normal, écrit Borel, "lorsque la fréquence de chacun des chiffres décimaux a pour valeur limite 1/10", *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, (tome IV, fascicule III du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*), Paris, Gauthier-Villars, 1939, p. 111. Il est "complètement normal" si cette propriété est vérifiée pour tout système de numération dont la base est une puissance de 10. Il est "absolument normal" lorsque cette propriété est vérifiée dans toutes les bases de numération.

37 "La définition du hasard de Cournot", *Revue philosophique*, août 1911, repris in *Études sur Cournot*, Vrin, 1927, p. 37-65.

38 *Op. cit.*, p. 62.

39 *Op. cit.*, p. 64.

numération n'est affirmée explicitement que dans le texte de *Matérialisme,* mais l'analyse des symptômes de fortuité invoqués par Cournot se limite à l'expression de π en numération décimale, si bien qu'effectivement tout se passe, dans son argumentation, comme si le raisonnement pouvait s'effectuer sur la seule base 10. De ce point de vue, à s'en tenir aux symptômes de fortuité, la critique de G. Milhaud demeure valide. Mais, on l'a vu, la pensée de Cournot ne suit pas en fait cette démarche, les symptômes de fortuité étant insuffisants pour établir la fortuité des décimales de π. Ils vérifient seulement que, dans la série des décimales de π, les chiffres qui la constituent se distribuent *comme si* leur succession résultait d'un tirage fortuit, et attestent par là de l'artificialité du système de numération utilisé par rapport au nombre qu'il permet d'exprimer.

4. Nombre et mesure.

Ce caractère artificiel du système de numération par rapport à l'être mathématique qu'il permet d'exprimer est producteur de fortuité, dans la mesure où c'est parce que le système de numération est, relativement au rapport de la circonférence au diamètre, un artifice exigé pour son expression, et n'est que cela, que ces deux faits sont rationnellement indépendants, et que leur rencontre est, en conséquence, fortuite.

En d'autres termes, l'artificialité du système de numération signifie qu'il n'intervient dans la détermination du nombre π qu'à titre d'instrument de mesure et d'expression. Or ce caractère instrumental définit ce que Cournot appelle l'ordre logique, par opposition à l'ordre rationnel. L'ordre rationnel est celui grâce auquel l'esprit met à jour les relations de dépendance et de subordination par lesquelles les choses rendent raison les unes des autres. Il s'efforce donc de saisir et de restituer les sinuosités et les articulations du réel. L'ordre logique, en revanche, est celui que l'esprit humain introduit de l'extérieur dans les choses pour en rendre possible l'intelligibilité. Il est alors cet "artifice destiné à faciliter le travail de la pensée"[40], qui tient aux nécessités du langage, et introduit dans la connaissance du réel un double artefact : la linéarité et la discontinuité du discours, séparant par l'analyse ce qui est, en fait, indissociable, ou rassemblant dans une unité synthétique seulement verbale des idées simples essentiellement distinctes. Or, dans le champ mathématique, cette dualité de l'ordre s'exprime notamment au niveau de la mesure, comprise comme un procédé artificiel de l'esprit humain, par lequel la discontinuité numérique est appliquée à une grandeur continue afin d'en fournir une expression quantitative. Ainsi, écrit Cournot, s'il y a dans la nature, des "*quotités*, comme le nombre des étoiles au firmament, celui des arbres d'une forêt et des grains de sable d'une plage : il n'y a point de *quantités* ; car la quantité, c'est le nombre, appliqué artificiellement à la détermination ou à l'expression (exacte ou approchée) d'une grandeur mesurable"[41]. Ce n'est pas, cependant, la discontinuité numérique qui est par elle-même artificielle. L'idée de nombre comme celle de grandeur sont conformes à l'ordre réel, mais l'application de la première à la seconde s'effectue par la médiation d'une unité

40 *Matérialisme,* IV^{e} section, § 2, p. 168.
41 *Traité,* § 13, p. 20.

conventionnelle et d'un système artificiel : "Les nombres sont dans la nature, c'est-à-dire subsistent indépendamment de l'esprit qui les observe ou les conçoit ; car une fleur a quatre, ou cinq, ou six étamines, sans intermédiaire possible, que nous nous soyons ou non avisés de les compter. Les grandeurs continues sont pareillement dans la nature ; mais les quantités n'apparaissent qu'en vertu du choix artificiel de l'unité, et à cause du besoin que nous éprouvons (par suite de la constitution de notre esprit) de recourir aux nombres pour l'expression des grandeurs"[42]. La mesure, ou la quantification, est donc une abstraction artificielle résultant de l'application du nombre à la grandeur[43], application qui oblige à se soumettre aux exigences de l'ordre logique.
Si telle est bien la pensée de Cournot, cela signifie que, le système de numération relevant de l'ordre logique, la série des décimales de π est le produit de la rencontre accidentelle (quoique nécessaire à son expression) de l'ordre logique et de l'ordre rationnel à l'intérieur du domaine de la raison pure. Le système de numération utilisé pour calculer le nombre π est ainsi une convention permettant à la fois de fixer et d'exprimer un rapport rationnellement construit, lequel existe et est déterminé indépendamment de son expression dans tel ou tel système. Et, puisque l'extériorité entre les propriétés essentielles de l'objet et le caractère artificiel du mode d'expression utilisé pour le représenter vaut pour tout système de numération, donc puisque le rapport exprimé par le nombre π est essentiellement incommensurable, son expression numérique ne lui est donc jamais pleinement adéquate. En ce sens, le nombre π pourrait être dit essentiellement *alogon*.

En définitive, l'analyse cournotienne de la fortuité des décimales de π n'appartient pas au champ mathématique. Il s'agit d'un développement philosophique. Et ce n'est sans doute pas seulement pour des raisons chronologiques que ce thème ne figure pas dans les ouvrages proprement mathématiques de Cournot.
A raison de l'extériorité entre le nombre π, pris en lui-même, et son expression artificielle, celle-ci peut être entachée d'une fortuité qui est totalement absente du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre. La fortuité des décimales de π, portant sur une série "dont tous les termes sont rigoureusement déterminés" illustre donc de façon exemplaire, au niveau de la raison pure, la compatibilité affirmée par Cournot entre la réalité objective du hasard et la nécessité des lois qui régissent les faits de l'ordre phénoménal comme de l'ordre intelligible. C'est là l'essentiel aux yeux de Cournot : établir que sa théorie du hasard permet d'affirmer et d'expliquer la compatibilité du fortuit et du déterminé, et ceci aussi bien au niveau phénoménal que dans le domaine purement intellectuel.

---

42 *Essai*, § 186, p. 232.

43 C'est pourquoi, remarque Cournot, contrairement à ce qu'affirmèrent Aristote et Kant, l'idée de quantité n'est pas une catégorie primitive, mais la conjonction de deux "idées vraiment irréductibles et fondamentales, l'idée de nombre et l'idée de grandeur", *Ibid*.

Bibliographie :

Cournot (A.-A.) 1841 : *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal,* édité par Pierre Dugac, Paris, Vrin, 1984.

1843 : *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, édité par Bernard Bru, Paris, Vrin, 1984.

1847 : *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, édité par Nelly Bruyère, Paris, Vrin, 1989.

1851 : *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, édité par Jean-Claude Pariente, Paris, Vrin, 1975.

1861 : *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, édité par Nelly Bruyère, Paris, Vrin, 1982.

1875 : *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Études sur l'emploi des données de la science en philosophie*, édité par Claire Salomon-Bayet, Paris, Vrin, 1979.

Bernoulli (J.) 1713 : *Ars conjectandi*, Basileae ; traduit du latin par L.-G. Vastel, Caen, 1801.

Bienaymé (I.-J.) 1874 : *Bulletin de la société mathématique de France*, t. II, n° 5, séance du 3 juin 1874, pp. 153-154.

1875 : *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXXXI, n° 10, séance du 6 septembre 1875, pp. 417-422.

Borel (É.) 1939 :*Valeur pratique et philosophie des probabilités*, (t. IV, fasc. III du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*), Paris, Gauthier-Villars.

1950 : "Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 230, pp. 591-593 ; in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. II, pp. 1203-1204.

Brette (J.) 1980 : "La chasse aux décimales", *Le petit Archimède*, numéro spécial π, mai 1980, pp. 199-206.

Couturat (L.) 1896 : *De l'infini mathématique*, Paris, Alcan ; réédition Paris, Blanchard, 1973.

Darbon (A.) 1910 : *Le concept du hasard dans la philosophie de Cournot*, Bordeaux, Cadoret.

Guilbaud (G. Th.) 1980 : "Les décimales de π et la statistique", *Le petit Archimède*, numéro spécial π, mai 1980, pp. 207-221.

Lambert (J. H.) 1766 : "Savoir préliminaire pour ceux qui cherchent la quadrature du cercle", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*.

1768 : "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. pp. 265-322 ; in *Mathematische Werke*, herausgegeben von Andreas Speiser, Orell Füssli Verlag, Zürich, vol. II, 1948, pp. 112-159.

Léchalas (G.) 1903 : "Le hasard", *Revue néo-scolastique*, Paris, pp. 148-164.

1906 : "A propos de Cournot. Hasard et déterminisme", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, janvier 1906, pp. 109-114.

Mansion (P.) 1903 : "Sur la portée objective du calcul des probabilités", *Académie royale des sciences*, Bruxelles, pp. 1235-1294.

Mentré (F.) 1906 : "A propos de Cournot : Hasard et déterminisme. Complément à la note de M. G. Léchalas", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, mai 1906, pp. 375-380.

Milhaud (G.) 1911 : "La définition du hasard de Cournot", *Revue philosophique*, août 1911 ; repris in *Études sur Cournot*, Vrin, Paris, 1927, p. 37-65.

Poincaré (H.) 1912 : *Calcul des probabilités*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars.

Renouvier (Ch.) 1854 : *Essais de critique générale*, 1er essai : Traité de Logique générale et formelle, t. II, Paris, Ladrange.

Wagon (S.) 1985 : "Is π normal ?", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, n° 3, New York, Springer-Verlag, pp. 65-67.